2007年度代数学賞

坂内英一氏「代数的組合せ論の研究」

多重可移群，距離正則グラフ，堅いデザイン，アソシエーションスキーム，ヤコビ形式とコードの重さ枚挙多項式，４つの重さをもったスピンモデル，フュージョン代数，重複がない置換表現の指標表，... 坂内氏の業績リストは組合せ論を中心に，多岐な分野にわたる厖大なものです．しかしこれらの研究すべてを貫く中心軸は，坂内氏自ら命名し精力的に研究を推進した「代数的組合せ論 algebraic combinatorics」であるといっていいでしょう．

アソシエーションスキームは，統計学の分野ではすでに６０年にわたって使われている概念です．しかし１９７０年代後半，Delsarte の理論に触発された坂内氏は，アソシエーションスキームの中でもＰスキームとＱスキームと呼ばれるものの研究・分類が特に重要であることに気付きました．この発見から生まれたのが伊藤達郎氏との共著 *Algebraic Combinatorics I, Association Schemes* (Benjamin, 1984) です．Ｐスキームかつ Q スキームであるようなアソシエーションスキームに重点をおいて記述したはじめての単行本（教科書）として，本書は広くこの分野の研究者の支持を受け，それに伴って「代数的組合せ論」という用語も普及定着していったのです．

アソシエーションスキームとは，可移置換群がみたす性質を組合せ論的概念に公理化したもので，有限集合 X とある公理系を満足する X の２項関係 $R_0, R_1, \ldots, R_d$ からなっています．その公理の一つは

(*) $i, j, k \in \{0, \ldots, d\}$ を任意に与え，$(x, y) \in R_k$ とする．このとき $(x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j$ をみたす $z \in X$ の個数は，(x, y) に依存せず i, j, k だけで決まる数 p^k_{ij} である

というものです．アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{i=0,\ldots,d})$ の関係 R_i の隣接行列（$(x, y) \in R_i, \notin R_i$ に応じて (x, y) 成分を 1 または 0 とおいて得られる行列）を A_i とします．$A_0, \ldots, A_d$ が生成する $M_X(\mathbf{C})$ の部分代数（Bose–Mesner 代数）$\mathfrak{A}$ の基底 $A_0, \ldots, A_d$ に関する構造定数が $\{p^k_{ij}\}$ です．各関係 R_i が対称であるとき $\mathfrak{A}$ は可換代数で，原始巾等元 $E_0, \ldots, E_d$ を基底に選ぶことができます．基底の変換行列 P を $A_i = \sum E_j P_{ji}$ で定義し，$Q = nP^{-1}$ とおきます．有限群 G の共役関係が定めるアソシエーションスキームでは P が G の指標表になっているので，一般の場合にも P, Q を $\mathfrak{X}$ の指標表といいます．

Bose–Mesner 代数 $\mathfrak{A}$ は Hadamard 積に関しても閉じています．$n = |X|$ とおいて，基底 $nE_0, \ldots, nE_d$ が定める Hadamard 積に関する構造定数を $\{q^k_{ij}\}$ としましょう．二つの $d + 1$ 次正方行列 $B_1 = (p^j_{1,i})$, $B^*_1 = (q^j_{1i})$ を考えます．B_1 が３重対角行列である $\mathfrak{X}$ を P スキーム，B^*_1 が３重対角行列であるとき Q スキームと呼びます（P スキームや Q スキームでは直交多項式が付随して定まることが本質的であって，坂内氏の研究でも直交多項式は随所に使われ重要な役割を果たします）．Delsarte は，P スキーム，Q スキームにおいては，コード理論，デザイン理論を統一的に扱うことができること

を指摘しました．これが示唆するのは，Ｐスキーム・Ｑスキームを中心とする代数的組合せ論が，幅広い分野の諸問題に対して統一的なアプローチを可能とするのではないかということです．坂内氏は実際このことを積極的に主張し，かつ自ら結果を出すことで，代数的組合せ論が多くの分野に関係し豊富な研究対象をもつことを実証してきたのでした．

１９９０年代以降坂内氏が行なってきた研究のいくつかをあげます．

(a) **Subschemes:** アソシエーションスキームにおける関係をグループ分けして新たな関係を作るとき，いつまたアソシエーションスキームになるかを論じました．ここで得られた条件は "Bannai–Muzichuk condition" と呼ばれています (J. Algebra **144** (1991)).

(b) **Fusion algebras:** 数理物理学の共形場理論に付随するフュージョン代数とアソシエーションスキームとの関係を論じました．類似しながらまったく異なった立場から研究されてきた対象を，はじめて統一的にとらえたものと評価されています (J Algebraic Combin. **2** (1993)).

(c) **Spin models:** 絡み目不変量を与える Jones のスピンモデルとアソシエーションスキームとの関係は F. Jaeger が注目したものです．坂内悦子氏との共著では，絡み目における有向交点の４つの型に対応して４種類の重さをもつスピンモデルを研究しました (Pacific J. Math. **170** (1995)).

(d) **Jacobi forms:** Broué–Enguehard (1972) の結果を４変数多項式環の場合に拡張しました．すなわち小関道夫氏との共著論文で，４変数多項式環への複素鏡映群作用の不変式環から，コード理論を通して Jacobi 形式が構成できることを示しました（Proc. Japan Acad. **72** (1996)). この論文以後，坂内氏と整数論研究者との共同研究が増加します．

(e) **Multiplicity-free representations:** 最初期からの研究テーマですが，近年の仕事としては，未解決問題だった $1_{GL(n,q^2)}^{GL(2n,q)}$ の明示的分解があります（J. Algebra **265** (2003). 田中太初氏との共著）．斜交群の誘導表現の自己準同型環の指標表の決定も重要な仕事でしょう (川中氏，Song 氏との共著, J. Algebra **129** (1990)).

以上の例が示すとおり坂内氏は幅広い研究分野で顕著な業績をあげており，現在も球面充填の代数的組合せ論を中心に精力的な研究を続けています．また代数的組合せ論の世界的リーダーとしての二十年にわたる活躍は．多数の若手研究者に強い刺激と鼓舞とを与え，同分野が今日の隆盛を見る原動力となりました．こうした功績は，代数学賞受賞にまことにふさわしいものです．