2005年度代数学賞

松本耕二氏「ゼータ関数の解析的挙動の研究」

ゼータ関数は素数の分布状態を調べるためにオイラーが導入した特殊関数で，その関数論的な性質が整数論的な問題にしばしば大きな知見をもたらすことは，よく知られています．そこで解析的整数論では，ゼータ関数やL関数，その他様々な方向に一般化されたゼータ関数の解析的な性質を詳しく調べることが，中心的な研究テーマになっています.

松本耕二氏はこれまで一貫して，種々のゼータ関数の解析的な挙動について調べてきました．その研究は，大きく四つに分けることができます.
① ゼータ関数の値分布理論の精密化と一般化
② ゼータ関数やL関数などの二乗平均についての結果
③ ゼータ関数の Universality の理論の一般化
④ 多重ゼータ関数に関する結果
これらはいずれも，ゼータ関数のとる値の分布のもつ不思議な性質を関数論的な手法を使い，確率論的な視点から詳しく調べた研究だといえます．ゼータ関数にまつわる問題で一番重要なのは零点の分布で，これが素数分布に重要な影響を持ち，ひいてはリーマン予想を生んだことは有名ですが，これ以外にもゼータ関数には非常に面白い性質がたくさん知られています.

ゼータ関数の零点問題は「0という値のゼータ関数による逆像」を考えているわけですが，では値域を拡げて「ある領域のゼータ関数による逆像」を考えるとそれはどう分布するのか？これが ①の値分布理論の問題意識で，Bohr が始めた理論です．また，③の Universality の理論とは,「コンパクト集合内で正則な関数はほとんどすべて，ゼータ関数の平行移動によって一様近似できる」ことを主張するもので，1975年頃に Voronin によって指摘された不思議な性質です.

松本氏はこうした古典的な理論を見直し，①においては Bohr の理論の精密化・一般化に成功しています．その結果，Bohr がその存在だけを示していた密度に関して，特別な場合に「密度の漸近的挙動まで求めることができる」というような興味深い進展がありました．②は，σ をあらかじめ固定した実数として $\int_0^T |\zeta(\sigma+it)|^2 dt$ の値を詳しく計算する問題です．1950年頃 Atkinson は，ゼータ関数の $\sigma = 1/2$ (critical line と言う) 上での挙動を調べる目的で，現在 Atkinson の方法と呼ばれている新しい方法を導入し，注目すべき結果を得ました．松本氏は Atkinson の方法を $\sigma = 1/2$ 以外の値に対して拡張し，一般の σ に対して二乗平均の式を得ています．このときの研究から，松本氏は「ゼータ関数では $\sigma = 3/4$ の線を境にして，何か質的な変化が起きているらしい」とい

う興味深い指摘をしています．ゼータ関数が $\sigma = 1/2$ の線で折り返しの構造を持つことは関数等式が証明されたときから指摘されていたことですが，なぜ 3/4 にも質的な変化があるのか，まだその真の理由は分かっていません．近年の整数論の広がりによって，ゼータ関数の種類は多種多様に増えています．そうした新しいゼータ関数についても古典的な Bohr の理論や Atkinson の方法，Universality の理論があてはまるかどうかについて，松本氏は①②③の中でそれを精力的に調べてきました．こうした仕事は，値分布理論と Universality 理論の関係など，理論間の関係を明らかにしていく上でも大変興味深いものです．

④の多重ゼータ関数は近年活発に研究されているテーマですが，松本氏は多重ゼータ関数を「古典的な Barnes のゼータ関数のある一般化」という視点から捉えており，最近は Mellin–Barnes 積分などを用いて解析的な研究を進めています．

以上の結果を見てわかるとおり，松本氏は古典的な大理論を精密化することから始めて，それを広い範囲のゼータ関数に一般化し，それによって理論間の関係を探っていく方法をとっています．値分布論，Universality の理論，いずれもゼータ関数の確率論的な現象を巧妙に捉えた不思議な結果ですが，こうしたものに新たな光を当て，それを精密化・一般化したことは非常に重要で，松本氏の一連の研究はまさに代数学賞にふさわしい画期的なものと言えます．