

第64回代数学シンポジウム報告集

於 東北大学

2019年9月2日～9月5日

2020年2月1日発行

2019年度 第64回代数学シンポジウム 報告集

本書は令和元年9月に東北大学で開催された第64回代数学シンポジウムの報告集です。

記

日時：2019年9月2日（月）～9月5日（木）
会場：東北大学大学院情報科学研究科棟2階 大講義室（206号室）
会場責任者：山崎 隆雄
プログラム責任者：[群論・表現論] 島倉 裕樹, 阿部 紀行
[数論] 市野 篤史, 安福 悠
[代数幾何] 徳永 浩雄, 戸田 幸伸
[環論] 西田 康二, 中岡 宏行
シンポジウム責任者：金銅 誠之（評議員）

プログラム

9月2日（月）

9:45--10:45 大矢 浩徳（芝浦工業大学 システム理工学部）
「非対称型量子ループ代数の既約表現の q -指標について」
11:00--12:00 川筋 和哉（京都大学 数理解析研究所）
「アフィン頂点代数の relaxed 最高ウェイト表現」
13:30--14:30 Scott Carnahan（筑波大学 数理物質系）
「Monstrous Moonshine over the integers」
14:45--15:45 新井 啓介（東京電機大学 未来科学部）
「志村曲線およびその関数体類似の有理点について」
16:00--17:00 並川 健一（九州大学 数理学研究院）
「 p 進浅井 L 関数とその周辺」

9月3日（火）

(*)9:45--10:45 有木 進（大阪大学 情報科学研究科）
「対称群の群代数とヘッケ代数の常識 (grading, cellularity, derived equivalence)」
(*)11:00--12:00 坂内 英一（九州大学名誉教授）
「有限群、デザイン、量子情報---特に unitary t -groups と unitary t -designs について」
(*)13:30--14:30 寺井 伸浩（大分大学 理工学部）
「指数型不定方程式 $a^x+b^y=c^z$ と $x^2+b^m=c^n$ の最近の進展について」
(*)14:45--15:45 今井 直毅（東京大学 数理科学研究科）
「局所 Langlands 対応の幾何化と関手性」
16:00--17:00 杉山 真吾（日本大学 理工学部）
「 $GL(2)$ の跡公式の一般化と L 関数の特殊値への応用について」

9月4日（水）

(*)9:45--10:45 Mikhail Kapranov（東京大学 IPMU）
「Factorization algebras in algebraic geometry」
(*)11:00--12:00 島田 伊知朗（広島大学 理学研究科）
「Computation of automorphism groups of K3 and Enriques surfaces」
(*)13:30--14:30 吉田 健一（日本大学 文理学部）
「Ulrich module と正標数の不変量」
(*)14:45--15:45 山浦 浩太（山梨大学 総合研究部）

「次数付き環の岩永-Gorenstein 性と三角圏」
16:00--17:00 金光 秋博 (京都大学 理学研究科)
「向井対の分類とその応用について」

9月5日 (木)

9:45--10:45 藤田 健人 (大阪大学 理学研究科)
「Toward criteria for K-stability of log Fano pairs」

11:00--12:00 谷本 祥 (熊本大学 理学部)
「Movable bend and break for sections of del Pezzo fibrations」

13:30--14:30 板垣 智洋 (東京理科大学 理学部)
「BV algebra structures on Hochschild cohomology of self-injective Nakayama algebras」

14:45--15:45 松井 紘樹 (東京大学 数理科学研究科)
「三角圏のスペクトラムとその可換環論への応用」

16:00--17:00 水野 有哉 (大阪府立大学 高等教育推進機構)
「Tilting theory of preprojective algebras」

(*)印付きの講演は、専門分野以外の聴衆も対象とした、サーベイなどを含む講演です。

目次

大矢 浩徳	Calculation of the q -characters of simple modules over quantum loop algebras of non-symmetric type 6
川節 和哉	アフィン頂点代数の relaxed 最高ウェイト表現 18
Scott Carnahan	Monstrous Moonshine over the integers 30
新井 啓介	志村曲線およびその関数体類似の有理点について 38
並川 健一	p 進浅井 L 関数とその周辺 51
有木 進	対称群の群代数とヘッケ代数の常識 65
坂内 英一	有限群, デザイン, 量子情報---特にunitary t -groupsと unitary t -designsについて 75
寺井 伸浩	指数型不定方程式 $a^x+b^y=c^z$ と $x^2+b^m=c^n$ の最近の進展について 90
今井 直毅	局所 Langlands 対応の幾何化と関手性 106
杉山 真吾	$GL(2)$ の跡公式の一般化と L 関数の特殊値への応用について 113
Mikhail Kapranov	Factorization algebras in algebraic geometry 125
島田 伊知朗	Computation of automorphism groups of K3 and Enriques surfaces 135
吉田 健一	Ulrich module と正標数の不変量 155
山浦 浩太	自明拡大環の岩永-Gorenstein性と三角圏 168
金光 秋博	向井対の分類とその応用について 184
藤田 健人	Toward criteria for K -stability of log Fano pairs 196
谷本 祥	Movable bend and break for sections of del Pezzo fibrations 209
板垣 智洋	BV algebra structures on Hochschild cohomology of self-injective Nakayama algebras 221
松井 紘樹	三角圏のスペクトラムとその可換環論への応用 227
水野 有哉	Tilting theory of preprojective algebras 236

Calculation of the q -characters of simple modules over quantum loop algebras of non-symmetric type

大矢 浩徳 (OYA Hironori)[†]

概要

本稿では、非対称型量子ループ代数の有限次元既約表現の q -指標を求める方法の確立に向けての試みについて解説を行う^{*1}。本研究は David Hernandez 氏との共同研究である。

1 導入

1.1 問題設定

複素単純 Lie 環 \mathfrak{g} に対し、対応するループ Lie 環 $\mathcal{L}\mathfrak{g}$ は $\mathcal{L}\mathfrak{g} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ に

$$[X \otimes t^m + aK, Y \otimes t^n + bK] = [X, Y] \otimes t^{m+n} \quad X, Y \in \mathfrak{g}, m, n \in \mathbb{Z}$$

で定まる Lie 括弧積を考えた Lie 環である。

量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ とは、ループ Lie 環 $\mathcal{L}\mathfrak{g}$ の普遍展開環 $\mathcal{U}(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ にパラメータ q を入れて変形 (q -変形) した代数であり、Drinfeld, Jimbo によって '80 年代の中頃に導入された。 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の有限次元表現論は量子 Yang-Baxter 方程式のスペクトルパラメータ付きの解を与える代数的枠組みであることに動機付けられて組織的な研究が '90 年代前半から ([CP91]) なされているが、今もなお難しい点が多く残されている。例えば、以下の基本的な問題も一般には未解決である：

(Q) $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の既約表現の次元、および“指標” (q -指標と呼ばれる) を一般的に求める方法はあるか？

この問 (Q) についてその背景 (現状) を説明しよう。以下では、 \mathfrak{g} の Dynkin 型が X_n のとき、 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ を $X_n^{(1)}$ 型量子ループ代数といい、さらに X が ADE のいずれかであるとき、 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ を対称型、それ以外のとき非対称型と呼ぶ。

既約表現の q -指標の計算について、 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ が対称型の場合に、Nakajima は既約表現の q -指標を求めるアルゴリズムを与えた [N04]。つまり、この場合には (Q) には一つの解答が与えられている。これは q -指標の t -変形 ((q, t) -指標) を考え、Kazhdan-Lusztig アルゴリズムの結果として既約表現の q -指標を得るというものであった。Nakajima の t -変形の構成は次数付き篩多様体を用いた幾何的考察に基づいており、この構成が Kazhdan-Lusztig アルゴリズムの結果が正当な既約表現の q -指標の t -変形である ($= t = 1$ で正しく q -指標に特殊化される) ことを保証していた。

非対称型の場合への拡張の試みとして、Hernandez は Frenkel-Reshetikhin のオリジナルの q -指標の構成を基に代数的に標準表現の q -指標の t -変形を構成した [H04]。これを用いて、形式的に Kazhdan-Lusztig アルゴリズムを働かせることで、やはり“既約表現の (q, t) -指標”が得られる。しかし、この代数的な構成からは $t = 1$ でこれが実際の q -指標に特殊化されるという事実は保証されない。つまりこの場合は以下は一般には未だ予想である。

* 〒337-8570 埼玉県さいたま市見沼区深作 307 芝浦工業大学 システム理工学部 数理科学科

† E-mail : hoya@shibaura-it.ac.jp Webpage : <http://www.sic.shibaura-it.ac.jp/hoya>

^{*1} 日本数学会 2019 年度年会においてこのテーマに関連する内容で講演を行ったため、本稿はそのアブストラクト [Oya] に加筆修正を加えた内容となっております。

定理 1.3 (Hernandez-O. (定理 4.2)). $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -代数としての同型

$$K_t(\mathcal{C}_{A_{2n-1}^{(1)}}) \simeq K_t(\mathcal{C}_{B_n^{(1)}}), \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{既約表現の} \\ (q, t)\text{-指標} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{既約表現の} \\ (q, t)\text{-指標} \end{array} \right\}.$$

が存在する. さらに, この同型写像を $t = 1$ に特殊化すると, *Kashiwara-Kim-Oh* による定理 1.2 の同型写像に一致する.

これを用いて以下を得る:

系 1.4 (系 4.8). $B_n^{(1)}$ 型において予想 1.1 は正しい.

また定理 1.3 の他の系として, $B_n^{(1)}$ 型の場合には知られていなかった様々な正值性に関する結果が得られる (系 4.4, 4.5).

$(X_N, Y_n) = (A_{2n-1}, B_n)$ 以外の場合についても同様の量子 Grothendieck 環の同型の存在は期待される*2. 一方, 現在のところ通常の Grothendieck 環の同型である定理 1.2 型の定理が証明されているのは $(X_N, Y_n) = (A_{2n-1}, B_n)$ の場合のみであり, 予想 1.1 の証明のためにはこれに対応する主張が必須であるため, 非対称型で予想 1.1 が完全に解決しているのが $B_n^{(1)}$ 型のみとなっている (系 4.8 の直前の解説参照).

2 量子ループ代数の有限次元表現論

量子ループ代数の有限次元表現論について簡単に復習する. 以下は一般的な記号である:

- \mathfrak{g} を X_n 型複素単純 Lie 環 ($X_n = A_n, B_n, C_n, \dots, G_2$) とし, $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ (resp. $\{h_i \mid i \in I\}$) をその単純ルート (resp. 余ルート) の集合とする.
- $C = (c_{ij})_{i,j \in I} = (\langle h_i, \alpha_j \rangle)_{i,j \in I}$ を \mathfrak{g} の Cartan 行列とし, $(r_i)_{i \in I} \in \mathbb{Z}_{>0}^I$ を,

$$(i) \ r_i c_{ij} = r_j c_{ji}, \quad \forall i, j \in I \qquad (ii) \ \min\{r_i \mid i \in I\} = 1$$

を満たす唯一の正の整数の組とする. ($X = ADE$ の場合, 全ての $i \in I$ に対して $r_i = 1$.)

- x を 1 の冪根でない 0 以外の複素数, あるいは不定元とする. このとき, 各 $i \in I, n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$x_i := x^{r_i}, \qquad [n]_x := \frac{x^n - x^{-n}}{x - x^{-1}},$$

とする.

以下では, q を 1 の冪根でない 0 以外の複素数とする.

定義 2.1 ([D88, B94]). $X_n^{(1)}$ 型量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g}) (= \mathcal{U}_q(X_n^{(1)}))$ とは,

$$k_i^{\pm 1} \ (i \in I), \ x_{i,r}^{\pm} \ ((i, r) \in I \times \mathbb{Z}), \ h_{i,r} \ ((i, r) \in I \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))$$

という生成元と, 以下の定義関係式によって定まる \mathbb{C} -代数である (特に指定のない限り添え字は動きうる範囲全てを動くとする):

- (I) $k_i k_i^{-1} = 1 = k_i^{-1} k_i, \ k_i k_j = k_j k_i,$
- (II) $k_i x_{j,r}^{\pm} = q_i^{\pm c_{ij}} x_{j,r}^{\pm} k_i,$
- (III) $[k_i, h_{j,r}] = 0,$
- (IV) $[x_{i,r}^+, x_{j,s}^-] = \delta_{ij} \frac{\phi_{i,r+s}^+ - \phi_{i,r+s}^-}{q_i - q_i^{-1}},$
- (V) $[h_{i,r}, x_{j,s}^{\pm}] = \pm \frac{[r c_{ij}] q_i}{r} x_{j,r+s}^{\pm},$
- (VI) $[h_{i,r}, h_{j,s}] = 0,$
- (VII) $x_{i,r+1}^{\pm} x_{j,s}^{\pm} - q_i^{\pm c_{ij}} x_{i,r}^{\pm} x_{j,s+1}^{\pm} = q_i^{\pm c_{ij}} x_{j,s}^{\pm} x_{i,r+1}^{\pm} - x_{j,s+1}^{\pm} x_{i,r}^{\pm},$

*2 本稿では説明を行わないが, 筆者は団代数構造の類似性から同様の同型の存在を期待している.

$$(VIII) \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{1-c_{ij}}} \sum_{k=0}^{1-c_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-c_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} x_{i,r_{\sigma(1)}}^{\pm} \cdots x_{i,r_{\sigma(k)}}^{\pm} x_{j,s}^{\pm} x_{i,r_{\sigma(k+1)}}^{\pm} \cdots x_{i,r_{\sigma(1-c_{ij})}}^{\pm} = 0.$$

ただし, $i, j \in I, i \neq j, r_1, \dots, r_{1-c_{ij}}, s \in \mathbb{Z}$.

ここで,

$$\phi_i^{\pm}(z) := \sum_{r=0}^{\infty} \phi_{i,\pm r}^{\pm} z^{\pm r} = k_i^{\pm 1} \exp \left(\pm (q_i - q_i^{-1}) \sum_{r>0} h_{i,\pm r} z^{\pm r} \right).$$

さらに, $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ は Hopf 代数の構造を持つことが知られている (例えば [CP] 参照)^{*3}.

$\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$ を量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の有限次元表現のなす圏とする^{*4}. これはモノイダルアーベル圏である. いま, $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の生成元の一部 $\{k_i, h_{i,r} \mid i \in I, r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ は互いに可換なので, 任意の $\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$ の対象 V はこれらの作用に関する同時広義固有空間分解 $V = \bigoplus_m V_m$ を持つ. ここで [CP, FR99] において, この同時固有値 m は \mathbb{Z} -係数無限変数 Laurent 多項式環

$$\mathcal{Y}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}} := \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1} \mid i \in I, a \in \mathbb{C}^\times]$$

内の Laurent 単項式として指定されることが示された. 具体的な対応は, 各 $\phi_{i,\pm r}^{\pm}$ の V_m における広義固有値を $\gamma_{i,\pm r}^{\pm}$ と書き, m を

$$m = \prod_{i \in I, a \in \mathbb{C}^\times} Y_{i,a}^{u_{i,a}},$$

と表示したとき, 各 $i \in I$ に対して,

$$\sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{i,\pm r}^{\pm} z^{\pm r} = \prod_{a \in \mathbb{C}^\times} \left(q_i \frac{1 - zq_i^{-1}a}{1 - zq_i a} \right)^{u_{i,a}}$$

として与えられる. ここで, これらはそれぞれ $\mathbb{C}[z], \mathbb{C}[z^{-1}]$ での等式である. なお, $\phi_{i,0}^{\pm} = k_i^{\pm 1}$ であったことに注意すると, $Y_{i,a}$ は有限次元単純 Lie 環の表現論における $i \in I$ に対応する基本ウェイト e^{ϖ_i} の類似であることがわかる. 同時広義固有空間 V_m を V の l -ウェイト m の l -ウェイト空間という. いま,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}} := \left\{ \prod_{i \in I, a \in \mathbb{C}^\times} Y_{i,a}^{m_{i,a}} \mid m_{i,a} \geq 0 \right\} \subset \mathcal{Y}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}}$$

とし, この元を支配的単項式とよぶ. これは, 有限次元単純 Lie 環の表現論における支配的整ウェイトの類似であり, 実際に最高ウェイト理論の類似で以下が成立する:

定理 2.2 ([CP95, CP]). $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}}$ と $\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$ の単純対象の同型類の間に 1 対 1 対応が存在する.

この定理で $m \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}}$ に対応する $\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$ の単純対象を $L(m)$ と書く. ここでは,

$$\dim L(m)_m = 1 \quad x_{i,r}^{\pm} \cdot L(m)_m = 0, \forall i \in I, r \in \mathbb{Z}$$

となるように対応させている. 特に $L(Y_{i,a})$ の形の表現は基本表現と呼ばれる. さらに q -指標準同型と呼ばれる以下の射 χ_q が定義される:

定理 2.3 ([FR99]). モノイダルアーベル圏 $\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$ の Grothendieck 環を $K(\mathcal{C}_{X_n^{(1)}})$ とする. このとき, 対応

$$[V] \mapsto \sum_m \dim(V_m) m$$

は単射環準同型 $\chi_q: K(\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}) \rightarrow \mathcal{Y}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}}$ を与える.

^{*3} これは Chevalley 型の別の $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の表示を用いて定義される構造で, 定義 2.1 に示した生成元で余積を記述するのは難しい.

^{*4} 厳密には $\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$ は量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の 1 型有限次元表現のなす圏とする. 有限次元表現が 1 型であるとは $\{k_i \mid i \in I\}$ の固有値が全て $q^m, m \in \mathbb{Z}$ の形であることを言う. 量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の有限次元表現においては 1 型の表現のみを考慮しても一般性を失わない.

注意 2.4. 特に $K(\mathcal{C}_{X_n^{(1)}})$ は可換であることに注意する. 一般に $\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$ の対象 V, W に対し, $V \otimes W \simeq W \otimes V$ は成立しない.

各 $i \in I, a \in \mathbb{C}^\times$ に対し,

$$A_{i,a} := Y_{i,aq^{-1}} Y_{i,aq} \left(\prod_{j: c_{ji}=-1} Y_{j,a}^{-1} \right) \left(\prod_{j: c_{ji}=-2} Y_{j,aq^{-1}}^{-1} Y_{j,aq}^{-1} \right) \left(\prod_{j: c_{ji}=-3} Y_{j,aq^{-2}}^{-1} Y_{j,a}^{-1} Y_{j,aq^2}^{-1} \right).$$

とする. ここで, $\mathcal{Y}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}}$ 内の Laurent 単項式に対し, 半順序を

$$m \leq m' \Leftrightarrow \text{ある非負整数の組 } (v_{i,a})_{i \in I, a \in \mathbb{C}^\times} \text{ に対し, } m(m')^{-1} = \prod_{i \in I, a \in \mathbb{C}^\times} A_{i,a}^{-v_{i,a}}$$

と定義する. この半順序によって, m が $\chi_q(L(m))$ の最高単項式であることが以下のように述べられる:

定理 2.5 ([FM01]). 支配的単項式 $m \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}}$ に対し, $\mathcal{Y}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}}$ の元 $\chi_q(L(m)) - m$ に現れる単項式は全て m よりも半順序 \leq に関して真に小さい.

今 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_n^{(1)}}$ を,

$$\chi_q(V) \in \mathbb{Z}[Y_{i,q^r}^{\pm 1} \mid i \in I, r \in \mathbb{Z}] =: \mathcal{Y}_{X_n^{(1)}}$$

を満たす対象 V のなす $\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$ の充満部分圏とおく. このとき, $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_n^{(1)}}$ は $\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$ の部分モノイダルアーベル圏である. 圏 $\mathcal{C}_{X_n^{(1)}}$ の単純対象の構造およびモノイダル圏としての非自明な構造の研究は, $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_n^{(1)}}$ に帰着される [HL10, §3.7]. 以降は常に圏 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_n^{(1)}}$ 内の対象を考えるので, 以下の記法を用いる:

$$Y_{i,r} := Y_{i,q^r} \quad A_{i,r} := A_{i,q^r} \quad \mathcal{B}_{X_n^{(1)}} := \mathcal{B}_{\mathbb{C}^\times, X_n^{(1)}} \cap \mathcal{Y}_{X_n^{(1)}}.$$

例 2.6. $\mathcal{Lg} = \mathfrak{sl}_2[t^{\pm 1}]$ ($A_1^{(1)}$ 型) のとき, $I = \{1\}$ であり,

$$\chi_q(L(Y_{1,r})) = Y_{1,r} + Y_{1,r+2}^{-1} = Y_{1,r}(1 + A_{1,r+1}^{-1}).$$

$\mathcal{Lg} = \mathfrak{so}_5[t^{\pm 1}]$ ($B_2^{(1)}$ 型) のとき, $I = \{1, 2\}$ であり,

$$\begin{aligned} \chi_q(L(Y_{1,r})) &= Y_{1,r} + Y_{2,r+1} Y_{2,r+3} Y_{1,r+4}^{-1} + Y_{2,r+1} Y_{2,r+5}^{-1} + Y_{1,r+2} Y_{2,r+3}^{-1} Y_{2,r+5}^{-1} + Y_{1,r+6}^{-1} \\ &= Y_{1,r}(1 + A_{1,r+2}^{-1} + A_{1,r+2}^{-1} A_{2,r+4}^{-1} + A_{1,r+2}^{-1} A_{2,r+2}^{-1} A_{2,r+4}^{-1} + A_{1,r+2}^{-1} A_{1,r+4}^{-1} A_{2,r+2}^{-1} A_{2,r+4}^{-1}). \end{aligned}$$

各 $m = \prod_{i \in I, r \in \mathbb{Z}} Y_{i,r}^{u_{i,r}} \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}$ に対し, 標準表現 $M(m)$ を,

$$M(m) := \overrightarrow{\bigotimes}_{r \in \mathbb{Z}} \left(\bigotimes_{i \in I} L(Y_{i,r})^{\otimes u_{i,r}} \right)$$

と定義する.

注意 2.7. $\overrightarrow{\bigotimes}_{r \in \mathbb{Z}}$ は左から右へ数の増える順にテンソル積を取るという意味である. 実は $\bigotimes_{i \in I} L(Y_{i,r})^{\otimes u_{i,r}}$ の部分の同型類はテンソル積の順序によらない.

命題 2.8. $\{[L(m)] \mid m \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}\}$ と $\{[M(m)] \mid m \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}\}$ はともに $K(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_n^{(1)}})$ の \mathbb{Z} -基底である.

いま, $\chi_q(M(m))$ は $L(Y_{i,0}), i \in I$ の q -指標がわかれば容易に計算可能なものである. これより, $\{[L(m)] \mid m \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}\}$ と $\{[M(m)] \mid m \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}\}$ の基底の変換行列を求めることができれば既約表現の q -指標が求められることになる.

3 量子 Grothendieck 環

ここでは, Hernandez[H04] による代数的な $K(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_n^{(1)}})$ の t -変形の構成を復習する. Hernandez の構成は ADE 型の場合には, Varagnolo-Vasserot[VV03], Nakajima[N04] によって構成されたものと同等のものになる. まず, q -指標の入る空間 $\mathcal{Y}_{X_n^{(1)}}$ を以下のデータを用いて非可換化する:

$C = (c_{ij})_{i,j \in I}$ を X_n 型の Cartan 行列として, $C(z) = (C(z)_{ij})_{i,j \in I}$, $\tilde{C}(z) = (\tilde{C}(z)_{ij})_{i,j \in I}$ (z : 不定元) を

$$C(z)_{ij} = \begin{cases} z^{r_i} + z^{-r_i} & i = j \text{ のとき,} \\ [c_{ij}]_z & i \neq j \text{ のとき,} \end{cases} \quad \tilde{C}(z) = C(z)^{-1}$$

で定義する. さらに, 各 $\tilde{C}(z)_{ij}$ を形式的 Laurent 級数環 $\mathbb{Z}((z^{-1}))$ の元とみなし,

$$\tilde{C}(z)_{ji} = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_{ji}(r) z^r \in \mathbb{Z}((z^{-1}))$$

と書く. このとき $X_n^{(1)}$ 型量子トーラス $\mathcal{Y}_{t, X_n^{(1)}}$ とは以下で定義される $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -代数である:

生成元: $\tilde{Y}_{i,r}^{\pm 1}$ ($i \in I, r \in \mathbb{Z}$)

関係式: (I) $\tilde{Y}_{i,r} \tilde{Y}_{i,r}^{-1} = 1 = \tilde{Y}_{i,r}^{-1} \tilde{Y}_{i,r}$,

(II) 各 $i, j \in I, r, s \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\tilde{Y}_{i,r} \tilde{Y}_{j,s} = t^{\gamma(i,r;j,s)} \tilde{Y}_{j,s} \tilde{Y}_{i,r}.$$

ここで, $\gamma: (I \times \mathbb{Z})^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ は

$$\gamma(i, r; j, s) := \tilde{c}_{ji}(-r_j - r + s) + \tilde{c}_{ji}(r_j + r - s) - \tilde{c}_{ji}(r_j - r + s) - \tilde{c}_{ji}(-r_j + r - s)$$

で与えられる.

例 3.1. B_2 型 Cartan 行列 $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ を考えると,

$$C(z) = \begin{pmatrix} z^2 + z^{-2} & -1 \\ -z - z^{-1} & z + z^{-1} \end{pmatrix} \quad \tilde{C}(z) = \frac{1}{z^3 + z^{-3}} \begin{pmatrix} z + z^{-1} & 1 \\ z + z^{-1} & z^2 + z^{-2} \end{pmatrix}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \tilde{C}(z)_{11} &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k (z^{-6k-2} + z^{-6k-4}), & \tilde{C}(z)_{12} &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k z^{-6k-3}, \\ \tilde{C}(z)_{21} &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k (z^{-6k-2} + z^{-6k-4}), & \tilde{C}(z)_{22} &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k (z^{-6k-1} + z^{-6k-5}), \end{aligned}$$

である. よって, $\tilde{c}_{ji}(r)$ は以下のようにまとめられる (空欄は 0 の意味である):

$\tilde{c}_{j1}(r)$	-2	-4	-6	-8	r	-10	-12	-14	-16	...	$\tilde{c}_{j2}(r)$	-1	-3	-5	-7	r	-9	-11	-13	-15	...	
$j=1$	1	1		-1	-1		1	1		...	$j=1$	1				-1				1		...
$j=2$	1	1		-1	-1		1	1		...	$j=2$	1		1	-1		-1	1				...

ここで, この表が r が -6 進む毎に値が -1 倍されるような周期性を持っていることは我々の主結果の証明においても重要である. 一般の B_n 型においては, r に $-2h^\vee$ (h^\vee は双対 Coxeter 数 $2n-1$) を加えるごとに値が -1 倍されるような周期性を持っている*5. 一般の B_n 型における同様の表については [HO19, Example 4.3, Appendix A] を参照のこと.

いま, \mathbb{Z} -代数準同型

$$\text{ev}_{t=1}: \mathcal{Y}_{t, X_n^{(1)}} \rightarrow \mathcal{Y}_{X_n^{(1)}}, \quad \begin{cases} t^{1/2} \mapsto 1, \\ \tilde{Y}_{i,r} \mapsto Y_{i,r}, i \in I, r \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

が存在する. この射は $t=1$ への特殊化と呼ばれる. さらに, 以下のバー対合と呼ばれる \mathbb{Z} -反代数対合

$$\bar{\cdot}: \mathcal{Y}_{t, X_n^{(1)}} \rightarrow \mathcal{Y}_{t, X_n^{(1)}}, \quad \begin{cases} t^{1/2} \mapsto t^{-1/2}, \\ \tilde{Y}_{i,r} \mapsto t^{-1} \tilde{Y}_{i,r}, i \in I, r \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

が存在する.

*5 他の方でも同様の周期性が見られるのだが, ここに双対 Coxeter 数が現れることの概念的な説明を筆者は持っていない.

各 $\mathcal{Y}_{X_n^{(1)}}$ の Laurent 単項式 m に対し, ある $\mathcal{Y}_{t, X_n^{(1)}}$ の $t^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ 係数 Laurent 単項式 \underline{m} であって, $\overline{\underline{m}} = m$ を満たすものがただ一つ存在する. (e.g. $Y_{i,r} = t^{-1/2}\tilde{Y}_{i,r}$.) この記号で, $\tilde{A}_{i,r} := \underline{A_{i,r}}$ と定義する. また, $\mathcal{Y}_{t, X_n^{(1)}}$ の ($t^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ 係数) 支配的単項式を $\mathcal{Y}_{X_n^{(1)}}$ の場合と同様に定義する.

次に $\mathcal{Y}_{t, X_n^{(1)}}$ の中で量子 Grothendieck 環を定義する. 各 $i \in I$ に対し,

$$K_{i,t} := \langle \tilde{Y}_{i,r}(1 + t\tilde{A}_{i,r+1}^{-1}), \tilde{Y}_{j,r}^{\pm 1} \mid j \in I \setminus \{i\}, r \in \mathbb{Z} \rangle_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]}\text{-代数} \subset \mathcal{Y}_{t, X_n^{(1)}}$$

とする. このとき, $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_n^{(1)}}$ の量子 Grothendieck 環 $K_t(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_n^{(1)}})$ を

$$K_t(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_n^{(1)}}) := \bigcap_{i \in I} K_{i,t}$$

と定義する. ここで各 $i \in I$ に対し, $\overline{K_{i,t}} = K_{i,t}$ となり, $\overline{K_t(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_n^{(1)}})} = K_t(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_n^{(1)}})$ であることにも注意する. 以下が成立する.

定理 3.2 ([N04, H04]). (1) 各 $i \in I, r \in \mathbb{Z}$ に対し, $Y_{i,r}$ のみを支配的単項式を持つ $K_t(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_n^{(1)}})$ の元がただ一つ存在する. この元を $L_t(Y_{i,r})$ と書く.

(2) $\text{ev}_{t=1}(K_t(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_n^{(1)}})) = K(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_n^{(1)}})$.

注意 3.3. 本稿では扱わないが, この $K_{i,t}$ は i に付随する遮蔽演算子の t -類似の核である. これは, 通常の q -指標のなす代数 (\simeq Grothendieck 環) が i に付随する遮蔽演算子の核の $i \in I$ を渡る共通部分として記述されることを t -類似の設定で考えたものとなっている. 詳しくは [H04] を参照のこと.

いま $L_t(Y_{i,r})$ は,

$$\text{ev}_{t=1}(L_t(Y_{i,r})) = \chi_q(L(Y_{i,r}))$$

を満たし, 基本表現の (q, t) -指標と呼ばれる. また $L_t(Y_{i,r})$ の特徴づけより, $\overline{L_t(Y_{i,r})} = L_t(Y_{i,r})$ である.

各 $m = \prod_{i \in I} Y_{i,r}^{u_{i,r}} \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}$ に対し,

$$M_t(m) := t^{N_m} \prod_{r \in \mathbb{Z}} \left(\prod_{i \in I} L_t(Y_{i,r})^{u_{i,r}} \right)$$

とする. ただし, $N_m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ は $M_t(m)$ における \underline{m} の係数が 1 となるように定義する. (実は $\prod_{i \in I} L_t(Y_{i,r})^{u_{i,r}}$ は可換な元の積である.) このとき, 以下が成立する.

- $\{M_t(m) \mid m \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}\}$ は $K_t(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_n^{(1)}})$ の $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -基底.
- 各 $m \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}$ に対し, $\text{ev}_{t=1}(M_t(m)) = \chi_q(M(m))$.

これらの性質より, $M_t(m)$ は標準表現 $M(m)$ の (q, t) -指標と呼ばれる. 各 $M_t(m)$ は $M_t(Y_{i,0}) = L_t(Y_{i,0}), i \in I$ が一度計算されれば容易に計算可能な元であることに注意する. ここから新たな基底が得られる:

定理 3.4 ([N04, H04]). 以下の性質を満たす $K_t(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_n^{(1)}})$ の $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -基底 $\{L_t(m) \mid m \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}\}$ が唯一つ存在する:

$$(S1) \quad \overline{L_t(m)} = L_t(m),$$

$$(S2) \quad M_t(m) = L_t(m) + \sum_{m' < m} P_{m,m'}(t)L_t(m'). \quad \text{ここで, } P_{m,m'}(t) \in t^{-1}\mathbb{Z}[t^{-1}].$$

この各元 $L_t(m)$ は既約表現 $L(m)$ の (q, t) -指標と呼ばれる. それは対称型の場合の Nakajima による以下の定理による:

定理 3.5 ([N04]). 量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(X_n^{(1)})$ が対称型 ($X = \text{ADE}$) のとき,

- (1) 各 $m \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}$ に対し, $\text{ev}_{t=1}(L_t(m)) = \chi_q(L(m))$.
- (2) 各 $m, m' \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}$ に対し, $P_{m,m'}(t) \in t^{-1}\mathbb{Z}_{\geq 0}[t^{-1}]$.

この定理の証明は Nakajima による次数付き箭多様体を用いた幾何的な $U_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の標準表現の構成に基づいており、対称型に限定されている。代数的な構成からはこの点は保証されず、以下は一般には予想である：

予想 3.6. 量子ループ代数 $U_q(X_n^{(1)})$ が非対称型 ($X = \text{BCFG}$) のとき、

- (1) 各 $m \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}$ に対し, $\text{ev}_{t=1}(L_t(m)) = \chi_q(L(m))$.
- (2) 各 $m, m' \in \mathcal{B}_{X_n^{(1)}}$ に対し, $P_{m,m'}(t) \in t^{-1}\mathbb{Z}_{\geq 0}[t^{-1}]$.

定理 3.5, 予想 3.6 が重要である理由は、各 $L_t(m)$ が標準表現の (q, t) -指標から、量子ループ代数 $U_q(X_n^{(1)})$ の“表現論”を介さず、機械的に計算されることにある。(S1), (S2) による既約表現の (q, t) -指標の特徴づけは、Kazhdan-Lusztig アルゴリズム [L, Lemma 24.2.1] と呼ばれる既約表現と標準表現の (q, t) -指標の間の基底変換の計算アルゴリズムを与える (計算例については 5 章を参照のこと)。よって、定理 3.5 および予想 3.6(1) は、一般の既約表現の q -指標を求める純代数的なアルゴリズムの存在を保証する非常に強い主張である。

4 主結果

本章では $A_{2n-1}^{(1)}$ 型, $B_n^{(1)}$ 型量子ループ代数を考える。 A_{2n-1} 型, B_n 型複素単純 Lie 環の単純ルートの添え字集合をそれぞれ $I_A := \{1, \dots, 2n-1\}$, $I_B := \{1, \dots, n\}$ とする。(添え字の付け方は [Kac, Chapter 4] に従う。) ここで、

$$\begin{aligned}\tilde{I}_A &:= \{(i, r) \mid i \in I_A, r \in \mathbb{Z}, r \equiv i + 1 \pmod{2}\} \\ \tilde{I}_B &:= \{(i, 2r), (n, 2r+1) \mid i \in I_B \setminus \{n\}, r \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

とおく。 $X = A$ ($N := 2n-1$), B ($N := n$) に対し, $\mathcal{C}'_{\mathbb{Z}, X_N^{(1)}}$ を、

$$\chi_q(V) \in \mathbb{Z}[Y_{i,q^r}^{\pm 1} \mid (i, r) \in \tilde{I}_X]$$

を満たす対象 V のなす $\mathcal{C}_{X_N^{(1)}}$ の充満部分圏とおく。このとき, $\mathcal{C}'_{\mathbb{Z}, X_N^{(1)}}$ は再び $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_N^{(1)}}$ の部分モノイダルアーベル圏となる*6。さらに, $\mathcal{B}'_{X_N^{(1)}} := \mathcal{B}_{X_N^{(1)}} \cap \mathbb{Z}[Y_{i,q^r}^{\pm 1} \mid (i, r) \in \tilde{I}_X]$ とすると, $\mathcal{C}'_{\mathbb{Z}, X_N^{(1)}}$ の Grothendieck 環は、

$$K(\mathcal{C}'_{\mathbb{Z}, X_N^{(1)}}) = \sum_{m \in \mathcal{B}'_{X_N^{(1)}}} \mathbb{Z}[M(m)] = \sum_{m \in \mathcal{B}'_{X_N^{(1)}}} \mathbb{Z}[L(m)]$$

となる。さらに、

$$K_t(\mathcal{C}'_{\mathbb{Z}, X_N^{(1)}}) := \sum_{m \in \mathcal{B}'_{X_N^{(1)}}} \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]M_t(m) = \sum_{m \in \mathcal{B}'_{X_N^{(1)}}} \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]L_t(m)$$

とすると, $K_t(\mathcal{C}'_{\mathbb{Z}, X_N^{(1)}})$ は $K_t(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_N^{(1)}})$ の $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -部分代数である。

4.1 主結果とその系

補題-記号 4.1. 以下の対応で定まる $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -代数同型が存在する*7:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_A &: \mathcal{Y}_{t, A_{2n-1}^{(1)}} \rightarrow \mathcal{Y}_{t, A_{2n-1}^{(1)}}, \tilde{Y}_{i,r} \mapsto \tilde{Y}_{2n-i, r-2n}, \\ \mathbb{D}_B &: \mathcal{Y}_{t, B_n^{(1)}} \rightarrow \mathcal{Y}_{t, B_n^{(1)}}, \tilde{Y}_{i,r} \mapsto \tilde{Y}_{i, r-2(2n-1)}.\end{aligned}$$

以下が本稿の主結果である。

*6 添え字集合の取り方から大きき的には $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_N^{(1)}}$ の“半分”であるが、圏 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, X_N^{(1)}}$ の単純対象の構造およびモノイダル圏としての非自明な構造の研究は実際には $\mathcal{C}'_{\mathbb{Z}, X_N^{(1)}}$ に帰着される [HL10, §3.7], [KKOhP19, Subsection 1.7].

*7 これらは表現の双対を取ることに対応する操作である (cf. [FM01, Corollary 6.10]).

定理 4.2 (Hernandez-O.). $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -代数としての同型

$$\Phi_{A \rightarrow B}: K_t(\mathcal{C}'_{\mathbb{Z}, A_{2n-1}^{(1)}}) \xrightarrow{\sim} K_t(\mathcal{C}'_{\mathbb{Z}, B_n^{(1)}})$$

が存在する. さらに, $\Phi_{A \rightarrow B}$ はそれぞれの圏に対する既約表現の (q, t) -指標の間の具体的な全単射を与える. また,

$$\mathbb{D}_B \circ \Phi_{A \rightarrow B} = \Phi_{A \rightarrow B} \circ \mathbb{D}_A \quad (*)$$

を満たす.

ここでは具体的な (q, t) -指標の間の公式を記述する代わりに例を与える.

例 4.3. 例えば, $n = 3$ ($A_5^{(1)}/B_3^{(1)}$ 型の間の対応) の場合, $A_5^{(1)}$ 型の基本表現は $B_3^{(1)}$ 型の既約表現に以下のように対応する. (ここでは L_t に A, B を付けてタイプを指定する.) なお, (*) により以下の対応で $\mathcal{C}'_{\mathbb{Z}, A_5^{(1)}}$ 内の基本表現の $\Phi_{A \rightarrow B}$ による像は全て計算される.

$$\begin{aligned} L_t^A(Y_{1,0}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{3,-5}), & L_t^A(Y_{1,-2}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{3,1}), & L_t^A(Y_{1,-4}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{1,-6}), \\ L_t^A(Y_{2,1}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{3,-1}), & L_t^A(Y_{2,-1}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{3,1}Y_{3,-5}), & L_t^A(Y_{2,-3}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{3,-3}), \\ L_t^A(Y_{2,-5}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{2,-8}), & L_t^A(Y_{3,0}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{3,1}Y_{3,-1}), & L_t^A(Y_{3,-2}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{3,-3}Y_{3,-5}), \\ L_t^A(Y_{3,-4}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{3,-7}), & L_t^A(Y_{4,-1}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{2,-2}), & L_t^A(Y_{4,-3}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{2,-6}), \\ L_t^A(Y_{5,0}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{1,0}), & L_t^A(Y_{5,-2}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{1,-4}), & L_t^A(Y_{5,-4}) &\leftrightarrow L_t^B(Y_{1,-8}). \end{aligned}$$

この対応からわかるように, 一般には基本表現も基本表現に対応するわけではなく, 対応する最高単項式の次数は保存されない. また, この対応は次元も保存しない. 例えば, $L^A(Y_{1,-4})$ は 6 次元表現であるが, $L^B(Y_{1,-6})$ は 7 次元表現である. このような点からも $\Phi_{A \rightarrow B}$ は非自明な対応であると言える.

定理 4.2 により, $A_{2n-1}^{(1)}$ 型の (q, t) -指標について知られている様々な正値性を $B_n^{(1)}$ 型 (q, t) -指標の正値性に直ちに読み替えることができる. $B_n^{(1)}$ 型の (q, t) -指標に関してはこのような正値性は新しい結果である.

系 4.4 (Kazhdan-Lusztig 型多項式の正値性). 各 $m \in \mathcal{B}'_{B_n^{(1)}}$ に対し,

$$M_t(m) = \sum_{m' \in \mathcal{B}'_{B_n^{(1)}}} P_{m, m'}(t) L_t(m')$$

と書くと, $P_{m, m'}(t) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[t^{-1}]$ である.

これは $B_n^{(1)}$ 型における予想 3.6(ii) の肯定的解答である. 実際にはより強く以下が成立する. これも Nakajima によって $A_{2n-1}^{(1)}$ 型 (より一般に対称型) の場合には証明が与えられていた性質である:

系 4.5 (構造定数の正値性). 各 $m_1, m_2 \in \mathcal{B}'_{B_n^{(1)}}$ に対し,

$$L_t(m_1)L_t(m_2) = \sum_{m \in \mathcal{B}'_{B_n^{(1)}}} c_{m_1, m_2}^m(t) L_t(m)$$

と書くと, $c_{m_1, m_2}^m(t) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[t^{\pm 1/2}]$ である.

ちなみに, 系 4.5 が系 4.4 よりも強いことは, $M_t(m)$ が $L_t(Y_{i,r})$ らの積で定義されていたことを思い出せばすぐにわかる.

Kashiwara-Kim-Oh は, Kang, Kashiwara, Kim, Oh により確立された一般化量子 Schur-Weyl 双対性を用いて, 圏論的に以下の通常の Grothendieck 環の間の同型を証明している:

定理 4.6 ([KKOh19, Theorem 3.1.1]). \mathbb{Z} -代数としての同型

$$\phi_{A \rightarrow B}: K(\mathcal{C}'_{\mathbb{Z}, A_{2n-1}^{(1)}}) \xrightarrow{\sim} K(\mathcal{C}'_{\mathbb{Z}, B_n^{(1)}})$$

であって, 既約表現の類の間の全単射を与えるものが存在する.

ここで標準表現の間の対応に着目することで、以下が確かめられる：

定理 4.7 (Hernandez-O.). $\Phi_{A \rightarrow B}$ を $t = 1$ に特殊化すると $\phi_{A \rightarrow B}$ に一致する。

ここで定理 4.7 は我々の同型の方が強い主張であることを意味しているのではなく、むしろ我々の同型の構成と Kashiwara-Kim-Oh による同型の構成は次の意味で全く独立であることを注意しておく：

アприオリには、

- $\Phi_{A \rightarrow B}$ を $t = 1$ に特殊化したものは定理 4.2 より、 $\{\text{ev}_{t=1}(L_t(m)) \mid m \in \mathcal{B}'_{A_{2n-1}}(1)\}$ を $\{\text{ev}_{t=1}(L_t(m)) \mid m \in \mathcal{B}'_{B_n}(1)\}$ に移すが、
- $\phi_{A \rightarrow B}$ (を q -指標で解釈したもの) は定理 4.6 より、 $\{\chi_q(L(m)) \mid m \in \mathcal{B}'_{A_{2n-1}}(1)\}$ を $\{\chi_q(L(m)) \mid m \in \mathcal{B}'_{B_n}(1)\}$ に移す。

$A_{2n-1}^{(1)}$ 型の場合には $\text{ev}_{t=1}(L_t(m)) = \chi_q(L(m))$ であることがわかっているが、 $B_n^{(1)}$ 型の場合にはこの一致は予想 3.6(i) に他ならない。従って、定理 4.7 は $B_n^{(1)}$ 型の場合の予想 3.6(i) の肯定的解決を導く：

系 4.8. 各 $m \in \mathcal{B}'_{B_n}(1)$ に対し、 $\text{ev}_{t=1}(L_t(m)) = \chi_q(L(m))$ 。

5 計算例

量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(B_2^{(1)})$ の既約表現 $L(Y_{1,0}Y_{2,5})$ の q -指標を Kazhdan-Lusztig アルゴリズムにより求めてみる。まず $r \in \mathbb{Z}$ に対し、

$$\begin{aligned} M_t(Y_{1,r}) &= \underline{Y_{1,r}} + \underline{Y_{2,r+1}Y_{2,r+3}Y_{1,r+4}^{-1}} + \underline{Y_{2,r+1}Y_{2,r+5}^{-1}} + \underline{Y_{1,r+2}Y_{2,r+3}^{-1}Y_{2,r+5}^{-1}} + \underline{Y_{1,r+6}^{-1}}, \\ M_t(Y_{2,r}) &= \underline{Y_{2,r}} + \underline{Y_{1,r+1}Y_{2,r+2}^{-1}} + \underline{Y_{2,r+4}Y_{1,r+5}^{-1}} + \underline{Y_{2,r+6}^{-1}} \end{aligned}$$

より、 $\mathcal{Y}_{t,B_2^{(1)}}$ の関係式を用いると、

$$\begin{aligned} M_t(Y_{1,0}Y_{2,5}) &= t^{-1/2}M_t(Y_{1,0})M_t(Y_{2,5}) \\ &= \underline{Y_{1,0}Y_{2,5}} + \underline{Y_{1,0}Y_{1,6}Y_{2,7}^{-1}} + \underline{Y_{1,0}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1}} + \underline{Y_{1,0}Y_{2,11}^{-1}} \\ &\quad + \underline{Y_{2,1}Y_{2,3}Y_{1,-4}^{-1}Y_{2,5}} + \underline{Y_{2,1}Y_{2,3}Y_{1,-4}^{-1}Y_{1,6}Y_{2,7}^{-1}} + \underline{Y_{2,1}Y_{2,3}Y_{1,-4}^{-1}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1}} + \underline{Y_{2,1}Y_{2,3}Y_{1,-4}^{-1}Y_{2,11}^{-1}} \\ &\quad + t^{-1}\underline{Y_{2,1}} + \underline{Y_{2,1}Y_{2,5}^{-1}Y_{1,6}Y_{2,7}^{-1}} + \underline{Y_{2,1}Y_{2,5}^{-1}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1}} + \underline{Y_{2,1}Y_{2,5}^{-1}Y_{2,11}^{-1}} \\ &\quad + t^{-1}\underline{Y_{1,2}Y_{2,3}^{-1}} + \underline{Y_{1,2}Y_{2,3}^{-1}Y_{2,5}^{-1}Y_{1,6}Y_{2,7}^{-1}} + \underline{Y_{1,2}Y_{2,3}^{-1}Y_{2,5}^{-1}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1}} + \underline{Y_{1,2}Y_{2,3}^{-1}Y_{2,5}^{-1}Y_{2,11}^{-1}} \\ &\quad + t^{-1}\underline{Y_{2,5}Y_{1,6}^{-1}} + t^{-1}\underline{Y_{2,7}^{-1}} + \underline{Y_{1,6}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1}} + \underline{Y_{1,6}Y_{2,11}^{-1}} \\ &= \underline{Y_{1,0}Y_{2,5}} + \underline{Y_{1,0}Y_{1,6}Y_{2,7}^{-1}} + \underline{Y_{1,0}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1}} + \underline{Y_{1,0}Y_{2,11}^{-1}} \\ &\quad + \underline{Y_{2,1}Y_{2,3}Y_{1,-4}^{-1}Y_{2,5}} + \underline{Y_{2,1}Y_{2,3}Y_{1,-4}^{-1}Y_{1,6}Y_{2,7}^{-1}} + \underline{Y_{2,1}Y_{2,3}Y_{1,-4}^{-1}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1}} + \underline{Y_{2,1}Y_{2,3}Y_{1,-4}^{-1}Y_{2,11}^{-1}} \\ &\quad + \underline{Y_{2,1}Y_{2,5}^{-1}Y_{1,6}Y_{2,7}^{-1}} + \underline{Y_{2,1}Y_{2,5}^{-1}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1}} + \underline{Y_{2,1}Y_{2,5}^{-1}Y_{2,11}^{-1}} \\ &\quad + \underline{Y_{1,2}Y_{2,3}^{-1}Y_{2,5}^{-1}Y_{1,6}Y_{2,7}^{-1}} + \underline{Y_{1,2}Y_{2,3}^{-1}Y_{2,5}^{-1}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1}} + \underline{Y_{1,2}Y_{2,3}^{-1}Y_{2,5}^{-1}Y_{2,11}^{-1}} \\ &\quad + \underline{Y_{1,6}^{-1}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1}} + \underline{Y_{1,6}^{-1}Y_{2,11}^{-1}} + t^{-1}M_t(Y_{2,1}) \end{aligned}$$

となる。よって、 $M_t(Y_{1,0}Y_{2,5}) - t^{-1}M_t(Y_{2,1})$ はバー対合で不変である。これより、

$$L_t(Y_{1,0}Y_{2,5}) := M_t(Y_{1,0}Y_{2,5}) - t^{-1}M_t(Y_{2,1})$$

とすれば良い。実際、 $M_t(Y_{2,1}) = L_t(Y_{2,1})$ であるので、 $M_t(Y_{1,0}Y_{2,5}) = L_t(Y_{1,0}Y_{2,5}) + t^{-1}L_t(Y_{2,1})$ となり、条件 (S2) も満たしている。((S1), (S2) を満たす $L_t(Y_{1,0}Y_{2,5})$ の取り方がこれしかないことも容易に示される)。

以上より, 系 4.8 から,

$$\begin{aligned}
\chi_q(L(Y_{1,0}Y_{2,5})) &= \text{ev}_{t=1}(L_t(Y_{1,0}Y_{2,5})) \\
&= Y_{1,0}Y_{2,5} + Y_{1,0}Y_{1,6}Y_{2,7}^{-1} + Y_{1,0}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1} + Y_{1,0}Y_{2,11}^{-1} \\
&\quad + Y_{2,1}Y_{2,3}Y_{1,-4}^{-1}Y_{2,5} + Y_{2,1}Y_{2,3}Y_{1,-4}^{-1}Y_{1,6}Y_{2,7}^{-1} + Y_{2,1}Y_{2,3}Y_{1,-4}^{-1}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1} + Y_{2,1}Y_{2,3}Y_{1,-4}^{-1}Y_{2,11}^{-1} \\
&\quad + Y_{2,1}Y_{2,5}^{-1}Y_{1,6}Y_{2,7}^{-1} + Y_{2,1}Y_{2,5}^{-1}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1} + Y_{2,1}Y_{2,5}^{-1}Y_{2,11}^{-1} \\
&\quad + Y_{1,2}Y_{2,3}^{-1}Y_{2,5}^{-1}Y_{1,6}Y_{2,7}^{-1} + Y_{1,2}Y_{2,3}^{-1}Y_{2,5}^{-1}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1} + Y_{1,2}Y_{2,3}^{-1}Y_{2,5}^{-1}Y_{2,11}^{-1} \\
&\quad + Y_{1,6}^{-1}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1} + Y_{1,6}^{-1}Y_{2,11}^{-1}
\end{aligned}$$

である. ここでの計算が, 基本表現の (q, t) -指標 $M_t(Y_{1,r})$, $M_t(Y_{2,r})$ と量子トーラス $\mathcal{Y}_{t, B_2^{(1)}}$ の関係式のみを用いた機械的な計算である (“ $\mathcal{U}_q(B_2^{(1)})$ の表現論” を用いていない) ということに着目してもらいたい.

謝辞

第 64 回代数学シンポジウムにおいて講演の機会を与えて下さったプログラム責任者の阿部紀行様, 島倉裕樹様, シンポジウム責任者の金銅誠之様, 会場責任者の山崎隆雄様にこの場をお借りして深く御礼申し上げます. また, 筆者の本研究は the European Research Council under the European Union’s Framework Programme H2020 with ERC Grant Agreement number 647353 Qaffine および日本学術振興会学術研究助成基金 (若手研究)No.19K14515 の助成を受けたものです.

参考文献

- [B94] J. Beck, *Braid group action and quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), no. 3, 555–568.
- [CP] V. Chari and A. Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, xvi+651 pp.
- [CP91] V. Chari and A. Pressley, *Quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **142** (1991), no. 2, 261–283.
- [CP95] V. Chari and A. Pressley, *Quantum affine algebras and their representations*, Representations of groups (Banff, AB, 1994), 59–78, CMS Conf. Proc. **16**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [D88] V. G. Drinfel’d, *A new realization of Yangians and of quantum affine algebras*, Soviet Math. Dokl. **36** (1988), no. 2, 212–216.
- [FH11] E. Frenkel and D. Hernandez, *Langlands duality for finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, Lett. Math. Phys. **96** (2011), no. 1–3, 217–261.
- [FM01] E. Frenkel and E. Mukhin, *Combinatorics of q -characters of finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **216** (2001), no. 1, 23–57.
- [FR99] E. Frenkel and N. Reshetikhin, *The q -characters of representations of quantum affine algebras and deformations of \mathcal{W} -algebras*, Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998), 163–205, Contemp. Math. **248**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [H04] D. Hernandez, *Algebraic approach to q, t -characters*, Adv. Math. **187** (2004), no. 1, 1–52.
- [HL10] D. Hernandez and B. Leclerc, *Cluster algebras and quantum affine algebras*, Duke Math. J. **154** (2010), no. 2, 265–341.
- [HO19] D. Hernandez and H. Oya, *Quantum Grothendieck ring isomorphisms, cluster algebras and Kazhdan-Lusztig algorithm*, Adv. Math. **347** (2019), 192–272.
- [Kac] V. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras. Third edition.*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. xxii+400 pp.

- [K³18] S.-J. Kang, M. Kashiwara and M. Kim, *Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras*, Invent. Math. **211** (2018), no. 2, 591–685.
- [KKKOh15] S.-J. Kang, M. Kashiwara, M. Kim and S.-j. Oh, *Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras III*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **111** (2015), no. 2, 420–444.
- [KKOh19] M. Kashiwara, M. Kim and S.-j. Oh, *Monoidal categories of modules over quantum affine algebras of type A and B*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **118** (2019), no. 1, 43–77.
- [KKOhP19] M. Kashiwara, M. Kim, S.-j. Oh and E. Park, *Cluster algebra structures on module categories over quantum affine algebras*, preprint arXiv:1904.01264.
- [KOh19] M. Kashiwara and S.-j. Oh, *Categorical relations between Langlands dual quantum affine algebras: doubly laced types*, J. Algebraic Combin. **49** (2019), no. 4, 401–435.
- [L] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Reprint of the 1994 edition, Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer, New York, 2010, xiv+346 pp.
- [N04] H. Nakajima, *Quiver varieties and t-analogs of q-characters of quantum affine algebras*, Ann. of Math. (2) **160** (2004), no. 3, 1057–1097.
- [OhSc19] S.-j. Oh and T. Scrimshaw, *Categorical relations between Langlands dual quantum affine algebras: exceptional cases*, Comm. Math. Phys. **368** (2019), no. 1, 295–367.
- [Oya] H. Oya, 異なる Dynkin 型のアフィン量子群の有限次元表現圏の間に見られる類似性について, 日本数学会 2019 年度年会・代数学分科会特別講演アブストラクト.
- [VV03] M. Varagnolo and E. Vasserot, *Perverse sheaves and quantum Grothendieck rings*, Studies in memory of Issai Schur (Chevaleret/Rehovot, 2000), 345–365, Progr. Math. **210**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.

アフィン頂点代数の relaxed 最高ウェイト表現

川節 和哉 (Kawasetsu, Kazuya)
熊本大学大学院先導機構

1 はじめに

頂点代数, ないしは頂点作用素代数は, 一言でいうと, 互いに局所可換な量子場のなす代数である. 重要な無限次元表現を数多く持ち, 2次元共形場理論の代数版である. 中でも, ある種の有限性条件と表現圏の半単純性を満たす頂点作用素代数は, 表現の指標の張るベクトル空間がモジュラー群 $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用で閉じているという著しい性質を持つ. さらに, Verlinde 公式という, 表現のある種のテンソル積における既約表現の重複度を, 指標の S 変換を表す行列によって記述する公式が成り立つ.

アフィン頂点作用素代数は, アフィン Kac-Moody リー環を用いて構成される頂点作用素代数の族であり, その上の表現は, アフィンリー環上の表現の構造を持つ. 題目の relaxed 最高ウェイト表現とは, 簡単に言うと有限次元単純リー環上のウェイト表現のアフィン化のことである.

T. Creutzig と D. Ridout は, 有限性条件を満たさない許容的アフィン頂点作用素代数 $L_k(sl_2)$ に対して, Verlinde 公式のアナロジーを提唱した. その公式は, relaxed 最高ウェイト表現 (とそのツイスト) に対して記述される.

本稿では, Creutzig-Ridout 理論を簡単に解説し, relaxed 最高ウェイト表現の理論の最近の進展について概観する.

2 頂点作用素代数

ベクトル空間 V を考え, V の元を係数に持つ形式的べき級数の空間を $V[[z, z^{-1}]] = \{\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \mid a_n \in V\}$ と書く. ただし z は不定元である. V

上の量子場とは, $a(z) \in \text{End}(V)[[z, z^{-1}]]$ であって, 任意の $b \in V$ に対して, ある $N > 0$ が存在して, $a(z)b \in V[[z]]z^N$ が成り立つものをいう.

V が頂点代数 $[B]$ であるとは, 特別な元 $\mathbf{1} \in V$ (真空元) と $T \in \text{End}(V)$ (平行移動作用素) が定まっており, さらに, V の元 a に対して, V 上の量子場 $Y(a, z)$ が線型に定まっていて, 次の公理を満たすことである:

- (局所可換性) 任意の $a, b \in V$ に対して, $N > 0$ が存在して,

$$(z - w)^N Y(a, z) Y(b, w) = (z - w)^N Y(b, w) Y(a, z).$$

- $Y(\mathbf{1}, z) = \text{id}_V$, $Y(a, z)\mathbf{1} \in a + V[[z]]z$, ($a \in V$),
- $T\mathbf{1} = 0$, $[T, Y(a, z)] = \partial_z Y(a, z)$, ($a \in V$).

V を頂点代数とする. $\omega \in V$ が中心電荷 $c \in \mathbb{C}$ のヴィラソロ元であるとは, $Y(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ と書くと,

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{n^3 - n}{12} \delta_{n, -m} c, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

を満たすことである.

頂点代数 V とヴィラソロ元 $\omega \in V$ の組 (V, ω) は次の公理を満たすとき頂点作用素代数と呼ぶ [FLM]:

- L_0 が V 上, 半単純に作用する
- V 上の L_0 -固有値は非負整数である:

$$V = \bigoplus_{\Delta=0}^{\infty} V_{\Delta}, \quad V_{\Delta} := \{v \in V \mid L_0 v = \Delta v\},$$

- $V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$, $\dim V_{\Delta} < \infty$, $\forall \Delta$.

(V, ω) を頂点作用素代数とする. 以降, 頂点作用素代数を単に V と書く. V の中心電荷は, ω の中心電荷 c のことである.

頂点作用素代数 V 上の表現 M は, V の元 a に対して M 上の量子場 $Y^M(a, z) \in \text{End}(M)[[z, z^{-1}]]$ が線型に定まっていて, L_0 が半単純に作用しており, いくつかの公理を満たすものをいう. ただし, $Y^M(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ とかく. L_0 -固有ベクトル $v \in M$ の L_0 -固有値を, v の共形ウェイトと呼ぶ. M が既約表現のとき, ある $\Delta \in \mathbb{C}$ が存在して, M の L_0 -固有値はすべて $\Delta + \mathbb{Z}$ の元である.

M を V 上の表現とする. M の共形ウェイトが次の意味で下に有界のとき, M は正エネルギーであるという:

$$M = \bigoplus_{\Delta \in S, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} M_{\Delta+n}, \quad \text{with } S \subset \mathbb{C} \text{ such that } \#S < \infty \text{ and}$$

$$\forall \Delta \in S, M_{\Delta} \neq 0 \text{ and } (\Delta + \mathbb{Z}) \cap S = \{\Delta\}.$$

ただし, $M_{\Delta} := \{v \in M \mid L_0 v = \Delta v\}$ ($\Delta \in \mathbb{C}$) とかく. 部分ベクトル空間 $M_{top} := \bigoplus_{\Delta \in S} M_{\Delta}$ を M の top 空間という.

特に, M が既約正エネルギー表現のとき,

$$M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_{\Delta+n}, \quad M_{\Delta} \neq 0, \quad \Delta \in \mathbb{C}$$

という形を持ち, $\Delta = \Delta_M$ は M の最小共形ウェイトと呼ばれる. このとき, $M_{top} = M_{\Delta}$ である.

定義 1. V 上の普通表現とは, 正エネルギー表現 M であって, 各 L_0 -固有空間が有限次元であるものをいう.

V 自身は V 上の表現であるが, これを真空表現と呼ぶ. 真空表現は普通表現の例である.

定義 2. 普通表現 M の (形式) 指標とは, 形式的級数

$$\chi[M](q) = \sum_{n \in \mathbb{C}} (\dim M_n) q^{n-c/24}$$

のことである. ただし, q は不定元である.

3 Zhu 理論

頂点作用素代数 V を考え, $U(V)$ をその普遍展開環とする. これはおおよそ $a_{(n)} \in \text{End}(V)$ ($a \in V, n \in \mathbb{Z}$) で生成される結合代数のことである (正確な定義は [MNT] を参照せよ). ただし, $a_{(n)}$ は $Y(a, z)$ における z^{-n-1} の係数のことである. V の Zhu 代数とは, 結合代数

$$\text{Zhu}(V) = U(V)_0 / (U(V)_0 \cap U(V)U(V)_-)$$

のことである. ただし, $U(V)_0$ は $U(V)$ の元で共形ウェイトを変えない斉次元全体の張る空間, $U(V)_-$ は共形ウェイトを真に下げる斉次元全体の張る空間である. V 上の正エネルギー表現 M を考えたとき, その top 空間 M_{top} には $\text{Zhu}(V)$ 上の表現の構造が誘導される.

定理 1. [Z] 一対一対応

$$\begin{aligned} (V \text{ の既約正エネルギー表現全体}) &\longrightarrow (\text{Zhu}(V) \text{ の既約加群全体}) \\ M &\longmapsto M_{top} \end{aligned}$$

が成り立つ.

商ベクトル空間 $V/V_{(-2)}V$ が有限次元のとき, V は平滑 (C_2 余有限) という. また, V の正エネルギー表現が完全可約のとき, V は有理的であるという. Y. Zhu は, 上記の一対一対応を用いて, V が平滑かつ有理的であるとき, V の既約正エネルギー表現は同型を除いて有限個であり, 既約正エネルギー表現は普通表現であることを示した. さらに, 既約正エネルギー表現の指標が, モジュラー不変性と呼ばれる次の性質を満たすことを示した.

定理 2. [Z] V は平滑かつ有理的であると仮定する. ベクトル空間

$$\mathbb{C}\text{-span}\{\chi[M](q) \mid M \text{ は } V \text{ 上の既約正エネルギー表現}\}$$

はモジュラー群 $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用で不変である. ただし, $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用は,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : f(\tau) \longmapsto f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

であり, $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$, $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ である.

このように, 平滑かつ有理的な頂点作用素代数の表現論は強力な理論があり, 非常に発達している. 本稿では, 平滑でない頂点作用素代数の表現論を考察する.

4 アフィン Kac-Moody リー環

\mathfrak{g} を有限次元単純リー環とし, \mathfrak{h} をカルタン部分代数, \mathfrak{b} をボレル部分代数とする. $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$, $(\omega_1, \dots, \omega_\ell)$ をそれぞれ \mathfrak{g} の単純ルート, 基本ウェイトとし, h, h^\vee をそれぞれ \mathfrak{g} のコクセター数, 双対コクセター数とする. 次のリー積で定義される, アフィン Kac-Moody リー環 $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D$ を考える:

$$[at^n, bt^m] = [a, b]t^{n+m} + n(a|b)\delta_{n,-m}K, \quad [D, at^n] = nat^n, \quad [K, \hat{\mathfrak{g}}] = 0,$$

$(a, b \in \mathfrak{g}, n, m \in \mathbb{Z})$. ここで, $(\cdot|\cdot)$ は \mathfrak{g} 上の正規化された不変内積である. $\widehat{\mathfrak{g}}$ のカルタン部分代数とボレル部分代数を, $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D$, $\widehat{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}[t] + \mathfrak{g}[t]t + \mathbb{C}K + \mathbb{C}D$ ととる. $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$, $(\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_\ell)$ はそれぞれ $\widehat{\mathfrak{g}}$ の単純ルート, 基本ウェイトを表し, D の双対元は $\delta \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ で表す.

以下, k を $-h^\vee$ でない複素数とする. $\widehat{\mathfrak{g}}$ の元 K がスカラー k 倍で作用する $\widehat{\mathfrak{g}}$ -加群は, レベル k であるという.

ウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を考える. 本稿では, \mathfrak{g} 上の最高ウェイト λ の既約最高ウェイト加群を L_λ と表す. また, $d = -(\lambda|\lambda + 2\rho)/2(k + h^\vee)$ と置き, $\widehat{\mathfrak{g}}$ 上の最高ウェイト $k\Lambda_0 + d\delta + \lambda$ の既約最高ウェイト加群を $L_{k,\lambda}$ と書く.

定義 3. $\widehat{\mathfrak{g}}$ -加群 M がウェイト加群であるとは, M が

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*} M(\lambda), \quad \dim M(\lambda) < \infty \quad (\forall \lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*)$$

という条件を満たすことである. ただし, $M(\lambda) := \{v \in M \mid hv = \lambda(h)v, h \in \widehat{\mathfrak{h}}\}$.

\mathfrak{g} -加群に対しても, 定義中の $\widehat{\mathfrak{h}}$ を \mathfrak{h} に置き換えて, ウェイト加群の概念を定義する.

\mathfrak{g} -加群 N を考える. このとき, N には次の作用によって $\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D$ 上の表現が引き起こされる: $K = k$, $D = -\Omega/2(k + h^\vee)$, $\mathfrak{g}[t]t = 0$. ここで, Ω は内積 $(\cdot|\cdot)$ に関する \mathfrak{g} のカシミール元である. すると, 次の $\widehat{\mathfrak{g}}$ -加群が誘導される:

$$\widehat{N}_k := U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D)} N,$$

N が巡回加群のとき, \widehat{N}_k の $1 \otimes N$ と交わりが 0 である部分加群による商加群は, relaxed 最高ウェイト加群と呼ばれる.

例えば, \widehat{N}_k の almost 単純商

$$\text{Ind}_k(N) := \widehat{N}_k / (I \cap (1 \otimes N) = 0 \text{ を満たす部分加群 } I \text{ 全体の和}).$$

は, N が巡回加群のとき, relaxed 最高ウェイト加群である.

定義 4. M をレベル k のウェイト $\widehat{\mathfrak{g}}$ -加群とし, $c = k \dim \mathfrak{g} / (k + h^\vee)$ とおく. M の全指標 $\text{ch}[M]$ を,

$$\text{ch}[M](y, z, q) = q^{-c/24} y^k \sum_{n \in \mathbb{C}, \lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*} \dim M(k\Lambda_0 - n\delta + \lambda) q^n z^\lambda$$

と定義する. ただし, y, z, q は不定元である.

5 アフィン頂点代数

前節の記号をそのまま用いる. \mathfrak{g} 上の自明表現 $N = \mathbb{C}$ に対して,

$$V^k(\mathfrak{g}) := \widehat{\mathbb{C}}_k = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D} \mathbb{C}$$

は頂点作用素代数の構造を持ち, 普遍アフィン頂点作用素代数と呼ばれる. 中心電荷は $c = k \dim \mathfrak{g} / (k + h^\vee)$ である. $V^k(\mathfrak{g})$ の単純商代数は (単純) アフィン頂点作用素代数と呼び, $L_k(\mathfrak{g})$ とかく. $L_k(\mathfrak{g})$ は $\widehat{\mathfrak{g}}$ -加群として既約最高ウェイト表現 $L(k\Lambda_0)$ と同型である.

$V = V^k(\mathfrak{g})$ または $V = L_k(\mathfrak{g})$ とする. V 上の表現 M には, $\widehat{\mathfrak{g}}$ 上のレベル k 加群の構造が自然に引き起こされ, M 上 $D = -L_0$ が成り立つ. また, M が普通表現のとき, M の全指標 $\text{ch}[M](y, z, q)$ に $y = z = 1$ と代入したものは, 指標 $\chi[M](q)$ と一致する.

$L_k(\mathfrak{g})$ が平滑かつ有理的であることと, $k = 0, 1, 2, \dots$ は同値である. $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と仮定する. このとき, $L_k(\mathfrak{g})$ 上の既約正エネルギー表現全体は, $\widehat{\mathfrak{g}}$ 上のレベル k の既約可積分表現 (レベル k の支配的整ウェイトを最高ウェイトに持つ既約最高ウェイト表現) 全体と一致する. 既約可積分表現には Weyl-Kac 指標公式という, Weyl 指標公式の一般化が適用でき, モジュラー不変性が知られていた [KP]. また, 前節の Zhu 理論によってこのモジュラー不変性を示すことができる.

$\widehat{\mathfrak{g}}$ の許容 (admissible) ウェイトとは, 支配的整ウェイトをある種有理レベルに一般化したものである [KW1]. 許容ウェイトを最高ウェイトに持つ既約最高ウェイト表現を許容表現と呼ぶ. 許容表現は Kac-Wakimoto 指標公式という, Weyl-Kac 指標公式の一般化を満たす. しかも, 指標が $SL_2(\mathbb{Z})$ のある合同部分群上のウェイト 0 モジュラー関数であるという意味で, モジュラー不変である [KW1].

さて, k が許容レベルであるとは, $k\Lambda_0$ が許容ウェイトであることをいう. これは,

$$k + h^\vee = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \quad (p, q) = 1, \quad p \geq \begin{cases} h^\vee & (q, r^\vee) = 1, \\ h & (q, r^\vee) = r^\vee, \end{cases}$$

という形を持つことと同値である. ここで, r^\vee は \mathfrak{g} のディンキン図で一番太いところにおける線の本数である. k が正整数でないとき, $L_k(\mathfrak{g})$ は平滑ではないが, 許容的なとき, $L_k(\mathfrak{g})$ は平滑性のある種の一般化 (擬平滑) を満たす [A1, AK].

\mathfrak{g} のべき零元 f を考える. f に付随する量子 BRST 還元法をレベル k のアフィン頂点作用素代数に適用することで構成される頂点作用素代数を W 代数と言い, $W_k(\mathfrak{g}, f)$ と書く [KRW]. これは f を通る Slodowy 横断片の量子アフィン化と思える. k が整数でない許容レベルのとき, f をうまく選ぶと, $W_k(\mathfrak{g}, f)$ は平滑となる [A1].

このように, 整数でない許容レベルを持つアフィン頂点作用素代数 $L_k(\mathfrak{g})$ (よって平滑ではない) は非常に興味深い対象であり, 本稿ではその表現論を取り扱う.

6 sl_2 のウェイト表現

平滑でないアフィン頂点作用素代数上の既約 relaxed 最高ウェイト表現には, \mathfrak{g} 上の最高ウェイト表現でないウェイト表現から誘導される表現が現れる. そこで, 本節では, 有限次元単純リー環 \mathfrak{g} 上のウェイト表現の分類について解説する. Q, P をそれぞれ \mathfrak{g} のルート格子, ウェイト格子とする.

定義 5. ウェイト \mathfrak{g} -加群 N のウェイト台とは, $\text{supp}(N) = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid N(\lambda) \neq 0\}$ のことである. N が稠密 (dense) であるとは, ウェイト台が $\text{supp}(N) = \lambda + Q$ ($\lambda \in \mathfrak{h}^*$) という形を持つことである.

最高ウェイト加群 $N = L_\lambda$ は $\text{supp}(L_\lambda) \subsetneq \lambda + Q$ であるため, 稠密ではない.

ここで, 簡単のため $\mathfrak{g} = sl_2$ と仮定して, 稠密加群を構成する. f を sl_2 の負ルートベクトルとし, sl_2 の普遍展開環を $U(sl_2)$ と書く. f で生成される $U(sl_2)$ の積閉集合を $S = \langle f \rangle$ と書き, S に関する $U(sl_2)$ の (Ore) 局所化を $S^{-1}U(sl_2)$ と表す. 支配的整ウェイトではないウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^* \setminus P^+$ を考える. このとき, 既約最高ウェイト加群 L_λ 上 f は単射であるため, 局所化 $S^{-1}L_\lambda$ は非零である. 構成より, $S^{-1}L_\lambda$ は sl_2 上の (可約) 稠密加群であり, $\text{supp}(S^{-1}L_\lambda) = \lambda + Q$ である. また, $\mu \in \mathbb{C}$ とし, 指数関数の展開公式を用いて, $S^{-1}L_\lambda$ のツイスト $f^\mu \cdot S^{-1}L_\lambda$ を定義する. この加群のウェイト台は $\lambda - \mu + Q$ である. (ただし \mathfrak{h}^* と \mathbb{C} を, $\alpha_1 \mapsto 1$ によって同一視している.) また, $f^\mu \cdot S^{-1}L_\lambda$ は同型を除いて μ の整数シフトには依存しない.

sl_2 の既約ウェイト表現は次で分類される:

1. 有限次元表現: $L_\lambda, \lambda \in P^+$.

2. 無限次元最高ウェイト表現 : $L_\lambda, \lambda \in \mathfrak{h}^* \setminus P^+$.
3. 無限次元最低ウェイト表現 : $L_\lambda^-, \lambda \in \mathfrak{h}^* \setminus P^-$.
4. 稠密表現 : $f^\mu \cdot S^{-1}L_\lambda, \lambda \in \mathfrak{h}^* \setminus P^+, \mu \in \mathbb{C}$ s.t. $(\nu|\nu+2\rho) \neq (\lambda|\lambda+2\rho)$
for any $\nu \in \lambda - \mu + Q$.

(ただし, 4 には重複がある: ウェイト台と Casimir 固有値が一致するとき, 同型である.) 一般の有限次元単純リー環 \mathfrak{g} についても, 既約ウェイト表現は [F, M] の結果によって分類されている. 任意の既約ウェイト表現は, \mathfrak{g} の Levi 部分リー環上の既約稠密表現から放物誘導によって得られる [F]. また, 稠密表現が存在すれば, \mathfrak{g} は A 型か C 型であることが示された [F]. 最終的に既約稠密表現は [M] において分類され, したがって既約ウェイト表現は完全に分類された.

7 Creutzig-Ridout 理論

$\mathfrak{g} = sl_2$ と仮定し, k を整数ではない許容レベルとする. すなわち, $k+2 = p/q$ ($p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ は互いに素である) とする. 物理学者 T. Creutzig と D. Ridout は, [CR] において, 次の二つの表現圏を導入した.

まず, $L_k(sl_2)$ の relaxed 表現圏 \mathbb{L} とは,

$$\mathbb{L} = \{\text{Ind}_k(f^\mu \cdot S^{-1}(L_{\lambda_{r,s}})) \mid \mu \in \mathbb{R}, 1 \leq r \leq p-1, 1 \leq s \leq q-1\} / (\text{同型})$$

である. ここで, $\lambda_{r,s} := (r-1 - (k+2)s)\omega_1$ である. 集合 $\{\lambda_{r,s} \mid 1 \leq r \leq p-1, 1 \leq s \leq q-1\}$ は, レベル k の $\hat{\mathfrak{g}}$ の許容ウェイトの \mathfrak{h}^* への射影であって, \mathfrak{g} の支配的整ウェイトでないウェイト全体の集合と一致する. \mathbb{L} の既約対象全体の集合は, $L_k(sl_2)$ 上の既約 relaxed 最高ウェイト表現であって, sl_2 上の既約稠密表現から誘導されたもの全体の (同型を除いた) 集合と一致する.

$L_k(sl_2)$ の標準表現圏 \mathbb{S} とは,

$$\mathbb{S} = \{\sigma^n \cdot M \mid M \in \mathbb{L}, n \in \mathbb{Z}\}$$

で定義される. ただし, σ^n は次で定義される $\hat{\mathfrak{g}}$ の自己同型である:

$$\begin{aligned} et^m &\mapsto et^{m-n}, & ht^m &\mapsto ht^m - \delta_{m,0}nK, & ft^m &\mapsto ft^{m+n}, \\ K &\mapsto K, & D &\mapsto D + \frac{1}{2}nh - \frac{1}{4}n^2K. \end{aligned}$$

構成より, \mathcal{S} は Haar 測度つき空間 $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times [1, (p-1)(q-1)/2] \times \mathbb{Z}$ と同一視される. [CR] において, この測度を用いた積分表示を用いて, \mathcal{S} の対象の全指標のモジュラー不変性と, \mathcal{S} の対象間の交絡作用素の空間の次元 (フュージョン係数) を記述する, 連続的 Verlinde 公式が提唱された.

さらに, $L_k(\mathfrak{sl}_2)$ の既約最高ウェイト表現 (許容表現) は \mathcal{S} に属さないが, \mathcal{S} の (可約) 対象による resolution を持つため, 既約最高ウェイト表現間の (Grothendieck) フュージョン係数も計算でき, 非負整数になるというのが彼らの計算結果である. 許容表現の指標のモジュラー不変性を用いて (通常の) Verlinde 公式を計算すると, 負のフュージョン係数が出てしまうという問題があったが, これはその問題を解決していると考えられる.

近年, $L_k(\mathfrak{sl}_2)$ 以外でも標準表現圏と Verlinde 公式が考察されており, それらによって予言されたフュージョン係数は, Weyl 頂点代数の場合に正しいことが確かめられている [AP].

このように, 標準表現圏は非常に興味深い対象であり, その表現論を調べることや, Creutzig-Ridout 理論の数学的な厳密化が求められている. 標準表現圏は relaxed 最高ウェイト表現をツイストすることで得られるため, relaxed 最高ウェイト表現を調べるのが本稿の目的である.

8 主定理

有限次元単純リー環 \mathfrak{g} と許容レベル k を考える. 本稿の主定理の一つ目は, $L_k(\mathfrak{g})$ 上の既約 relaxed 最高ウェイト表現の分類である (D. Ridout との共著論文 [KR2]). $L_k(\mathfrak{g})$ の Zhu 代数は, $U(\mathfrak{g})$ のある両側イデアルによる商代数と同型であることが知られている. [F, M] による \mathfrak{g} 上の既約ウェイト表現の分類と, Zhu による対応 (定理 1) より, $L_k(\mathfrak{g})$ 上の既約 relaxed 最高ウェイト表現の分類は, $L_k(\mathfrak{g})$ 上の既約最高ウェイト表現の分類に帰着される. $L_k(\mathfrak{g})$ 上の既約最高ウェイト表現は, [A3, KW2] において分類されているため, 既約 relaxed 最高ウェイト表現も完全に分類された.

$\mathfrak{g} = A_n$ と仮定する. 上記の分類結果と, W 代数の表現論に関する [A2] の結果により, 既約稠密表現から誘導される $L_k(\mathfrak{g})$ 上の既約 relaxed 最高ウェイト表現と, 極小 W 代数 $W_k(\mathfrak{g}, f_{\alpha_n})$ 上の既約普通表現との間の一対一対応が得られた (稠密表現のツイスト f^μ を除いて). さらに, 次の意味で指標にも対応がつく.

定理 3. [K] ウェイト $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_{n-1} + (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0})\omega_n$ を考える. 任意の $\mu \in \mathbb{C}^n$ に対して,

$$\text{ch}[\text{Ind}_k(f^\mu \cdot S^{-1}L_\lambda)](y, z, q) = y^k \frac{\chi[H_{f_{\alpha_n}}^{BRST}(L_{k,\lambda})](q)}{\eta(q)^{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^{f_{\alpha_n}}}} \sum_{\nu \in \lambda - \mu + Q} z^\nu$$

が成り立つ.

ここで, S はルートベクトル $f_{\alpha_n}, f_{\alpha_{n-1}+\alpha_n}, \dots, f_{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}+\alpha_n}$ で生成される積閉集合であり, f^μ は, ツイスト

$$f_{\alpha_n}^{\mu_1} f_{\alpha_{n-1}+\alpha_n}^{\mu_2} \cdots f_{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}+\alpha_n}^{\mu_n} \quad (\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)),$$

を表す. また, 右辺の和において, μ は \mathfrak{h}^* の元と同一視されている. $H_{f_{\alpha_n}}^{BRST}$ は, アフィン頂点代数 $L_k(\mathfrak{g})$ のある種の (放物的) BGG 表現圏から W 代数 $W_k(\mathfrak{g}, f_{\alpha_n})$ の普通表現の圏への関手である [A2]. さらに, $\mathfrak{g}^{f_{\alpha_n}}$ は, 元 f_{α_n} の中心化部分リー環である. この指標公式は, $\mathfrak{g} = A_1$ のときは, Creutzig-Ridout 公式 [CR, KR1] に帰着する. $\mathfrak{g} = A_2$ で許容レベル k の分母が 2 のとき, $W_k(A_2, f_{\alpha_2})$ は平滑かつ有理的であるため, 普通表現の指標はモジュラー不変性を持つ. 定理 3 より, 既約稠密表現から誘導される既約 relaxed 最高ウェイト表現の指標に, そのようなモジュラー不変な関数が現れているため, Creutzig-Ridout 理論におけるモジュラー不変性が (厳密に定義できれば) 成り立つのではないかと期待される.

参考文献

- [AP] D. Adamovic and V. Pedic. “On fusion rules and intertwining operators for the Weyl vertex algebra.” arXiv:1903.10248 (2019).
- [A1] T. Arakawa. “Associated varieties of modules over Kac-Moody algebras and C_2 -cofiniteness of W -algebras.” *Int. Math. Res. Not.*, 2015:11605–11666, 2015.
- [A2] T. Arakawa. “Representation theory of W -algebras, II.” *Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics*. Math. Soc. Japan, 2011.
- [A3] T. Arakawa. “Rationality of admissible affine vertex algebras in the category \mathcal{O} .” *Duke Math. J.* 165 (2016): 67–93.

- [AK] T. Arakawa and K. Kawasetsu. “Quasi-lisse vertex algebras and modular linear differential equations.” *Lie Groups, Geometry, and Representation Theory*. Birkhäuser, Cham, 2018. 41–57.
- [B] R. Borcherds. “Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster.” *Proc. Nat. Acad. Sci* 83 (1986): 3068–3071.
- [CR] T. Creutzig and D. Ridout. “Modular data and Verlinde formulae for fractional level WZW models II.” *Nucl. Phys. B* 875 (2013): 423–458.
- [F] S.L. Fernando. “Lie algebra modules with finite-dimensional weight spaces. I.” *Trans. Amer. Math. Soc.* 322 (1990): 757–781.
- [FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman. “Vertex operator algebras and the Monster.” Vol. 134. Academic press, 1989.
- [KP] V. Kac and D. Peterson. “Infinite-Dimensional Lie Algebras, Theta Functions and Modular Forms.” *Adv. Math.* 53 (1984): 125–264.
- [KRW] V. Kac, S. Roan and M. Wakimoto. “Quantum reduction for affine superalgebras.” *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.
- [KW1] V. Kac and M. Wakimoto. “Modular invariant representations of infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras.” *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 85(14):4956–4960, 1988.
- [KW2] V. G. Kac and M. Wakimoto. Classification of modular invariant representations of affine algebras. In *Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988)*, volume 7 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pages 138–177. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.
- [K] K. Kawasetsu. in preparation.
- [KR1] K. Kawasetsu and D. Ridout. “Relaxed highest-weight modules I: rank 1 cases.” *Comm. Math. Phys.* 368 (2019): 627–663.
- [KR2] K. Kawasetsu and D. Ridout. “Relaxed highest-weight modules II: classifications for affine vertex algebras.” arXiv:1906.02935 (2019).

- [M] O. Mathieu. “Classification of irreducible weight modules.” *Ann. Inst. Fourier*. 50 (2000): 537–592.
- [MNT] Matsuo, Atsushi, Kiyokazu Nagatomo, and Akihiro Tsuchiya. “Quasi-finite algebras graded by hamiltonian and vertex operator algebras” *Moonshine-The First Quarter Century and Beyond: Proceedings of a Workshop on the Moonshine Conjectures and Vertex Algebras*. Vol. 372. Cambridge University Press, 2010.
- [Z] Y. Zhu. “Modular invariance of characters of vertex operator algebras.” *J. Amer. Math. Soc.* 9 (1996): 237–302.

Monstrous Moonshine over the integers

Scott Carnahan

December 26, 2019

1 What is Moonshine?

Moonshine is fundamentally about strange connections between finite groups and modular forms. These connections should be very special. In particular, if there are infinitely many cases of a phenomenon, then we typically do not call it moonshine. Instead, we should expect a general theory to explain the phenomenon.

2 Monstrous Moonshine

Monstrous moonshine began in 1978 with a numerical observation by McKay relating representations of the monster simple group with coefficients of the modular J function. This observation initially appeared to be a coincidence, but soon additional numerical evidence together with theoretical advances showed that there is a substantial connection.

The finite simple groups are now known to be naturally organized into 18 infinite families, together with 26 additional groups, called sporadic groups. The monster \mathbb{M} , constructed in [Griess 1982], is the largest of the 26 sporadic simple groups, with order about 8×10^{53} . This is roughly the number of protons in Jupiter, so it is not feasible to compute with all of the elements of the group at once. On the other hand, it is somewhat smaller than the number $52! \sim 8 \times 10^{67}$ of permutations in a standard deck of playing cards. We can compute by hand with this group of permutations, but computation with the monster is much more difficult despite its smaller size because \mathbb{M} has no small representations. In particular, there are no faithful permutation representations of degree less than about 9×10^{19} , and no complex linear representations of dimension less than 196883.

The J -function is an analytic function on the complex upper half-plane that is invariant under the action of $SL_2(\mathbb{Z})$ by Möbius transformations. The quotient of the upper half-plane by this action is complex-analytically isomorphic to \mathbb{C} , i.e., it is a punctured genus zero curve, and J realizes such an isomorphism. In general, a function that generates the function field of an upper half-plane quotient is called a hauptmodul, or principal modulus. Thus, J is a hauptmodul for $SL_2(\mathbb{Z})$. J has the Fourier expansion

$$q^{-1} + 196884q + 21493760q^2 + \cdots \quad (q = e^{2\pi iz})$$

and all of its coefficients are non-negative integers.

In 1978, McKay noted that $196884 = 196883 + 1$, where the left side is q -coefficient of the J function, and the numbers on the right side are the dimensions of the smallest irreducible representations of the monster. He suggested that there was a connection, and later computations by Thompson [Thompson 1979] strongly suggested this was not a coincidence, as the first few coefficients of J were easily written as very simple combinations of dimensions of irreducible representations of the monster:

$$196884 = 1 + 196883 \tag{1}$$

$$21493760 = 1 + 196883 + 21296876 \tag{2}$$

$$86429970 = 2 \times 1 + 2 \times 196883 + 21296876 + 842609326 \tag{3}$$

McKay’s observation could be explained by the existence of a natural graded representation $V = \bigoplus_n V_n$ of the monster, such that $\sum(\dim V_n)q^{n-1} = J$. This existence problem is now known as the McKay-Thompson conjecture, and it was solved with the construction of the “Moonshine Module” V^\natural by Frenkel, Lepowsky, and Meurman. They initially constructed it as a graded representation $V^\natural = \bigoplus V_n$ with graded dimension $\sum(\dim V_n)q^{n-1} = J$ in 1984, using vertex operators. However, Borchers introduced a notion of vertex algebra in [Borchers 1986], and claimed that their construction is an example. Frenkel, Lepowsky, and Meurman then showed that this was true, and furthermore, that the monster is the full automorphism group of V^\natural as a vertex algebra [Frenkel-Lepowsky-Meurman 1988].

Conway and Norton, acting on a suggestion by Thompson, computed a conjectural list of graded traces of elements of the monster on the graded representation V [Conway-Norton 1979]. They noted that all of the trace functions appeared to be Hauptmoduls of genus zero discrete subgroups of $SL_2(\mathbb{R})$. From this evidence, they proposed the “Monstrous Moonshine” conjecture, a refinement of the McKay-Thompson conjecture that asserted the existence of a graded representation $V = \bigoplus_n V_n$ such that for each element g in the monster, the graded trace $\sum_n Tr(g|V_n)q^{n-1}$ matched the function they computed.

Atkin, Fong, and Smith showed in 1980 that a satisfactory virtual representation exists, but with no explicit construction. Borchers showed in [Borchers 1992] that V^\natural satisfies Conway and Norton’s conjecture, using the vertex algebra structure in an essential way. Specifically, he showed that for each $g \in \mathbb{M}$, the series $T_g(\tau) = \sum_n Tr(g|V_n^\natural)q^{n-1}$ is equal to the Hauptmodul for g proposed by Conway and Norton.

3 More monstrous moonshine

Conway and Norton suggested in 1979 that there may be similar behavior for other groups, and Queen computed several potential character functions in 1980. As an example of this behavior, the second largest sporadic group, called the Baby monster, has irreducible representations of dimension 1, 4371, 96255, \dots , and the Hauptmodul for $\Gamma_0(2)^+$ is $q^{-1} + 4372q + 96256q^2 + \dots$.

One of the most interesting phenomena to appear in these computations was that if $g \in \mathbb{M}$ has prime order p , and lies in the conjugacy class named pA , then the graded trace function T_g has non-negative integer coefficients that look like dimensions of representations of the centralizer $C_{\mathbb{M}}(g)$. For $p = 2$, the centralizer of an element in class $2A$ is isomorphic to a central extension $2.B$ of the Baby monster. Thus, our example is still connected to the Monster, but in a way that is different from the Conway-Norton conjecture.

This phenomenon now has two explanations, both involving the existence of representations of groups whose dimensions are given by the non-negative coefficients.

Conjecture 1: Generalized Moonshine (Norton 1987) For each $g \in \mathbb{M}$, there exists a $\frac{1}{N}\mathbb{Z}$ -graded projective representation $V(g) = \bigoplus_n V(g)_n$ of $C_{\mathbb{M}}(g)$, such that the trace functions $Z(g, h; \tau) = \sum_n Tr(\tilde{h}|V(g)_n)q^{n-1}$ satisfy good modularity properties. Here, \tilde{h} is some lift of h to a linear transformation on $V(g)$, and N is the level of $T_g(\tau)$. [Norton 1987]

Conjecture 2: Modular Moonshine (Ryba 1994) For each g in conjugacy class pA , there is a $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -graded vertex algebra V_g over \mathbb{F}_p with a $C_{\mathbb{M}}(g)$ action, such that the graded Brauer character of each p -regular $h \in C_{\mathbb{M}}(g)$ on V_g is equal to the Monstrous Moonshine function T_{gh} . [Ryba 1996]

Both conjectures were rather quickly given conjectural interpretations that placed the central objects $V(g)$ and V_g in a meaningful context. For Generalized Moonshine, the physicists

Dixon, Ginsparg, and Harvey proposed that the representations $V(g)$ are twisted sectors of a conformal field theory with \mathbb{M} symmetry, and the functions $Z(g, h; \tau)$ are genus 1 partition functions with twisted boundary conditions [Dixon-Ginsparg-Harvey 1988]. For Modular Moonshine, Borcherds and Ryba proposed that V_g is the Tate cohomology group $\hat{H}^0(g, V_{\mathbb{Z}}^{\natural})$ with coefficients in a self-dual integral form $V_{\mathbb{Z}}^{\natural}$ of V^{\natural} with \mathbb{M} -symmetry [Borcherds-Ryba 1996].

Both conjectures saw substantial progress in the mid 1990s. For Generalized Moonshine, the representations $V(g)$ were reinterpreted as irreducible g -twisted V^{\natural} -modules, and these were shown to exist in [Dong-Li-Mason 1997]. For Modular moonshine, the conjecture was proved in [Borcherds-Ryba 1996], [Borcherds 1998], and [Borcherds 1999] under the assumption that $V_{\mathbb{Z}}^{\natural}$ exists. The self-dual integral form was not known to exist at the time, but they got an unconditional result for odd primes by using a self-dual form over $\mathbb{Z}[1/2]$. However, the complete solutions to these conjectures required the following critical advance in the theory of vertex algebras:

Theorem [van Ekeren-Möller-Scheithauer 2015] If V is strongly regular and holomorphic, and $g \in \text{Aut}(V)$ is finite order, then there exists an abelian intertwining algebra structure on the direct sum of irreducible twisted modules

$${}^gV := \bigoplus_{i=0}^{|g|-1} V(g^i)$$

Here, the notion of abelian intertwining algebra, introduced in [Dong-Lepowsky 1993], is a generalization of vertex operator algebra, where the multiplication operation is only commutative and associative after some adjustment with a braiding structure. The existence of abelian intertwining algebra structure was essential to the proof of the Hauptmodul property of $Z(g, h; \tau)$ in [Carnahan 2012], and the existence of $V_{\mathbb{Z}}^{\natural}$ in [Carnahan 2017b].

Another important corollary is the cyclic orbifold construction, which lets us build new holomorphic vertex algebras using finite order automorphisms of existing objects.

Corollary

Let V be a strongly regular and holomorphic vertex operator algebra, and $g \in \text{Aut}(V)$ finite order. Assume g is “anomaly-free” (i.e., eigenvalues of $L(0)$ on the twisted module $V(g)$ are in $\frac{1}{|g|}\mathbb{Z}$). Decompose ${}^gV := \bigoplus_{i=0}^{|g|-1} V(g^i)$ under the canonical g action to get a graded structure $\bigoplus_{i,j} V^{i,j}$, where $V = \bigoplus_j V^{0,j}$. Then $V/g := \bigoplus V^{i,0}$ is a strongly regular holomorphic vertex operator algebra, and there is a canonical automorphism g^* such that $V^{i,0}$ is the $e^{2\pi\sqrt{-1}i/|g|}$ eigenspace.

With this result, we get 51 constructions of V^{\natural} from the Leech lattice vertex operator algebra V_{Λ} :

1. An order 2 orbifold [Frenkel-Lepowsky-Meurman 1988], the original construction.
2. An order 3 orbifold [Chen-Lam-Shimakura 2016]
3. Orders 5, 7, 13 [Abe-Lam-Yamada 2017]
4. 46 classes of composite order [Carnahan 2017a]

These constructions were conjectured in [Tuite 1993] as part of his orbifold correspondence between massless classes in the Conway group Co_0 and non-Fricke classes in \mathbb{M} .

For the construction of $V_{\mathbb{Z}}^{\natural}$, we need the prime order constructions: For $p \in \{2, 3, 5, 7, 13\}$, the pair (V_{Λ}, pa) is orbifold dual to (V^{\natural}, pB) .

4 Cyclic orbifolds over small rings

The general idea behind the construction of $V_{\mathbb{Z}}^{\natural}$ is the construction of forms of V^{\natural} over many cyclotomic S -integer rings, followed by a step where these forms are glued together. Thus, we need a theory of vertex algebras and cyclic orbifolds over these rings so we can construct suitable forms of V^{\natural} .

Definition: A vertex algebra over a commutative ring R is an R -module V , with an element $\mathbf{1} \in V$ and a multiplication map $V \otimes_R V \rightarrow V((z))$, written $u \otimes v \mapsto Y(u, z)v = \sum u_n v z^{-n-1}$, satisfying:

1. $Y(\mathbf{1}, z) = id_V z^0$ and $Y(a, z)\mathbf{1} \in a + zV[[z]]$.
2. For any $r, s, t \in \mathbb{Z}$, and any $u, v, w \in V$,

$$\sum_{i \geq 0} \binom{r}{i} (u_{t+i}v)_{r+s-i} w = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{t}{i} (u_{r+t-i}(v_{s+i}w) - (-1)^t v_{s+t-i}(u_{r+i}w))$$

When Borcherds introduced vertex algebras, he allowed coefficients in arbitrary commutative rings, and he gave the following example:

For any positive definite even unimodular lattice L there is a self-dual vertex algebra $(V_L)_{\mathbb{Z}}$ over \mathbb{Z} (Borcherds 1986). It is a \mathbb{Z} -form of $Sym(t^{-1}(\mathbb{C} \otimes L)[t^{-1}]) \otimes \mathbb{C}[L]$ spanned by monomials of the form $s_{\alpha_1, n_1} \cdots s_{\alpha_k, n_k} e^{\alpha}$, where e^{α} is a basis element of $\mathbb{C}[L]$, α_i are chosen from a basis of L , and the operator $s_{\alpha, k}$ is the z^k -coefficient of $\exp(\sum_{n>0} \frac{\alpha(-n)}{n} z^n)$. Here, $Sym(t^{-1}(\mathbb{C} \otimes L)[t^{-1}])$ is a representation of the Heisenberg algebra, with generators $\alpha(n) = \alpha t^{-n} \in L[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$.

We will need a more refined notion, where the underlying R -modules are direct sums of finite projective modules. The notion of vertex operator algebra over a field was introduced in [Frenkel-Lepowsky-Meurman 1988] as a variant of vertex algebras with similar finiteness properties, so we give one of perhaps many natural extensions of the definition to commutative rings:

Definition: A vertex operator algebra over R with half central charge c is a vertex algebra V over R equipped with a ‘‘conformal element’’ ω and a \mathbb{Z} -grading $V = \bigoplus V_n$, such that

1. If $u \in V_m, v \in V_n$, then $u_k v \in V_{m+n-k-1}$.
2. The coefficients of $Y(\omega, z) = \sum L_n z^{-n-2}$ satisfy Virasoro relations: $[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + c \binom{m+1}{3} \delta_{m+n,0} id_V$.
3. Each V_n is a finite rank projective R -module, and L_0 acts on V_n by $n \cdot id_{V_n}$.

We can also define abelian intertwining algebras over certain subrings of \mathbb{C} , as long as the subrings contain suitable denominators and enough roots of unity.

For the cyclic orbifold construction, we have the following key result

Lemma: Let $V = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} V^{i,j}$ be a self-dual abelian intertwining algebra over \mathbb{C} , where each $V^{i,j}$ is an irreducible $V^{0,0}$ -module, and let $U = \bigoplus V^{0,j}$ and $W = \bigoplus V^{i,0}$. If R is a suitable subring of \mathbb{C} , and we are given self-dual R -forms U_R and W_R such that $U_R \cap V^{0,0} = W_R \cap V^{0,0}$, then they generate a self-dual R -form of V .

To apply this result to the construction of V^{\natural} , we use an intermediate orbifold method introduced in [Abe-Lam-Yamada 2017]:

Theorem: Let $P_0 = \{2, 3, 5, 7, 13\}$. If p, q are distinct in P_0 , and $pq \notin \{65, 91\}$, then there is an automorphism \bar{g} of the Leech lattice of order pq , such that no non-identity power of \bar{g} has fixed points, and an order pq lift $g \in Aut(V_{\Lambda})$. Then:

1. $V_{\Lambda}/g^p \cong V_{\Lambda}/g^q \cong V^{\natural}$
2. $V_{\Lambda}/g \cong V_{\Lambda}$.

In particular, there are 2 copies of V^\natural inside the abelian intertwining algebra $\bigoplus_i V_\Lambda(g^i)$, which is generated by 2 copies of V_Λ .

Corollary: Let p, q be distinct elements of $P_0 = \{2, 3, 5, 7, 13\}$, such that $pq \notin \{65, 91\}$, and let $R_{pq} = \mathbb{Z}[1/pq, e^{\pi\sqrt{-1}/pq}]$. Then, there is a self-dual R_{pq} -form of the abelian intertwining algebra $\bigoplus_i V_\Lambda(g^i)$, and it contains 2 isomorphic self-dual R_{pq} -forms of V^\natural .

5 Monster symmetry

Before we can glue our forms of V^\natural , we need to show that they have full Monster symmetry. There are two reasons for this: First, the symmetry gives us more flexibility in finding isomorphisms between forms so that we can glue. Second, when we have control over symmetry, we can restrict how many isomorphism types can come from gluing.

Recall the Leech lattice Λ has $Co_0 = 2.Co_1$ symmetry. From this, the lattice vertex algebra has symmetry given by $AutV_\Lambda \cong (\mathbb{C}^\times)^{24}.Co_0$, a non-split extension.

Let $p \in P_0$, $\bar{g} \in Co_0$ fixed-point free, order p . Then any order p lift $g \in AutV_\Lambda$ has centralizer $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{24/(p-1)}.Co_{Co_0}(\bar{g})$. The same is true for suitably chosen automorphisms of the R_{pq} -form. We therefore obtain natural actions of large finite groups on abelian intertwining algebras, and on the forms of V^\natural . In particular, the self-dual R_{pq} -forms of V^\natural naturally inherit an action of $G_p = p^{1+24/(p-1)}.(Co_{Co_0}(\bar{g}^q)/\bar{g}^q)$ from an abelian intertwining algebra containing $V_{R_{pq}}^\natural$ and $(V_\Lambda)_{R_{pq}}$ (and similarly for G_q).

We therefore have R_{pq} -forms of V^\natural with actions of the subgroups G_p and G_q of \mathbb{M} . By work of Wilson on maximal subgroups of \mathbb{M} [Wilson 2017], we conclude that the only subgroup of \mathbb{M} containing these groups is \mathbb{M} itself. These forms therefore have monster symmetry.

6 Gluing forms over small rings

We now have a collection of forms of V^\natural over rings R_{pq} , each with monster symmetry, and we wish to show that all of them arise from a form over \mathbb{Z} by tensor product. In commutative algebra, this is known as a descent problem, and we may use the tools of Zariski and faithfully flat descent to prove this. For the data we have, it is easiest to phrase this as a gluing problem:

Definition: Given a diagram $R_1 \rightarrow R_3 \leftarrow R_2$ of commutative rings, a gluing datum for vertex operator algebras is a triple (V^1, V^2, f) , where

1. V^1 is a vertex operator algebra over R_1 ,
2. V^2 is a vertex operator algebra over R_2 , and
3. $f : V^1 \otimes_{R_1} R_3 \rightarrow V^2 \otimes_{R_2} R_3$ is an isomorphism of vertex operator algebras over R_3 .

These form a category, where morphisms are pairs of maps satisfying a commutative square condition.

Proposition: Let $i_1 : R \rightarrow R_1$ and $i_2 : R \rightarrow R_2$ be maps of commutative rings, such that either

1. i_1 and i_2 form a Zariski open cover, or
2. i_1 and i_2 are faithfully flat.

Then, the category of gluing data for $R_1 \rightarrow R_1 \otimes_R R_2 \leftarrow R_2$ is equivalent to the category of vertex operator algebras over R .

The proof of this proposition easily reduces to a gluing problem for modules over commutative rings. I initially thought the gluing problem for modules would follow immediately from effectiveness of faithfully flat descent, but the proof turned out to be unexpectedly tricky.

To construct the gluing data, we first produce isomorphisms between certain fixed-point vertex operator subalgebras by comparing them to vertex operator subalgebras of V_Λ . We then extend them to isomorphisms of forms of V^\natural using the action of elementary abelian subgroups of \mathbb{M} . This is the first place where monster symmetry is essential.

Proposition: Let $R_n = \mathbb{Z}[1/n, e^{\pi\sqrt{-1}/n}]$ and let $g \in pB$. Recall (V^\natural, pB) is orbifold dual to (V_Λ, pa) , and $V_{pq}^g \cong (V_\Lambda)_{R_{pq}}^\sigma$. Then $V_{pq}^g \otimes_{R_{pq}} R_{pqr} \cong (V_\Lambda)_{R_{pqr}}^\sigma \cong V_{pr}^g \otimes_{R_{pr}} R_{pqr}$.

By a theorem in [Wilson 1988], for each $p \in P_0$, there is an elementary subgroup $H_p \subset \mathbb{M}$ of order p^2 , whose non-identity elements lie in conjugacy class pB . V_{pq} and V_{pr} are generated by g -fixed point subalgebras for g ranging over H_p , so $V_{pq} \otimes_{R_{pq}} R_{pqr} \cong V_{pr} \otimes_{R_{pr}} R_{pqr}$ by uniqueness of generated self-dual forms.

From our isomorphisms $V_{pq} \otimes_{R_{pq}} R_{pqr} \cong V_{pr} \otimes_{R_{pr}} R_{pqr}$, we may produce a self-dual \mathbb{Z} -form with \mathbb{M} -symmetry by repeated gluing. Uniqueness comes from the fact that the double coset space $\mathbb{M} \backslash \mathbb{M} / \mathbb{M}$ is a singleton. This is the second place where monster symmetry is essential. The main result is then:

Theorem: There is a unique self-dual \mathbb{Z} -form $V_{\mathbb{Z}}^\natural$ of V^\natural such that $V_{\mathbb{Z}}^\natural \otimes R_{pq} \cong V_{pq}$. This form has \mathbb{M} -symmetry, and the natural inner product is positive definite.

Corollary (Modular moonshine conjecture): For any $g \in pA$, the vertex algebra $\hat{H}^0(g, V_{\mathbb{Z}}^\natural)$ has an action of $C_{\mathbb{M}}(g)$ by automorphisms, and for any p -regular $h \in C_{\mathbb{M}}(g)$, the graded Brauer character is the q -expansion of the Monstrous Moonshine hauptmodul $T_{gh}(\tau)$.

Corollary: There exists a positive definite unimodular lattice of rank 196884 with a faithful monster action.

This lattice is just the weight 2 part of $V_{\mathbb{Z}}^\natural$, and in fact, it carries a commutative non-associative product structure, such that the automorphism group of the algebra is \mathbb{M} . This is essentially a self-dual \mathbb{Z} -form of the Griess algebra, with a slight modification at the identity element.

7 Further questions

References

- [Abe-Lam-Yamada 2017] T. Abe, C. Lam, H. Yamada, *A Remark on \mathbb{Z}_p -orbifold constructions of the moonshine vertex operator algebra* Math. Zeit. **290** no. 1 (2018) 683–697. Available as <https://arxiv.org/abs/1705.09022>
- [Borcherds 1986] R. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **83** no. 10 (1986) 3068–3071.
- [Borcherds 1992] R. Borcherds, *Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras* Invent. Math. **109** (1992) 405–444.
- [Borcherds 1998] R. Borcherds, *Modular moonshine III* Duke Math. J. **93** no. 1 (1998) 129–154.
- [Borcherds 1999] R. Borcherds, *The fake monster formal group* Duke Math. J. **100** no. 1 (1999) 139–165.
- [Borcherds-Ryba 1996] R. Borcherds, A. Ryba, *Modular moonshine II* Duke Math. J. **83** (1996) no. 2, 435–459.
- [Carnahan 2012] S. Carnahan, *Generalized Moonshine IV: Monstrous Lie algebras* ArXiv preprint: <https://arxiv.org/abs/1208.6254>

- [Carnahan 2017a] S. Carnahan, *51 constructions of the moonshine module* Comm. in Number Theory and Physics **12** no. 2 (2018) 305–334. Available as <https://arxiv.org/abs/1707.02954>
- [Carnahan 2017b] S. Carnahan, *A self-dual integral forms of the moonshine module* SIGMA **15** (2019), 030, 36 pages. Available as: <https://arxiv.org/abs/1710.00737>
- [Chen-Lam-Shimakura 2016] H.Y. Chen, C.H. Lam and H. Shimakura *Z3-orbifold construction of the Moonshine vertex operator algebra and some maximal 3-local subgroups of the Monster* Math. Zeit. **288** (2018) 75–100. Available as <https://arxiv.org/abs/1606.05961>
- [Conway-Norton 1979] J. Conway, S. Norton, *Monstrous Moonshine* Bull. Lond. Math. Soc. **11** (1979) 308–339.
- [Dixon-Ginsparg-Harvey 1988] L. Dixon, P. Ginsparg, J. Harvey, *Beauty and the Beast: Superconformal Symmetry in a Monster Module* Commun. Math. Phys. **119** (1988) 221–241.
- [Dong-Lepowsky 1993] C. Dong, J. Lepowsky, *Generalized vertex algebras and relative vertex operators* Progress in Mathematics **112** Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1993).
- [Dong-Li-Mason 1997] C. Dong, H. Li, G. Mason, *Modular invariance of trace functions in orbifold theory* Comm. Math. Phys. **214** (2000) no. 1, 1–56. Available at <https://arxiv.org/abs/q-alg/9703016>
- [van Ekeren-Möller-Scheithauer 2015] J. van Ekeren, S. Möller, N. Scheithauer, *Construction and classification of vertex operator algebras* Jour. reine angew. Math., published online; to appear in print. Available as <https://arxiv.org/abs/1507.08142>
- [Frenkel-Lepowsky-Meurman 1988] I. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, *Vertex operator algebras and the Monster* Pure and Applied Mathematics **134** Academic Press, Inc., Boston, MA, (1988).
- [Griess 1982] R. L. Griess, Jr, *The Friendly Giant* Inventiones Mathematicae **69** (1982) 1–102.
- [Norton 1987] S. Norton, *Generalized moonshine* Proc. Sympos. Pure Math. **47** Part 1, The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata, Calif., 1986), 209–210, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1987).
- [Ryba 1996] A. Ryba, *Modular Moonshine?* In “Moonshine, the Monster, and related topics”, edited by Chongying Dong and Geoffrey Mason. Contemporary Mathematics **193** American Mathematical Society, Providence, RI (1996) 307–336.
- [Thompson 1979] J. Thompson, *Some numerology between the Fischer-Griess Monster and the elliptic modular function* Bull. London Math. Soc. **11** no. 3 (1979) 352–353.

- [Tuite 1993] M. Tuite, *On the relationship between monstrous Moonshine and the uniqueness of the Moonshine module* Comm. Math. Phys. **166** (1995) 495–532. Available as <https://arxiv.org/abs/hep-th/9305057>.
- [Wilson 1988] R. Wilson, *The odd-local subgroups of the monster* J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) **44** (1988) 1–16.
- [Wilson 2017] R. Wilson, *Maximal subgroups of sporadic groups* In “Finite Simple Groups: Thirty Years of the Atlas and Beyond”, edited by Manjul Bhargava, Robert Guralnick, Gerhard Hiss, Klaus Lux, Pham Huu Tiep. Contemporary Mathematics **694** American Mathematical Society, Providence, RI (2017) 57–72. Available as <https://arxiv.org/abs/1701.02095>

志村曲線およびその関数体類似の有理点について

新井 啓介 (東京電機大学)

概要

QM アーベル曲面 (つまり有理数体上の不定符号 4 元数体の極大整環の作用する 2 次元アーベル多様体) のモジュライ空間は, 志村曲線と呼ばれる. 志村曲線の有理点の非存在に関して筆者が得た研究成果を紹介する. また, \mathcal{O} -elliptic sheaf や Drinfeld-Stuhler module と呼ばれるもののモジュライ空間は, 志村曲線の関数体類似になっている. 筆者が最近取り組んでいるこの関数体類似の有理点の非存在に関する研究成果についても, 併せて紹介する. 今回の主結果を用いると, ハッセ原理の反例の具体例を構成することができる. なお, 関数体類似の方の研究は, 近藤智氏と Mihran Papikian 氏との共同研究である.

1 序文 (ハッセ原理の反例)

本節では, ハッセ原理やその反例について具体例を挙げつつ述べる. 次の記号を用いる.

- K : 代数体, つまり有理数体 \mathbb{Q} の有限次拡大体 (例: $K = \mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{2})$),
- Ω_K : K の素点全体の集合,
- K_v : K の $v \in \Omega_K$ での完備化.

例 1.1. $K = \mathbb{Q}$ とすると, $\Omega_K = \{\text{素数}\} \cup \{\infty\}$ (ただし ∞ は無限素点と呼ばれるもの) と自然に同一視される. また

$$K_v = \begin{cases} \mathbb{Q}_p & (v = p \text{ (素数) のとき}), \\ \mathbb{R} & (v = \infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

である.

まず, 方程式

$$x^2 + y^2 + 3 = 0 \tag{1.1}$$

の解を考えよう. 次の同値が成り立つ.

$$\begin{aligned}
 & (1.1) \text{ が } K \text{ に解をもつ} \\
 \iff & \forall v \in \Omega_K \text{ に対して, (1.1) が } K_v \text{ に解をもつ} \\
 \iff & \text{任意の無限素点 } v \in \Omega_K \text{ および } 3 \text{ を割る任意の } v \in \Omega_K \text{ に対して, (1.1) が } K_v \text{ に} \\
 & \text{解をもつ} \\
 \iff & \begin{cases} \text{(i) 体の埋め込み } K \hookrightarrow \mathbb{R} \text{ が存在せず, かつ} \\ \text{(ii) } \forall v \in \Omega_K (v \mid 3) \text{ に対して拡大次数 } [K_v : \mathbb{Q}_3] \text{ が偶数.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

最初の同値は, ハッセ原理 (後述) による. 2 番目の同値は, 次の補題による.

補題 1.2 ([2, 補題 1.1]). (1) (1.1) は 3 以外の全ての素数 p に対して \mathbb{Q}_p に解をもつ.

(2) (1.1) は \mathbb{R}, \mathbb{Q}_3 に解をもたない.

注 1.3. (1) K に解をもつ $\implies \forall v \in \Omega_K$ に対して K_v に解をもつ ($K \subseteq K_v$ だから).

(2) (K 係数の多項式) $= 0$ という方程式に対して,
 「 $\forall v \in \Omega_K$ に対して K_v に解をもつ $\implies K$ にも解をもつ」
 が成り立つとき, ハッセ原理が成り立つという.

(3) 方程式 (1.1) に関して, (任意の代数体 K に対して) ハッセ原理が成り立つ (例えば [2, 第 1 節], [5, Theorem 5.3.3] を参照).

方程式 (1.1): $x^2 + y^2 + 3 = 0$ の解の有無の具体例を, 表 1 に挙げる.

表 1: $x^2 + y^2 + 3 = 0$ の K における解の有無

解なし	解あり
<ul style="list-style-type: none"> • $[K : \mathbb{Q}]$ が奇数 • $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{-2}),$ $\mathbb{Q}(\sqrt{-5}), \mathbb{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{-5})$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$

表 1 に関して, 次のことが言える.

- $[K : \mathbb{Q}]$ が奇数のときや $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ のときは, K は \mathbb{R} の部分体になる.
- 3 は $\mathbb{Q}(\sqrt{-2}), \mathbb{Q}(\sqrt{-5}), \mathbb{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{-5})$ で完全分解し, $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ で惰性し, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ で分岐する.
- 解の存在は

$$1^2 + (2\sqrt{-1})^2 + 3 = 0, \quad 0^2 + (\sqrt{-3})^2 + 3 = 0$$

のように直接確かめることもできる.

以上の考察で見たように, 方程式の代数体における解の有無という難解な問題が, ハッセ原理が成り立つときは比較的易しい局所的な解の有無を調べれば解けてしまう.

次に, 方程式

$$y^2 = -(x^4 + x^3 - x^2 - x + 1)(7x^4 + 23x^3 + 5x^2 - 23x + 7) \quad (1.2)$$

を考える. この方程式が \mathbb{R} に解をもたないことは, 実数の 2 乗は 0 以上ということから分かる ([2, 補題 1.2] を参照). 代数体や局所体における解の有無については, 例えば次のことが分かる.

命題 1.4. $n \in \mathbb{Z}$ を平方因子をもたない奇数, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-13}, \sqrt{2n})$ とするとき, 次が成り立つ.

- (1) (1.2) は K に解をもたない.
- (2) (1.2) は $\forall v \in \Omega_K$ に対して K_v に解をもつ.

注 1.5. (1) 方程式 (1.2) は K 上のハッセ原理の反例を与える. つまり, 方程式 (1.2) は

- (i) 大域的に考えると解をもたないが,
 - (ii) 局所的に考えると至る所で解をもつ.
- (2) ハッセ原理の反例は数論的に面白い現象であり, 上の命題はハッセ原理の反例の無限族を与えている (n が無限通りに変化するから).

ここで, 代数体と関数体の類似はよく知られている. 表 2 に \mathbb{Q} と $\mathbb{F}_q(T)$ の類似をまとめる. \mathbb{F}_q は, 元の個数が q であるような有限体である.

表 2: \mathbb{Q} と $\mathbb{F}_q(T)$ の類似

代数体側	関数体側
\mathbb{Q}	$F = \mathbb{F}_q(T)$
\mathbb{Z}	$A = \mathbb{F}_q[T]$
素数 l	既約モニック多項式 $f \in A \setminus \mathbb{F}_q$
無限素点 ∞	$\frac{1}{T} \in F$
\mathbb{Q}_l	F_f
\mathbb{R}	$\mathbb{F}_q(\left(\frac{1}{T}\right))$
有限次拡大 K/\mathbb{Q}	有限次拡大 K/F
整数環 $\mathcal{O}_K (\subseteq K)$	“整数環” $\mathcal{O}_K (\subseteq K)$
楕円曲線 E/K	Drinfeld module ϕ/K
QM アーベル曲面 A/K	Drinfeld-Stuhler \mathcal{O}_D -module ϕ/K
志村曲線 M^B/\mathbb{Q}	Drinfeld-Stuhler variety X^D/F

表 2 の関数体側において, F_f は F の f での完備化を表し, $\mathcal{O}_K = \{x \in K \mid x \text{ は } A \text{ 上整}\}$ (つまり A の K における整閉包) である.

2 志村曲線の有理点 [代数体側]

本節では、志村曲線の代数体上の有理点の非存在に関する結果、およびハッセ原理の反例への応用について述べる。次の記号や用語を用いる。

- B : \mathbb{Q} 上の不定符号 4 元数体
(特に, $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R})$, $B \not\cong M_2(\mathbb{Q})$),
- $\mathbf{Ram}(B) := \{ p: \text{素数} \mid B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \not\cong M_2(\mathbb{Q}_p) \}$
(このとき $\mathbf{Ram}(B)$ は空でない有限集合で, 偶数個の元より成る),
- $\mathcal{O} = \mathcal{O}_B \subseteq B$: 極大整環を 1 つ固定
(ここで任意の極大整環は $a\mathcal{O}a^{-1}$, $a \in B$ の形である),
- 体 L 上の \mathcal{O}_B による QM アーベル曲面 (A, i) :

$$\begin{cases} A: L \text{ 上の 2 次元アーベル多様体,} \\ i: \mathcal{O}_B \hookrightarrow \text{End}_L(A): i(1) = 1 \text{ を満たす環の単射準同型} \end{cases}$$

(ただし $\text{End}_L(A)$ は A の L 上定義された自己準同型から成る環であり, また (A, i) を単に A と記すこともある),

- M^B : \mathcal{O}_B による QM アーベル曲面の粗モジュライ.

このとき M^B は \mathbb{Q} 上の固有スムーズ代数曲線であり, 志村曲線と呼ばれる。 M^B の有理点に関して, 次の定理は基本的である。

定理 2.1. [15, Theorem 0]

$$M^B(\mathbb{Q}) = M^B(\mathbb{R}) = \emptyset.$$

例 2.2. $\mathbf{Ram}(B) = \{ 2, 3 \}$ なら, M^B の定義方程式をアフィン形で表すと, 例えば

$$(1.1): x^2 + y^2 + 3 = 0$$

となる ([9, Theorem 1-1]). この方程式は \mathbb{Q} にも \mathbb{R} にも解をもたない。実際は M^B は射影曲線なので, 同次形

$$X^2 + Y^2 + 3Z^2 = 0$$

で表される。無限遠点も含めた有理点の正確な議論は, [2] を参照。

主定理の定式化のために, 記号を導入する。素数 q に対し, $\mathcal{B}(q)$ で次を満たす \mathbb{Q} 上の不定符号 4 元数体 B の (同型類の) 集合を表す。

$$\begin{cases} q \neq 2 \text{ なら} \\ \quad B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{-q}) \not\cong M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{-q})), \\ q = 2 \text{ なら} \\ \quad B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{-1}) \not\cong M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{-1})) \quad \text{かつ} \quad B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{-2}) \not\cong M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{-2})). \end{cases}$$

$\mathcal{B}(q)$ は, 標数 q の有限体上の QM アーベル曲面の自己準同型環の分類と関係している。今回の代数体側の主定理を挙げる。

定理 2.3. [1, Theorem 1.1]

- \mathfrak{q} : O_K の極大イデアル, 剰余標数は q ,
- \mathfrak{q} は q の上の唯一の極大イデアル,
- $f_{\mathfrak{q}} := [\kappa(\mathfrak{q}) : \mathbb{F}_q]$ は奇数 (ただし $\kappa(\mathfrak{q})$ は \mathfrak{q} の剰余体),
- $B \in \mathcal{B}(q)$

とすると, 素数の計算可能な有限集合 $S(K, \mathfrak{q})$ があって次を満たす.

「素数 p で $p \in \mathbf{Ram}(B)$, $p \notin S(K, \mathfrak{q}) \cup \{q\}$ なるものがあれば, $M^B(K) = \emptyset$ 」.

注 2.4. (1) $[K : \mathbb{Q}] = 2$ の場合は既に知られている ([7, Theorem 6.3], [13, Theorem 1.1]).

(2) $S(K, \mathfrak{q})$ は実際は $\kappa(\mathfrak{q})$ の元の個数 $q^{f_{\mathfrak{q}}}$ と, \mathfrak{q} の K/\mathbb{Q} での分岐指数 $e_{\mathfrak{q}}$ に依存する.

(3) 各条件は, 具体的な計算でチェックできる $\implies M^B(K) = \emptyset$ の具体例が作れる.

例 2.5. $\mathbf{Ram}(B) = \{3, 13\}$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-13}, \sqrt{2n})$ (ただし $n \in \mathbb{Z}$ は平方因子をもたない奇数) とすると, $(p, q) = (13, 2)$ として定理 2.3 を適用して,

$$M^B(K) = \emptyset$$

を得る (ここで $S(K, \mathfrak{q}) = \{2, 3, 5, 7, 47\}$ である). また, M^B の局所体上の有理点の存在のための必要十分条件 [8, Theorems 2.5, 5.1, 5.4, 5.6] (または [7, Theorem 0]) を用いて,

$$\text{任意の } v \in \Omega_K \text{ に対して } M^B(K_v) \neq \emptyset$$

が分かる. さらに [6, Theorem 4.5] により, M^B の定義方程式をアフライン形で表すと, 例えば

$$(1.2): y^2 = -(x^4 + x^3 - x^2 - x + 1)(7x^4 + 23x^3 + 5x^2 - 23x + 7)$$

となる. これより命題 1.4 が従う. 実際は M^B は射影曲線 (さらに言えば超楕円曲線) であり, 無限遠点も含めた有理点の正確な議論は, [2] を参照.

志村曲線の有理点に関する研究の動向については, [3] を参照.

3 Drinfeld-Stuhler variety の有理点 [関数体側]

本節では, 前節の関数体類似を述べる. すなわち, Drinfeld-Stuhler variety の関数体上の有理点の非存在に関する結果, およびハッセ原理の反例への応用について述べる. 関数体側の理論に馴染みのある読者は多くないと思われるため, まず Drinfeld module や Drinfeld-Stuhler module について簡単に説明する.

[Drinfeld module の説明]

次の記号や用語を用いる. 2 節 [代数体側] と同じ記号が違う意味に使われている場合もあるので, 注意されたい.

- p : 素数, $q = p^r$ ($r \in \mathbb{Z}, r \geq 1$),
- $F = \mathbb{F}_q(T), A = \mathbb{F}_q[T]$,
- L : A -field, つまり L は体で, $\gamma(1) = 1$ を満たす環準同型 $\gamma : A \rightarrow L$ が与えられているもの (例: $L = F$ で γ は包含写像, $L = A/TA \cong \mathbb{F}_q$ で γ は標準全射),
- $L[\tau] := \{ a_n \tau^n + \cdots + a_1 \tau + a_0 \mid n \geq 0, a_i \in L \}$,
 演算 $\left\{ \begin{array}{l} \text{和: 普通のやり方,} \\ \text{積: } \tau a = a^q \tau \ (a \in L) \end{array} \right\}$ により, $L[\tau]$ は ($L \cong \mathbb{F}_q$ の場合を除いて) 非可換環になる,
- $\partial : L[\tau] \rightarrow L; \sum_{i=0}^n a_i \tau^i \mapsto a_0$,
- L 上の **Drinfeld module** とは:
 \mathbb{F}_q 代数の準同型

$$\phi : A (= \mathbb{F}_q[T]) \rightarrow L[\tau]; a \mapsto \phi_a$$

で次を満たすもの.

$$\left\{ \begin{array}{l} (0) \phi_1 = 1, \\ (1) \partial \circ \phi(a) = \gamma(a) \in L \quad (\forall a \in A), \\ (2) \phi(A) \not\subseteq L. \end{array} \right.$$

注 3.1. (1) Drinfeld module ϕ は T の像 ϕ_T によって決まる.

$$(2) \phi_T = \gamma(T) + \sum_{i=1}^r a_i \tau^i \in L[\tau] \quad (r \geq 1, a_i \in L, a_r \neq 0)$$

という形に表される. この r は ϕ のランクと呼ばれ, ϕ の「大きさ」を表す. r は ϕ の Tate 加群のランクに等しい.

(3) ϕ は単射になる.

例 3.2. (1) $\phi_T = \gamma(T) + \tau$ (ランク 1). これは Carlitz module と呼ばれ, Drinfeld module の原型とでも言うべきものである.

$$(2) \phi_T = \gamma(T) + \tau + \tau^2 \quad (\text{ランク } 2).$$

先の定義によれば, Drinfeld module ϕ は (いくつかの条件を満たす) 環の準同型である. 実は, ϕ は次のような幾何的な見方をすることもできる. まず,

$$\mathbb{G}_a = \mathbb{G}_{a,L} = \text{Spec } L[X]$$

には, 次のように L 上の群スキームの構造が入る. \mathbb{G}_a は加法群と呼ばれる.

- $+: \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a \rightarrow \mathbb{G}_a$ は
 $L[X] \rightarrow L[X] \otimes_L L[X]; X \mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X,$
- $-1: \mathbb{G}_a \rightarrow \mathbb{G}_a$ は
 $L[X] \rightarrow L[X]; X \mapsto -X,$
- $0: \text{Spec } L \rightarrow \mathbb{G}_a$ は
 $L[X] \rightarrow L; X \mapsto 0$
 から定まる.

$$\text{End}_L(\mathbb{G}_a) := \{ f: \mathbb{G}_a \rightarrow \mathbb{G}_a \mid f \text{ は } L \text{ 上の群スキームの射} \}$$

とおく. これは L 代数になる.

補題 3.3. L 代数として,

$$L[\tau] \cong \text{End}_L(\mathbb{G}_a).$$

ここに, τ は $\mathbb{G}_a = \text{Spec } L[X]$ に $\tau(X) = X^q, \tau(a) = a$ ($a \in L$) として作用する.

この補題より, Drinfeld module $\phi: A \rightarrow L[\tau]$ は

$$\phi: A \rightarrow L[\tau] \cong \text{End}_L(\mathbb{G}_a)$$

となり, A の作用する \mathbb{G}_a と思える. この作用のしかたがいろいろあり, それによって様々な Drinfeld module ができる. (\mathbb{G}_a は 1 次元である. ランク 2 の場合が最も楕円曲線に性質に近い.)

[Drinfeld-Stuhler module の説明]

次の記号や用語を用いる.

- p : 素数, $q = p^r$ ($r \in \mathbb{Z}, r \geq 1$),
- $F = \mathbb{F}_q(T), A = \mathbb{F}_q[T],$
- L : A -field,
- $L[\tau] := \{ a_n \tau^n + \cdots + a_1 \tau + a_0 \mid n \geq 0, a_i \in L \},$
 $\tau a = a^q \tau$ ($a \in L$).

ここまでは, Drinfeld module の場合と同じである.

- $d \in \mathbb{Z}, d \geq 1$ を固定,
- D : F 上の中心的単純環, $\dim_F D = d^2$
 (例: $D = M_d(F)$),
- $D \otimes_F \mathbb{F}_q((\frac{1}{T})) \cong M_d(\mathbb{F}_q((\frac{1}{T})))$ と仮定
 (この条件は志村曲線のときの $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R})$ の類似),

- $\text{Ram}(D) := \{ f \in A \setminus \mathbb{F}_q: \text{既約モニック} \mid D \otimes_F F_f \not\cong M_d(F_f) \}$,
- $\mathcal{O} = \mathcal{O}_D \subseteq D$: 極大整環, 1 つ固定,
- L 上の **Drinfeld-Stuhler \mathcal{O}_D -module** とは:
 \mathbb{F}_q 代数の単射準同型

$$\phi : \mathcal{O}_D \longrightarrow M_d(L[\tau]) (\cong \text{End}_L(\mathbb{G}_a^d)); a \mapsto \phi_a$$

で次を満たすもの.

$$\left\{ \begin{array}{l} (0) \phi_1 = 1, \\ (1) \partial \circ \phi(a) = \begin{pmatrix} \gamma(a) & & O \\ & \ddots & \\ O & & \gamma(a) \end{pmatrix} \in M_d(L) \quad (\forall a \in A \subseteq \mathcal{O}_D) \\ \quad \quad \quad (\text{ここに } \partial : M_d(L[\tau]) \longrightarrow M_d(L); \sum_{i=0}^n B_i \tau^i \mapsto B_0, \text{ ただし } B_i \in M_d(L)), \\ (2) 0 \neq \forall b \in \mathcal{O}_D \text{ に対して, } \ker(\phi_b : \mathbb{G}_a^d \longrightarrow \mathbb{G}_a^d) (\subseteq \mathbb{G}_a^d) \text{ は } L \text{ 上の位数} \\ \quad \quad \quad \#(\mathcal{O}_D/(\mathcal{O}_D \cdot b)) \text{ の有限群スキーム.} \end{array} \right.$$

注 3.4. (1) Drinfeld-Stuhler \mathcal{O}_D -module ϕ は, \mathcal{O}_D の作用する \mathbb{G}_a^d と考える (\mathbb{G}_a^d は d 次元).

(2) $d = 1$

$\implies \mathcal{O}_D = A$, Drinfeld-Stuhler \mathcal{O}_D -module ϕ はランク 1 の Drinfeld module.

(3) $d = 2$

$\implies \phi$ は (狭い意味で) QM アーベル曲面の類似.

(4) 正標数での局所 Langlands 対応という文脈で, \mathcal{D} -elliptic sheaf というものが出てきた ([10]). \mathcal{D} -elliptic sheaf の定義は複雑で分かりづらいように思われる. Drinfeld-Stuhler \mathcal{O}_D -module は \mathcal{D} -elliptic sheaf を分かりやすく表現し直したものと理解することができる.

ここで,

- X^D : “Drinfeld-Stuhler \mathcal{O}_D -module の粗モジュライ”
(厳密には \mathcal{D} -elliptic sheaf の粗モジュライ)

とする. D が斜体なら X^D は F 上の固有スムーズ代数多様体であり, **Drinfeld-Stuhler variety** と呼ばれる. また,

$$\dim X^D = d - 1$$

である. X^D は志村曲線 M^B の広い意味での類似である. $d = 2$ なら $\dim X^D = 1$ であり, X^D は M^B の狭い意味での類似である. 今回の関数体側の主定理を挙げる.

定理 3.5. [4, Theorem 6.10]

- K は F の拡大体で $[K : F] = d$, $D \otimes_F K \cong M_d(K)$,
- $\mathfrak{n} \in A \setminus \mathbb{F}_q$: 既約モニック, K で完全分岐,
- $\forall \mu \in \mathbb{F}_q^\times$ に対して $D \otimes_F F(\sqrt[d]{\mu \mathfrak{n}}) \not\cong M_d(F(\sqrt[d]{\mu \mathfrak{n}}))$,
- $\mathfrak{n} \notin \mathbf{Ram}(D)$,
- $\mathfrak{p} \in \mathbf{Ram}(D)$, $\text{inv}_{\mathfrak{p}}(D) = \frac{1}{d}$ ($\in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \text{Br}(F_{\mathfrak{p}})$)

とすると, $A \setminus \mathbb{F}_q$ の既約モニック多項式の計算可能な有限集合 $S(K, \mathfrak{n}, \deg(\mathfrak{p}))$ があって次を満たす.

$$\left[\mathfrak{p} \notin S(K, \mathfrak{n}, \deg(\mathfrak{p})) \implies X^D(K) = \emptyset \right].$$

注 3.6. (1) $F_{\mathfrak{p}}$ は F の \mathfrak{p} での完備化であり, $\text{Br}(F_{\mathfrak{p}})$ は $F_{\mathfrak{p}}$ のブラウアー群であり, $\text{inv}_{\mathfrak{p}}(D)$ は $D \otimes_F F_{\mathfrak{p}}$ の $\text{Br}(F_{\mathfrak{p}})$ における不変量である.

(2) 仮定「 $[K : F] = d$, $D \otimes_F K \cong M_d(K)$ 」は弱められそうである.

(3) 仮定 $\mathfrak{p} \notin S(K, \mathfrak{n}, \deg(\mathfrak{p}))$ では, 例外集合 $S(K, \mathfrak{n}, \deg(\mathfrak{p}))$ が \mathfrak{p} に依存する (代数体側では例外集合 $S(K, \mathfrak{q})$ は p に依存しなかった). このため, 仮定を満たす \mathfrak{p} は具体例を探す際に少し見つけにくくなっている. この違いが生じる原因は, 関数体は代数体とは異なり「定数拡大」(つまり $\mathbb{F}_q(T)$ に対して $\mathbb{F}_{q^n}(T)$ という拡大) をもつことにある. このために, 代数体側と関数体側では類体論を用いたガロア群の指標の計算に違いが出る.

例 3.7. $d = 2$, $q = 5$, $\mathbf{Ram}(D) = \{T^3 + 2T + 4, T + 2\}$, $K = F(\sqrt{2T(T^3 + 2T + 4)(T + 2)})$ とすると, $(\mathfrak{p}, \mathfrak{n}) = (T^3 + 2T + 4, T)$ として定理 3.5 を適用して,

$$X^D(K) = \emptyset$$

を得る. また, $d = 2$ の場合の X^D の局所体上の有理点の存在のための必要十分条件 [11, Theorems 3.1, 4.1, 5.10] を用いて,

$$\forall v \in \Omega_K \text{ に対して } X^D(K_v) \neq \emptyset$$

が分かる. これより K 上のハッセ原理の反例が得られる (代数多様体に関するハッセ原理については, [16] を参照). ただし, この場合の X^D の定義方程式は知られていないようである.

4 証明の方針

[定理 2.3 の証明の方針 (代数体側)]

M^B は精モジュライではなく粗モジュライであるため, M^B の K 有理点は K 上の QM アーベル曲面と対応するとは限らない. 実際には, 次の定理が成り立つ.

定理 4.1 ([7, Theorem 1.1]). F を標数 0 の体とし, $x \in M^B(F)$ とする. このとき, x が F 上の QM アーベル曲面 (A, i) と対応するための必要十分条件は, $B \otimes_{\mathbb{Q}} F \cong M_2(F)$ である.

定理 2.3 の仮定の下で $M^B(K) \neq \emptyset$ だったとして, 矛盾を導く. $x \in M^B(K)$ をとる. $B \otimes_{\mathbb{Q}} K \cong M_2(K)$ とすると, 定理 4.1 より x は K 上の QM アーベル曲面 (A, i) と対応する. ($B \otimes_{\mathbb{Q}} K \not\cong M_2(K)$ のときは, $B \otimes_{\mathbb{Q}} L \cong M_2(L)$ となるような K の 2 次拡大 L をとると, x は L 上の QM アーベル曲面 (A, i) と対応する. このことを利用して証明を行うが, ここでは詳細は略す.)

p を素数, $n \geq 1$ を整数として,

$$A[p^n] := \ker([p^n] : A(\overline{K}) \rightarrow A(\overline{K})),$$

$$T_p A := \varprojlim (A[p] \leftarrow A[p^2] \leftarrow \cdots)$$

とする. ここに \overline{K} は K の代数閉包, $[p^n] : A(\overline{K}) \rightarrow A(\overline{K})$ は (アーベル群の) p^n 倍写像, \varprojlim の中の各 $A[p^n] \leftarrow A[p^{n+1}]$ は p 倍写像である. すると

$$A[p] \cong \mathcal{O}/p\mathcal{O},$$

$$T_p A \cong \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$$

となる. $A[p]$ は \mathbb{F}_p 線形空間としては 4 次元であり, $T_p A$ は \mathbb{Z}_p 加群としては自由でランク 4 である. $A[p]$ および $T_p A$ へのガロア群 $G_K := \text{Gal}(\overline{K}/K)$ の作用から, それぞれガロア表現

$$R : G_K \rightarrow (\mathcal{O}/p\mathcal{O})^\times,$$

$$\tilde{R} : G_K \rightarrow (\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^\times$$

が定まる.

$p \in \mathbf{Ram}(B)$ とすると,

$$\mathcal{O}/p\mathcal{O} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & a^p \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F}_{p^2}) \right\}, \quad (\mathcal{O}/p\mathcal{O})^\times \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & a^p \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_{p^2}) \right\}$$

となり ([17, Chapitre II, Corollaire 1.7] または [14, 補題 3.13 の証明] を参照), R の (1, 1) 成分から指標 (つまり群の準同型)

$$\varrho : G_K \rightarrow \mathbb{F}_{p^2}^\times$$

が生じる. A は K の全ての有限素点で potentially good reduction をもち, \mathfrak{q} の上での (体拡大した後の) 還元は $\kappa(\mathfrak{q})$ 上の QM アーベル曲面になる (これを $A_{\kappa(\mathfrak{q})}$ と表すこと

にする). $p \neq q$ とする. R, \tilde{R} や ϱ の q でのフロベニウスの像は, $A_{\kappa(q)}$ のフロベニウス自己準同型の作用を通して理解できる. q の一意性の仮定は, 大域類体論を用いた ϱ の q での計算に使われる. \tilde{R} による q でのフロベニウスの像の被約トレース a は整数になるが, $p \notin S(K, q)$ なら a は q で割れる. この $p \notin S(K, q)$ という条件は, a や q に関係した整数の間の $\text{mod } p$ の合同式を等式にするための条件である. f_q が奇数であることと有限体上の QM アーベル曲面 $A_{\kappa(q)}$ の自己準同型環の分類により, $B \notin \mathcal{B}(q)$ となり, 矛盾が生じる. ゆえに $M^B(K) = \emptyset$ が従う. \square

[定理 3.5 の証明の方針 (関数体側)]

大雑把な方針は代数体側と同様である. 定理 4.1 の類似として, 次の定理が成り立つ.

定理 4.2 ([12, Theorem 6.13]). L を A -field とし, $\ker(\gamma : A \rightarrow L) = fA$, ただし $f \in A$ は 0 または既約モニックとなるようにとる. $f \notin \mathbf{Ram}(D)$ と仮定し, また $x \in X^D(L)$ とする. このとき, x が L 上の Drinfeld-Stuhler \mathcal{O}_D -module ϕ と対応するための必要十分条件は, $\mathcal{O}_D \otimes_A L \cong M_d(L)$ である.

定理 3.5 の仮定の下で $X^D(K) \neq \emptyset$ だったとして, $x \in X^D(K)$ をとる.

$$\ker(\gamma : A \rightarrow K) = \{0\}$$

および

$$\mathcal{O}_D \otimes_A K \cong (\mathcal{O}_D \otimes_A F) \otimes_F K \cong D \otimes_F K \cong M_d(K)$$

より, 定理 4.2 から x は K 上の Drinfeld-Stuhler \mathcal{O}_D -module ϕ と対応する. $\mathfrak{p} \in A \setminus \mathbb{F}_q$ を既約モニックとして,

$$\phi[\mathfrak{p}] := \ker([\phi_{\mathfrak{p}}] : (K^{\text{sep}})^d \rightarrow (K^{\text{sep}})^d)$$

とする. ここに K^{sep} は K の分離閉包, $[\phi_{\mathfrak{p}}]$ は $\phi_{\mathfrak{p}} \in \text{End}_K(\mathbb{G}_a^d)$ が定める群準同型である. すると

$$\phi[\mathfrak{p}] \cong \mathcal{O}/\mathfrak{p}\mathcal{O}$$

となる. $\phi[\mathfrak{p}]$ は $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$ ($:= A/\mathfrak{p}A$) 線形空間として d^2 次元である. $\phi[\mathfrak{p}]$ へのガロア群 $G_K := \text{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$ の作用から, ガロア表現

$$R : G_K \rightarrow (\mathcal{O}/\mathfrak{p}\mathcal{O})^{\times}$$

が定まる.

$\mathfrak{p} \in \mathbf{Ram}(D)$ とすると, $\text{inv}_{\mathfrak{p}}(D) = \frac{1}{d}$ より

$$(\mathcal{O}/\mathfrak{p}\mathcal{O})^{\times} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_d \\ 0 & a_1^{q^s} & a_2^{q^s} & \cdots & a_{d-1}^{q^s} \\ 0 & 0 & a_1^{q^{2s}} & \cdots & a_{d-2}^{q^{2s}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1^{q^{(d-1)s}} \end{pmatrix} \in \text{GL}_d(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}^{(d)}) \right\}$$

(ただし $\mathbb{F}_p^{(d)}$ は \mathbb{F}_p の d 次拡大体, $\#\mathbb{F}_p = q^s$) となり, R の $(1, 1)$ 成分から指標

$$\varrho : G_K \longrightarrow (\mathbb{F}_p^{(d)})^\times$$

が生じる. ϕ は K の全ての有限素点で potentially good reduction をもち, \mathfrak{n} の上での (体拡大した後の) 還元は \mathbb{F}_n 上の Drinfeld-Stuhler \mathcal{O}_D -module になる (これを $\phi_{\mathbb{F}_n}$ と表すことにする). $\mathfrak{n} \notin \mathbf{Ram}(D)$ とする. $\phi_{\mathbb{F}_n}$ のフロベニウス自己準同型の最小多項式の係数を, ϱ の計算を通して調べる. ここで, \mathfrak{n} が K で完全分岐, $\mathfrak{p} \notin S(K, \mathfrak{n}, \deg(\mathfrak{p}))$ という仮定を用いる. $\mathfrak{n} \notin \mathbf{Ram}(D)$ のときの $\phi_{\mathbb{F}_n}$ の自己準同型環の分類より, ある $\mu \in \mathbb{F}_q^\times$ に対して $D \otimes_F F(\sqrt[d]{\mu\mathfrak{n}}) \cong M_d(F(\sqrt[d]{\mu\mathfrak{n}}))$ となり, 矛盾が生じる. ゆえに $X^D(K) = \emptyset$ が従う. \square

モジュライの有理点問題は, 代数体側ではいろいろな研究があるが, 関数体側ではあまり開拓されていないようである. そのため, 関数体側では今後発展する余地が大いにあると思われる. なお, 講演原稿は以下のウェブアドレス上にある.

<https://www.cck.dendai.ac.jp/~araik/>

謝辞

2019年9月に東北大学において第64回代数学シンポジウムが行われた. 本稿は, そこでの筆者の講演にもとづいて作成されたものである. 講演の機会を与えてくださった関係者の方々, 特にシンポジウム責任者の金銅誠之氏 (名古屋大学), 数論のプログラム責任者の市野篤史氏 (京都大学), 安福悠氏 (日本大学), および会場責任者の山崎隆雄氏 (東北大学) に感謝したい.

本研究は科研費 (16K17578) の助成を受けたものである.

参考文献

- [1] K. Arai, *Non-existence of points rational over number fields on Shimura curves*, Acta Arith. **172** (2016), no. 3, 243–250.
- [2] 新井 啓介, ディオファントス問題と志村曲線の有理点, 第10回福岡数論研究集会報告集, 2017年1月, 83–92.
- [3] K. Arai, *A survey of rational points on Shimura curves*, Algebraic number theory and related topics 2015, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B72** (2018), 197–207.
- [4] K. Arai, S. Kondo, M. Papikian, *Drinfeld-Stuhler modules and the Hasse principle*, preprint (<https://arxiv.org/pdf/1908.08678>).
- [5] H. Cohen, Number theory. Vol. I. Tools and Diophantine equations, Graduate Texts in Mathematics, 239. Springer, New York, 2007.

- [6] J. González, S. Molina, *The kernel of Ribet's isogeny for genus three Shimura curves*, J. Math. Soc. Japan **68** (2016), no. 2, 609–635.
- [7] B. Jordan, *Points on Shimura curves rational over number fields*, J. Reine Angew. Math. **371** (1986), 92–114.
- [8] B. Jordan, R. Livné, *Local Diophantine properties of Shimura curves*, Math. Ann. **270** (1985), no. 2, 235–248.
- [9] A. Kurihara, *On some examples of equations defining Shimura curves and the Mumford uniformization*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **25** (1979), no. 3, 277–300.
- [10] G. Laumon, M. Rapoport, U. Stuhler, *\mathcal{D} -elliptic sheaves and the Langlands correspondence*, Invent. Math. **113** (1993), no. 2, 217–338.
- [11] M. Papikian, *Local Diophantine properties of modular curves of \mathcal{D} -elliptic sheaves*, J. Reine Angew. Math. **664** (2012), 115–140.
- [12] M. Papikian, *Drinfeld-Stuhler modules*, Res. Math. Sci. **5** (2018), no. 4, Paper No. 40, 33 pp.
- [13] V. Rotger, C. de Vera-Piquero, *Galois representations over fields of moduli and rational points on Shimura curves*, Canad. J. Math. **66** (2014), no. 5, 1167–1200.
- [14] 清水英男, 保型関数 I–III, 第2版. 岩波書店基礎数学, 8. 代数, vii. 岩波書店, 東京, 1984.
- [15] G. Shimura, *On the real points of an arithmetic quotient of a bounded symmetric domain*, Math. Ann. **215** (1975), 135–164.
- [16] A. Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics, 144, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [17] M.-F. Vignéras, *Arithmétique des algèbres de quaternions*, Lecture Notes in Mathematics, 800, Springer, Berlin, 1980.

p 進浅井 L 関数とその周辺

並川健一

概要

p 進浅井 L 関数の構成について、得られた結果を紹介する。その結果が、Coates-Perrin-Riou による p 進 L 関数の存在予想と整合的であることを解説する。

1. 序

1.1. 本稿の目的. L 関数は、数論の様々な分野にまたがる研究対象の一つである。とくに類数公式、BSD 予想など、 L 関数の特殊値から数論的な情報が得られることが期待されており、様々な方面から研究が行われている。本稿では特に L 関数の p 進版の存在予想に焦点を当てて、解説を試みる。

L 関数は、代数多様体や、保型表現といった対象に対し定義される正則関数だが、 \mathbf{C} 上の位相とは全く異なる p 進的な位相の情報をもつことがある。実際に、これは p 進 L 関数の存在を示唆しており、イデアル類群の p 進族などの岩澤理論的な対象を記述することが期待されている。

多くの研究から、 p 進 L 関数の存在は確かだと思われる。しかしながら実際に知られている構成でも、技巧的なものが多く、存在しても期待よりも弱い形であったり、実際どういった対象にどういった p 進 L 関数が存在すべきかといったことについては、未知の部分が多い。

本稿では、今一度、 p 進 L 関数の存在予想について書かれた文献 [CPR89], [Co89] を振り返り、 p 進 L 関数の構成に必要な用語や性質についてまとめた。またそれに従って、著者が最近得た p 進浅井 L 関数 ([Na]) について記述する。新しいクラスの p 進 L 関数を構成しようというときに、与えられた状況に対し、 p 進 L 関数はどのような性質を持っているべきか、考察しなくてはならない。今回得られた結果と過去の研究との比較、今後期待される研究の方向性を考察する意味も込めて、 p 進 L 関数の存在予想について紙面を費やすこととした。

p 進 L 関数の岩澤理論における位置付け、存在意義については、[落合 15, 4 章], [落合 16, 5.3.2 章, 6.6.1 章] に多くが語られている。本稿ではこれらの文献ではあまり前面には現れていない p 進 L 関数の構成における保型表現の役割について、強調して解説している。数論における保型表現の有用性は疑いようがないが、岩澤理論においても強力な研究手段であるということの一端を感じ取って頂ければ、幸いである。

1.2. 本稿の構成. まず L 関数とはどういう対象であったか 2 節で復習する。古典的な例だが、研究動機を与えるような例でもあるので、簡単に復習することとした。またこれらの例から、 L 関数の研究には、より一般的な言語が必要であることを再認識したい。3 節では一般的な言語である保型表現論とモチーフについて、[Cl90] による記述を紹介する。4 節では、[CPR89], [Co89] による p 進 L 関数の存在予想を記述し、5 節では、いくつかの場合に存在予想を書き下している。とくに今回の研究で得られた p 進浅井 L 関数について、過去の研究と比較する形で、その具体的な表示を紹介している。 p 進浅井 L 関数の構成は、6 節で紹介する。詳細はプレプリント ([Na]) にゆずることとして、大まかな議論や、技術的に重要な部分のみを記述している。

1.3. 記号, 用語. $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ はそれぞれ有理整数環, 有理数体, 実数体, 複素数体を表す。代数体 F に対し, $F_{\mathbf{A}}$ で F のアデール環を表す。 Σ_F で F の素点のなす集合を表し, $v \in \Sigma_F$ に対し, F_v で F の v での完備化を表す。 $x \in F_{\mathbf{A}}, v \in \Sigma$ に対し, $x_v \in F_v$ で, x の F_v 成分への射影を表す。

$\psi = \otimes_{v \in \Sigma_{\mathbf{Q}}} \psi_v : \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q}_{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{C}^{\times}$ で加法指標であって, $\psi_{\infty}(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$ ($x \in \mathbf{R}$) となるものとする。 ($\infty \in \Sigma_{\mathbf{Q}}$ は, \mathbf{Q} の無限素点を表す。) これは本稿を通して、固定する。

素数 p に対し, \mathbf{C}_p で \mathbf{Q}_p の代数閉包の完備化を表す。本稿では常に体としての同型 $\mathbf{i}_p : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_p$ を固定する。また \mathbf{Q} の代数閉包 $\overline{\mathbf{Q}}$ の \mathbf{C} への埋め込みも固定し, $\overline{\mathbf{Q}}$ を \mathbf{C}_p の部分体とみなす。 ord_p で \mathbf{C}_p の p 進付値で, $\text{ord}_p(p) = 1$ であるものとする。 $x \in \overline{\mathbf{Q}}$ に対し, $\text{ord}_p(x)$ と書くときには、固定された埋め込みを用いて, $x \in \mathbf{C}_p$ の元とみなしている。

L 関数は全て完全 L 関数をあらわす. 例えば, 代数体 F 上のモチーフ \mathcal{M} に対し,

$$L(s, \mathcal{M}) = \prod_{v \in \Sigma_F} L_v(s, \mathcal{M}) = L_\infty(s, \mathcal{M}) L^{(\infty)}(s, \mathcal{M}),$$

$$L_\infty(s, \mathcal{M}) = \Gamma(s, \mathcal{M}), L^{(\infty)}(s, \mathcal{M}) = \prod_{v \in \Sigma_F, v < \infty} L_v(s, \mathcal{M})$$

などとかく. ただし, $\Gamma(s, \mathcal{M})$ は \mathcal{M} の Γ 因子. $L_\infty(s, \mathcal{M})$ は, 無限素点での L 因子の積だが, 慣例に従って Γ 因子ともいう.

2. 古典的な例

2.1. **Dirichlet 指標, 楕円保型形式の L 関数.** ここでは, 最も基本的と思われる Dirichlet 指標と, 楕円保型形式に付随する L 関数について復習する.

$N \in \mathbf{Z}, N \geq 1$ とし, 指標 $\chi: (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ を N を法とした Dirichlet 指標とよぶ. N を法とした Dirichlet 指標 χ に対して, 次を満たす χ を原始的という.

- 正整数 $M \mid N$ であって, χ が $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \rightarrow (\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})^\times$ を経由するとき, $M = N$.

以下, $\chi: (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ は原始的とし, この N を χ の導手という. このとき, χ に付随する Dirichlet L 関数 $L(s, \chi)$ を次で定義する:

$$(2.1) \quad L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad (s \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}(s) > 1).$$

これは有理型に解析接続され, 関数等式を持つ. さらに次の Euler 積をもつ:

$$L(s, \chi) = \prod_{p: \text{prime}, p \nmid N} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}.$$

次に楕円尖点形式の L 関数を復習する. $N \in \mathbf{Z}, N \geq 1$ とし,

$$\Gamma_0(N) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

$\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ を上半平面とし, 正則関数 $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{C}$ が, 重さ $k \in \mathbf{Z}$ の楕円尖点形式であるとは, 次の条件を満たすときをいう.

(M1) 任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ に対して, $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$.

(M2) 各 cusp で, f は零.

正則性と条件 (M1), (M2) より, f は次の Fourier 展開を持つ:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n, f) q^n, \quad (q = \exp(2\pi\sqrt{-1}z)).$$

このとき, 新形式の理論により, 次を満たす f がある:

- 正整数 $M \mid N$ が, 条件 “任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(M)$ に対して, $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$ ” を満たすならば, $M = N$.
- 各 Hecke 作用素 $T(p)$ (p :素数) に対し, f は $T(p)$ の固有ベクトル.
- $a(1, f) = 1$.

上の条件を満たす f を新形式とよぶ. また N を f の導手 (またはレベル) とよぶ. このとき, f の L 関数を次で定義する:

$$(2.2) \quad L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n, f)}{n^s}, \quad (s \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1).$$

これは全平面に正則に解析接続され, 関数等式を持つ. さらに次の Euler 積をもつ:

$$L(s, f) = \prod_{p: \text{prime}, p \nmid N} \frac{1}{1 - a(p, f)p^{-s} + p^{k-1-2s}} \prod_{p: \text{prime}, p \mid N} \frac{1}{1 - a(p, f)p^{-s}}.$$

2.2. 久保田–Leopoldt の p 進 L 関数 $\mathcal{L}_p(\chi)$. p を素数とし, p は N を割らないとする. また $\chi(-1) = -1$ とする. Dirichlet L 関数 $L(s, \chi)$ に対して, その p 進版である久保田–Leopoldt の p 進 L 関数 $\mathcal{L}_p(\chi) \in \mathcal{O}[[\text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q})]]$ が知られている. ただしここで \mathcal{O} は \mathbf{Q}_p の十分大きな有限次拡大の整数環で, μ_{p^∞} は p 冪乗根のなす群を表す. 連続指標 $\hat{\phi} : \text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{C}_p^\times$ に対し, 群環の元 $\mathcal{L}_p(\chi)$ から, \mathcal{O} の元 $\hat{\phi}(\mathcal{L}_p(\chi))$ が得られるので, これは $\text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q})$ の指標の成す集合上の関数とみなせる.

値 $\hat{\phi}(\mathcal{L}_p(\chi))$ は補間公式を用いて計算できる. そのためにはまず連続指標 $\hat{\phi} : \text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{C}_p^\times$ を与える必要がある. $\varepsilon_{\text{cyc}} : \text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}_p^\times$ を, 標準的な同型とする. これを連続指標 $\varepsilon_{\text{cyc}} : \text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{C}_p^\times$ とみなす. また有限指標 $\text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{C}_p^\times$ は, 適当な $r > 0$ に対し, $\text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^r})/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{C}_p^\times$ を経由するので, 自然に $(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})^\times$ の指標とみなす. (ただし, ここで μ_{p^r} は, 1 の p^r 乗根のなす群を表す.)

$\alpha \in \mathbf{Z}, \alpha \leq 0$ とし, 有限指標 $\hat{\varphi} : \text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{C}_p^\times$ を $\hat{\varphi}(-1) = (-1)^\alpha$ を満たすものとする. $\hat{\phi} = \varepsilon_{\text{cyc}}^\alpha \hat{\varphi}$ とおく. このとき, $\hat{\phi}(\mathcal{L}_p(\chi))$ は以下の補間公式で記述出来る:

$$\hat{\phi}(\mathcal{L}_p(\chi)) = (1 - \chi\varphi(p)p^{-\alpha})L^{(\infty)}(\alpha, \chi\varphi).$$

$\mathcal{L}_p(\chi)$ が, 群環 $\mathcal{O}[[\text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q})]]$ の元であることと上の補間公式から, L 関数の負の値たちに非自明な合同式があることが導かれる. また $\mathcal{L}_p(\chi)$ の情報から, イデアル類群の情報を引き出すものが岩澤理論であった. ただ岩澤理論的な側面に触れる以前に, 複素正則関数として定義される $L(s, \chi)$ がこのような p 進的な側面を持っていること自体が, 驚異的な事実であるといえる.

注意 2.1. (1) p 進 L 関数の存在による帰結, およびその意義については, 古典的な場合に多くの文献がすでに見られる. ここでは, 文献 ([黒栗斎 05, 10.1 章], [落合 14, 3.2 章]) を挙げるにとどめて, これ以上は立ち入らない.

(2) 同型 $\varepsilon_{\text{cyc}} : \text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}_p^\times$ について, もう少し説明を加える. ϕ を Hecke 指標 $\phi : \mathbf{Q}^\times \setminus \mathbf{Q}_\mathbf{A}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ とする. 適当な整数 $w \in \mathbf{Z}$ があって, $\phi_\infty(r) = r^w (r \in \mathbf{R}^\times, r > 0)$ とかけたとする. このとき, ϕ の p 進 avatar $\hat{\phi} : \mathbf{Q}^\times \setminus \mathbf{Q}_\mathbf{A}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ を, 固定された同型 $\mathbf{i}_p : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_p$ を用いて,

$$\hat{\psi}(x) = x_p^w \mathbf{i}_p(x_\infty^{-w} \phi(x))$$

と定義する. するとこれは well-defined な連続指標を定める. 類体論の相互写像を幾何的 Frobenius を用いて正規化しておく, ノルム指標の $|\cdot|_\mathbf{A}$ の p 進 avatar が, ε_{cyc} と一致する. p 進 L 関数の構成で複素と p 進の読み替えを行う際に, この正規化は便利であるため, 本稿ではこれを採用する.

2.3. $\text{GL}_1(\mathbf{A}), \text{GL}_2(\mathbf{A})$ の保型表現. 2.2 節で, Dirichlet L 関数 $L(s, \chi)$ には, 久保田–Leopoldt の p 進 L 関数 $\mathcal{L}_p(\chi)$ という p 進版が存在すること, およびその帰結をみた. 楕円尖点形式の L 関数 $L(s, f)$ に対しても, $k \geq 2$ で, $a(p, f)$ が p 進単数であるという仮定 (これを p -通常的という) のもと, p 進 L 関数 $\mathcal{L}_p(f)$ が存在する.

以上のことから $L(s, \chi)$ と $L(s, f)$ の類似は明らかである. しかしながら, 一見するとこれらは全く見かけが異なるため, 一般化への道筋が見えにくい. そこで, これら二つの対象の共通の一般化とは何かを考察する必要がある.

保型表現論によると Dirichlet 指標 χ は, Hecke 指標 $\tilde{\chi} : \mathbf{Q}^\times \setminus \mathbf{Q}_\mathbf{A}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ を定めるので, これを $\text{GL}_1(\mathbf{Q}_\mathbf{A})$ の保型表現とみなせる. 楕円尖点形式 f は, 関数 $\tilde{f} : \text{GL}_2(\mathbf{Q}) \setminus \text{GL}_2(\mathbf{Q}_\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}$ を定める. さらに \tilde{f} の生成する $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_\mathbf{A})$ の右正則表現を考えると, これは $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_\mathbf{A})$ の保型表現を定める. よって, L 関数やその p 進版の一般化を考察する舞台の候補として, GL_n の保型表現論が挙げられる.

またモチーフ論も一般化を考察する舞台の候補に挙げられる. χ, f それぞれに対し, M_χ, M_f という純モチーフが構成され, 純モチーフに対しては L 関数が定義出来るので, その p 進版の考察もモチーフの言語で行うことが期待される.

どちらの言語も L 関数の一般化や, p 進 L 関数の存在を議論するには, 十分なほど理論的には整備されていると言える. しかし本稿の主題である p 進 L 関数の構成という観点に立つと, 保型表現論を用いて予想を書き下すことが望ましい. 実際, 2.1 節であげたような L 関数の解析的な性質や, p 進版を考察するための特殊値の代数的な性質, また実際知られている構成の多くが何らかの形で保型表現論を用いる.

現状, p 進 L 関数の存在予想には, [CPR89], [Co89] などモチーフ論を用いたものが見られる. また [Cl90] によると, 保型表現とモチーフとの対応が論じられている. そのため与えられた保型表現がどのような p 進 L 関数をもつのか, 古典的な関わりや, 期待される性質を確かめるためにも, 保型表現に付随するモチーフを書き下すことは, 重要な研究ステップと思われる. 3 節で, 保型表現とモチーフの関係を復習し, p 進 L 関数が, 現状どのようにその存在が期待されているかを 4 節で紹介する.

3. 保型表現とモチーフ

$\pi = \otimes'_{v \in \Sigma_{\mathbf{Q}}} \pi_v$ を $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_{\mathbf{A}})$ の保型表現とする. この節では, π に付随するモチーフ $\mathcal{M}[\pi]$ について, Clozel ([Cl90]) の記述を簡単に復習する. p 進 L 関数を記述するためには, モチーフの Hodge 分解の情報が必要となる. $\mathcal{M}[\pi]$ の Hodge 分解は, π_{∞} の情報を用いて記述されるため, まず π_{∞} の分類方法を紹介する. (この分類については, [Kn94] に簡潔にまとめられている.)

π_{∞} は $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ の許容表現というものになっている. Langlands 分類 ($\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ の局所 Langlands 対応) により, これは \mathbf{R} の Weil 群 $W_{\mathbf{R}}$ の \mathbf{C} 上の n 次元半単純表現 $\phi := \phi_1 \oplus \cdots \oplus \phi_r : W_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ (各 ϕ_i は既約) を用いて記述できる ([Kn94, Theorem 2]). とくに $W_{\mathbf{R}}$ の 1 次元表現 ϕ_{ν}^{δ} , 既約 2 次元表現 $\phi_{\nu, l}$ は次の形で与えられる. (ここでは $W_{\mathbf{R}}$ を, $W_{\mathbf{R}} = \mathbf{C}^{\times} \sqcup \mathbf{C}^{\times} j$, $j^2 = -1$, $jzj = -\bar{z}$, ($z \in \mathbf{C}^{\times}$) と定義する.)

- $\phi_{\nu}^{\delta} : W_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{C}^{\times}$ を次で定める:

$$\phi_{\nu}^{\delta}(z) = (z\bar{z})^{\nu} \quad (z \in \mathbf{C}^{\times}), \quad \phi_{\nu}^{\delta}(j) = (-1)^{\delta}.$$

- $\phi_{\nu, l} : W_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ を次で定める:

$$\phi_{\nu, l}(z) = r^{2\nu} \begin{pmatrix} e^{\sqrt{-1}l\theta} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}l\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{\nu+\frac{1}{2}}\bar{z}^{\nu-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & z^{\nu-\frac{1}{2}}\bar{z}^{\nu+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (z = re^{\sqrt{-1}\theta} \in \mathbf{C}^{\times}),$$

$$\phi_{\nu}^{\delta}(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^l & 0 \end{pmatrix}.$$

$W_{\mathbf{R}}$ の既約表現は, $\phi_{\nu}^{\delta}, \phi_{\nu, l}$ のいずれかであるので, $\phi : W_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ はこれらの直和でかける. これを Langlands パラメーターとよぶ.

例 3.1. (1) χ を $\mathrm{GL}_1(\mathbf{Q}_{\mathbf{A}})$ の保型表現, すなわち, $\chi : \mathbf{Q}^{\times} \backslash \mathbf{Q}_{\mathbf{A}}^{\times} \rightarrow \mathbf{C}^{\times}$ を Hecke 指標とする. χ_{∞} に, Langlands パラメーター ϕ_{ν}^{δ} が対応するとき, $\chi_{\infty}(r) = \mathrm{sgn}(r)^{\delta} |r|^{\nu}$ ($r \in \mathbf{R}^{\times}$) とかける.

(2) π を $\mathrm{GL}_1(\mathbf{Q}_{\mathbf{A}})$ の保型表現とする. π_{∞} に, Langlands パラメーター $\phi_{\nu, l}$ が対応するとき, π_{∞} は重さ $l+1$ の楕円保型形式の定める保型表現の無限成分となる.

定義 3.2. ([Cl90, page 90, Definition 1.8], [Cl90, page 111, Definition 3.12]) π を $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_{\mathbf{A}})$ の等圧的保型表現とする.¹ $\phi = \phi_1 \oplus \cdots \oplus \phi_r$ を π_{∞} の Langlands パラメーターとする. このとき, π が代数的であるとは次が成り立つときをいう:²

- ϕ を $\mathbf{C}^{\times} \subset W_{\mathbf{R}}$ に制限することで, \mathbf{C}^{\times} の表現 $\chi_1 \oplus \cdots \oplus \chi_n$ が定まる. (各 χ_t ($t = 1, \dots, n$) は \mathbf{C}^{\times} の指標.) このとき, 各 t に対して, $\chi_t(z) = z^{p_t + \frac{n-1}{2}} \bar{z}^{q_t + \frac{n-1}{2}}$ なる $p_t, q_t \in \mathbf{Z}$ が存在する.

さらに, 上の $p_1, \dots, p_n \in \mathbf{Z}$ が互いに異なるとき, π を正則という.

補題 3.3. ([Cl90, page 112, Lemme de pureté 4.9]) π を $\mathrm{GL}_n(F_{\mathbf{A}})$ の代数的尖点的保型表現とする. このとき, Definition 3.2 の $p_t, q_t \in \mathbf{Z}$ に対し, $p_t + q_t$ は, t に依らない. これを $w \in \mathbf{Z}$ とかいて π の重さという.

¹ $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_{\mathbf{A}})$ の保型表現 π に対し, n の適当な分割 $n = n_1 + \cdots + n_r$ と, GL_{n_i} の尖点的保型表現 σ_i ($i = 1, \dots, r$) が存在して, π は $n\text{-Ind}_P^{\mathrm{GL}_n}(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_r)$ の部分商に現れる. ただし $P = P_{n_1, \dots, n_r}$ は分割 $n = n_1 + \cdots + n_r$ に対応する GL_n の標準放物型部分群を表し, $n\text{-Ind}_P^{\mathrm{GL}_n}$ は正規化誘導を表す. このとき, π が等圧的 (isobaric) であるとは, \mathbf{Q} の各素点 v に対し, $\pi_v \cong n\text{-Ind}_P^{\mathrm{GL}_n}(\sigma_{1,v} \otimes \cdots \otimes \sigma_{r,v})$ となっているときをいう.

²これを \mathbf{C} -代数的と呼ぶこともある.

予想 3.4. ([Cl90, page 139, 予想 4.5, Section 4.3.3]) π を $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_A)$ の代数的尖点的保型表現とし, w を π の重さとする. このとき, \mathbf{Q} 上の階数 n の純モチーフ $\mathcal{M}[\pi]$ で, 重さが $-w$ なものが存在して, 次を満たす:

$$L\left(s - \frac{n-1}{2}, \pi\right) = L(s, \mathcal{M}[\pi]).$$

さらに $\mathcal{M}[\pi]$ は, 次の Hodge 分解をもつ:

$$H_B(\mathcal{M}[\pi]) \otimes \mathbf{C} = \bigoplus_{i+j=-w} H^{i,j}(\mathcal{M}[\pi]), \quad h(i, j) = \#\{p \in P(\mathcal{M}) \mid i = -p\}.$$

ただし $h(i, j) = \dim_{\mathbf{C}} H^{i,j}(\mathcal{M}[\pi])$, Definition 3.2 にある整数 p_t, q_t を用いて, $P(\mathcal{M}) = \{p_1, \dots, p_n\}$ とおいた.

予想 3.4 により, 保型表現 π をモチーフ $\mathcal{M}[\pi]$ として捉えることが出来, π_∞ による Hodge 分解の記述も出来る. いくつか実例を確認する.

例 3.5. ノルム指標 $|\cdot|_A : \mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{Q}_A^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ に対して, $|\cdot|_{A,\infty}$ の Langlands パラメーターは, ϕ_1^0 . とくに Definition 3.2 の $p := p_{\infty,1}, q := q_{\infty,1} \in \mathbf{Z}$ は, $p = q = 1$ で与えられる. また予想 3.4 で予見される $|\cdot|_A$ に付随する純モチーフは Tate モチーフ $\mathbf{Z}(1)$ で, これは重さが $-2 = -(1+1)$ の階数 1 のモチーフで, $h(-1, -1) = 1$ である.³

例 3.6. $\chi : \mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{Q}_A^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ を, 有限位数の Hecke 指標とする. このとき, $\mathcal{M}[\chi]$ で, 予想 3.4 で予見されたモチーフとする. χ_∞ の Langlands パラメーターは, $\phi_0^\delta((-1)^\delta = \chi_\infty(-1))$ で与えられる. よって, $\mathcal{M}[\chi]$ は階数 1, 重さ 0 のモチーフで, $h(0, 0) = 1$ となる.

例 3.7. π を $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_A)$ の代数的尖点的保型表現とし, π_∞ の Langlands パラメーターが, $\phi_{\nu,l}$ とする. $\phi_{\nu,l}(z) = \mathrm{diag}(\chi_1(z), \chi_2(z)) = \mathrm{diag}\left(z^{\nu+\frac{l}{2}}z^{\nu-\frac{l}{2}}, z^{\nu-\frac{l}{2}}z^{\nu+\frac{l}{2}}\right)$ ($z \in \mathbf{C}^\times$). 定義 3.2 によると, 次を満たす p_1, q_1, p_2, q_2 は整数である:

$$\left(\nu + \frac{l}{2}, \nu - \frac{l}{2}\right) = \left(p_1 + \frac{1}{2}, q_1 + \frac{1}{2}\right), \quad \left(\nu - \frac{l}{2}, \nu + \frac{l}{2}\right) = \left(p_2 + \frac{1}{2}, q_2 + \frac{1}{2}\right).$$

とくに $(p_1, p_2) = \left(\nu + \frac{l-1}{2}, \nu - \frac{l+1}{2}\right)$. よって $l \geq 1$ のとき,⁴ π は正則.

簡単のため $l \geq 1$ は奇数とし, $\nu = 0$ とする. $k = l + 1$ とおく. $\mathcal{M}[\pi]$ を予想 3.4 で予見されたモチーフとする. これは \mathbf{Q} 上のモチーフで, 階数は 2. 後の p 進 L 関数の存在予想の記述と合わせるため, $\mathcal{M}_\pi = \mathcal{M}[\pi](2 - \frac{k}{2})$ とおく.⁵ するとこれは, 重さが $k - 3$ で, 次を満たす:

$$(3.1) \quad h(-1, k-2) = h(k-2, -1) = 1.$$

以上は古典的な例だが, 今回の研究では, 次の保型表現, モチーフに付随する p 進 L 関数を考察した.

例 3.8. E を虚二次体とし, c を複素共役とする. π を $\mathrm{GL}_2(E_A)$ の正則代数的尖点的保型表現とする. 例 3.7 と同様に簡単のため $l \geq 1$ を奇数とし, π_∞ の Langlands パラメーターが, $\phi_{0,l} \oplus \phi_{0,-l}$ であるとする.⁶ また $n = l - 1$ とおく. $\mathcal{M}[\pi]$ を予想 3.4 で予見されたモチーフとする. $\mathrm{As}_M^+(\mathcal{M}[\pi])$ を, 降下データ $v \otimes w \mapsto w \otimes v$ による $\mathcal{M}[\pi] \otimes \mathcal{M}[\pi]^c$ の \mathbf{Q} への降下とする. このとき, $\mathrm{As}_M^+(\pi)$ を次で定め, これを π の浅井モチーフとよぶ:

$$\mathrm{As}_M^+(\pi) = \mathrm{As}^+(\mathcal{M}[\pi])(2).$$

すると $\mathrm{As}_M^+(\pi)$ は, 重さ -2 で次を満たす:

$$(3.2) \quad h(-n-2, n) = h(n, -n-2) = 1, \quad h(-1, -1) = 2.$$

浅井モチーフについては, [Gh99a, Section 4] に詳しい記述がある.

³[Cl90, Conjecture 4.5] では, 重さ w となっているが, のちの整合性を考えて予想 3.4 では $\mathcal{M}[\pi]$ の重さは $-w$ とした.

⁴これは対応する楕円保型形式の重さが 2 以上という条件.

⁵楕円保型形式 f に付随するモチーフ \mathcal{M}_f は, $\mathcal{M}[\pi](1 - \frac{k}{2})$ で記述されることも多い. \mathcal{M}_f は重さが $k - 1$ で, $h(0, k-1) = h(k-1, 0) = 1$ となっている. \mathcal{M}_π という正規化を選択した理由は, [Co89] が $s = 0$ が critical となるようなモチーフを考察しているので, それに合わせている.

⁶ $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ の既約許容表現は, \mathbf{C} の Weil 群 $W_{\mathbf{C}}$ の半単純表現を用いて記述される. $W_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^\times$ であるので, $W_{\mathbf{C}}$ の既約表現は, $\phi_{\nu,l} = z^{\nu+\frac{l}{2}}z^{\nu-\frac{l}{2}}$ ($\nu \in \mathbf{C}, l \in \mathbf{Z}$) の形のみ. ここでは詳しい分類の結果を復習しないが, [Kn94, Section 4] を参照する.

4. p 進 L 関数の存在予想

この節では Coetes-Perrin-Riou による p 進 L 関数の存在予想 ([Co89], [CPR89]) を書き下す. とくにモチーフの Hodge 分解から修正 Euler 因子と呼ばれる L 関数の補正項が定義されることを紹介する.

4.1. 設定. \mathcal{M} を \mathbf{Q} 上の純モチーフとし, $d(\mathcal{M})$ で \mathcal{M} の階数, $w(\mathcal{M})$ で \mathcal{M} の重さを表す. $\phi : \mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{Q}_A^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ を, 有限位数の Hecke 指標とし, $\mathcal{M}(\phi)$ で, \mathcal{M} を ϕ による捻りを表す. \mathcal{M} の係数体を K とする. ただし, $K \subset \overline{\mathbf{Q}}$ とみなし, 固定された単射 $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{C}$ を用いて, K を \mathbf{C} の部分体ともみなす.

4.2. $\mathcal{E}_\infty(\mathcal{M})$ の定義. $H_B(\mathcal{M})$ で, \mathcal{M} の Betti 実現とし, Hodge 分解を,

$$H_B(\mathcal{M}) \otimes \mathbf{C} = \bigoplus_{i+j=w(\mathcal{M})} H^{i,j}(\mathcal{M}) = \bigoplus_U U, \quad h(i, j) = \dim_{\mathbf{C}} H^{i,j}(\mathcal{M})$$

とかく. ただし, U は $H^{i,j}(\mathcal{M}) \oplus H^{j,i}(\mathcal{M}) (i < j)$, または $H^{i,i}(\mathcal{M})$ を走る. ρ_B で複素共役から定まる $H_B(\mathcal{M})$ の対合を表し, $H^{i,i}(\mathcal{M})$ には, 定数倍で作用すると仮定する.

無限素点 ∞ での \mathcal{M} の Γ -因子 $L_\infty(s, \mathcal{M}) = \prod_U \Gamma(s, U)$, ϵ -因子 $\epsilon_\infty(s, \mathcal{M}) = \prod_U \epsilon_\infty(s, U)$ を次で定める ([De79, Section 5.3]): ⁷

- $U = H^{i,j}(\mathcal{M}) \oplus H^{j,i}(\mathcal{M}) (i < j)$ のとき,

$$L_\infty(s, U) = \Gamma_{\mathbf{C}}(s - i)^{h(i,j)}, \quad \epsilon_\infty(s, U) = \sqrt{-1}^{(j-i+1)h(i,j)}.$$

- $U = H^{i,i}(\mathcal{M}), \rho_B = (-1)^{i+\epsilon}, (\epsilon \in \{0, 1\})$ のとき,

$$L_\infty(s, U) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s - i + \epsilon)^{h(i,i)}, \quad \epsilon_\infty(s, U) = \sqrt{-1}^{\epsilon h(i,i)}.$$

無限素点 ∞ での \mathcal{M} の修正 Γ 因子 $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{M}) = \prod_U \mathcal{L}_\infty(U)$ を次で定める ([Co89, (4)(a)(b)]):

- $U = H^{i,j}(\mathcal{M}) \oplus H^{j,i}(\mathcal{M}) (i < j)$ のとき, $\mathcal{L}_\infty(U) = \sqrt{-1}^{ih(i,j)} L_\infty(0, U)$.
- $U = H^{i,i}(\mathcal{M}) (i \geq 0)$ のとき, $\mathcal{L}_\infty(U(\phi)) = 1$.

- $U = H^{i,i}(\mathcal{M}) (i < 0)$ のとき, $\mathcal{L}_\infty(U) = \frac{L_\infty(0, U)}{\epsilon_\infty(0, U) L_\infty(1, U^\vee)}$. (ただし, U^\vee は U の双対を表す.)

また $\mathcal{E}_\infty(\mathcal{M})$ を $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{M}) = \mathcal{E}_\infty(\mathcal{M}) L_\infty(0, \mathcal{M})$ となるように定め, これを無限素点 ∞ での \mathcal{M} の修正 Euler 因子とよぶ.

4.3. $\mathcal{E}_p(\mathcal{M})$ の定義. p と異なる素数 l をとり, 体としての同型 $\mathbf{C}_l \cong \mathbf{C}$ を固定しておく. $H_l(\mathcal{M})$ で, \mathcal{M} の l 進実現とし, 次を仮定する:

(Unr) 惰性群 I_p は, $H_l(\mathcal{M})$ に自明に作用する.

$J_l(\mathcal{M})$ で, $H_l(\mathcal{M}) \otimes \mathbf{C}$ の $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ -加群としての半単純化を表す. $J_l(\mathcal{M})$ を, $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ -加群としての直和

$$J_l(\mathcal{M}) = \bigoplus_\alpha U_\alpha$$

とかく. ただし, 各 U_α に, $\text{Forb}_p \in \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ は, $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}^\times$ で作用する. とくに $\chi_\alpha : \mathbf{Q}_p^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ で, $\chi_\alpha(p) = \alpha$ なる不分岐指標を表すと, 素点 p での \mathcal{M} の局所 L 因子は次で書ける:

$$L_p(s, \mathcal{M}) = \prod_\alpha L_p(s, \chi_\alpha).$$

このとき, 修正 L 因子 $\mathcal{L}_p(\mathcal{M}) = \prod_\alpha \mathcal{L}_p(\chi_\alpha)$ を次で定める ([Co89, (18)(a)(b)]):

- $\text{ord}_p(\alpha) \geq 0$ のとき, $\mathcal{L}_p(\chi_\alpha) = 1$.

- $\text{ord}_p(\alpha) < 0$ のとき, $\mathcal{L}_p(\chi_\alpha) = \frac{L_p(0, \chi_\alpha)}{\epsilon_p(0, \chi_\alpha, \psi_p) L_p(1, \chi_\alpha^{-1})} = \gamma_p(0, \chi_\alpha, \psi_p)^{-1}$.

ただし, $\epsilon_p(s, \chi_\alpha, \psi_p), \gamma_p(s, \chi_\alpha, \psi_p)$ は, それぞれ χ_α の加法指標 ψ_p に付随する局所 ϵ 因子, 局所 γ 因子. また $\mathcal{E}_p(\mathcal{M})$ を $\mathcal{L}_p(\mathcal{M}) = \mathcal{E}_p(\mathcal{M}) L_p(0, \mathcal{M})$ となるように定め, これを素点 p での $\mathcal{M}(\phi)$ の修正 Euler 因子とよぶ.

⁷素点が複素の場合も同様に定義出来る. また ρ_B が $H^{i,i}(\mathcal{M})$ にスカラーで作用しなくても, Γ -因子が定義出来るが, のちに仮定する (Crit) のもとで, ρ_B はスカラーで作用する.

4.4. 存在予想. 次を仮定する:

(Crit) ([De79, Definition 1.3]) \mathcal{M} は, $s = 0$ で critical. すなわち, $L_\infty(s, \mathcal{M}), L_\infty(1 - s, \mathcal{M}^\vee)$ はともに $s = 0$ で極を持たない.

次の条件を考える:

(Crit, n, φ) \mathcal{M} は $s = 0$ で critical とする. また $\mathcal{M}(n)$ で, \mathcal{M} の n -Tate 捻りとし, $\varphi: \mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{Q}_\mathbf{A}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ を有限位数の Hecke 指標とし, $\phi = |\cdot|_\mathbf{A}^n \varphi (n \in \mathbf{Z})$ とおく. $\varphi_\infty(-1) = (-1)^n$ で, $\mathcal{M}(\phi)$ は $s = 0$ で critical とする.

$c^\pm(\mathcal{M})$ を \mathcal{M} に対する Deligne の周期とする. これは $\mathbf{C}^\times / \overline{\mathbf{Q}}^\times$ の元として, 一意的に定義される. さらに修正された周期 $\Omega(\mathcal{M})$ を次で定める ([Co89, (12), page 107]):

$$\tau(\mathcal{M}) = \sum_{i < 0} ih(i, j), \quad \Omega(\mathcal{M}) = (2\pi\sqrt{-1})^{\tau(\mathcal{M})} c^+(\mathcal{M}).$$

予想 4.1. ([De79, Conjecture 1.8], [Co89, page 107, Period Conjecture]) (Crit, n, φ) を仮定する. このとき,

$$\mathcal{E}_\infty(\mathcal{M}(\phi)) \mathcal{E}_p(\mathcal{M}(\phi)) \frac{L(0, \mathcal{M}(\phi))}{\Omega(\mathcal{M})} \in \overline{\mathbf{Q}}.$$

モチーフ \mathcal{M} が p -通常的という条件が定義される ([Co89, Section 3]). ここでは一般的な定義は復習せずに, 保型表現から定まるモチーフ $\mathcal{M}[\pi]$ に対し, この条件を書き下す:

例 4.2. π を $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_\mathbf{A})$ の代数的尖点的保型表現とし, p で不分岐とする. p_i, q_i は, Definition 3.2 にある整数とする. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を π_p の佐武パラメーターとする.⁸ p_i, α_i を適当に並べ替えて, $-p_1 \geq \dots \geq -p_n, \mathrm{ord}_p(\alpha_1) \geq \dots \geq \mathrm{ord}_p(\alpha_n)$ とする. このとき, π が p -通常的であるとは, 次が成り立つときをいう:

- 各 $1 \leq i \leq n$ に対し, $\mathrm{ord}_p(\alpha_i) + \frac{n-1}{2} = -p_i$.

予想 4.3. ([Co89, page 111, Principal Conjecture]) $w(\mathcal{M}) \in 2\mathbf{Z}$ のとき, \mathcal{M} は Tate モチーフ $\mathbf{Q}(-w(\mathcal{M})/2)$ を直和因子にもたないと仮定する. また \mathcal{M} は p -通常的とする. このとき, 適当な \mathbf{Q}_p の有限時拡大 $K_\mathcal{M}$ ($\mathcal{O}_\mathcal{M}$ をその整数環とする) と, $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \in K_\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{M}} \mathcal{O}_\mathcal{M}[[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q})]]$ が存在して, 任意の有限位数の Hecke 指標 $\varphi: \mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{Q}_\mathbf{A}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ で, 次の条件を満たすもの:

- (Crit, n, φ);
- φ は p の外不分岐;
- 予想 4.1;

に対して, 次の補間公式が成り立つ:

$$(4.1) \quad \widehat{\phi}(\mathcal{L}(\mathcal{M})) = \mathcal{E}_\infty(\mathcal{M}(\phi)) \mathcal{E}_p(\mathcal{M}(\phi)) \frac{L(0, \mathcal{M}(\phi))}{\Omega(\mathcal{M})}.$$

(ただし, $\phi = |\cdot|_\mathbf{A}^n \varphi$ で, $\widehat{\phi}$ は ϕ の p 進 avatar とする.)

注意 4.4. 予想 4.3 は, [Co89, page 111, Principal Conjecture] より幾分か強いことを主張している. 例えば, 係数環が予想 4.3 のように取れるかなど, [Co89] では議論されていない. また [Co89] では, p 進測度の言語で主張が書かれているが, p 進 L 関数を冪級数環の元と捉える方が扱いやすいこともあり, 予想 4.3 の形で紹介をした.

5. p 進 L 関数の存在予想の具体的記述

予想 4.3 における補間公式を, 例 3.6, 例 3.7, 例 3.8 で与えたモチーフの場合に書き下す. 予想自体は, モチーフを介して記述されるが, 保型表現に付随するモチーフについては, 補間公式で現れる定数らは, 全て保型表現論の言葉で記述出来ることを紹介する.

⁸ π_p の佐武パラメーター $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を用いると, $L(s, \pi_p) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - \alpha_i p^{-s}}$ とかける.

5.1. Dirichlet L 関数の場合. $\chi : \mathbf{Q}^\times \setminus \mathbf{Q}_\mathbf{A}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ を, 有限位数の Hecke 指標とし, 例 3.6 の設定の通りとする. $\mathcal{M}[\chi]$ の L 関数は, χ の L 関数で記述出来る:

$$L(s, \mathcal{M}[\chi]) = L(s, \chi).$$

(critical 値) $\mathcal{M}[\chi]$ の Γ 因子は次で与えられる:

$$L_\infty(s, \mathcal{M}[\chi]) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s + \delta), \quad L_\infty(s, \mathcal{M}[\chi]^\vee) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s + \delta),$$

とくに $\mathcal{M}[\chi]$ が $s = 0$ で critical であることと, $\chi_\infty(-1) = -1$ は同値. 以下, これを仮定する. $\varphi : \mathbf{Q}^\times \setminus \mathbf{Q}_\mathbf{A}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ を p の外不分岐な指標とし, $\phi = |\cdot|_{\mathbf{A}}^\alpha \varphi(n \in \mathbf{Z})$ とおく. $\mathcal{M}[\chi](\phi)$ の Γ 因子は次で与えられる:

$$L_\infty(s, \mathcal{M}[\chi](\phi)) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s + \alpha + 1), \quad L_\infty(s, \mathcal{M}[\chi](\phi)^\vee) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s - \alpha + 1).$$

よって, $\mathcal{M}[\chi](\phi)$ が $s = 0$ で critical であることと, 次が同値:

$$\alpha \in \{n \in \mathbf{Z} | n \leq 0, \varphi_\infty(-1) = (-1)^n\} \cup \{n \in \mathbf{Z} | n > 0, \varphi_\infty(-1) = (-1)^{n+1}\}.$$

関数等式を考慮して, 以下 $\alpha \leq 0$ とする.

(p -通常性) χ は p -不分岐を仮定する. すると $\text{ord}_p(\chi(p)) = 0$ で, 今, $\mathcal{M}[\chi]$ に対し $h(0, 0) = 1$ であったので, $\mathcal{M}[\chi]$ は, 例 4.2 の意味で, p -通常的である.

(修正因子, 周期) 修正因子 $\mathcal{L}_*(\mathcal{M}[\chi](\phi))$ ($*$ = p, ∞) は, 次で書ける:

$$\mathcal{L}_\infty(\mathcal{M}[\chi](\phi)) = 1, \quad \mathcal{L}_p(\mathcal{M}[\chi](\phi)) = 1.$$

よってとくに, $\mathcal{E}_\infty(\mathcal{M}[\chi](\phi)) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s + \alpha + 1)^{-1}$, $\mathcal{E}_p(\mathcal{M}[\chi](\phi)) = L_p(0, \mathcal{M}[\chi](\phi))^{-1}$. さらに $\chi_\infty(-1) = -1$ より, $d^+(\mathcal{M}[\chi]) = 0$ で, $L^{(\infty)}(0, \chi) \in \mathbf{Q}$ であることから,

$$c^+(\mathcal{M}[\chi](\phi)) = c^+(\mathcal{M}[\chi]) = 1.$$

以上より, 予想 4.3 の補間公式は次のようにかける:

$$\widehat{\phi}(\mathcal{L}_p(\chi)) = (1 - \chi\varphi(p)p^{-\alpha})L^{(\infty)}(\alpha, \chi\varphi).$$

2.2 節の補間公式はこれを書き下したものである.

5.2. 楕円尖点形式の L 関数の場合. π を $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_\mathbf{A})$ の代数的尖点的保型表現とし, 例 3.7 の設定の通りとする. このとき, π に対応するモチーフ \mathcal{M}_π の L 関数は, π の L 関数を用いて, 次で記述できる:

$$L(s, \mathcal{M}_\pi) = L(s + \frac{3-k}{2}, \pi).$$

(critical 値) \mathcal{M}_π の Γ 因子は次で与えられる:

$$L_\infty(s, \mathcal{M}_\pi) = \Gamma_{\mathbf{C}}(s + 1), \quad L_\infty(s, \mathcal{M}_\pi^\vee) = \Gamma_{\mathbf{C}}(s - (-k + 2)).$$

よって, \mathcal{M}_π は, $s = 0$ で critical. $\varphi : \mathbf{Q}^\times \setminus \mathbf{Q}_\mathbf{A}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ を p の外不分岐な指標とし, $\phi = |\cdot|_{\mathbf{A}}^\alpha \varphi(\alpha \in \mathbf{Z})$ とおく. $\varphi(-1) = (-1)^\alpha$ とする. $\mathcal{M}_\pi(\phi)$ の Γ 因子は次で与えられる:

$$L_\infty(s, \mathcal{M}_\pi(\phi)) = \Gamma_{\mathbf{C}}(s + \alpha + 1), \quad L_\infty(s, \mathcal{M}_\pi(\phi)^\vee) = \Gamma_{\mathbf{C}}(s + k - 2 - \alpha).$$

よって, $\mathcal{M}_\pi(\phi)$ が $s = 0$ で critical であることと, $0 \leq \alpha \leq k - 2$ が同値. 以下, $0 \leq \alpha \leq k - 2$ とする.

(p -通常性) π は p -不分岐, p -通常的と仮定する. α_p, β_p を π の佐武パラメーターとすると,

$$L(s, \pi_p) = \frac{1}{(1 - \alpha_p p^{-s})(1 - \beta_p p^{-s})}.$$

すると予想 3.4 より,

$$L_p(s, \mathcal{M}_\pi) = L(s + \frac{3-k}{2}, \pi_p) = \frac{1}{(1 - \alpha_p p^{\frac{k-3}{2}} p^{-s})(1 - \beta_p p^{\frac{k-3}{2}} p^{-s})}.$$

この表示と (3.1), 例 4.2 より, π が p -通常的であることは, 次と同値:

$$\left\{ \text{ord}_p(\alpha_p p^{\frac{k-3}{2}}), \text{ord}_p(\beta_p p^{\frac{k-3}{2}}) \right\} = \{-1, k - 2\}.$$

よって, $\text{ord}_p(\alpha_p p^{\frac{k-3}{2}}) = k-2$, $\text{ord}_p(\beta_p p^{\frac{k-3}{2}}) = -1$, すなわち $\text{ord}_p(\alpha_p) = \frac{k-1}{2}$, $\text{ord}_p(\beta_p) = -\frac{k-1}{2}$ としてよい.

(修正因子, 周期) 修正 Euler 因子, 周期 $\mathcal{E}_\infty(\mathcal{M}_\pi(\phi))$, $\mathcal{E}_p(\mathcal{M}_\pi(\phi))$, $\Omega(\mathcal{M}_\pi)$ は次で記述される. ただ $\mathcal{E}_*(\mathcal{M}_\pi(\phi))$ ($*$ = p, ∞) を記述するより, $\mathcal{L}_*(\mathcal{M}_\pi(\phi))$ を記述する方が簡便なので, こちらを記述する. 実際の構成においては, $\mathcal{E}_*(\mathcal{M}_\pi(\phi))$ ではなく, $\mathcal{L}_*(\mathcal{M}_\pi(\phi))$ が現れるため, こちらの形を確認しておきたい.

($\mathcal{L}_\infty(\mathcal{M}_\pi(\phi))$ の定義) $\mathcal{M}_\pi(\phi)$ の Hodge 分解より, 次がわかる:

$$\mathcal{L}_\infty(\mathcal{M}_\pi(\phi)) = \sqrt{-1}^{(-1-\alpha)} L_\infty(0, \mathcal{M}_\pi(\phi)) = \sqrt{-1}^{(-1-\alpha)} \Gamma_{\mathbf{C}}(\alpha + 1).$$

($\mathcal{L}_p(\mathcal{M}_\pi(\phi))$ の定義)

$\gamma \in \mathbf{C}_p^\times$ に対して, 不分岐指標 $\chi_\gamma: \mathbf{Q}_p^\times \rightarrow \mathbf{C}_p^\times$ を $\chi_\gamma(p) = \gamma$ とおく. すると

- $\text{ord}_p(\alpha_p p^{\frac{k-3}{2}} \phi_p(p)) = k-2-\alpha \geq 0$. よって, $\mathcal{L}_p(\chi_{\alpha_p p^{\frac{k-3}{2}}} \phi_p) = 1$.
- $\text{ord}_p(\beta_p p^{\frac{k-3}{2}} \phi_p(p)) = -1-\alpha < 0$. よって, $\mathcal{L}_p(\chi_{\beta_p p^{\frac{k-3}{2}}} \phi_p) = \gamma_p(0, \chi_{\beta_p p^{\frac{k-3}{2}}} \phi_p, \psi_p)^{-1}$.

よって,

$$\mathcal{L}_p(\mathcal{M}_\pi(\phi)) = \gamma_p(0, \chi_{\beta_p p^{\frac{k-3}{2}}} \phi_p, \psi_p)^{-1}.$$

($\Omega(\mathcal{M}_\pi)$ の定義)

$\Omega_{\pi,p}^+$ を π の標準周期とする. このとき, [Hi94] により, ${}^9 c^+(\mathcal{M}_\pi) \sim_{\mathbf{Q}^\times} 2\pi\sqrt{-1}\Omega_{\pi,p}^+$ が示されている. よって, $c^+(\mathcal{M}_\pi)$ として, $(2\pi\sqrt{-1})\Omega_{\pi,p}^+$ を採用する. また $\tau(\mathcal{M}_\pi) = -1$ なので, $\Omega(\mathcal{M}_\pi) = \Omega_{\pi,p}$ が得られる.

注意 5.1. 古典的な楕円保型形式の用語との整合性を確かめておく.

(1) 新形式 f に対し, $L(s, f)$ の p での局所 L 因子 $L_p(s, f)$ を

$$L_p(s, f) = \frac{1}{1 - a(p, f)p^{-s} + p^{k-1-2s}} = (1 - \alpha_{f,p}p^{-s})^{-1}(1 - \beta_{f,p}p^{-s})^{-1}$$

とかくと, $\alpha_{f,p}, \beta_{f,p}$ は佐武パラメーターを用いて, $\{\alpha_{f,p}, \beta_{f,p}\} = \{\alpha_p p^{\frac{k-1}{2}}, \beta_p p^{\frac{k-1}{2}}\}$ とかける. とくに, $\alpha_{f,p} = \alpha_p p^{\frac{k-1}{2}}, \beta_{f,p} = \beta_p p^{\frac{k-1}{2}}$ とする. このとき, p -通常性より, $\text{ord}_p(\alpha_{f,p}) = k-1$, $\text{ord}_p(\beta_{f,p}) = 0$. とくに $a(p, f) = \alpha_{f,p} + \beta_{f,p}$ であるので, これは p 進単数となる. よって, 例 4.2 における π が p -通常的であることの定義は, 古典的な場合に f が p -通常的であることに同値である.

(2) 上の記号を用いて, $\mathcal{L}_p(\mathcal{M}_\pi(\phi))$ を書き換える. $\mathcal{L}_p(\mathcal{M}_\pi(\phi))$ は明示的に次のように書ける:

$$\mathcal{L}_p(\mathcal{M}_\pi(\phi)) = \begin{cases} \frac{1 - \beta_p^{-1} p^{-\frac{k-3}{2}} \phi_p^{-1}(p) p^{-1}}{1 - \beta_p p^{\frac{k-3}{2}} \phi_p(p)}, & (\phi_p: \text{不分岐}), \\ \left(\frac{p^\alpha}{\beta_p p^{\frac{k-3}{2}}}\right)^{c(\varphi_p)} \times \tau(\varphi_p^{-1}, \psi_p)^{-1}, & (\phi_p: \text{分岐}). \end{cases}$$

ただし, $\phi = |\cdot|_{\mathbf{A}}^\alpha \varphi$ が分岐するとき, φ の導手を $p^{c(\varphi_p)}$ とかき, 局所 Gauss 和 $\tau(\varphi_p, \psi_p)$ は次で定義している:

$$\tau(\varphi_p, \psi_p) = \sum_{u \in (\mathbf{Z}_p/p^{c(\varphi_p)}\mathbf{Z}_p)^\times} \varphi_p(up^{-c(\varphi_p)}) \psi_p(up^{-c(\varphi_p)}).$$

⁹最初にこの代数性について論じたのは, [Sh76] であると思われる. ただここでいう標準周期というような整性について論じられるような周期について認識されたのは, 肥田の貢献が大きい. 標準周期という単語は, [Va99, (5)] から取っている. [落合 16, 定義 6.10] では p 最適な複素周期と呼ばれている.

まず $\frac{p^\alpha}{\beta_p p^{\frac{k-3}{2}}} = \frac{p^\alpha}{\beta_{f,p}} \times p$ とかける. $\epsilon_p(s, \varphi_p, \psi_p) \epsilon_p(1-s, \varphi_p^{-1}, \psi_p^{-1}) = 1$ に注意すると,¹⁰

$$\begin{aligned} p^{c(\varphi_p)} \tau(\varphi_p^{-1}, \psi_p)^{-1} &= p^{c(\varphi_p)} \tau(| \cdot |_p \varphi_p, \psi_p^{-1}) = \tau(\varphi_p, \psi_p^{-1}) \\ &= \sum_{u \in (\mathbf{Z}_p / p^{c(\varphi_p)} \mathbf{Z}_p)^\times} \varphi_p(u) \exp(2\pi \sqrt{-1} u p^{-c(\varphi_p)}) =: G(\varphi_p). \end{aligned}$$

以上より, 次が得られる:

$$\mathcal{L}_p(\mathcal{M}_\pi(\phi)) = \begin{cases} \frac{1 - \beta_{f,p}^{-1} \varphi_p^{-1}(p) p^\alpha}{1 - \beta_{f,p} \varphi_p(p) p^{-(\alpha+1)}}, & (\phi_p : \text{不分支}), \\ \left(\frac{p^\alpha}{\beta_{f,p}}\right)^{c(\varphi_p)} \times G(\varphi_p), & (\phi_p : \text{分枝}). \end{cases}$$

楕円保型形式の p 進 L 関数の補間公式を記述する際, こちらの形のものがよく見られる.

5.3. 浅井 L 関数の場合. E を虚二次体とし, c を複素共役, p は E/\mathbf{Q} で不分支とする. π を $\mathrm{GL}_2(E_{\mathbf{A}})$ の p -不分支, p -通常的, 正則代数的尖点的保型表現とし, 例 3.8 の設定の通りとする. π の浅井モチーフ $\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)$ の L 関数 $L(s, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi))$ は, π の浅井 L 関数 $L(s, \mathrm{As}^+(\pi))$ を用いて, 次で記述できる:

$$L(s, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)) = L(s+1, \mathrm{As}^+(\pi))$$

(critical 値) 複素共役 ρ_B は, $H^{-1,-1}(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+)$ に $+1$ で作用する. これから $\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)$ の Γ 因子は次で与えられる:

$$L_\infty(s, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)) = \Gamma_{\mathbf{C}}(s+n+2) \Gamma_{\mathbf{R}}(s+2)^2, \quad L_\infty(s, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)^\vee) = \Gamma_{\mathbf{C}}(s+n) \Gamma_{\mathbf{R}}(s+1)^2$$

よって, $\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+$ は, $s=0$ で critical. より一般に, $\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\alpha)$ ($\alpha \in \mathbf{Z}$) が $s=0$ で critical であることと, 次が同値:

$$\alpha \in \{a \in \mathbf{Z} \mid a : \text{奇数}, -n-1 \leq a \leq -1\} \cup \{a \in \mathbf{Z} \mid a : \text{偶数}, 0 \leq a \leq n\}.$$

関数等式を考慮して, $0 \leq \alpha \leq n$ に着目する. $\varphi : \mathbf{Q}^\times \setminus \mathbf{Q}_{\mathbf{A}}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ を有限位数の指標とし, $\phi = | \cdot |_{\mathbf{A}}^{n-\alpha} \varphi$ とおく. このとき, $\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\phi)$ が $s=0$ で critical であるのは次が成り立つことが同値:

- $0 \leq \alpha \leq n$, $\varphi(-1) = (-1)^\alpha$.

以下, $\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi)$ が $s=0$ で critical とする.

(p -通常性) p が E で分裂するとき $p = vv_c$ とかいて, α_v, β_v を π_v の, $\alpha_{v_c}, \beta_{v_c}$ を π_{v_c} のそれぞれ左武パラメーターとする. また $\alpha_p = \alpha_v \alpha_{v_c}, \beta_p = \beta_v \beta_{v_c}$ とおく. p が惰性するとき, α_p, β_p を π_p の左武パラメーターとする. π_p が p -通常的とすると, 次としてよい:

- $p = vv_c$: 分裂のとき. $\mathrm{ord}_p(\alpha_v) = \mathrm{ord}_p(\alpha_{v_c}) = \frac{n+1}{2}, \mathrm{ord}_p(\beta_v) = \mathrm{ord}_p(\beta_{v_c}) = -\frac{n+1}{2}$.
- p : 惰性のとき. $\mathrm{ord}_p(\alpha_p) = n+1, \mathrm{ord}_p(\beta_p) = -n-1$.

また $L_p(s, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi))$ は次で記述される:

$$L_p(s, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)) = \begin{cases} L(s+1, \pi_v \otimes \pi_{v_c}), & (p = vv_c : \text{分裂}), \\ \frac{1}{(1 - \alpha_p p^{-(s+1)})(1 - \alpha_p \beta_p p^{-2(s+1)})(1 - \beta_p p^{-(s+1)})}, & (p : \text{惰性}). \end{cases}$$

この表示と, (3.2) から, $\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)$ は, 例 4.2 の意味で, p -通常的であることがわかる.

(修正因子, 周期) 先と同様の理由で, $\mathcal{L}_\infty(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi)), \mathcal{L}_p(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi))$ を記述する. また周期 $\Omega(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi))$ を記述する.

($\mathcal{E}_\infty(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi))$ の定義) $L_\infty(0, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi))$ は次で与えられる:

$$L_\infty(s, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi)) = \begin{cases} \Gamma_{\mathbf{C}}(2n - \alpha + 2) \Gamma_{\mathbf{R}}(n - \alpha + 2)^2, & (\alpha : \text{偶}, \varphi_\infty(-1) = 1), \\ \Gamma_{\mathbf{C}}(2n - \alpha + 2) \Gamma_{\mathbf{R}}(n - \alpha + 1)^2, & (\alpha : \text{奇}, \varphi_\infty(-1) = -1). \end{cases}$$

¹⁰ ψ^{-1} は, $\psi^{-1}(x) = \psi(-x)$ で定義する.

すると次が得られる:

$$\mathcal{L}_\infty(\text{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi)) = L_\infty(0, \text{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi)) \times \begin{cases} \frac{\sqrt{-1}^{-(2n-\alpha+2)}}{(-1) \times \Gamma_{\mathbf{R}}(1 - (n - \alpha))^2}, & (\alpha_v : \text{偶}, \varphi_\infty(-1) = 1), \\ \frac{\sqrt{-1}^{-(2n-\alpha+2)}}{\Gamma_{\mathbf{R}}(-(n - \alpha))^2}, & (\alpha : \text{奇}, \varphi_\infty(-1) = -1). \end{cases}$$

($\mathcal{L}_p(\text{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi))$ の定義) 定義に従って計算すると, $\text{As}^+(\pi_p)$ の局所 γ 因子を用いて, 次が得られる:

$$\mathcal{L}_p(\text{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi)) = \frac{\gamma_p(n - \alpha + 1, \chi_{\alpha_p} \varphi_p, \psi_p)}{\gamma_p(n - \alpha + 1, \text{As}^+(\pi_p) \otimes \varphi_p, \psi_p)}.$$

実際のところ, $\gamma_p(n - \alpha + 1, \chi_{\alpha_p} \varphi_p, \psi_p)$ という項は, 分子と分母でキャンセルするのだが, p 進浅井 L 関数の構成において, 局所積分の計算よりこの形が得られる. 今後の研究における p 進 L 関数の構成においても, より標準的な用語による記述は有用であると考えるので, 上記の形で修正因子を記述しておく.

($\Omega(\text{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi))$ の定義)

$\Omega_{\pi,p}$ を π の標準周期とする. このとき, [Gh99a] により, $c^+(\text{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)) \sim_{\mathbf{Q}^\times} (2\pi\sqrt{-1})^{n+4} \Omega_{\pi,p}$ が示されている. よって, $c^+(\text{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi))$ として, $(2\pi\sqrt{-1})^{n+4} \Omega_{\pi,p}$ を採用する. また $\tau(\text{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)) = -n-4$ なので, $\Omega(\text{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)) = \Omega_{\pi,p}$ が得られる.

5.4. いくつかの注意. 予想 4.3 にいくつか注意を与える:

- p 進 L 関数は, $K_{\mathcal{M}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}}} \mathcal{O}_{\mathcal{M}}[[\text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q})]]$ の元であるとした. しかし古典的な例を考えると, $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}[[\text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q})]]$ の元として構成されるべきだろう. しかしながら, 周期自体 $\mathbf{C}^\times/\overline{\mathbf{Q}}^\times$ の元として決まっているため, 整係数の元として予想するためには, まず周期を $\mathbf{C}^\times/\mathcal{O}_{\mathcal{M}}^\times$ の元として定義する必要がある. 現状, いくつかの実例を除く限り, このような周期の定義は難しいようである. 5.2, 5.3 節では, 標準周期という p に依存する適当な整構造を反映した周期を採用している. このような操作が一般にどのくらい出来るのかは, 現状明らかではない.
- 周期について, さらに注意を与える. 整性について議論出来るような周期は, p に依らずに定義出来るのだろうか. 楕円尖点形式に楕円曲線が対応する場合, 標準周期と楕円曲線の Néron 周期が存在する. これらは $2\pi\sqrt{-1}$ のずれを除き一致することが予想されているが, 着目すべきは Néron 周期の定義は p に依存していないことである. 楕円曲線の Néron 周期の一般化に相当するものの定義が期待される.
- 基礎体は \mathbf{Q} であるとしたが, これを一般の基礎体で考えられるだろうか? Katz の p 進 L 関数や反円分 p 進 L 関数など, 基礎体が虚二次体の場合の p 進 L 関数の構成はいくつか見られるが, 一般的な予想を書き下した文献は今のところあまりないようである.
- 直和因子に Tate モチーフが現れないという仮定を置いている. これは, 久保田-Leopoldt の L 関数の場合に p 進 L 関数が極をもつため, $K_{\mathcal{M}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}}} \mathcal{O}_{\mathcal{M}}[[\text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q})]]$ ではなく, その全商環の元として定義されるという事情がある.
- 完全 L 関数を用いて予想を記述したが, 実際構成されたときされる例では, $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{M}(\phi))$ が計算されず, 何らかの定数が補間公式に残っている場合が多い. 実際, $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{M}(\phi))$ を計算しきるには, 保型表現の無限成分の解析が不可欠となる. 保型表現論においても, どの局所積分が期待される Γ 因子を与えるかについては, 全く非自明な問題である. またこの問題に由来して, 無限位数の指標による補間公式 (“横方向の合同”) が得られていないものも多い. p 進 L 関数の構成にも, ∞ 成分の解析は不可欠である.
- p -不分岐という仮定は一般には不要だと思われる. 例えば, 楕円保型形式の場合でも p で特殊表現になっている場合でも, p 進 L 関数は存在する. しかし高階数の簡約代数群の保型表現に付随する p 進 L 関数では, p で不分岐という条件を課しているものも多い.
- [落合 16, 5.3.2 章] で一般的な存在予想の定式化について, また [落合 16, 6.6.1 章] で知られている結果とその展望について, 論じられている.

6. p 進浅井 L 関数の構成の概要

6.1. 主結果. 前節までで, 今回の研究結果である p 進浅井 L 関数の具体的な形を記述した. 正確な設定を込めて, 今一度, [Na] の主結果を書き下す.

E を虚二次体とし, 奇素数 p が E/\mathbf{Q} で不分岐とする. π を $\mathrm{GL}_2(F_{\mathbf{A}})$ の p -通常の既約尖点的保型表現とする. π_{∞} の Langlands パラメーターが $\phi: W_{\mathbf{C}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbf{C}): z \mapsto \mathrm{diag}((z/z^c)^{\frac{n+1}{2}}, (z^c/z)^{\frac{n+1}{2}})$ ($0 \leq n \in \mathbf{Z}$) とかけるとする. (前節まででは, n は偶数と仮定していたが, ここでは奇数でも良い.) $p > n$ と仮定する.

イデアル $\mathfrak{N} \subset \widehat{\mathcal{O}}_E$ に対し, $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathcal{O}}_E)$ の部分群を次で定める:

$$\mathcal{K}_1(\mathfrak{N}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathcal{O}}_E) \mid c-1, d \in \mathfrak{N} \right\}.$$

π は, \mathfrak{N} をレベルにもつとする. すなわち π は $\mathcal{K}_1(\mathfrak{N})$ で固定されるベクトルを持ち, そのような性質をもつイデアルの中で \mathfrak{N} は最小のものとする. K_{π} を \mathbf{Q}_p の有限次拡大で, π の Hecke 固有値を全て含むものとする. また \mathcal{O}_{π} で K_{π} の整数環を表す.

定理 6.1. ([Na, Theorem 8.8]) $0 \leq \alpha \leq n$ を整数とする. 次を仮定する:

- π の中心指標は p で不分岐.
- π が共役自己双対であるとき, $\alpha \neq n$.
- \mathfrak{N} は, 平方自由.
- $l \neq p$ を素数とし, $l \mid \mathfrak{N} \cap \widehat{\mathbf{Z}}$ とする. このとき, l は次のいずれかを満たす:
 - π の中心指標は l で分岐する.
 - π の中心指標は l で不分岐であるとき, l は E で分裂し, $l = vv_c$ と書いたとき, π_v, π_{v_c} の片方は主系列表現で, もう片方は特殊表現となる.

このとき, ある $\mathcal{L}^{\alpha}(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)) \in K_{\pi} \otimes_{\mathcal{O}_{\pi}} \mathcal{O}_{\pi}[[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^{\infty}})/\mathbf{Q})]]$ が存在し, 任意の p の外不分岐な有限位数の Hecke 指標 $\varphi: \mathbf{Q}^{\times} \backslash \mathbf{Q}_{\mathbf{A}}^{\times} \rightarrow \mathbf{C}^{\times}$ で, $\varphi_{\infty}(-1) = (-1)^{n-\alpha}$ なるものに対し, $\widehat{\phi}(\mathcal{L}^{\alpha}(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)))$ は, 予想 4.3 の補間公式 (4.1) を満たす. (ただし, $\phi = |\cdot|_{\mathbf{A}}^{-\alpha} \varphi$ で, $\widehat{\phi}$ は ϕ の p 進 avatar.)

注意 6.2. 定理の内容について, いくつかの注意をしておく.

- (1) 定理 6.1 において, 基礎体は一般に CM 体で同様の結果が得られる. 基礎体が虚二次体の場合は, Loeffler-Williams による先行研究 ([LW]) があり, 今回の結果は, 彼らの結果のある種の拡張を与えている.
- (2) 予想 4.3 より, 次が期待されている. $\mathrm{Tw}_p: K_{\pi} \otimes_{\mathcal{O}_{\pi}} \mathcal{O}_{\pi}[[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^{\infty}})/\mathbf{Q})]] \rightarrow K_{\pi} \otimes_{\mathcal{O}_{\pi}} \mathcal{O}_{\pi}[[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^{\infty}})/\mathbf{Q})]]$ を, $\mathrm{Tw}_p(\sigma) = \varepsilon_{\mathrm{cyc}}(\sigma)\sigma$ を線型に拡張して定義する. このとき, $0 \leq \alpha, \alpha' \leq n$ に対して,

$$(6.1) \quad \mathrm{Tw}_p^{\alpha-\alpha'}(\mathcal{L}^{\alpha'}(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi))) = \mathcal{L}^{\alpha}(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi))$$

が成り立つと予想される. これは虚二次体の場合, [LW] では示されているものの, CM 体の場合にはまだ分かっていない. CM 体上の場合, 構成からは Eisenstein コホモロジーの分母の振る舞いなど整性についてはまだよく分からない部分がある. [Na] の議論では, critical 値ごとに有理性を取り扱っているため, critical 値の間を比べる上のような等式 (6.1) には, もう少し詳しい研究が必要である. 5.4 節でも言及したが, 等式 (6.1) のような“横方向の合同”は, 保型表現の整構造に関わってくるため, 今後この方面の研究課題の一つと考えられる.

- (3) レベルに関する仮定は, p を割らない素点での L 因子の明示公式を得るために課している. 仮定のもと, p を割らない素点での L 因子の明示公式は比較的簡単に求められる. 一般のレベルでも, 主張は正しいと考えられるが, p 進 L 関数の構成という主題からは外れた問題であるため, [Na] では, 主張の仮定をつけて証明している. ([LW] では, この点については全く議論がされていない.)
- (4) π は共役自己双対であるとき, $\alpha \neq n$ という条件は, 複素 L 関数がこの場合極をもつという事実由来する.
- (5) 基礎体が CM 体の場合, p -通常性ではなく, p -概通常性を仮定する. こういった細かな差異が, 予想 4.3 では基礎体を有理数体と仮定している理由の一つである.

注意 6.3. 浅井 L 関数に着目して, 研究している動機として, これが岩澤理論の高次元化の一つを与えるという期待が挙げられる. 実際, 浅井 L 関数の特殊値は $\mathrm{GSp}(4)$ のテータ関数の Siegel 保型

形式との間の合同を記述すると考えられる。保型表現の合同と Selmer 群, 浅井 L 関数の特殊値との関係は, [Be] において考察されている。

6.2. 構成の概略. 構成の概略については, 技術的になるので, 核となる議論や技術を [Na] を引用しつつ紹介するに留める。

(標準周期の定義)

f を保型表現 π の p -安定化新形式とする。Eichler-志村-Harder 同型により, f は対称空間 $Y_{\mathcal{K}}^E = \mathrm{GL}_2(E) \backslash \mathrm{GL}_2(E_{\mathbf{A}}) / \mathbf{C}^{\times} \mathrm{SU}_2 \mathcal{K}_1(\mathfrak{N})$ 上の局所係数の 1 次の微分形式 $\delta(f)$ を定める。この f の Fourier 係数を用いた f の正規化と, 局所系のコホモロジーと微分形式のコホモロジーの比較同型を用いて, 標準周期 $\Omega_{\pi,p}$ が定義される。([Na, Section 6.2].)

(浅井 L 関数の特殊値の代数性)

浅井 L 関数の特殊値の代数性を導くためには, 浅井 L 関数の積分表示を介するコホモロジーによる記述をおこなう。

まず $Y_{\mathcal{K}}^E$ 上の局所系を $Y_{\mathcal{K}} = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_{\mathbf{A}}) / \mathbf{R}^{\times} \mathrm{SO}_2 \mathcal{K}_1(\mathfrak{N}_{\mathbf{Q}}) (\mathfrak{N}_{\mathbf{Q}} = \mathfrak{N} \cap \widehat{\mathbf{Z}})$ 上に引き戻すとこれは直和分解される。微分形式 $\delta(f)$ を $Y_{\mathcal{K}}$ 上に引き戻し, 直和分解の一つの成分へ射影をとったものを $\delta^{\alpha}(f)$ とかく。実はこの直和成分のラベル α と, critical 値 $L(n - \alpha, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi)(\varphi))$ のラベル α が対応している。([Na, Section 6.5].)

さらに Eisenstein 級数 E を用いて, もう一つ $Y_{\mathcal{K}}$ 上に 1 次の微分形式 $\delta(E)$ を定義する。Harder の手法 ([Ha87]) を用いて, $\delta(E)$ が有理係数のコホモロジーの元であることを示す。([Na, Proposition 6.7].) すると $\delta^{\alpha}(f)$ と $\delta(E)$ のカップ積の $Y_{\mathcal{K}}$ 上での積分

$$I^{\alpha} := \frac{1}{\Omega_{\pi,p}} \int_{Y_{\mathcal{K}}} \delta^{\alpha}(f) \cup \delta(E) dg$$

は, $L(n - \alpha, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi))$ の積分表示を与え, 周期の定義より特殊値 $L(n - \alpha, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi)) / \Omega_{\pi,p}$ の代数性, とくに K_{π} の元を与えることが示せる。([Na, Proposition 6.11, Theorem 8.8]. またこの部分の議論の原型は [Gh99a, Section 7] に見られる。)

(Birch の補題)

p 進浅井 L 関数の構成には, 特殊値 $L(n - \alpha, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi)(\varphi))$ の積分表示が必要であるため, 上の議論を全てレベル p^r ($r \in \mathbf{Z}, c(\varphi) \mid r$) 付きで行う。このためには, 浅井部分 L 関数 $L_x(n - \alpha, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi)(\varphi))(x \in \mathrm{Cl}_{\mathbf{Q}}^{+}(p^r))$ の積分表示を与えればよい。($\mathrm{Cl}_{\mathbf{Q}}^{+}(p^r)$ は, \mathbf{Q} の法 p^r の狭義イデアル類群で, 有限指標 φ は, $\mathrm{Cl}_{\mathbf{Q}}^{+}(p^r)$ 上の指標とみなしている。) すなわち

$$(6.2) \quad \frac{L(n - \alpha, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi)(\varphi))}{\Omega_{\pi,p}} \stackrel{“=”}{=} \sum_{x \in \mathrm{Cl}_{\mathbf{Q}}^{+}(p^r)} \varphi(x) I_{r,x}^{\alpha}$$

と, 浅井 L 関数を分解して, $I_{r,x}^{\alpha}$ のコホモロジー解釈を与えればよい。これは Birch の補題とよばれ, $I_{r,x}^{\alpha}$ の記述にはレベル p^r の Eisenstein 級数を用いて行う。([Na, Proposition 7.1].)

ここで “=” と書いたのは, 実際のところは (6.2) の左辺は, 予想 4.3 の補間公式 (4.1) の右辺が正しいからである。次に記述するように (6.2) の正しい = を与えるように Eisenstein 級数を選ぶ部分が, 全く非自明な作業となる。

(技術的な補題)

類体論の相互写像による $x \in \mathrm{Cl}_{\mathbf{Q}}^{+}(p^r)$ の $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^r})/\mathbf{Q})$ への像を σ_x とおく。このとき,

$$\mathcal{L}_{p,r}^{\alpha}(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi)) = \sum_{x \in \mathrm{Cl}_{\mathbf{Q}}^{+}(p^r)} I_{r,x}^{\alpha} \sigma_x \in K_{\pi}[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^r})/\mathbf{Q})]$$

とおく。以上の設定の下, 次を示す:

- (分母の有界性) $\mathcal{L}_{p,r}^{\alpha}(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi))$ の分母は r に依らず, 有界である。
- (distribution property) $\{\mathcal{L}_{p,r}^{\alpha}(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi))\}_{r \geq 1}$ は射影系をなす。
- (補間公式) $\widehat{\phi}(\mathcal{L}_{p,r}^{\alpha}(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi)))$ は, (4.1) の右辺に一致する。

p 進 L 関数の構成における本質的な部分は上の三つにまとめられる。証明には, これらの補題を満たすような良い Eisenstein 級数を選ぶ必要がある。Loeffler-Williams の先行研究では, Siegel 単数から定まる Eisenstein 級数を選択している。この Eisenstein 級数の定めるコホモロジー類は, 整係数を持ち, distribution property を満たす。また補間公式は, 大域的な方法で導いている。[Na] では

Loeffler-Williams の方法を, アデールの方法で解釈し, 基礎体が一般の総実体の場合に Eisenstein 級数の一般化を考察している. ([Na, Section 5]) 一般の場合でも, distribution relation は, ほぼ同様に証明出来る. ([Na, Section 8.2].) 大きな違いは, コホモロジー類の分母の取り扱いと, 補間公式である.

分母については, Eisenstein コホモロジー類の有理性は示せるものの, 基礎体が総実体の場合, 整性については未だよく分からない部分がある. [Na] では, 各 Eisenstein 級数 $\{E_r\}_{r \geq 0}$ の (コホモロジーの) 分母が, E_0 の分母を用いて抑えられることを示し, 有理係数のコホモロジーの分母の有界性を導いている. ([Na, Section 8.1])

また補間公式は, 上記のカップ積を局所積分に分解し, 保型表現の枠組みに持ち込んで計算を行う. とくに p での局所積分では, 局所関数等式を用いて, 補間公式を導いており, 予想 4.3 の補間公式に局所 γ 因子が現れる自然な説明を与えている. ([Na, Theorem 8.8, Section 9, 10, 11].)

(p 進浅井 L 関数の構成)

上記の技術的な補題が証明できれば,

$$\mathcal{L}_p^\alpha(\text{As}_M^+(\pi)) := \lim_{\substack{\uparrow \\ r}} \mathcal{L}_{p,r}^\alpha(\text{As}_M^+(\pi)) \in K_\pi \otimes_{\mathcal{O}_\pi} \mathcal{O}_\pi[[\text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q})]]$$

が所望の p 進浅井 L 関数を与える.

謝辞

第 64 回代数学シンポジウムでの研究発表の機会を頂き, 主催者の先生方に御礼申し上げます. とくにシンポジウム責任者の金銅誠之先生, プログラム責任者 (数論) の市野篤史先生, 安福悠先生に感謝致します. 本研究は, JSPS からの支援 (若手研究 (B)17K14174) を頂いています.

REFERENCES

- [Be] T. Berger, *On the Bloch-Kato conjecture for the Asai L -function*, preprint, arXiv1507.00684.
- [Cl90] L. Clozel, “Motifs et formes automorphes : applications du principe, de fonconalité” in *Automorphic forms, Shimura varieties and L -functions*, (L. Clozel et J.S. Milne edit.), vol. 1. 77-159, Acad. Press (1990).
- [Co89] J. Coates, *On p -adic L -functions attached to motives over \mathbf{Q} II*, Bol. Soc. Bras. Mat. **20** (1989), no. 1, 101-112.
- [CPR89] J. Coates, B. Perrin-Riou, *On p -adic L -functions attached to motives over \mathbf{Q}* , Advanced Studies in Pure Math. **17**, (1989), 23-54.
- [De79] P. Deligne, “Valeurs de fonctions L et périodes d’intégrales” in *Automorphic Forms, Representations, and L -functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977)*, Proc. Symp. Pure Math. **33** Part II, Amer. Math. Soc., Providence, (1979), 247-289.
- [Gh99a] E. Ghate, *Critical values of the twisted tensor L -function in the imaginary quadratic case*, Duke Math. J. **96** (1999), no. 3, 595-638.
- [Ha87] G. Harder, *Eisenstein cohomology of arithmetic groups. The case $GL(2)$* , Invent. Math. **89** (1987), 37-118.
- [Hi94] H. Hida, *On the critical values of L -functions of $GL(2)$ and $GL(2) \times GL(2)$* , Duke Math. J. **74** (1994), 431-529.
- [Kn94] A. W. Knapp, “Local langlands correspondence: the Archimedean case”, in *Motives (Seattle, WA, 1991)*, Proc. Symp. Pure Math. **55**, Part II, Amer. Math. Soc., Providence, (1994), 393-410.
- [LW] D. Loeffler and C. Williams, *P -adic Asai L -functions of Bianchi modular forms*, preprint, arXiv:1802.08207.
- [Na] K. Namikawa, *A construction of p -adic Asai L -functions for GL_2 over CM fields*, preprint, arXiv:1912.07251.
- [Sh76] G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with cusp forms*, Commun. Pure Appl. Math. **29**, (1976), 783-804.
- [Va99] V. Vatsal, *Canonical periods and congruence formulae*, Duke Math. J. **98** (1999), 397-419.
- [落合 14] 落合理, 岩澤理論とその展望 (上), 岩波数学叢書, 岩波書店, (2014).
- [落合 15] 落合理, 岩澤理論の高次元化をとりまく風景, 第 60 回代数学シンポジウム報告集, (2015), 137-161.
- [落合 16] 落合理, 岩澤理論とその展望 (下), 岩波数学叢書, 岩波書店, (2016).
- [黒栗斎 05] 黒川信重, 栗原将人, 斎藤毅, 数論 II, 岩波書店, (2005).

FACULTY OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY, 744 MOTOOKA, NISHI-KU, FUKUOKA, 819-0395, JAPAN
 Email address: namikawa@math.kyushu-u.ac.jp

対称群の群代数とヘッケ代数の常識

有木進（大阪大学大学院情報科学研究科）

ABSTRACT. 対称群やヘッケ代数は古くから研究されている対象であるが、いまだに
進歩し続けている分野である。本稿では現在常識とされていることを解説する。とく
に対称群の群代数が次数付代数であることやヘッケ代数の研究から生まれ他の代数の
研究に発展している概念について解説する。また、最終節で対称群の元の簡約表示の
集合と柏原クリスタルの関係にも少し触れる。

1. 導入

私の座右の銘は”Good in theory, devil in detail”である。世の中には理論を作る
のが好きな数学者と実例を理解したい数学者の2種類がいると思うが、理論を適用し
ようと思った場合使えることはまずない。多くの理論はただ新しい言葉で語るだけ
であり具体的な計算結果は改善しない。たとえば n 次行列の積が n の何乗で計算でき
るかというような問題など多くの具体的な問題で数学は工学の後塵を拝し最良の結果
を出すことができない。Goppa 符号や Mersenne twister のような例は極めてまれで
ある。数学の目的は最終的には何か具体的な結果が得られるところにあるべきで抽象
的な理論を展開するのも新しい概念や物の見方を通じて従来計算できなかったものや
分類できなかったものが計算できたり分類できるようになることが最終目的であると
信じる。そのレベルに到達しているか否かが一流の理論かそうでないかの差なのだ
と思う。私の専門は Hecke 代数のモジュラー表現論である。本稿の目的はこの具体
的対象を理解する努力の中で役に立った理論を紹介することである。現実には Hecke
代数のモジュラー表現という具体例をもとにいくつかの新しい理論が生まれること
になった。例えば B 型 Hecke 代数のモジュラー既約表現の分類さえ Kac-Moody Lie
代数の可積分加群の圏化を必要とした。

- 可積分加群の圏化理論は Chuang-Rouquier により導来圏同値を扱える形に
精密化され、Rouquier の 2-Kac Moody 理論として他の代数にも応用されて
いる。
- セルラー代数は Hecke 代数の Specht 加群理論を基に Graham-Lehrer により
導入された概念で半単純代数の表現論からモジュラー表現論に移行する適切
な枠組みであり、この概念も他の代数に応用されている。
- 柏原クリスタルは数理物理や表現論全般で使われる有用な概念である。

また何よりも対称群の群代数が次数付代数であるという事実は、対称群が 100 年以上
研究されてきた対象であるにもかかわらず 21 世紀になるまで誰もわからなかった、と
いう驚くべき結果であり、学部で対称群を教えるときは是非触れていただきたい事実
である。私はいわゆる岩堀 Hecke 代数のみですでに手一杯であるが、そもそも Hecke
代数は有限群と部分群の対 (G, H) に対し定義されるものであるから他の Hecke 代数
の中にもまだ私たちの知らないおもしろい例があるだろう。最近では柏原先生と韓国
の共同研究者を中心に簞 Hecke 代数とアフィン量子代数の表現論との関係が明らか

Key words and phrases. 対称群、ヘッケ代数、セルラー代数、導来圏同値。
本代数学シンポジウムへの参加は基盤研究 (C) 18K03212 の経費を使用した。.

になってきており、Hecke 代数の研究は現在様々な方向に広がっている。また、 A 型 Hecke 代数は対称群の群代数の q -変形であるが、 q を固定してもさらにもうひとつ隠れた変形変数がある。このことも簡 Hecke 代数が導入されて初めて見えてきた事実である。

2. 次数付代数としての対称群の群代数とヘッケ代数

2.1. 対称群の Coxeter 生成元. いうまでもないが、対称群 S_n は $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ から自分自身への全単射写像の全体に写像の合成により群構造を入れたものであり、生成元と基本関係により定義された群と同型である。すなわち、 A_{n-1} 型 Coxeter 群を

$$W(A_{n-1}) = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i^2 = 1, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \ (j \neq i \pm 1) \rangle$$

と定義し、 $i = 1, \dots, n-1$ に対し i と $i+1$ を交換する互換を $s_i = (i, i+1)$ と書くと、生成元と基本関係で定義される群のもつ普遍性質により写像 $\sigma_i \mapsto s_i = (i, i+1) \in S_n$ から定まる群準同型 $W(A_{n-1}) \rightarrow S_n$ が群同型になる。この同型により $W(A_{n-1})$ と S_n を同一視し、基本互換 $\{s_i \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ を Coxeter 生成元と呼ぶのであった。

2.2. Hecke 代数. R を単位的可換環、 G を有限群とする。 G の部分群 H に対し H の単位加群の誘導加群を 1_H^G と書く。念のため書くが、有限群論では誘導関手を制限関手の左随伴として定義する。すなわち、 G を基底とする R -加群を RG と書き、 G の積を R -線形に延長して RG の積を定めるとき、 RH -加群 V に対し

$$V_H^G = RG \otimes_{RH} V$$

である。他方、 G 上の R 値関数のなす R -加群を $R[G]$ と書き、畳み込み積により $R[G]$ に積を定めても群代数の特殊性により RG と同型になる。これが理由かどうかかわからないが、他分野では RG を $R[G]$ と書くことも多いようである。また、 RH -加群 V に対し G 上の V 値関数の集合を考え、 H の右作用 $f \cdot h(x) = h^{-1}f(hx)$ による固定点の集合を誘導加群 V_H^G と定義する流儀もある。つまりこの誘導関手は $\text{Hom}_H(RG, -)$ であり制限関手の右随伴である。群代数の特殊性により 2 種類の誘導加群は同型であり中山関係式と呼ばれる。 $\mathcal{H} = \text{End}_G(1_H^G)$ を Hecke 代数と呼ぶ。 \mathcal{H} の元は $G/H \times G/H$ 上の G -不変 R 値関数を用いて

$$xH \mapsto \sum_{yH \in G/H} f(xH, yH)yH$$

と表わされる。ここで G -作用は $G/H \times G/H$ への対角 G -作用である。実際、

$$gxH \mapsto \sum_{yH \in G/H} f(xH, yH)gyH = \sum_{gyH \in G/H} f(gxH, gyH)gyH$$

の係数比較より $f(xH, yH)$ が G -不変 R 値関数になることは明らかである。そこで G -軌道の特性関数を用いて \mathcal{H} の基底を与えることができる。これを Schur 基底と呼ぶ。

註 1. $G/H \times G/H$ 上の G -不変 R 値関数のなす自由 R -加群に畳み込み積により積を定義すると、 \mathcal{H} の反転代数 $\text{End}_G(1_H^G)^{\text{op}}$ と同型である。

Schur は Schur 基底に関する構造定数を書き下した。 \mathbb{F}_q を有限体、 G を代数群、 H を G の閉部分群とし、Hecke 代数

$$\text{End}_{G(\mathbb{F}_q)} \left(1_{H(\mathbb{F}_q)}^{G(\mathbb{F}_q)} \right)$$

⁰私個人の感想をいえば一般に集合 X 上の R 値関数の集合を $R[X]$ と書く用法が標準的だと思うので、 G -集合 X を基底にもつ R -加群は RX と書きたいのであるが。

を考えると幾何との関係が生まれる。等質空間 G/H が完備射影多様体になることと H が Borel 部分群を含むことが同値であることから、 G/H が旗多様体の場合が深く研究されており、Kazhdan-Lusztig 予想の記述に使われて有名になった。この例は Iwahori-Matsumoto が Hecke 代数を生成元と基本関係で記述しており、岩堀 Hecke 代数と呼ばれる。この生成元と基本関係を用いれば一般の Coxeter 群と任意の $q \in R$ に対して Hecke 代数が定義でき、Hecke 代数が Coxeter 群の群代数の q -変形になる。

G が一般線形群のとき A 型 Hecke 代数と呼ぶ。 $q = 1$ のときが対称群の群代数になる。本稿では対称群関係に限って話をしているので A 型 Hecke 代数の定義だけ書いておく。

定義 1. R を可換環、 $q \in R$ とする。生成元 T_1, \dots, T_{n-1} と関係式

$$(T_i - q)(T_i + 1) = 0, \quad T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} \\ T_i T_j = T_j T_i \quad (j \neq i \pm 1)$$

で定義される R -代数 \mathcal{H}_n を A_{n-1} 型 Hecke 代数と呼ぶ。

1990 年代になって R を任意の代数閉体、 $q \in R$ を 1 の冪根とする設定の研究が始まった。動機は $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の非等標数モジュラー表現論である。この応用では q は素数べきだから R の標数が ℓ ($\gcd(\ell, q) = 1$) ならば $q \in \mathbb{F}_\ell^\times$ となるが、以後は q が素数べきという仮定をはずす。一般に

$$e = \min\{k \in \mathbb{N} \mid 1 + q + \dots + q^{k-1} = 0\} \quad (e \geq 2 \text{ に注意})$$

を量子標数と呼ぶ。

2.3. 円分籠 Hecke 代数. 対称群の群代数が次数付代数である事実は Coxeter 生成元を使う限り見えてこない。我々は新しい生成元と基本関係に移る。この新しい生成元は Khovanov-Lauda 生成元と呼ばれる。対称群の群代数や Hecke 代数の別の生成元を与えるにはまず量子標数から定まる Dynkin 図形が必要である。

定義 2. Dynkin 図形 Γ_q を量子標数が $e = \infty$ のとき A_∞ 、 $2 \leq e < \infty$ のとき $A_{e-1}^{(1)}$ とする。 Γ_q の頂点集合は $e = \infty$ のとき $I = \mathbb{Z}$ 、 $2 \leq e < \infty$ のとき $I = \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ である。また、 Γ_q の定める Kac-Moody Lie 代数の単純ルートの集合を $\Pi = \{\alpha_i\}_{i \in I}$ とする。

まず円分籠 Hecke 代数を定義する。定義には次の形の多項式族が必要である。

$$Q_{i,j}(u, v) = \begin{cases} \sum_{p(\alpha_i, \alpha_i) + q(\alpha_j, \alpha_j) + 2(\alpha_i, \alpha_j) = 0} t_{i,j;p,q} u^p v^q & (\text{if } i \neq j) \\ 0 & (\text{if } i = j) \end{cases}$$

ただし $t_{i,j;p,q} \in R$ は $t_{i,j;-a_{ij},0} \in R^\times$ であり、また $Q_{i,j}(u, v) = Q_{j,i}(v, u)$ とする。Khovanov-Lauda [KL1] において円分籠 Hecke 代数が導入された。

定義 3. 対称化可能 Cartan 行列 $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ に対し、 A の定める Kac-Moody Lie 代数の重み格子を P とする。多項式族 $(Q_{i,j}(u, v))_{i,j \in I}$ と支配的整重み $\Lambda \in P$ から定まる円分籠 Hecke 代数 $R^\Lambda(n)$ とは、生成元

$$\{e(\nu) \mid \nu \in I^n\} \cup \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{\psi_1, \dots, \psi_{n-1}\}$$

⁰この移行は量子アフィン代数の有限次元表現の研究が Chevalley 生成元から Drinfeld 生成元に移行することで進展したことを連想させる。

と基本関係式

$$\begin{aligned} e(\nu)e(\nu') &= \delta_{\nu,\nu'}e(\nu) \\ \sum_{\nu \in I^n} e(\nu) &= 1 \\ x_r e(\nu) &= e(\nu)x_r, \quad x_r x_s = x_s x_r \\ \psi_r e(\nu) &= e(s_r \nu)\psi_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_r x_s &= x_s \psi_r \quad (\text{if } s \neq r, r+1) \\ \psi_r \psi_s &= \psi_s \psi_r \quad (\text{if } r \neq s \pm 1) \\ x_r \psi_r e(\nu) &= (\psi_r x_{r+1} - \delta_{\nu_r, \nu_{r+1}})e(\nu) \\ x_{r+1} \psi_r e(\nu) &= (\psi_r x_r + \delta_{\nu_r, \nu_{r+1}})e(\nu) \\ \psi_r^2 e(\nu) &= Q_{\nu_r, \nu_{r+1}}(x_r, x_{r+1})e(\nu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\psi_{r+1} \psi_r \psi_{r+1} - \psi_r \psi_{r+1} \psi_r)e(\nu) \\ &= \begin{cases} \frac{Q_{\nu_r, \nu_{r+1}}(x_r, x_{r+1}) - Q_{\nu_r, \nu_{r+1}}(x_{r+2}, x_{r+1})}{x_r - x_{r+2}} e(\nu) & \text{if } \nu_r = \nu_{r+2}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

および円分条件 $x_1^{(\alpha_{\nu_1}^\vee, \Lambda)} e(\nu) = 0$ から定まる単位的 R -代数である。

註 2. R が体ならば $R^\Lambda(n)$ は有限次元で、 $(R^\Lambda(n), R^\Lambda(n))$ -両側加群同型

$$\text{Hom}_R(R^\Lambda(n), R) \simeq R^\Lambda(n)$$

がある。つまり $R^\Lambda(n)$ は対称代数である。他方、 $Q_{i,j}(u, v)$ が $u - v$ の多項式のとき柏原先生は $R^\Lambda(n)$ を円分対称叢 Hecke 代数と呼ぶので、「円分対称叢 Hecke 代数は対称代数である」という命題は非自明な命題であることに注意されたい。この対称叢 Hecke 代数という呼び方も標準的になりつつある。

註 3. 当初 Khovanov-Lauda は $Q_{i,j}(u, v)$ を u, v の対称式になるように選んでいた。Brundan-Kleshchev が $u - v$ の多項式に変更したときは *sign modified* 叢 Hecke 代数と呼んでいた。

Dynkin 図形が木ならば円分叢 Hecke 代数 $R^\Lambda(n)$ は多項式族 $Q_{i,j}(u, v)$ の取り方に依存しないが、 $A_{e-1}^{(1)}$ ならば媒介変数 t に依存する。つまり、Hecke 代数の変数 q が 1 の冪根のとき円分叢 Hecke 代数の Lie 型 $A_{e-1}^{(1)}$ を定めるが、 q を固定してもなおもうひとつの変形パラメータ t が隠れているのである。これも対称群と Hecke 代数に関する現代の常識である。多項式族 $Q_{i,j}(u, v)$ の標準形は次のように与えられる。

- (1) $e = 2$ ならば $Q_{0,1}(u, v) = u^2 + tuv + v^2$.
- (2) $e \geq 3$ ならば $t \in R^\times$ を媒介変数として

$$Q_{i,i+1}(u, v) = u + v \quad (0 \leq i \leq e-2),$$

$$Q_{e-1,0}(u, v) = u + tv,$$

$$Q_{i,j}(u, v) = 1 \quad (j \not\equiv i \pm 1 \pmod{e}).$$

筆者は表現型を計算することで代数 $R^\Lambda(n)$ の同型類が実際に t の値により異なることを確認している。円分叢 Hecke 代数 $R^\Lambda(n)$ は次の次数付けにより次数付代数になる。

$$\deg(e(\nu)) = 0, \quad \deg(x_r e(\nu)) = (\alpha_{\nu_r}, \alpha_{\nu_r}), \quad \deg(\psi_s e(\nu)) = -(\alpha_{\nu_s}, \alpha_{\nu_{s+1}}).$$

ここで内積値は Cartan 行列から定まり、 $A_{e-1}^{(1)}$ 型の場合は $(\alpha_i, \alpha_i) = 2$ かつ $i \neq j$ のとき $(\alpha_i, \alpha_j) = -a_{ij}$ である。

次の定理は Brundan-Kleshchev 同型定理 [BK1] の特別な場合であり、ここで再掲はしないが、とくに対称群の群代数の Khovanov-Lauda 生成元の具体的な取り方も与えている。

定理 4. A 型 Hecke 代数 \mathcal{H}_n に対し Dynkin 図形 $\Gamma_q = A_\infty, A_{e-1}^{(1)}$ から定まる円分籠 Hecke 代数 $R^{\Lambda_0}(n)$ を考える。ただし Λ_0 は $A_{e-1}^{(1)} \setminus A_{e-1}$ に対応する基本重みであり、 $2 \leq e < \infty$ のとき $t = (-1)^e$ と取る。このとき $\mathcal{H}_n \simeq R^{\Lambda_0}(n)$ である。とくに対称群の群代数や A 型 Hecke 代数は次数付代数である。

この同型を通じて対称群の群代数や Hecke 代数に次数付代数の構造が入る。Coxeter 生成元 T_i は次数の異なる斉次元の和である。対称群の群代数の q -変形が Hecke 代数であることを知っている研究者は多いと思うが、 q を固定してもなお変形の変数 t が隠れていたわけでこの事実も円分籠 Hecke 代数の導入で初めてわかったことである。

註 4. Brundan-Kleshchev 同型定理は円分 Hecke 代数と円分籠 Hecke 代数の同型を示した定理であり、とくに B 型 Hecke 代数も次数付代数である。

2.4. 円分籠 Hecke 代数のブロック分解. 単純ルート n 個の和 β を考え、

$$I^\beta = \{\nu \in I^n \mid \alpha_{\nu_1} + \cdots + \alpha_{\nu_n} = \beta\}$$

とすると、 $e(\beta) = \sum_{\nu \in I^\beta} e(\nu)$ は $R^\Lambda(n)$ の中心元になる。とくに $A_{e-1}^{(1)}$ 型円分籠 Hecke 代数の場合 $e(\beta)$ が原始中心冪等元になり

$$R^\Lambda(\beta) = R^\Lambda(n)e(\beta)$$

が $R^\Lambda(n)$ のブロック代数になる。次の予想は可積分加群を円分籠 Hecke 代数の加群圏を用いて圏化するとき成り立ってほしい性質であり、重要な未解決問題である。

予想 1. 他の Lie 型のときも $R^\Lambda(\beta)$ は直既約代数であろう。

3. セルラー代数

3.1. セルラー代数. 代数幾何や数論の研究者なら Hodge filtration や weight filtration が思い浮かぶと思うが、filtration を付け加えた構造を考えるのは数学において標準的なことである。表現論において有名なのは準遺伝代数であり、準遺伝的と呼ばれる両側イデアルの列をもち、加群圏が最高重み圏になるための特徴づけを与える。対称群の群代数や Hecke 代数の Specht 加群の理論を基として、セルイデアルと呼ばれる両側イデアルの列をもつ代数が Graham-Lehrer により公理化され、セルラー代数と呼ばれる。

定義 5. 有限次元代数 A が半順序集合 Λ と各 $\lambda \in \Lambda$ ごとに与えられた集合 $ST(\lambda)$ でラベルされる基底 $\{C_{ST}^\lambda \mid \lambda \in \Lambda, S, T \in ST(\lambda)\}$ をもつとする。 C_{ST}^λ が次の条件 (i)-(iii) をみたすとき A をセルラー代数と呼ぶ。

- (i) $C_{ST}^\lambda \mapsto C_{TS}^\lambda$ の定める線形変換 $\iota: A \rightarrow A$ は A の反自己同型である。
- (ii) $a \in A$ とする。 $\lambda \in \Lambda$ と $S \in ST(\lambda)$ に対し $r_U^{(a,S)} \in R$ が存在して

$$aC_{ST}^\lambda \equiv \sum_{U \in ST(\lambda)} r_U^{(a,S)} C_{UT}^\lambda \pmod{A^{>\lambda}}$$

となる。ただし $A^{>\lambda} = \text{Span}\{C_{UV}^\mu \mid U, V \in ST(\mu), \mu > \lambda\}$ であり、 $r_U^{(a,S)}$ は T に依存しない。

定理 6. 基礎体の標数が 2 と異なるならばセルラー代数と森田同値な有限次元代数もまたセルラー代数である。

定理 7 (Murphy). A 型 Hecke 代数はセルラー代数である。とくに対称群の群代数はセルラー代数である。

対称群 S_n の群代数の場合、 $\mathbb{C}S_n$ の既約加群を Young 対称子を用いて構成するのが古典的であるが、分母に注意すれば Young 対称子を用いて $\mathbb{Z}S_n$ の両側イデアル列を作ることができ、複素数体に係数拡大すれば $\mathbb{C}S_n$ の両側既約加群の直和への分解が得られる。つまり半単純代数 $\mathbb{C}S_n$ の両側既約加群への直和分解から対応する $\mathbb{Z}S_n$ の両側イデアル列に移ることによりモジュラー表現の研究に移ることができる。現在のところ我々は対称群とその周辺の研究で手一杯であるが、より一般の有限群 G と G の既約表現がすべて絶対既約になる体を取り、 K の整数環 \mathcal{O}_K を係数とする群代数 $\mathcal{O}_K G$ を考えたとき、いつセルラー代数になるのかなどは調べられていない。

問 1. 他の有限群の群代数に対しいつセルラー代数になるかを調べよ。

註 5. セルラー代数の定義は思ったよりもきつく、ここで Brauer tree 代数の説明はしないがたとえば次の定理が知られている。

定理 8 (Ohmatsu). 基礎体の標数が 2 と異なる有限次元対称代数が有限表現型かつセルラー代数ならば Brauer tree が直線の Brauer tree 代数である。

3.2. セル加群. Lie 代数の表現論でいえば Verma 加群にあたる役目をセルラー代数の表現論において果たすのがセル加群である。

定義 9. A をセルラー代数とする。 $\{C_T \mid T \in \text{ST}(\lambda)\}$ を基底にもつ A -加群 $C(\lambda)$ を

$$aC_S = \sum_{T \in \text{ST}(\lambda)} r_T^{(a,S)} C_T$$

で定め、 $C_{US}^\lambda C_{TV}^\lambda \equiv \langle C_S, C_T \rangle C_{UV}^\lambda \pmod{A^{>\lambda}}$ により $C(\lambda)$ 上の対称形式を定める。 $C(\lambda)$ をセル加群と呼ぶ。

定理 10 (Graham-Lehrer). セル加群に対し次の定理が成り立つ。

- (1) $L(\lambda) = C(\lambda)/\text{Rad}(\cdot, \cdot)C(\lambda)$ は 0 または絶対既約加群になり、すべての既約加群はこのようにして得られる。
- (2) $\text{Ext}^i(L(\mu), L(\nu)) = \text{Ext}^i(L(\nu), L(\mu))$ が成り立つ。
- (3) $L(\mu)$ の射影被覆を $P(\mu)$ とする。
 - $[C(\lambda) : L(\mu)]$ を成分にもつ非負整数成分行列 D を分解行列
 - $[P(\mu) : L(\nu)]$ を成分にもつ非負整数成分行列 C を Cartan 行列と呼ぶ。このとき $C = D^T D$ および $\det(C) > 0$ が成り立つ。

セルラー代数の枠組みができると上記のように既約加群の完全代表系の構成法がわかり、計算効率はともかく、Gram 行列をもとに既約加群が求まることがわかる。

しかしアルゴリズム以上の具体的かつ明示的な最終結果を求めるならば、一般には Gram 行列の階数の制御は難しく、結果を得るのは容易ではない。筆者が円分 Hecke 代数と呼ばれる有限次元代数の無限族に対して明示的な既約加群の分類を行ったときには次節で述べる圏化理論を開発する必要があった。しかし結果はきれいで、Misra-Miwa 模型上を実現された $A_{e-1}^{(1)}$ 型最高重み柏原結晶を用いて既約加群を分類するという結果が得られた。

問 2. セルラー代数の一般論がこのような形で成功する例を他にも見つけよ。

本稿の主題である対称群の群代数と Hecke 代数に対しては Specht 加群の時代（柏原結晶が存在してもいない時代）に Dipper-James が非自明な組合せ論的計算により次の結果を与えている。

定理 11. e を量子標数とする。このとき、Hecke 代数 \mathcal{H}_n の既約表現は e -制限的 Young 図形で分類される。すなわち、次の集合で分類される。

$$\{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \mid 0 \leq \lambda_i - \lambda_{i+1} \leq e - 1, \sum_{i=1}^n \lambda_i = n\}$$

現在の視点から見れば、最高重み柏原結晶 $B(\Lambda_0)$ の Misra-Miwa 模型上の実現を用いた既約加群の分類に他ならない。

註 6. 上で述べたように、対称群の群代数の場合 Specht 加群（正確には双対 Specht 加群）がセラー代数の基である。Specht 加群はモジュラー表現を扱うために開発された加群で、すべてを整数係数の計算で行うために Garnir 関係式による書き換え規則を必要とする。しかし、対称群の群代数が半単純代数になるときを扱うのならば標準盤を基底とする Young の半正規表現のほうがはるかに見通しがよく計算も楽で扱いやすい。すなわち有理数計算を許す代わりにややこしい書き換え規則は必要ないのである。Fulton の本はその意味で変なやり方をしている。Specht 加群の本質的存在理由を説明せず読者を間違った方向へ誘導しているように思われる。

4. 最高重み加群の圏化と CHUANG-ROUQUIER 導来同値

4.1. KP hierarchy. 京都学派のソリトン理論の研究では charged fermion または neutral fermion をもとに Fock 空間を導入し、 $\mathfrak{gl}(\infty)$ と $\mathfrak{go}(\infty)$ の加群になっていることを見たのち簡約という操作によりアフィン Lie 代数の表現を実現していた。

- (1) KP hierarchy の簡約は $\mathfrak{g}(A_\ell^{(1)})$.
- (2) BKP hierarchy の簡約は $\mathfrak{g}(A_{2\ell}^{(2)})$ または $\mathfrak{g}(D_{\ell+1}^{(2)})$.

また、 $\mathfrak{g}(A_{2\ell-1}^{(1)})$ に folding を行うと $\mathfrak{g}(C_\ell^{(1)})$ が作用する Fock 空間が得られる。

対称群と A 型 Hecke 代数に関するものは (1) であり、Fock 空間は $\mathfrak{g}(A_\ell^{(1)})$ -加群となる。Lie 代数の作用を量子群の作用に変形した変形 Fock 空間も京都学派が導入し可解格子模型の研究に使われた。

Fock 空間も変形 Fock 空間も Young 図形を基底とする無限次元線形空間であり、Chevalley 生成元の作用が組合せ論的に定義される。またテンソル積を考えることで高階 Fock 空間と高階変形 Fock 空間も定義される。このとき真空が最高重み加群を生成するが、この最高重み加群の重み空間が Hecke 代数のブロック代数の加群圏の Grothendieck 群と同一視され、Chevalley 生成元の作用が誘導関手と制限関手の直和因子から定まる完全関手に持ちあがる、という描像が当初筆者が得た描像であり、この描像の基で円分 Hecke 代数の既約加群の分類等を行ったが、Brundan-Kleshchev[BK2] によりこの描像は円分 Hecke 代数の次数付加群圏による圏化に精密化された。

最高重み加群 $V(\Lambda)$ は可積分加群であるから重みの集合に Weyl 群が作用する。この場合、Weyl 群はアフィン対称群

$$\langle \{s_i\}_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \mid s_i s_j s_i = s_j s_i s_j \ (j - i \pm 1 \in e\mathbb{Z}), s_i s_j = s_j s_i \ (\text{otherwise}) \rangle.$$

である。Chuang-Rouquier[CR] は圏化の描像を精密化し、応用として次の定理を得た。

定理 12 (Chuang-Rouquier). 重み $\Lambda - \beta$ と $\Lambda - \beta'$ がアフィン対称群の作用で移りあうならば $R^\Lambda(\beta)$ と $R^\Lambda(\beta')$ は導来同値である。

4.2. 圏化と次元公式. 変形 Fock 空間の真空ベクトルは最高重みが Λ_0 の可積分加群 $V_q(\Lambda_0)$ を生成すること及び $R^{\Lambda_0}(\beta)$ の加群圏が重み空間 $V_q(\Lambda_0)_{\Lambda_0-\beta}$ の圏化を与えることから次の次元公式が得られる。

$$\dim_q e(\nu')R^{\Lambda_0}(\beta)e(\nu) = \sum_{\lambda \vdash n} K_q(\lambda, \nu')K_q(\lambda, \nu)$$

ただし、 $K_q(\lambda, \nu)$ は剰余列 (標準盤の数字の順に剰余を読んだもの) が $\text{res}(T) = \nu$ をみたす標準盤 $T \in \text{ST}(\lambda)$ すべてに対して $q^{\deg(T)}$ を足し上げたものである。 $\deg(T)$ の定義は難しくないが説明のためには若干の準備が必要なためここでは省略する。

註 7. *KP hierarchy* の代わりに *BKP hierarchy* の Fock 空間を用いれば他のアフィン Lie 型 $R^{\Lambda_0}(\beta)$ に対する同様の次元公式が得られる。

註 8. 円分圏 Hecke 代数に移るもうひとつの利点は生成元の中に冪等元が豊富に存在することである。Coxeter 生成元で考えるかぎり Hecke 代数の冪等元の構成は極めて難しい。計算可能な冪等元が得られることでたとえばブロック代数の表現型の決定が可能になった。 τ 傾理論を用いると順表現型ブロック代数の代数構造もわかる。

4.3. 圏化理論. Chuang-Rouquier の \mathfrak{sl}_2 圏化理論と対称群や Hecke 代数の加群圏による可積分最高重み $\mathfrak{g}(A_{e-1}^{(1)})$ -加群の圏化は下記のように一般化されており、2 表現であることを確認するための定理 (Control by K_0 , Heisenberg categorification etc.) が知られている。 \mathfrak{g} を Kac-Moody Lie 代数、 P を重み格子、 $\Pi = \{\alpha_i\}_{i \in I}$ とする。 Rouquier は、 P が対象、1 射が $E_i 1_\lambda : \lambda \rightarrow \lambda + \alpha_i, F_i 1_\lambda : \lambda \rightarrow \lambda - \alpha_i$ ($\lambda \in P, i \in I$) で生成され、2 射がある定義関係式をみたす

$$x : E_i 1_\lambda \rightarrow E_i 1_\lambda, \psi : E_i E_j 1_\lambda \rightarrow E_j E_i 1_\lambda, \eta : 1_\lambda \rightarrow F_i E_i 1_\lambda, \epsilon : E_i F_i 1_\lambda \rightarrow 1_\lambda$$

で生成されている 2 圏 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ を導入した。 A 型の場合は Khovanov-Lauda の定義した 2 圏 [KL2] もあり、両者の定義が同値であることは Brundan[B] によって証明された。 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ は Kac-Moody Lie 代数の圏化である。

定義 13. $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の 2 表現とは、圏の族 $\{\mathcal{R}_\lambda\}_{\lambda \in P}$ と関手

$$E_i 1_\lambda : \mathcal{R}_\lambda \rightarrow \mathcal{R}_{\lambda+\alpha_i}, F_i 1_\lambda : \mathcal{R}_\lambda \rightarrow \mathcal{R}_{\lambda-\alpha_i},$$

の組であって、

- (1) 自然変換 $xe(i) : E_i \rightarrow E_i, \psi e(ij) : E_i E_j \rightarrow E_j E_i$ が存在して、 $xe(i)$ と $\psi e(ij)$ から定まる $x_k e(\nu), \psi_k e(\nu)$ が圏 Hecke 代数の関係式をみたす。
- (2) F_i は E_i の右随伴関手である。
- (3) $\eta_i : 1 \rightarrow F_i E_i$ を単位自然変換、 $\epsilon_i : E_i F_i \rightarrow 1$ を余単位自然変換とすると、

$$\sigma_{ij} = F_i E_j \epsilon_i \circ F_i \psi e(ij) F_i \circ \eta_i E_j F_i : E_j F_i \rightarrow F_i E_j$$

は $i \neq j$ のとき可逆。すなわち、 $a \in \mathcal{R}_\lambda$ とすると

$$\begin{aligned} E_j F_i(a) &\xrightarrow{(\eta_i)_{E_j F_i(a)}} F_i E_i E_j(F_i(a)) \\ &\xrightarrow{F_i((\psi e(ij))_{F_i(a)})} F_i E_j(E_i F_i(a)) \xrightarrow{F_i E_j((\epsilon_i)_a)} F_i E_j(a) \end{aligned}$$

が可逆であることを要請する。

- (4) $\lambda(\alpha_i^\vee) \geq 0$ のとき、次式で定める自然変換 $E_i F_i 1_\lambda \rightarrow F_i E_i 1_\lambda \oplus 1_\lambda^{\oplus \lambda(\alpha_i^\vee)}$

$$\left(\sigma_{ii}, \epsilon_i, \epsilon_i \circ (xe(i) F_i), \dots, \epsilon_i \circ (xe(i) F_i)^{\lambda(\alpha_i^\vee)-1} \right)^T$$

が可逆であることを要請する。ここで、 $a \in \mathcal{R}_\lambda$ に対し $xe(i) F_i$ は

$$xe(i)_{F_i(a)} \in \text{Hom}(E_i F_i(a), E_i F_i(a))$$

である。

(5) $\lambda(\alpha_i^\vee) \leq 0$ のとき、次式で定める自然変換 $E_i F_i 1_\lambda \oplus 1_\lambda^{\oplus -\lambda(\alpha_i^\vee)} \rightarrow F_i E_i 1_\lambda$

$$\left(\sigma_{ii}, \eta_i, F_i x e(i) \circ \eta_i, \dots, (F_i x e(i))^{-\lambda(\alpha_i^\vee)-1} \circ \eta_i \right)$$

が可逆であることを要請する。ここで、 $a \in \mathcal{R}_\lambda$ に対し $F_i x e(i)$ は

$$F_i(xe(i)_a) \in \text{Hom}(F_i E_i(a), F_i E_i(a))$$

である。

- 円分圏 Hecke 代数の加群圏が Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}(A_{e-1}^{(1)})$ の量子群の可積分最高重み加群の重み空間を圏化するという描像
- 可積分最高重み加群上の Weyl 群作用の導来同値への持ち上げ

もまた対称群の群代数と Hecke 代数に関する現代の常識と言ってよい。そして圏化理論は他にも一般線形群の等標数モジュラー表現論、BGG 圏 \mathcal{O} 等に応用され、圏化理論に現れる標準基底を通じて Lie 超代数 $\mathfrak{gl}(m|n)$ の既約指標公式の研究も進んだ。

5. 簡約表示と柏原クリスタル

Coxeter 生成元に関する話題には対称群の簡約表示の理論があり、対称群の常識と違ってほしいので Edelman-Greene 対応の Morse-Schilling による一般化と柏原結晶 [BS] について少しだけ触れる。標語的にいえば次が成立する。

定理 14. $w \in S_n$ の簡約表示の集合を $R(w)$ とする。

- (1) Edelman-Greene 対応という Robinson-Schensted-Knuth 対応と似た手続きで簡約表示に半標準盤と標準盤の対を対応させることができる。
- (2) 15 ゲーム (jeu de taquin) を用いて $|R(w)|$ を計算することができる。
- (3) 簡約表示の減少列分解の集合に柏原結晶構造が入り、Edelman-Greene 対応 (の一般化) が結晶同型を与える。

よく知られているように、 $[d] = \{1, 2, \dots, d\}$ をアルファベットとする語長 n の語の集合を $[d]^n$ とするとき、Robinson-Schensted-Knuth 対応は Schensted insertion (bumping procedure) という操作によって半標準盤と標準盤の対を対応させる操作であり、行の数が d 以下のヤング図形 λ に対し、アルファベット $[d]$ の半標準盤の集合を $\text{SST}_d(\lambda)$ 、 $\text{ST}(\lambda)$ を標準盤の集合とすると、全単射

$$[d]^n \simeq \bigsqcup_{\lambda \vdash n} \text{SST}_d(\lambda) \times \text{ST}(\lambda)$$

が得られる。柏原結晶とは特別な彩色有向グラフのことで、Kac-Moody Lie 代数 \mathfrak{g} をひとつ固定し、有向辺は単純ルートで彩色され、頂点は重み格子の元による重みを与えられている。柏原結晶の公理は省略するが、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_d(\mathbb{C})$ ならば $\text{SST}_d(\lambda)$ を頂点とする連結な柏原結晶が定義され、最高重み λ の既約 \mathfrak{g} -加群 $V(\lambda)$ の結晶基底に付随する柏原結晶 $B(\lambda)$ の実現を与えている。とくに $[d] = \text{SST}_d((1))$ は \mathfrak{g} の定義表現に付随する柏原結晶であり、この柏原結晶を B で表わす。柏原結晶のテンソル積規則により $[d]^n$ は柏原結晶 $B^{\otimes n}$ と同一視される。すなわち Robinson-Schensted-Knuth 対応の両辺に出てくる集合はともに彩色有向グラフの頂点集合とすることができる。このとき彩色有向グラフとして同型かどうかの問題となるが京都学派は次の定理を与えた。

定理 15. Robinson-Schensted-Knuth 対応は次の結晶同型を与える。

$$B^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash n} B(\lambda)^{\oplus |\text{ST}(\lambda)|}$$

Edelman-Greene 対応とは Schensted insertion の計算手続きを一か所変更したもので、具体的には $i, i+1$ を含む行に i を挿入したとき i が $i+1$ を追い出すのではなく行に変化がないまま次の行に $i+1$ が挿入される、という規則に変えたものである。このとき、Edelman-Greene[EG] は全単射

$$R(w) \simeq \bigsqcup_{\lambda \vdash \ell(w)} \text{SST}_{n-1}(w, \lambda) \times \text{ST}(\lambda)$$

を与えた。ただし $\text{SST}_{n-1}(w, \lambda)$ は読みが w の簡約表示を与える半標準盤のなす $\text{SST}_{n-1}(\lambda)$ の部分集合である。

定義 16. $w \in S_n$ の簡約表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ の深さ d の減少列分解とは

$$(i_1 \cdots i_{k_1})(i_{k_1+1} \cdots i_{k_2}) \cdots (i_{k_{d-1}+1} \cdots i_\ell)$$

と $i_1 \cdots i_\ell$ を連続する減少部分列 d 個に分けたものをいう。減少部分列は空集合でもよい。 $w \in S_n$ の簡約表示の深さ d の減少列分解の集合を $B_d(w)$ とする。

$w \in S_n$ の簡約表示から得られる減少列分解に対し Edelman-Greene 対応

$$\emptyset \leftarrow i_\ell \cdots i_1 = (P, Q) \in \text{SST}_{n-1}(w^{-1}, \lambda) \times \text{ST}(\lambda)$$

を計算し、各 $i \in [d]$ に対し $Q \in \text{ST}(\lambda)$ に書かれている $k_d - k_{d-i+1} + 1, \dots, k_d - k_{d-i}$ を i に書き換えると次の全単射が得られる。ただし $k_0 = 0, k_d = \ell$ とする。

$$B_d(w) \simeq \bigsqcup_{\lambda \vdash \ell(w)} \text{SST}_{n-1}(w^{-1}, \lambda) \times \text{SST}_d(\lambda)$$

これが Edelman-Greene 対応の Morse-Schilling による一般化である。

定理 17 (Morse-Schilling). $B_d(w)$ に柏原結晶の構造が入り、Edelman-Greene 対応 (の一般化) により柏原結晶同型

$$B_d(w) \simeq \bigsqcup_{\lambda \vdash \ell(w)} B(\lambda)^{\oplus |\text{SST}_{n-1}(w^{-1}, \lambda)|}$$

が得られる。

15 ゲームを用いた $|\text{SST}_{n-1}(w, \lambda)|$ の求め方についての説明は省略する。

REFERENCES

- [B] J. Brundan, On the definition of Kac-Moody 2-category, *Math. Ann.* **364** (2016), 353–372.
- [BK1] J. Brundan and S. Kleshchev, Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras, *Invent. Math.* **178** (2009), 451–484.
- [BK2] J. Brundan and S. Kleshchev, Graded decomposition numbers for cyclotomic Hecke algebras, *Adv. Math.* **222** (2009), 1883–1942.
- [BS] D. Bump and A. Schilling, *Crystal Bases: Representations and Combinatorics*, World Scientific, 2017.
- [CR] J. Chuang and R. Rouquier, Derived equivalences for symmetric groups and \mathfrak{sl}_2 -categorification, *Ann. Math.* **167** (2008), 245–298.
- [EG] P. Edelman and C. Greene, Balanced tableaux, *Adv. Math.* **63** (1987), 42–99.
- [KL1] M. Khovanov and A. Lauda, A diagrammatic approach to categorification of quantum groups, I, *Representation Theory*, **13** (2009), 309–347.
- [KL2] M. Khovanov and A. Lauda, A categorification of quantum $\mathfrak{sl}(n)$, *Quantum Top.*, **1** (2010), 1–92.

有限群, デザイン, 量子情報——特に unitary t -groups と unitary t -designs について

坂内英一 (Eiichi Bannai)

(Professor Emeritus of Kyushu University)

この原稿は 2019 年 9 月 2 日～5 日に東北大学で開催された第 64 回代数学シンポジウムにおける著者の上記のタイトルでの一般向け講演 (9 月 3 日) の記録です. 講演は日本語で行いましたが, スライドは英語で書きました. この報告集の原稿はその英語の原稿をほぼそのまま使って, 日本語を必要に応じて付け加えました. 日本語と英語のちゃんぽんになっていますが, 日本語を知らない場合も英語だけを追ってある程度理解していただけることを期待してこのような形にしました. 数学的内容のより詳しい解説については後述する参考文献などを参照していただけたらと思います.

講演のアブストラクト (予稿) :

デザイン理論とは, 与えられた空間 M に対して, M を近似する良い有限部分集合を見つけ出すことにある. M が単位球面 S^{n-1} の場合は spherical design と呼ばれ, M が v 個の点の集合 V の k 点部分集合全体 $\binom{V}{k}$ (Johnson アソシエーションスキーム $J(v, k)$ と呼ばれる) の場合は combinatorial design と呼ばれる. この講演では, 先ず, spherical t -designs および combinatorial t -designs の場合の理論の概略を, 実例, 存在問題, 構成問題, Fisher 型不等式, tight t -designs, 有限群論との関連性, などを中心にのべる.

次に, t -design の概念の色々な拡張およびそれについての研究の現状 (何が知られていて何を知りたいと思うかを中心に) を述べる. (Bannai-Bannai-Tanaka-Zhu, Design theory from the viewpoint of algebraic combinatorics, Graphs and Combinatorics (2017) 参照.)

最後に M が unitary group $U(d)$ の場合の t -designs (unitary t -designs) について述べる. この概念は物理の量子情報の分野で主に研究されて来た. $U(d)$ の t -design それ自身が群になっている時, それは unitary t -group と呼ばれる. 任意の $t \geq 2$ に対しての unitary t -groups の分類が (物理の分野では困難と考えられていたようであるが), 実は $d \geq 5$ の時は Guralnick-Tiep, Decompositions of small tensor powers and Larsen's conjecture, Rep. Theory (2005) で既に知られていることを, また残った $d = 2, 3, 4$ の場合の分類も可能であることを, Bannai-Navarro-Rizo-Tiep, Unitary t -groups, arXiv:1810.02507 (to appear in J. Math. Soc. Japan) は示した. またその結果を用いて, 群 $Sp(4, 3)$ を用いての $U(4)$ の unitary 4-design の具体的な構成にも成功した (Bannai-Nakahara-Zhao-Zhu, On the explicit constructions of certain unitary t -designs, arXiv:1906.04583).

デザインとは何か (What is a design ?)

デザイン理論の目的は、与えられた空間 M に対して M を全体として良く近似する有限部分集合 $X (\subset M)$ を見つけることにある. (The purpose of design theory is, for a given space M , to find good finite subsets X that approximate the whole space M well.)

ここでは、先ず、 M が球面 S^{n-1} および M が Johnson association scheme $J(v, k)$ の場合を考える. ここで、 $J(v, k)$ は v 個からなる有限集合 V の k 個の元からなる部分集合の全体を表す. $J(v, k)$ は群論的には対称群 S_v の部分群 $S_k \times S_{v-k}$ による等質空間 $S_v/(S_k \times S_{v-k})$ を表す. この集合には association scheme と呼ばれる構造が入り、Johnson association scheme $J(v, k)$ と呼ばれる.

以下 t は自然数とする.

定義. 球面 t -デザイン (Spherical t -design) (Delsarte-Goethals-Seidel, 1977)

Let $S^{n-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ be the unit sphere. A finite subset X of S^{n-1} is called a spherical t -design on S^{n-1} , if

$$\frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} f(x) d\sigma(x) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x),$$

for all $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, polynomials of degree $\leq t$.

定義. 組合せ t -デザイン (Combinatorial t -design) (a classical concept).

A subset X of $\binom{V}{k} (= J(v, k))$ is called a combinatorial t -design (a t - (v, k, λ) design), if

$$|\{A \in X \mid T \subset A\}| = \lambda (= \text{constant, indep. of the choice of } T.)$$

holds for all $T \in \binom{V}{t}$,

講演では主に次の3つの問題を取り扱った.

(i) What problems we are most interested in, in particular from the viewpoint of Algebraic Combinatorics. First, we will discuss this in the context of spherical t -designs and combinatorial t -designs.

(Part I : Spherical t -designs と combinatorial t -designs についての概説.)

(ii) What kinds of generalizations of t -design concept we would like to consider. (There are generalizations in several different directions.)

(Part II : t -design の概念の種々の拡張を考える.)

(iii) Explanations of some new results, in particular on unitary t -designs.

(Part III : Unitary t -groups と unitary t -designs についての新しい結果の紹介.)

Part I

球面 t -デザインと組合せ t -デザイン

(Spherical t -designs and combinatorial t -designs)

I-1. 球面 t -デザイン (Spherical t -designs)

(1) S^{n-1} の t -デザインの例 (Examples of spherical t -designs)

For $n = 2$, the $t+1$ vertices of a regular $(t+1)$ -gon inscribed in $S^1(\subset \mathbb{R}^2)$ form a t -design. (So, we mostly consider the cases $n \geq 3$ in what follows.)

For $n = 3$, the set of vertices of the 5 regular polyhedrons inscribed in $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ becomes a spherical t -design for the following t .

- 4 vertices of a regular tetrahedron form a 2-design.
- 6 vertices of a regular octahedron form a 3-design.
- 8 vertices of a cube form a 3-design.
- 12 vertices of a regular icosahedron form a 5-design.
- 20 vertices of a regular dodecahedron form a 5-design.

Question. Can you find spherical t -designs for bigger t in S^2 ?

(I think you will find that this question is not so easy indeed.)

他の有名な例としては、

- $n = 8$ のとき、 E_8 -ルート系の 240 個のルートの全体 (長さ 1 に正規化したもの) は spherical 7-design である.
 - $n = 24$ のとき、Leech 格子の 196560 個の min vectors の全体 (長さ 1 に正規化したもの) は spherical 11-design である.
- (For $n = 8, n = 24$, the 240 min. vectors of E_8 -lattice and the 196560 min. vectors of Leech lattice make a 7-design in S^7 and an 11-design in S^{23} respectively.)

大きな t に対して、また大きな n に対して、spherical t -designs in S^{n-1} が存在するかまた構成できるかどうかは自明ではない。(これに関しては後述する.)

有限群、格子を用いての球面デザインの例

(constructions of spherical t -designs obtained from finite groups and lattices)

球面 t -デザインの多くの具体例の構成は、以下のように有限群および格子から自然に得られる.

- (a) G を実直交群 $O(n)$ の有限部分群とする. 任意の単位ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ の G による軌道 $X = x^G = \{x^g \mid g \in G\}$ として得られる.
- (b) $L \subset \mathbb{R}^n$ を格子 (lattice) とする. L の長さ \sqrt{m} の shell $L_m = \{x \in L \mid x \cdot x = m\}$ から $X = \frac{1}{\sqrt{m}}L_m$ として得られる.

(Many examples of spherical t -designs are obtained either as:

- (a) an orbit of a finite group $G \subset O(n)$, or

(b) a shell of a lattice $L \subset \mathbb{R}^n$, i.e., $X = \{\frac{1}{\sqrt{m}}x \mid x \in L, x \cdot x = m\}$ for a fixed m .)

しかし、上の構成において、(a) については知られている例は全て $t \leq 19$ (for $n \geq 3$) であり、(b) においては知られている例は全て $t \leq 11$ (for any $n \geq 2$) である。

(However, those known examples are always $t \leq 19$ for (a) (for $n \geq 3$), $t \leq 11$ for (b) (for any $n \geq 2$.)

このことは有限群あるいは格子から自然に出来るものを考えているだけでは限界があるということの意味すると思われる。

Note that, for each of (a) and (b), it seems that

“ Whether t is always bounded by an absolute constant independent of n in each of the cases (a) and (b) ”

is an interesting open problem.

研究課題： 組合せデザインに関しては上に述べたことの類似が成り立つか否かは、すなわち、有限置換群あるいはコードから作られる組合せ t -デザインを考察することは、興味ある問題と思われる。

Many examples of combinatorial t -designs are obtained either as:

(a') an orbit of a finite permutation group $G \subset S_v$, or

(b') a shell of a (linear) code $C \subset (\mathbb{F}_2)^v$, i.e., $X = \{\text{support}(x) \mid x \in C, \text{weight}(x) = k\}$ for a fixed k .

However, for each of (a') and (b'), t is bounded by an absolute constant for all known examples !

We can ask whether t is always bounded by an absolute constant in each of the above cases (a') and (b') ! ((a') is answered yes, by using the classification of finite simple groups, but (b') is still open, I believe.)

(2) 球面 t -デザインの存在問題 (the existence of spherical t -designs)

- There exist t -designs on S^{n-1} for any pair of n and t !
(Seymour-Zaslavsky, Advances in Math., 1984)
- Many proofs are known, but they only show the existence, and good explicit constructions are not yet known.
- The best existence result is due to Bondarenko-Radchenko-Viazovska (Annals of Math., 2013) that shows the existence of t -designs with the sizes asymptotically the same order as the best possible bound., if n is fixed and $t \rightarrow \infty$. However, it seems that if t is fixed and $n \rightarrow \infty$, then good bounds are unknown. (This is an interesting open problem.)

- Most of known existence proofs use the continuous property of real numbers. A new existence proof was obtained by Zhen Cui, Jiacheng Xia, and Ziqing Xiang: "Rational designs" (Advances in Math., 2019).

(3) 球面 t -デザインの具体的な構成について (Explicit constructions of spherical t -designs)

- Some are known (Kuperberg, 2005, for $n = 3$). See also, for $n = 3$, $|X| = (t + 1)^2$ with $t \leq 100$ (Chen-Frommer-Lang, 2011)
- Ziqing Xiang: Explicit spherical designs, (preprint, 2018) gives a more general explicit constructions. (However, note that It is a delicate question what are good explicit constructions. Good explicit constructions are yet to be given !)

It is easy to see that, if $X \subset S^{n-1}$ is a spherical t -design, then for any orthogonal transformation $g \in O(n)$, $X^g \subset S^{n-1}$ is a spherical t -design. Moreover, if X_1 and X_2 are spherical t -designs, then $X_1 \cup X_2$ is a spherical t -design.

So, we are naturally interested in the spherical t -designs of small sizes.

Problems.

- Are there any natural theoretical lower bounds of the size of spherical t -designs on S^{n-1} ? (Yes. Fisher type inequality below.)
- For a given pair of t and n , determine the spherical t -designs of the smallest size ("optimal" aspherical t -designs) in S^{n-1} . (This is the most fundamental problem in design theory, but not easy in general.)

Here, we mainly consider the Problem (i).

(4) $|X|$ の自然な下限と tight t -デザイン (Fisher type lower bound and tight t -designs)

For a spherical t -design X on S^{n-1} , the following Fisher type lower bounds for $|X|$ hold:

$$|X| \geq \binom{n-1+e}{e} + \binom{n-1+e-1}{e-1}, \quad \text{if } t = 2e,$$

$$|X| \geq 2 \binom{n-1+e}{e}, \quad \text{if } t = 2e + 1.$$

If the equality holds in one of above inequalities, then X is called a tight spherical t -design. (We are interested in the classification problem of tight spherical t -designs.)

(5) Tight spherical t -designs の分類について. (Classification of tight t -design on S^{n-1})

$n = 2 \implies X$ is a regular $(t + 1)$ -gon
(So we assume $n \geq 3$ in what follows)

- We get $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11\}$ (Bannai-Damerell, 1979,1980).

Tight t -designs on S^n are classified for all t , except $t = 4, 5, 7$. Some further non-existence results for $t = 4, 5, 7$ are known. (Bannai-Munemasa-Venkov (2004), Nebe-Venkov (2013).) But the problem is still open for $t = 4, 5, 7$.

I-2. 組合せデザイン

(A) The existence and the construction problems of combinatorial t - (v, k, λ) designs have a long history in combinatorics.

(Kirkman, Steiner, Witt, Ray-Chaudhuri, Wilson, Teirlinck, Keevash, etc.)

The general existence result for $t = 2$ was shown by Wilson (1974). Teirlinck (1987) proved the existence of t -designs for any t , but for some specific k and λ , by using induction.

Recently, Keevash (2019+) proved the general existence proof (corresponding to Wilson's for $t = 2$), by using the probabilistic methods. The explicit constructions are not yet possible. For example, it seems no explicit 6 - $(v, k, 1)$ designs are explicitly described yet.

(B) Fisher type lower bound for combinatorial t -designs in $J(v, k)$, and tight combinatorial t -designs

Fisher type lower bound becomes, for $t = 2e$,

$$|X| \geq \binom{v}{e}.$$

We say X is a tight $2e$ -design in $J(v, k)$, if “=” holds.

The classification of tight combinatorial t -designs have very much studied, by Ray-Chaudhuri-Wilson (1977), Enomoto-Ito-Noda (1977), Bannai (1978), Dukes and Short-Gershman (2012), Z. Xiang (2018), etc.. Note that tight 2-designs are symmetric designs and since there are too many examples, the classifications are certainly impossible, The classification is still open for $t = 2e \geq 20$. (The concept and the classification problem of tight $t(= 2e + 1)$ -designs are reduced to the case of tight $2e$ -designs.)

Part II.

t -デザインの概念の拡張

(Generalizations of t -design concept)

Generalization (I). Change the space M .

Change sphere S^{n-1} to compact symmetric spaces of rank 1

(= projective spaces over $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$.)

Or, change $J(v, k)$ to other \mathbb{Q} -polynomial association schemes.

There are more generalizations. I will come back to this important topic later in my talk.

So, let me discuss some other kinds of generalizations first.

Generalization (II). Allow weight function w (Cubature formula)

- Let $X \subset S^{n-1}$, and let $w : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Then the pair (X, w) is called a weighted spherical t -design, if

$$\frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} f(x) d\sigma(x) = \sum_{x \in X} w(x) f(x),$$

for $\forall f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, polynomials of degree $\leq t$.

- Let $X \subset M = \binom{V}{k}$, and let $w : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Then the pair (X, w) is called a weighted combinatorial t -design, if

$$\sum_{T \subset A \in X} w(A) = \text{const} \left(\text{independent of } T \in \binom{V}{t} \right).$$

Generalization (III). Allow different block sizes.

Euclidean t -designs and relative t -designs.

For spherical t -designs, consider several concentric spheres of radii $\{r_1, r_2, \dots, r_p\}$. Let $X_\nu = X \cap S_{r_\nu}^{n-1}$. Then (X, w) is called an Euclidean t -design on $S_{r_1} \cup S_{r_2} \cup \dots \cup S_{r_p}$ if

$$\sum_{\nu=1}^p \frac{w(X_{r_\nu})}{|S_{r_\nu}^{n-1}|} \int_{S_{r_\nu}^{n-1}} f(x) d\sigma(x) = \sum_{x \in X} w(x) f(x).$$

For combinatorial t -designs or more generally for a \mathbb{Q} -polynomial association scheme $\mathfrak{X} = (M, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$, and a fixed $x_0 \in M$, a pair (X, w) with $X \subset M$, is called a relative t -design with respect to $x_0 \in M$, if $E_i \phi_{(X, w)} \in \langle E_i \phi_{x_0} \rangle$ holds for $i = 1, 2, \dots, t$, where $\phi_{(X, w)}$ is the characteristic vector of (X, w) , namely $\phi_{(X, w)}(y) = w(y)$ if $y \in X$ and $= 0$, if $y \notin X$.

Note that the concept of "combinatorial t -design" was (algebraically) generalized for any \mathbb{Q} -polynomial association schemes (Delsarte (1973)).

Let $\mathfrak{X} = (M, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ be a \mathbb{Q} -polynomial association scheme.

Let $\mathcal{A} = \langle A_0, A_1, \dots, A_d \rangle = \langle E_0, E_1, \dots, E_d \rangle$ be the Bose-Mesner algebra and let E_0, E_1, \dots, E_d be the primitive idempotents. Then $X \subset M$ is a t -design, if

$$E_i \phi_X = 0 \text{ for } i = 1, 2, \dots, t,$$

where ϕ_X is the characteristic vector (column vector) for X .

Note that t -design in Johnson association scheme $J(v, k)$ is equivalent to the concept of combinatorial t - (v, k, λ) design. While, t -design in the Hamming association scheme $H(d, q)$ is equivalent to the concept called an orthogonal array of strength t .

For the study of Euclidean t -designs, in particular of Fisher type bounds and of tight designs, see many papers of Eiichi and Etsuko Bannai (2005~). This concept was started by Neumaier-Seidel (1988) and Delsarte-Seidel (1989).

For the study of relative t -designs on association schemes, cf. Bannai-Bannai-Tanaka-Zhu (2017), etc. Fisher type lower bounds and the classification problems of certain tight t -designs were mainly studied.

The concept of relative t -designs was first conceived and studied by Delsarte (1977): Pairs of vectors in the space of association schemes (1977). However, this theory was seriously studied only recently (last less than 10 years), after imitating the study of Euclidean t -designs.

The relative t -design on binary Hamming association schemes $H(d, 2)$ is equivalent to the concept of "(weighted) regular t -wise balanced design", namely combinatorial t -designs which allow different sizes of blocks.

Fisher type lower bound for $H(d, 2)$ was first obtained by Z. Xiang (2012).

Generalization (IV). T -designs.

- For spherical designs, let $T \subset \{1, 2, 3, \dots\}$. We say $X \subset S^{n-1}$ is a spherical T -design, if the following holds

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0, \text{ for all } f(x) \in \text{Harm}_i(\mathbb{R}^n), \text{ with } i \in T.$$

- For combinatorial T -design (or \mathbb{Q} -polynomial association schemes), X is a T -design (where $T \subset \{1, 2, \dots, d\}$, if $E_i \phi_X = 0$, for all $i \in T$).

Note that if $T = \{1, 2, \dots, t\}$, then T -design is an ordinary t -design.

This concept of T -design is due to Delsarte (1973). However, that there is an interesting Fisher type lower bound for $T = \{t\}$ was first observed by Bannai-Okuda-Tagami (2015). Then tight spherical $\{4\}$ -designs were classified by Okuda-Yu (2017), and more general cases were studied by Zhu-Bannai-Bannai-Kim-Yu (Electronic J Comb., 2017), say, spherical $\{8, 4\}$ -designs.

Note that spherical 2-designs are equivalent to tight frames (on the unit sphere).

Generalization (I). Change the space M (again).

For the spherical case, we already mentioned the cases taking M as compact rank 1 symmetric spaces (=projective spaces), (Cf. Hoggar (1982).)

(i) Compact symmetric spaces of arbitrary ranks.

(i-a) Homogeneous spaces G/H , for Lie group G .

Say, real Grassmannian spaces (Bachoc-Coulangéon-Nebe (2002), Bachoc-Bannai-Coulangéon(2004); complex Grassmannian spaces (Roy, 2010), etc.

(i-b) G itself is a Lie group,

Cf. Unitary t -designs, Roy-Scott, 2009, etc.

(ii) Complex sphere (Roy-Suda, 2011).

(This space is not a symmetric space.)

(iii) There are many many interesting spaces and we can study the concept of t -designs (or T -designs) in various situations.

Part III. Unitary t -groups and unitary t -designs

III-1. Unitary t -designs.

初めに述べたように、デザイン理論の本質は、与えられた空間 M に対して M をよく近似する有限部分集合 X を見つけたり研究することにある。 M が球面の時が球面デザインであり、 M が Johnson アソシエーションスキーム $J(v, k)$ の時が組合せデザイン (Combinatorial $t(v, k, \lambda)$ design) という具合である。 M がユニタリー群 $U(d)$ の時にユニタリー群 $U(d)$ を近似する良い有限部分集合 X が unitary t -design である。 Unitary t -design の一つの定義は次のように与えられる。

$U(d)$ を $d \times d$ のユニタリ行列全体の作る通常のユニタリ群とし、その元が $U = (u_{i,j})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq d}$ で表されているとする。 $\text{Hom}(U(d), r, s)$ を $u_{i,j}$ 達に関して r -次, $\overline{u_{i,j}}$ 達に関して s -次の斉次な多項式全体の作る空間とする。 $U(d)$ の部分集合 X が unitary t -design であるとは、 X は $U(d)$ を近似する良い有限部分集合であり、次のように定義される。 Spherical t -design (Cf. Delsarte-Goethals-Seidel [9] (1977) および Roy-Suda [14] など) との類似にも留意されたい。

定義. A finite set $X \subset U(d)$ is called a unitary t -design, if

$$(i) \quad \int_{U(d)} f(U) dU = \frac{1}{|X|} \sum_{U \in X} f(U), \quad \text{for all } f \in \text{Hom}(U(d), t, t).$$

ここでは $\int_{U(d)} dU = 1$ と正規化されているとする。

この条件 (i) は次の 2 つの条件 (ii), (iii) と同値である。

$$(ii) \quad \int_{U(d)} U^{\otimes t} \otimes (U^*)^{\otimes t} dU = \frac{1}{|X|} \sum_{U \in X} U^{\otimes t} \otimes (U^*)^{\otimes t},$$

$$(iii) \quad \int_{U(d)} |\text{tr}(U)|^{2t} dU = \frac{1}{|X|^2} \sum_{U, V \in X} |\text{tr}(U^*V)|^{2t}.$$

(他にも同値な条件が数多くある.)

Unitary t -design の考察は物理 (量子情報理論) で始まったようであり、この原稿の末尾に述べる (i) Gross-Audenaert-Eisert [10](2007), (ii) Scott [15](2008) などが最初に発表された文献と思われる。正式な発表年は 2009 年になるが、

(iii) Dankert-Cleve-Emerson-Livine [7] (2009) (arXiv: quant-ph/0606161)

が unitary t -design という言葉を使った最初の論文で [10], [15] もそれに負っているとの物理の人の話である。また、もっと古い関連した物理の論文もあり、"twirl" という概念が unitary t -design の元になっているとも考えられるという話である。いずれにせよ、ユニタリ群 $U(d)$ は物理においても色々な形で本質的に現れるのでその有限個の点による近似は非常に役立つのは確かと思われる。(iv) Roy-Scott の論文 [13] (2009) は数学的立場から総合的な解説を与えている。最近の重要な論文としては (v) Zhu-Kueng-Grassl-Gross [17] (2016, arXiv: 1609.08172) などを参照されたい。他にも非常に多くの論文がある。

III-2. Unitary t -groups

次に $U(d)$ の有限部分群自身が unitary t -design になっている場合を考えよう。すなわち、 $U(d)$ の有限部分群 G で G 自身が unitary t -design となっているものを **unitary t -group** と呼ぶことにする。このとき次がなりたつ。

Let χ be the natural representation (of degree d) of $U(d)$. Then a finite subgroup G of $U(d)$ is called a **unitary t -group**, if

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi(g)|^{2t} = \int_{U(d)} |\text{tr}(U)|^{2t} dU.$$

2018年8月頃までの時点では, unitary 3-groups in $U(d)$ は以下のような例に見られるように, いくつか知られていた. また unitary 4-groups は $d \geq 3$ に対しては一つも知られていないという状況であった. 多分それらは存在しないだろうと思われていたとおもわれるが, それを示すことは非常に困難であろうと一般的に考えられていたと思われた.

Unitary 3-designs の例

(i) Clifford groups: $d = 2^m$, $G_m = Z_4 * 2_+^{1+2m} Sp(2m, 2)$,

(ii) Sporadic examples:

$d = 3$, $3.A_6$,

$d = 4$, $6.A_7, Sp(4, 3)$

$d = 6$, $6.L_3(4).2_1, 6_1U_4(3)$

$d = 12$, $6.Suz$,

$d = 18$, $3.J_3$.

$d = 2$ に対しては unitary 5-group (例えば $G = SL(2, 5)$) が知られている.

一方, $d \geq 3$ に対して unitary 4-groups in $U(d)$ は存在するか否かは (物理において) 未解決な興味深い問題であると考えられていたと思われた.

昨年 (2018年)8月の草津セミナーの後 unitary t -group の分類に関して, Tiep との交流が生じた. その結果 unitary t -groups の分類は Guralnick-Tiep [11] (2005) で基本的には分類の本質的な部分がすでになされていることが分かった. 正確に言うと, そこでは群論的に (有限単純群の分類を full に用いて) $d \geq 5$ の場合に unitary 4-group の非存在が示され, また $d \geq 5$ の条件のもとで unitary 2 group の分類も原理的に得られていた. ただし [11] と unitary t -groups との関連はほとんど知られていなかった. Eiichi Bannai, Gabriel Navarro, Noelia Rizo, Pham Huu Tiep [5] の共著論文 "Unitary t -groups" は, このことを (物理の未解決問題が群論ではすでに [11] で本質的に解決されていたことを) 指摘し, 更に [11] で残されていた $d = 2, 3, 4$ の場合の分類も完成させた. すなわち, [11] [5] を合わせて, 任意の $t \geq 2$ と任意の $d \geq 2$ に対しての unitary t -groups の完全な分類が得られた訳である. この分類結果は複雑であるが, 結果はそれ自身非常に面白いと思われるし, 物理などへの応用という意味でも非常に役に立つと思われる. この分類の詳細に関しては, [11, 5] を参照されたい.

III-3. Explicit constructions of some unitary t -designs.

Unitary t -designs in $U(d)$ は任意の $d \geq 2$ と任意の t に対して存在することは知られている. (Seymour-Zaslavsky (1984) の帰結である.) 一方 unitary t -designs in $U(d)$ の具体的な構成はほとんど知られていなかった. 特に $d \geq 3$ で $t \geq 3$ の場合には, unitary 3-groups として知られているもの以外には, 本質的には具体的な構成は成されていなかったと思われる. ここでは特に unitary 4-design in $U(4)$ の場合をを解決を, Eiichi Bannai, Mikio Nakahara, Da Zhao, Yan Zhu [6] (2019) に基づいて紹介する. 一般的に次の結果を得る.

定理 1 (Bannai-Nakahara-Zhao-Zhu [6]).

Let χ be the natural representation of $U(d)$ (of degree d). Let G be a unitary t -group in $U(d)$. Suppose that

$$(\chi^{t+1}, \chi^{t+1})_G = (\chi^{t+1}, \chi^{t+1})_{U(d)} + 1.$$

(Note that $(\chi^{t+1}, \chi^{t+1})_G = (\chi^{t+1}, \chi^{t+1})_{U(d)}$ is equivalent to the condition that G is a unitary $(t+1)$ -group. Also note that $(\chi^{t+1}, \chi^{t+1})_{U(d)} = d!$, if $d \geq t$.)

Then

(i) There is a unique non-trivial $G \times G$ -invariant $f \in \text{Hom}(U(d), t+1, t+1)$.

(ii) Let x_0 be any zero (in $U(d)$) of f . (There are many such zeros, since f is nontrivial.)

Then, the orbit X of x_0 by the action of $G \times G$ is a unitary $(t+1)$ -design in $U(d)$.

定理 2 .

(i) ([5, 6]) The following groups G are unitary 3-groups in $U(d)$ with the property that $(\chi^4, \chi^4)_G = 7 (= (\chi^4, \chi^4)_{U(d)} + 1)$.

(a) $d = 4, G = Sp(4, 3)$.

(b) $d = 6, G = 6_1.U_4(3)$.

(c) $d = 12, G = 6.Suz$.

(ii) ([6]) We can construct unitary 4-designs in $U(4)$ explicitly (numerically). (これは上に述べた定理 1 を実行することにより構成される.) このときの design X のサイズ $|X|$ は $|Sp(4, 3)|^2/6 = 447897600$ となる.

一方 $d = 6, d = 12$ の場合は具体的に求めるにはコンピューターの計算でも容量, 計算速度の点で今の所手にあまる. より良いコンピューター環境があれば原理的には可能である.

III-4. 考えたい問題

最後にいくつかの考察中の問題を提示する. 興味ある方の挑戦を期待します.

未解決問題 (有限群の立場から)

(i) Let G be a subgroup of $O(d)$, ($d \geq 3$).

Let χ_i be the irreducible representation of $O(d)$ on $\text{Harm}_i(\mathbb{R}^d)$.

Then G acts on the space $\text{Harm}_i(\mathbb{R}^d)$. The paper of Tiep [16] (2006) classifies those G with $\chi_1 \downarrow_G$ and $\chi_2 \downarrow_G$ being irreducible.

Can we classify those $G \subset O(d)$ with $(1, \chi_i)_G = 0$ for $i = 1, 2, \dots, k$?

In particular,

is there any finite G such that this holds for $k = 12$?

No example is known, but the non-existence is still an open problem.

(Note that

$\chi_i \downarrow_G$ are irreducible for $i = 1, 2, \dots, s$,

implies that

$(1, \chi_i)_G = 0$ for $i = 1, 2, \dots, 2s$, but the converse does not necessarily hold.)

(ii) Let G be an irreducible finite subgroup of $U(d)$, and let χ be the natural representation of G . Then, can we determine G such that $(\chi^2, \chi^2)_G = 3$. (Note that $(\chi^2, \chi^2)_{U(d)} = 2$.) We believe that the method of [11] can be applied. From such G , we can construct unitary 2-designs in $U(d)$.

(Note that some constructions of unitary 2-designs in $U(d)$ are known, but this will add many more new examples.)

(Note that the key of the proof of 定理 2 above was to find a unitary t -group in $U(d)$ such that $(\chi^{t+1}, \chi^{t+1})_G = d! + 1$, where $(\chi^{t+1}, \chi^{t+1})_{U(d)} = d!$. This is the case of $t = 1$ in 定理 1.)

現在進展中の問題

(i) Zhu-Kueng-Grassl-Gross [17] は次のことを予想し、未解決問題として提起している。すなわち、Clifford group $G = G_m$ は unitary 3-design であることが知られている。 $G = G_m$ は複素射影空間 $\mathbb{C}\mathbb{P}^{d-1}$ に自然に働く。 $x_0 \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{d-1}$ の G による orbit が projective 4-design になるための必要十分条件は、 x_0 が $\mathbb{C}\mathbb{P}^{d-1}$ の non-trivial な (unique に定まる) 調和多項式 ϵ の零点になっていることである。このとき、

予想 (Conjecture 2 in [17]). このようにしてできる orbit が projective 4-design であれば必ず unitary 5-design になっている。

この予想は、 G -invariant な $Harm(\mathbb{C}^{n-1}, 5, 5)$ が存在しないことと同値である。現在この予想が正しいことを示す論文を準備中である。これは Da Zhao および 大浦学との共同研究であり、Nebe-Rains-Sloane [12] の real Clifford group の不変式に関する結果の complex Clifford group G_m に対する version を得ることにより証明される。

(ii) Unitary 3-group である Clifford group G_m を用いて unitary 4-design in $U(2^m)$ が原理的に構成できる。特に、 G_2 を用いて unitary 4-designs in $U(4)$ が explicit に (numerical に) 構成できる。(Da Zhao との共同研究)。

(iii) 一般の d および t に対して、unitary t -designs in $U(d)$ が原理的に構成できると思われる。(奥田隆幸による部分的な未発表の先行研究がある。方法はその方法と似た部分と異なる部分がある。詳細は現在の所まだ細かいところを詰める必要がある。)

2019 年 12 月の時点における追加と文献案内

(1) Part I に関して Spherical t -design についての基本的な文献は、Delsarte-Goethals-Seidel [9], 坂内英一・坂内悦子 [2], 坂内英一・坂内悦子・伊藤達郎 [3], Bannai-Bannai [1] などを参照されたい。Combinatorial t -design についての多くの論文および本があるが、代数的組合せ論の立場からは Delsarte [8] が一番の大本である。坂内英一・坂内悦子・伊藤達郎 [3] も部分的に参考になると思われる。(組合せ論の立場からの Combinatorial t -designs の本は非常に数多くある。)

(2) Part II に関しては、Bannai-Bannai-Tanaka-Zhu [4] に基づいている。部分的には [1], [2], [3] なども参考になると思われます。

(3) Part III に関する文献は, [13], [11], [17], [5], [6]などを参照してください. 上の Part III の (i) で述べた結果は Eiichi Bannai, Manabu Oura, Da Zhao の3名の共著論文として準備中です. 一方 (ii), (iii) で述べた結果は, 現在 Eiichi Bannai, Yoshifumi Nakata, Tkayuki Okuda, Da Zhao の4名の共著論文として準備中です. この後者の論文では, unitary t -designs in $U(d)$ の具体的な構成を次元 d に関する induction を用いて構成できます. 具体的なアルゴリズムを与えていて, またサイズの評価もきちんと得られますが, 具体的な計算量はどんどん増えていくので, どこまで実用に役立つかという点では問題点は残っています. なおこの unitary t -designs の構成法は spherical t -designs in S^{n-1} の場合にも具体的な新しい構成法が得られるので, その点でも興味深いと思われる. これら2つの論文は ([5], [6] とともに) この分野の進展に影響を与えることができるのではないかと自負しています.

(4) 最後に一言. Unitary t -design を通じて, 有限群, デザイン, 量子情報の間の関連性を述べたかったのですが, 物理を良く知らないこともあり力不足でほとんど述べられませんでした. 物理関係の unitary t -design と関連する最近の論文は [6] の文献表を参照してください. 我々は今まで主に exact な unitary t -design と呼ばれるものだけに興味を持って研究してきましたが, approximate unitary t -design という概念もあって, 物理ではそれも考えられ, 多くの研究もされてきています. Exact なものを考えると構成は非常に難しくて今の所手が出なくてなかなか実際に応用できるようなものは見つけられないので, approximate なもので妥協して実際に応用に使えるようなものを見つけないというのがその理由と思われる. ([6] の文献表は approximate unitary t -design も含んでいます.) しかし個人的には (代数, あるいは代数的組合せ論の立場に立って) exact なものに固執したいと思っています.

References

- [1] E. Bannai, E. Bannai: A survey on spherical designs and algebraic combinatorics on spheres, *Europ. J. Comb.* 30 (2009), 392-425.
- [2] 坂内英一, 坂内悦子: 球面上の代数的組合せ理論, Springer Tokyo, 1999.
- [3] 坂内英一, 坂内悦子, 伊藤達郎: 代数的組合せ論入門, 共立出版, 2016.
- [4] E. Bannai, E. Bannai, H. Tanaka, Y. Zhu: Design Theory from the viewpoint of algebraic combinatorics, *Graphs and Comb.* 33 (2017), 1-41).
- [5] E. Bannai, G. Navarro, N. Rizo, P. M. Tiep, Unitary t -groups, preprint (2018), to appear in *J. Math. Soc. Japan*.
- [6] E. Bannai, M. Nakahara, D. Zhao, Y. Zhu: On the explicit constructions of certain unitary t -designs, *J. Phys. A: Math. Theor.* 52(49):495301 (2019).
- [7] C. Dankert, R. Cleve, J. Emerson, E. Livine: Exact and approximate unitary 2-designs and their applications to fidelity estimation, *Phys. Rev. A*, 80:012304 (2009), arXiv:quant-ph/0606161.

- [8] P. Delsarte: An algebraic approach to the association schemes of coding theory, Philips Res. Rep. Suppl.,1973, vi+97.
- [9] P. Delsarte, J.-M. Goethals, J. J. Seidel: Spherical codes and designs, Geom. Dedicata 6 (1977), 363–388.
- [10] D. Gross, K. Audenaert, J. Eisert: Evenly distributed unitaries: on the structure of unitary designs, J. Math. Phys. 48 (2007), 052104.
- [11] R. M. Guralnick, P. H. Tiep: Decompositions of small tensor powers and Larsen’s conjecture, Represent. Theory 9 (2005), 138–208.
- [12] G. Nebe, E. M. Rains, N. J. A. Sloane: The invariants of the Clifford groups, Des. Codes, Cryptogr. 24 (2001), 99–121.
- [13] A. Roy, A. J. Scott: Unitary designs and codes, Designs, Codes and Cryptography 53 (2009), 13–31.
- [14] A. Roy, S. Suda: Complex spherical codes and designs, J. of Comb. Designs 22 (2014), 105–148.
- [15] A. J. Scott: Optimizing quantum process tomography and unitary 2-designs, J. of Physics A 41 (2008) 055308.
- [16] P. H. Tiep: Finite groups admitting Grassmannian 4-designs, J. Algebra 306 (2006), 227–243.
- [17] H. Zhu, R. Kueng, M. Grassl, D. Gross: The Clifford group fails gracefully to be unitary 4-design, arXiv:1609.08172v1.

指数型不定方程式 $a^x + b^y = c^z$ と $x^2 + b^m = c^n$ の最近の進展について

寺井 伸浩 (大分大学 理工学部)

概要

本稿は、2019年9月に東北大学に於て開催された第64回代数学シンポジウムにおける筆者の講演の発表資料に加筆、修正を行ったものです。指数型不定方程式 $a^x + b^y = c^z$ と $x^2 + b^m = c^n$ の最近の進展について紹介する。講演の機会を与えてくださった日本大学の安福悠さんをはじめシンポジウムの関係者皆様に深く感謝致します。

1 序論

整数係数の代数方程式の整数解や有理数解を求めることを、不定方程式またはディオファントス方程式を解くという。不定方程式・素数分布等を主に研究する分野である整数論は数学の中では幾何学と同様古代ギリシャ時代以来の長い歴史を持つ。 $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす正の整数 (a, b, c) はピタゴラス数と呼ばれるが、無数に存在しパラメータ表示を持つことはよく知られている。Fermat はバシェ版のディオファントス著作集の余白に、「 n が3以上の正の整数のとき、不定方程式 $x^n + y^n = z^n$ は正の整数解 x, y, z を持たない」の「真に驚くべき証明を発見したが、その証明を書くにはこの余白は狭すぎる (Cujes rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet)」ということを書いた(1637年頃)。1994年、Wiles はついにこの Fermat 予想を証明した。

一方、ポーランドの有名な数学者 Sierpiński はピタゴラス数 $(3, 4, 5)$ に対し不定方程式 $3^x + 4^y = 5^z$ の正の整数解は $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ だけであることを示した。その弟子 Jeśmanowicz はピタゴラス数 $(5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61)$ に対し同様の不定方程式を考え同じことを示し、一般にピタゴラス数 (a, b, c) に対し不定方程式 $a^x + b^y = c^z$ の正の整数解は $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ だけであることを予想した。

本稿では、Fermat 予想や Jeśmanowicz 予想と関係する、

- (i) 指数型不定方程式 $a^x + b^y = c^z$
- (ii) 一般化された Ramanujan-Nagell 方程式 $x^2 + b^m = c^n$
- (iii) 一般化された Fermat 方程式 $x^p + y^q = z^r$

について最近の結果を報告する。特に、不定方程式 (i), (ii) に関する筆者のいくつかの予想を述べ、いろいろな場合に予想が正しいことを確かめる。

2 ピタゴラス数から広がる指数型不定方程式の予想

2.1 ピタゴラス数から広がる指数型不定方程式の予想

ピタゴラス数から広がる次の指数型不定方程式に関する 3 つの予想を紹介する.

(1) Fermat 予想

$$a^2 + b^2 = c^2 \implies x^n + y^n = z^n \quad \text{ここで } n \geq 3$$

17 世紀に Fermat により予想され, 1995 年に A.Wiles[W] により解決される.

(2) Jeśmanowicz 予想

$$a^2 + b^2 = c^2 \implies a^x + b^y = c^z$$

ポーランドの数学者 Jeśmanowicz[J] により 1956 年に予想されたが未解決である.

(3) 私の予想

$$a^x + b^y = c^z \quad \text{ここで } a^p + b^q = c^r$$

$$x^2 + b^m = c^n \quad \text{ここで } a^2 + b^2 = c^2$$

これら 2 つの予想は Jeśmanowicz 予想の類似として 1993 年, 1994 年にそれぞれ著者 [Te1], [Te2], [Te3], により提起されたが未解決である.

2.2 Jeśmanowicz 予想

予想 1. (Jeśmanowicz[J], 1956) a, b, c を $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす固定された互いに素な正の整数とする. このとき, 指数型不定方程式

$$a^x + b^y = c^z$$

は, ただ一つの正の整数解 $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ をもつ.

ピタゴラス数のパラメーター表示により, 指数型不定方程式

$$(m^2 - n^2)^x + (2mn)^y = (m^2 + n^2)^z$$

を考えればよい. ここで, m, n は $m > n$, $m \not\equiv n \pmod{2}$ である互いに素な正の整数とする. 次の場合に予想 1 が成り立つことが示されている.

- $n = 1$ (Lu[Lu], 1959), $m - n = 1$ (Demjanenko[De], 1965)
- $a \equiv \pm 1 \pmod{b}$, $c \equiv 1 \pmod{b}$ (Miyazaki[Mi3], 2013)
- $n = 2$ (Terai[Te5], 2014), $n \equiv 2 \pmod{4}$ and $n < 100$ (Miyazaki-Terai[MT2], 2015)

最小のピタゴラス数である $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ に対し予想 1 が成り立つことを示した, 次の Sierpiński の結果の証明を与える. 証明はとても初等的であるが, まず x, z が偶数であることを示し, よく知られた指数型不定方程式に帰着させる点は, 一般の場合にも応用できる.

定理 1. (Sierpiński[S],1956) 指数型不定方程式

$$3^x + 4^y = 5^z$$

は、ただ一つの正の整数解 $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ をもつ。

Proof. 方程式を modulo 4 で考えると $(-1)^x \equiv 1 \pmod{4}$ である。よって x は偶数である。また、方程式を modulo 3 で考えると $1 \equiv (-1)^z \pmod{3}$ である。よって z は偶数である。

いま、 $x = 2X$, $z = 2Z$ とおくと、方程式は

$$2^{2y} = (5^Z + 3^X)(5^Z - 3^X)$$

となる。右辺の 2 つの因数の最大公約数は 2 であるので、

$$\begin{cases} 5^Z + 3^X = 2^{2y-1} \\ 5^Z - 3^X = 2 \end{cases}$$

を得る。これら 2 式を加えると $2^{2y-2} - 1 = 3^X$ となる。 $y \geq 3$ のとき modulo 8 で考えると $-1 \equiv 3^x \pmod{8}$ であるが、これは不可能！したがって、 $y = 2$, $x = 2$, $z = 2$ を得る。□

次に、 $n = 2$ の場合に対する Jeśmanowicz 予想の証明を与える。

定理 2. (Terai[Te5], 2014) m を 2 より大きい奇数とする。このとき、指数型不定方程式

$$(m^2 - 4)^x + (4m)^y = (m^2 + 4)^z$$

は、ただ一つの正の整数解 $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ をもつ。

Proof. 証明は $y = 1$ と $y > 1$ の 2 つの場合に分かれる。

Case 1: $y = 1$.

Baker 理論 (2 つの対数の 1 次形式 $\Lambda = b_2 \log \alpha_2 - b_1 \log \alpha_1$ の下からの評価) を用いて示す。方程式は次の Pillai 方程式に帰着される:

$$c^z - a^x = b \quad (\text{P})$$

ここで $a = m^2 - 4$, $b = 4m$, $c = m^2 + 4$ である。

補題 1. (x の上界と下界)

$$(1) \quad x < 2521 \log c$$

$$(2) \quad x > \frac{m^2 - 4}{8} \log c$$

Proof. 2 つの linear forms (1 次形式) を考える:

$$\Lambda = z \log c - x \log a \quad (> 0), \quad \Lambda_0 = \log c - \log a \quad (> 0)$$

(1) 不等式 $\log(1 + t) < t$ ($t > 0$) を用いると、

$$0 < \Lambda = \log \left(\frac{c^z}{a^x} \right) = \log \left(1 + \frac{b}{a^x} \right) < \frac{b}{a^x},$$

よって

$$\log \Lambda < \log b - x \log a$$

が成り立つ. Λ の下からの評価に Baker 理論を用い, 上と下からの 2 つの評価を組み合わせることにより $x < 2521 \log c$ を得る.

(2) $x\Lambda_0 - \Lambda = (x - z) \log c \geq \log c$ より,

$$x \geq \frac{\log c}{\Lambda_0} + \frac{\Lambda}{\Lambda_0} > \frac{\log c}{\Lambda_0} > \frac{m^2 - 4}{8} \log c$$

を得る. □

補題 1 の (1),(2) より $m^2 - 4 < 2521 \cdot 8$ が成り立つので, $m \leq 141$ を得る. 最後に, $3 \leq m \leq 141$ の範囲で不定方程式 (P) が $z < x < 2521 \log(m^2 + 4)$ を満たす正の整数解 x, z を持たないことを計算機 (Magma) により確かめればよい.

Case 2: $y > 1$. 平方剰余の相互法則を用いて, 次を証明できる.

補題 2. (x, y, z の偶奇性)

- (1) x, z は偶数である.
- (2) $m \not\equiv 1 \pmod{8}$ ならば y は偶数である.

x, z は偶数なので, $x = 2X, z = 2Z$ とおく. このとき, 方程式は次に帰着される:

$$m_1^y + 2^{2y-2} m_2^y = (m^2 + 4)^Z. \quad (\text{F})$$

ここで m_1, m_2 は $m = m_1 m_2$ を満たす奇数である. 一般化された Fermat 方程式に関するよく知られた次の結果を用いる.

補題 3. (Bennett-Skinner[BS], 2005)

n を 7 以上の素数とする. このとき,

$$X^n + 2^\alpha Y^n = Z^2$$

は 2 つづ互いに素な 0 でない整数解 X, Y, Z を持たない. ただし, $XY \neq 1, \alpha \geq 2$ とする.

$y = 2$ ならば, 容易に $x = 2, z = 2$ を得る. $y \geq 3$ ならば, 補題 3 より Z は偶数を示せば十分である. ($y \equiv 0 \pmod{3}, y \equiv 0 \pmod{5}$ の場合は個別に扱う.) (F) より $m_1^y \equiv 5^Z \pmod{8}$ である. $m_1 \not\equiv 5 \pmod{8}$ ならば Z は偶数となる. また, 補題 2 より $m \not\equiv 1 \pmod{8}$ ならば y は偶数なので, Z は偶数である. したがって,

$$m_1 \equiv 5 \pmod{8} \quad \text{かつ} \quad m \equiv 1 \pmod{8}$$

としてよい.

$m_1 \equiv 5 \pmod{8}$ のとき, (F) より $y \equiv Z \pmod{2}$ を得る. $m \equiv 1 \pmod{8}, m_1 \equiv 5 \pmod{8}, m_1 | m$ なので平方剰余相互法則を用いると,

$$\left(\frac{m^2 + 4}{m + 2} \right) = \left(\frac{2}{m + 2} \right) = -1, \quad \left(\frac{m_1}{m + 2} \right) = -1,$$

となる. このとき, (F) より $(m^2 + 4)^Z \equiv 2m_1^y \pmod{m + 2}$ となる. よって $(-1)^Z = (-1)^{y+1}$ となり $y \not\equiv Z \pmod{2}$ を示す. しかし, これは $y \equiv Z \pmod{2}$ に矛盾する. □

2.3 一般化された Jeśmanowicz 予想

予想 2. (一般化された Jeśmanowicz 予想; 寺井予想 [Te2],[Te3], 1994)

a, b, c を $a^p + b^q = c^r$ (ここで $p, q, r \geq 2$) を満たす固定された互いに素な正の整数とする. このとき, 下記の 3 つの場合を除けば, 不定方程式

$$a^x + b^y = c^z$$

は, ただ一つの正の整数解 $(x, y, z) = (p, q, r)$ をもつ. これら 3 つの場合 ($a < b$) は, 次の解だけをもつ.

(i) $(a, b, c) = (2, 7, 3); (x, y, z) = (1, 1, 2), (5, 2, 4),$

(ii) $(a, b, c) = (2, 2^k - 1, 2^k + 1); (x, y, z) = (1, 1, 1), (k + 2, 2, 2),$

(iii) $(a, b, c) = (1, 2, 3); (x, y, z) = (m, 1, 1), (n, 3, 2).$

ここで, $m, n, k \geq 2$ は正の整数である.

“寺井予想”は (ある条件の下で) いろいろな場合に正しいことが確かめられたが, 未解決である. (cf. Terai[Te2], [Te3], Cao[Ca], Miyazaki[Mi1], [Mi2], Le[Le4].) 主に $(p, q, r) = (2, 2, r), (p, 2, 2)$ の場合の研究が多い.

2.4 一般化された Fermat 方程式

p, q, r を 2 以上の正の整数とし,

$$S = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$$

とおく.

このとき, 一般化された Fermat 方程式

$$x^p + y^q = z^r, \quad \gcd(x, y, z) = 1 \quad (\text{GF})$$

の正の整数解 x, y, z を考える.

$S = 1 \iff (p, q, r) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$ のとき, (GF) は解なし.

$S > 1 \iff (p, q, r) = (2, 2, r), (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5)$ のとき, (GF) は無数の解をもつ.
(パラメータ表示の解をもつ.)

一方, $S < 1$ の場合は次の予想が知られている.

予想 3. (一般化された Fermat 予想)

(1) $S < 1$ ならば, 次の解を除けば, (GF) は正の整数解 x, y, z をもたない:

$$1^n + 2^3 = 3^2 \quad (n > 6), \quad 2^5 + 7^2 = 3^4, \quad 7^3 + 13^2 = 2^9,$$

$$2^7 + 17^3 = 71^2, \quad 3^5 + 11^4 = 122^2, \quad 17^7 + 76271^3 = 21063928^2,$$

$$1414^3 + 22113459^2 = 65^7, \quad 9262^3 + 15312283^2 = 113^7,$$

$$43^8 + 96222^3 = 30042907^2, \quad 33^8 + 1549034^2 = 15613^3.$$

- (2) (Beal 予想) p, q, r を 3 以上の正の整数とする. このとき, (GF) は正の整数解 x, y, z をもたない.

Andrew Beal は米国の銀行家 (Beal 銀行の創業者), アマチュア数学者である. Beal 銀行のホームページで Beal 予想が紹介されている. 懸賞金は 1 million(ドル) である. $\gcd(x, y, z) > 1$ の場合は, 不定方程式 (GF) は解をもつことがある.

$$\begin{aligned} 2^n + 2^n &= 2^{n+1}, & 3^3 + 6^3 &= 3^5, & 7^3 + 7^4 &= 14^3 \\ ((1+k^n)^{n-2})^n + (k(1+k^n)^{n-2})^n &= ((1+k^n)^{n-1})^{n-1} \\ (1+k^n)^n + (k(1+k^n))^n &= (1+k^n)^{n+1} \end{aligned}$$

予想 3 について, 次の結果が知られている.

定理 3. (一般化された Fermat 方程式)

一般化された Fermat 方程式 (GF) は互いに素な正の整数解 x, y, z をもたない.

- (Wiles[W],1995) $x^n + y^n = z^n$ ($n \geq 3$)
- (Darmon-Merel[DM]) $x^n + y^n = z^2$ ($n \geq 4$), $x^n + y^n = z^3$ ($n \geq 3$)
- (Bennett[Be]) $x^{2n} + y^{2n} = z^5$ ($n \geq 2$)
- (Bennett-Chen-Dahmen-Yazdan[BCDY]) $x^3 + y^3 = z^{2n}$ ($n \geq 2$)
- (Ellenberg[E]) $x^2 + y^4 = z^n$ ($n \geq 4$)

3 指数型不定方程式 $a^x + b^y = c^z$

3.1 指数型不定方程式 $a^x + b^y = c^z$ に関する一般的結果

定理 4. (Gelfond-Mahler) a, b, c を 1 より大きい固定された互いに素な正の整数とする. このとき, 指数型不定方程式

$$a^x + b^y = c^z \tag{3.1}$$

は, 高々有限個の正の整数解 x, y, z をもつ.

a, b, c の多くの場合は, 指数型不定方程式 (3.1) は解 x, y, z をもたない.

- $5^x + 9^y = 4^z$: 解なし
- $2^x + 5^y = 7^z$: $(x, y, z) = (1, 1, 1)$
- $2^x + 5^y = 3^z$: $(x, y, z) = (1, 2, 3), (2, 1, 2)$
- $3^x + 5^y = 2^z$: $(x, y, z) = (1, 1, 3), (1, 3, 7), (3, 1, 5)$ ← 知られている最大の個数は 3 個

指数型不定方程式 (3.1) の解の個数と大きさについては, 次がよく知られている. (1) は 2 次体の理論, (2) は Baker 理論を用いてそれぞれ示される.

定理 5. (解の個数と大きさ) a, b, c を 1 より大きい互いに素な固定された正の整数とする. このとき, 指数型不定方程式 (3.1) の正の整数解 (x, y, z) を考える.

- (1) (Scott-Styer[SS], 2016) c が奇数ならば, 高々 2 つの解をもつ.

(2) (Le[Le5], 2015) $\max\{x, y, z\} < 155000(\log m)^3$, ここで $m = \max\{a, b, c\}$.

指数型不定方程式

$$2^x + (2^k - 1)^y = (2^k + 1)^z$$

はちょうど2つの解 $(x, y, z) = (1, 1, 1), (k + 2, 2, 2)$ をもつ.

3.2 指数型不定方程式 $a^x + (a + b)^y = b^z$

予想 4. (Miyazaki-Terai[MT3], 2019) a, b を互いに素な1より大きい正の整数とする. そのとき, 指数型不定方程式

$$a^x + (a + b)^y = b^z$$

は, 次の7つの場合を除けば, 正の整数解 x, y, z をもたない.

$$(x, y, z) = \begin{cases} (2, 1, 2) & \text{if } b = a + 1 \text{ with } a > 2, \\ (1, 2, 3), (2, 1, 2) & \text{if } (a, b) = (2, 3), \\ (1, 1, j + 1) & \text{if } (a, b) = (2^j - 1, 2) \text{ with } j > 2, \\ (1, 1, 3), (1, 3, 7), (3, 1, 5) & \text{if } (a, b) = (3, 2), \\ (5, 2, 3) & \text{if } (a, b) = (3, 7), \\ (2, 1, 5) & \text{if } (a, b) = (5, 2), \\ (2, 1, 7) & \text{if } (a, b) = (279, 5). \end{cases}$$

Magmaにより, 上の予想4が $\max\{a, b\} \leq 10000$, $\max\{x, y\} \leq 20$ の範囲で成り立つことを確かめた.

定理 6. (Miyazaki-Terai[MT3], 2019) 予想4は次の各場合に正しい.

(i) 7つの exceptional cases

(ii) $a = 2$ または $a = 4^k$

(iii) $b = 2^k$

(iv) $a + b = 2^k$

ただし k は正の整数とする.

Proof. (ii) の場合だけを示す. 証明には次の2つの補題を用いる.

補題 4. (Cohn[Co], Le[Le3]) 不定方程式

$$x^2 + 2^m = y^n, \quad \gcd(x, y) = 1, \quad n \geq 3$$

のすべての正の整数解は $(x, y, m, n) = (5, 3, 1, 3), (7, 3, 5, 4), (11, 5, 2, 3)$ で与えられる.

補題 5. (Ivorra[I]) 不定方程式

$$x^2 - 2^m = y^n, \quad x > 0, |y| > 1, \gcd(x, y) = 1, m \geq 2, n \geq 3$$

のすべての整数解は $(x, y, m, n) = (13, -7, 9, 3), (71, 17, 7, 3)$ で与えられる.

Case 1: $a = 2$. そのとき, 次を考える.

$$2^x + (2 + b)^y = b^z. \quad (3.2)$$

(x, y, z) を (3.2) の解とする. b は奇数なので, y, z がともに奇数ならば, (3.2) を modulo 8 で考えることにより $2^x + 2 \equiv 0 \pmod{8}$ を得る. しかし, この合同式は成り立たない. よって, y または z は偶数である.

まず, y を偶数とする. $b^z > (2 + b)^y \geq (2 + b)^2 > b^2$ なので $z > 2$ である. 補題 4 より, $(b, x, y, z) = (3, 1, 2, 3)$ を得る.

次に, z を偶数とする. 補題 5 より, $y = 1$ を得る. 一方, (3.2) を modulo $(b + 1)$ で考えると, $(b + 1)$ が 2^x を割り切ることが分かる. これより, $b = 2^t - 1$ とおける. ここで, t は $2 \leq t \leq x$ となる正の整数である.

再び, (3.2) を modulo 2^{t+1} で考えると, $2^x + 2^t + 1 \equiv 1 \pmod{2^{t+1}}$, つまり, $2^x \equiv 2^t \pmod{2^{t+1}}$ が従う. よって $x = t$ を得る. このとき, (3.2) は $2^{x+1} + 1 = (2^x - 1)^z$ となる. これより, 簡単に, $z = 2, x = 2$ が導かれる.

Case 2: $a = 4^k$. そのとき, 次を考える.

$$4^{kx} + (4^k + b)^y = b^z. \quad (3.3)$$

$b \equiv 0, 1 \pmod{3}$ とする. このとき, (3.3) を modulo 3 で考えると, $2 \equiv 0 \pmod{3}$ または $2^y \equiv 0 \pmod{3}$ となる. しかし, どちらも成り立たない. よって, $b \equiv 2 \pmod{3}$ としてよい. 再び, (3.3) を modulo 3 で考えると, $2^z \equiv 1 \pmod{3}$ となり, z は偶数である. $z = 2Z$ とおく. 補題 5 より, $y = 1$ が従う. これより, (3.3) は

$$4^k + b = (b^Z + 2^{kx})(b^Z - 2^{kx}).$$

と表せる. 特に, $b + 2^{2k} \geq b^Z + 2^{kx}$, よって $x = 1$ または $(x, Z) = (2, 1)$ を得る. $x = 1$ ならば, (3.3) は $2 \cdot 4^k + b = b^{2Z}$ となるが, これは $b(> 1)$ が奇数ということに矛盾する. $(x, Z) = (2, 1)$ ならば, $b - 2^{2k} = 1$ となり, $b = a + 1$ を得る. \square

3.3 指数型不定方程式 $(pm^2 + 1)^x + (qm^2 - 1)^y = (rm)^z$ ここで $p + q = r^2$

Jeśmanowicz 予想は指数型不定方程式

$$a^x + b^y = c^z, \quad a^2 + b^2 = c^2$$

の正の整数解 x, y, z を考えるものだが, 類似として指数型不定方程式

$$a^x + b^y = c^z, \quad a + b = c^2$$

を考えることができる. ここでは, これの特別な場合として, 次の指数型不定方程式を扱う:

$$(pm^2 + 1)^x + (qm^2 - 1)^y = (rm)^z, \quad p + q = r^2 \quad (3.4)$$

p, q, r, m に関するいくつかの例外を除けば, (3.4) は高々一つの正の整数解 x, y, z をもつことが予想されるが, (ある条件の下で) すでに解かれている方程式は次の通りである:

- (Terai[Te4], 2012; Bertók[Ber], Su-Li[SL]) $(4m^2 + 1)^x + (5m^2 - 1)^y = (3m)^z$
- (Miyazaki-Terai[MT1], 2014) $(m^2 + 1)^x + (qm^2 - 1)^y = (rm)^z, 1 + q = r^2$
- (Terai-Hibino[TH1], 2015) $(12m^2 + 1)^x + (13m^2 - 1)^y = (5m)^z,$
- (Terai-Hibino[TH2], 2017) $(3pm^2 - 1)^x + (p(p - 3)m^2 + 1)^y = (pm)^z$
- (Fu-Yang[FY], 2017) $(pm^2 + 1)^x + (qm^2 - 1)^y = (rm)^z, r|m,$
- (Pan[P], 2017) $(pm^2 + 1)^x + (qm^2 - 1)^y = (rm)^z, m \equiv \pm 1 \pmod{r},$
- (Murat[Mu], 2018) $(18m^2 + 1)^x + (7m^2 - 1)^y = (5m)^z,$
- (Kizildere et al.[KMS], 2018) $((q + 1)m^2 + 1)^x + (qm^2 - 1)^y = (rm)^z, 2q + 1 = r^2.$

上の指数型不定方程式は、初等的方法 (合同式・平方剰余の相互法則・2次体) や Baker 理論 (Laurent[La] による, 2つの対数の1次形式 $\Lambda = b_2 \log \alpha_2 - b_1 \log \alpha_1$ の絶対値に対する下からの評価) を組み合わせて解くことができる. これらに関して, Jeśmanowicz 予想と類似の予想が成り立つ:

予想 5. $(a + b = c^2$ の場合の $a^x + b^y = c^z$ に関する予想)

a, b, c を 1 より大きい $a + b = c^2$ を満たす固定された互いに素な正の整数とする. そのとき, 不定方程式

$$a^x + b^y = c^z$$

は, 下記 2つの場合を除けば, 正の整数解 $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ だけをもつ. これら 2つの場合 ($a < b$) は, 次の解だけをもつ.

$$\begin{aligned} 2^x + 7^y &= 3^z; & (x, y, z) &= (1, 1, 2), (5, 2, 4) \\ 3^x + 13^y &= 4^z; & (x, y, z) &= (1, 1, 2), (5, 1, 4). \end{aligned}$$

4 一般化された Ramanujan–Nagell 方程式 $x^2 + b^m = c^n$

4.1 Ramanujan–Nagell 方程式 $x^2 + 7 = 2^n$

次の定理はインドの天才数学者 Ramanujan[R] が 1913 年に予想し, Nagell[N] が 1961 年に証明した. 証明は虚 2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ の性質を用いる.

定理 7. (Ramanujan–Nagell) 不定方程式

$$x^2 + 7 = 2^n$$

は正の整数解 $(x, n) = (1, 3), (3, 4), (5, 5), (11, 7), (181, 15)$ だけをもつ.

上の不定方程式 $x^2 + 7 = 2^n$ を Ramanujan と Nagell に因み Ramanujan–Nagell 方程式と呼ぶ. この不定方程式に関する結果は様々な形で一般化・拡張され, 不定方程式論における重要な研究分野の一つである.

上の Nagell の結果は, 日本人数学者 2 名により独立に次のように一般化された. 証明は, 2次線形数列と 2次体の性質を用いる初等的方法による.

定理 8. (Tanahashi[Ta], Toyozumi[To]) 不定方程式

$$x^2 + 7^m = 2^n$$

は正の整数解 $(x, m, n) = (1, 1, 3), (3, 1, 4), (5, 1, 5), (11, 1, 7), (181, 1, 15), (13, 3, 9)$ だけをもつ.

定理 7 の別の一般化は, Bugeaud-Mignotte-Siksek によりなされた.

定理 9. (Bugeaud-Mignotte-Siksek[BMS]) 不定方程式

$$x^2 + 7 = y^n, \quad n \geq 3$$

は正の整数解 $(x, y, n) = (1, 2, 3), (3, 2, 4), (5, 2, 5), (11, 2, 7), (181, 2, 15)$ だけをもつ.

定理 9 の証明は楕円曲線や modular form の理論を用いる. 一般に, 固定された整数 $D \neq 0$ に対し, 不定方程式

$$x^2 + D = y^n, \quad n \geq 3 \tag{4.1}$$

は高々有限個の正の整数解 x, y, n をもつ. Lebesgue[Leb] は 1850 年に $x^2 + 1 = y^n$ は正の整数解 x, y, n をもたないことを示した. これに因み, 不定方程式 4.1 を Lebesgue–Nagell 方程式と呼ぶ. Bugeaud-Mignotte-Siksek[BMS] では, 不定方程式 (4.1) を $1 \leq D \leq 100$ の範囲で完全に解いている.

Ramanujan–Nagell 方程式の拡張である不定方程式 $x^2 + D = 2^n$ に関する結果は, 次がよく知られている.

定理 10. (不定方程式 $x^2 + D = 2^n$)

(1) (Apéry[A],1960) D を正の整数とする. $D \neq 7$ ならば, 不定方程式

$$x^2 + D = 2^n \tag{4.2}$$

は, 高々 2 個の正の整数解 x, n をもつ.

(2) (Beukers[Beu1],1980) $D \neq 7, 23, 2^k - 1 (k \geq 4)$ ならば, (4.2) は高々 1 個の正の整数解 x, n をもつ.

- $D = 23; (x, n) = (3, 5), (45, 11)$
- $D = 2^k - 1 (k \geq 4); (x, n) = (1, k), (2^{k-1} - 1, 2k - 2)$

4.2 一般化された Ramanujan–Nagell 方程式 $x^2 + D^m = p^n$

次の Bugeaud の定理は, Lucas numbers の Primitive divisors に対する BHV の深い定理 [BHV] を用いて証明される.

定理 11. (Bugeaud[Bu],2001) D を正の奇数とする. このとき, $D = 7, 15$ の場合を除けば, 不定方程式

$$x^2 + D^m = 2^n$$

は, 高々 1 個の正の整数解 x, m, n をもつ. $D = 7, 15$ ならば, それぞれちょうど 6 個, 2 個の正の整数解 x, m, n をもつ.

$$\begin{aligned} x^2 + 7^m = 2^n; & \quad (x, m, n) = (1, 1, 3), (3, 1, 4), (5, 1, 5), (11, 1, 7), (181, 1, 15), (13, 3, 9) \\ x^2 + 15^m = 2^n; & \quad (x, m, n) = (1, 1, 4), (7, 1, 6) \end{aligned}$$

次の Yuan-Hu の定理は, BHV の深い定理 [BHV] だけでなく, Jacobi 記号の巧妙な計算や初等的な方法を組み合わせることにより得られる.

定理 12. (Yuan-Hu[YHu],2005) p を奇素数, $D > 2$ を正の整数とする. このとき, $(D, p) = (4, 5)$ の場合を除けば, 不定方程式

$$x^2 + D^m = p^n$$

は, 高々2個の正の整数解 x, m, n をもつ. $(D, p) = (4, 5)$ ならば, ちょうど3個の正の整数解 $(x, m, n) = (1, 1, 1), (3, 2, 2), (11, 1, 3)$ をもつ.

4.3 ピタゴラス数に関する一般化された Ramanujan-Nagell 方程式

a, b, c をピタゴラス数, つまり $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす互いに素な正の整数とする. 1993 年, 著者は b が奇数のとき, 一般化された Ramanujan-Nagell 方程式 $x^2 + b^m = c^n$ に関する次の予想を提起した:

予想 6. (Terai[Te1], 1993) a, b, c を $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす固定された互いに素な正の整数とする. ただし, b は奇数とする. このとき, 不定方程式

$$x^2 + b^m = c^n$$

は, ただ一つの正の整数解 $(x, m, n) = (a, 2, 2)$ をもつ.

予想 6 は多くの場合に証明されているが未解決である. (cf. Terai[Te1], Le[Le1], [Le2],[Le3], Yuan-Wang[YW], Cao-Dong[CD])

一方, b が偶数のときの, 一般化された Ramanujan-Nagell 方程式 $x^2 + b^m = c^n$ に関する次の予想はとても興味深い:

予想 7. (Fujita-Terai,2019) u, v を互いに素な $u \not\equiv v \pmod{2}$, $u > v$ である正の整数とする.

(1) $3u^2 - 8uv + 3v^2 \neq -1$ ならば, 不定方程式

$$x^2 + (2uv)^m = (u^2 + v^2)^n \quad (\text{R})$$

は正の整数解

$$(x, m, n) = (u - v, 1, 1), (u^2 - v^2, 2, 2)$$

だけをもつ. ただし, $(u, v) = (244, 231)$ の場合を除く:

$$x^2 + 112728^m = 112897^n; \quad (x, m, n) = (13, 1, 1), (6175, 2, 2), (2540161, 3, 3).$$

(2) $3u^2 - 8uv + 3v^2 = -1$ ならば, 不定方程式 (R) は正の整数解

$$(x, m, n) = (u - v, 1, 1), (u^2 - v^2, 2, 2), ((u - v)(2u^2 + 2v^2 + 1), 1, 3)$$

だけをもつ.

Magma により, 上の予想が $1 \leq v < u \leq 10^5$, $m \leq 11$, $n \leq 11$ の範囲で成り立つことを確かめた.

定理 13. (Fujita-Terai,2019) 次の条件の少なくとも一つが成り立つとする:

(i) $u^2 + v^2$ は素数冪.

(ii) $u^2 + v^2 = w^2 + 1$ (w は正の整数); u, v は下のどれかを満たす;

- $uv = 2k^2$ (k は奇数);
- $uv = 2p^t$ (p は $p \not\equiv 5 \pmod{8}$ なる奇素数);
- $uv \equiv 10 \pmod{12}$.

(iii) $u \in \{p, p^2\}$, $v = 2$ (p は奇素数).

(iv) $u = \max\{|k^4 - 6k^2l^2 + l^4|, 4kl(k^2 - l^2)\}$, $v = \min\{|k^4 - 6k^2l^2 + l^4|, 4kl(k^2 - l^2)\}$
 $(k, l$ は $k > l$, $\gcd(k, l) = 1$, $k \not\equiv l \pmod{2}$) を満たす正の整数)

(v) $u = 244$, $v = 231$.

そのとき予想 6 は正しい.

定理 13 は次の 4 つに関する深い結果を用いて証明できる:

(i) Generalized Ramanujan-Nagell equations

$$x^2 + D^m = p^n, \quad x^2 - 2^m = y^n$$

(ii) Generalized Fermat's equations

$$X^n + 2^\alpha Y^n = Z^2, \quad X^2 + Y^m = Z^4, \quad X^2 + Y^3 = Z^n \quad (n = 6, 8, 10)$$

(iii) Primitive divisors of Lucas numbers

Lucas 数 $U_n(\alpha, \beta) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ の primitive divisor に関する
 Bilu-Hanrot-Voutier[BHV] の定理

(iv) Linear forms in two logarithms

Laurent[La] による 2 つの対数の 1 次形式の下からの評価

参考文献

- [A] R. Apéry, *Sur une équation diophantienne*, C. R. Acad. Sci. Paris. **251**(1960), 1263-1264.
- [Be] M. Bennett, *The equation $x^{2n} + y^{2n} = z^5$* , J. Théor. Nombres Bordeaux **18**(2006), 315-321.
- [BS] M.A. Bennett and C. Skinner, *Ternary Diophantine equations via Galois representations and modular forms*, Canad. J. Math. **56**(2004), 23-54.
- [BCDY] M. A. Bennett, I. Chen, S. R. Dahmen, and S. Yazdani, *Generalized Fermat equations: a miscellany*, Int. J. Number Theory, **11**2015, 1-28.

- [Ber] Cs. Bertók, *The complete solution of the Diophantine equation $(4m^2 + 1)^x + (5m^2 - 1)^y = (3m)^z$* , Period. Math. Hung. **72**(2016), 37–42.
- [Beu1] F. Beukers, *On the generalized Ramanujan-Nagell equation. I.*, Acta Arith. **38**(1980), 389–410.
- [Beu2] F. Beukers, *On the generalized Ramanujan-Nagell equation. II.*, Acta Arith. **39**(1981), 113–123.
- [BH] Cs. Bertók and L. Hajdu, *A Hasse-type principle for exponential Diophantine equations and its applications*, Math. Comp. **85**(2016), 849–860.
- [BC] W. Bosma and J. Cannon, Handbook of magma functions, Department of Math., University of Sydney, available at <http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/>.
- [BHV] Yu. Bilu, G. Hanrot, and P. M. Voutier, *Existence of primitive divisors of Lucas and Lehmer numbers*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **539**(2001), 75–122.
- [Bu] Y. Bugeaud, *On some exponential diophantine equations*, Monatsh. Math. **132**(2001), 93–97.
- [BMS] Y. Bugeaud, M. Mignotte, S. Siksek, *Classical and modular approaches to exponential Diophantine equations II. The Lebesgue-Nagell equation*, Compos. Math. **142**(2006), 31–62.
- [Ca] Z. Cao, *A note on the Diophantine equation $a^x + b^y = c^z$* , Acta Arith. **91**(1999), 85–93.
- [Co] J. H. E. Cohn, *The Diophantine equation $x^2 + 2^k = y^n$* , Arch. Math.(Basel) **59**(1992), 341–344.
- [CD] Z. Cao and X. Dong, *On Terai's conjecture*, Proc. Japan Acad. **74A**(1998), 127–129.
- [De] V. A. Dem'janenko, *On Jeśmanowicz' problem for Pythagorean numbers*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. **48** (1965), 52–56 (in Russian).
- [DM] H. Darmon and L. Merel, *Winding quotients and some variants of Fermat's last Theorem*, J. Reine. Angew. Math. **490**(1997), 81–100.
- [E] J. S. Ellenberg, *Galois representations attached to \mathbb{Q} -curves and the generalized Fermat equation $A^4 + B^2 = C^p$* , Amer. J. Math. **126** (2004), 763–787.
- [FY] R. Fu, H. Yang, *On the exponential Diophantine equation $(am^2 + 1)^x + (bm^2 - 1)^y = (cm)^z$ with $c|m$* , Period. Math. Hung. **75**(2017), 143–149.
- [I] W. Ivorra, *Sur les équations $x^p + 2^\beta y^p = z^2$ et $x^p + 2^\beta y^p = 2z^2$* , Acta Arith. **108**(2003) 327–338.
- [KMS] E. Kizildere, T. Miyazaki and G. Soydan, *On the Diophantine equation $((c + 1)m^2 + 1)^x + (cm^2 - 1)^y = (am)^z$* , Turk. J. Math. **42**(2018), 2690–2698.

- [J] L. Jeśmanowicz, *Some remarks on Pythagorean numbers* (in Polish), *Wiadom. Mat.* **1**(1955/1956), 196–202.
- [La] M. Laurent, *Linear forms in two logarithms and interpolation determinants II*, *Acta Arith.* **133**(2008), 325–348.
- [Le1] M. Le, *A note on the diophantine equation $x^2 + b^y = c^z$* , *Acta Arith.* **71**(1995), 253–257.
- [Le2] M. Le, *On Terai’s conjecture concerning Pythagorean numbers*, *Acta Arith.* **100**(2001), 41–45.
- [Le3] M. Le, *On Cohn’s conjecture concerning the Diophantine equation $x^2 + 2^m = y^n$* , *Arch. Math.(Basel)* **78**(2002), 26–35.
- [Le4] M. Le, *A conjecture concerning the exponential diophantine equation $a^x + b^y = c^z$* , *Acta Arith.* **106**(2003), 345–353.
- [Le5] M. Le, *A note on ternary purely exponential Diophantine equations*, *Acta Arith.* **171**(2015), 173–182.
- [Leb] M. Lebesgue, *Sur l’impossibilité, en nombres entiers, de l’équation $x^m = y^2 + 1$* , *Nouv. Ann. Math. Ser.1* **9**(1850), 178–181.
- [Lu] Lu Wen-Twan, *On Pythagorean numbers $4n^2 - 1, 4n, 4n^2 + 1$* , *Acta Sc. Nat. Univ. Szechuan* 1959, 39–42 (Chinese).
- [Mi1] T. Miyazaki, *Exceptional cases of Terai’s conjecture on Diophantine equations*, *Arch. Math. (Basel)* **95** (2010), 519–527.
- [Mi2] T. Miyazaki, *Terai’s conjecture on exponential Diophantine equations*, *Int. J. Number Theory* **7**(2011), 981–999.
- [Mi3] T. Miyazaki, *Generalizations of classical results on Jeśmanowicz’ conjecture concerning primitive Pythagorean triples*, *J. Number Theory* **133** (2013), 583–595.
- [MT1] T. Miyazaki and N. Terai, *On the exponential Diophantine equation $(m^2 + 1)^x + (cm^2 - 1)^y = (am)^z$* , *Bull. Australian Math. Soc.* **90**(2014), 9–19.
- [MT2] T. Miyazaki and N. Terai, *On Jeśmanowicz’ conjecture concerning primitive Pythagorean triples II*, *Acta Math. Hungar.* **147**(2015), 286–293.
- [MT3] T. Miyazaki and N. Terai, *A study on the exponential Diophantine equation $a^x + (a + b)^y = b^z$* , *Publ. Math. Debrecen* **95**(2019), 19–37.
- [MYW] T. Miyazaki, P. Yuan and D. Wu, *Generalizations of classical results on Jeśmanowicz’ conjecture concerning Pythagorean triples II*, *J. Number Theory* **141** (2014), 184–201.
- [Mu] A. Murat, *On the exponential Diophantine equation $(18m^2 + 1)^x + (7m^2 - 1)^y = (5m)^z$* , *Turk. J. Math.* **42**(2018), 1990–1999.

- [N] T. Nagell, The Diophantine equation $x^2 + 7 = 2^n$, *Ark. Math.* **4** (1961), 185-187.
- [P] X. Pan, *A note on the exponential Diophantine equation $(am^2 + 1)^x + (bm^2 - 1)^y = (cm)^z$* , *Colloq. Math.* **149**(2017), 265–273.
- [R] S. Ramanujan, Question 446. *J. Indian Math. Soc.* **5** (1913), 120; *Collected papers*, Cambridge University Press (1927), 327.
- [S] W. Sierpiński, *On the equation $3^x + 4^y = 5^z$* (in Polish), *Wiadom. Mat.*, 1(1955/1956), 194-195.
- [SL] J. Su and X. Li, *The exponential Diophantine equation $(4m^2 + 1)^x + (5m^2 - 1)^y = (3m)^z$* , *Abstract and Applied Analysis* **2014**(2014), 1–5.
- [SS] R.Scott and R.Styer, *Number of Solutions to $a^x + b^y = c^z$* , *Publ. Math. Debrecen*, **88**(2016), 131–138.
- [Ta] K. Tanahashi, *On the Diophantine equations $x^2 + 7^m = 2^n$ and $x^2 + 11^m = 3^n$* , *J. Prentent Fac., Gifu Coll. Dent.* **3** (1977), 77-79.
- [Te1] N. Terai, *The Diophantine equation $x^2 + q^m = p^n$* , *Acta Arith.* **63**(1993), 351–358.
- [Te2] N. Terai, *The Diophantine equation $a^x + b^y = c^z$* , *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **70** (1994), 22–26.
- [Te3] N. Terai, *Applications of a lower bound for linear forms in two logarithms to exponential Diophantine equations*, *Acta Arith.* **90** (1999), 17–35.
- [Te4] N. Terai, *On the exponential Diophantine equation $(4m^2 + 1)^x + (5m^2 - 1)^y = (3m)^z$* , *Int. J. Algebra*, **6**(2012), 1135–1146.
- [Te5] N. Terai, *On Jeśmanowicz’ conjecture concerning primitive Pythagorean triples*, *J. Number Theory* **141** (2014), 316–323.
- [TH1] N. Terai and T. Hibino, *On the exponential Diophantine equation $(12m^2 + 1)^x + (13m^2 - 1)^y = (5m)^z$* , *Int. J. Algebra* **9**(2015), 261–272.
- [TH2] N. Terai and T. Hibino, *On the exponential Diophantine equation $(3pm^2 - 1)^x + (p(p - 3)m^2 + 1)^y = (pm)^z$* , *Period. Math. Hung.* **74**(2017), 227–234.
- [To] M. Toyozumi, *On the diophantine equation $y^2 + D^m = 2^n$* , *Commentarii mathematici Universitatis Sancti Pauli* **27** (1979), 105–111.
- [W] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat’s Last Theorem*, *Annals of Math.* **141**(1995), 443–551.
- [YW] P. Yuan and J.B. Wang, *On the diophantine equation $x^2 + b^y = c^z$* , *Acta Arith.* **84**(1998), 145–147.
- [YHu] P. Yuan and Y. Hu, *On the diophantine equation $x^2 + D^m = p^n$* , *J. Number Theory* **111**(2005), 144–153.

Nobuhiro Terai
Division of Mathematical Sciences
Department of Integrated Science and Technology
Faculty of Science and Technology, Oita University
700 Dannoharu, Oita 870-1192, Japan
E-mail: terai-nobuhiro@oita-u.ac.jp

局所 Langlands 対応の幾何化と関手性

今井 直毅 (東京大学大学院数理科学研究科)

1 はじめに

p を素数とし, E を p 進数体 \mathbb{Q}_p の有限次拡大体とする. G を E 上の連結簡約代数群とする. 局所 Langlands 対応とは大雑把に言うと, $G(E)$ の \mathbb{C} 上既約スムーズ表現に対して, 局所 Langlands パラメータ (Galois 表現) を付随させるよい対応のことである. 局所 Langlands 対応の存在は, 一般にはまだ予想であるが, 多くの群あるいは表現のクラスについて証明されつつある.

ℓ を p と異なる素数とする. \mathbb{C} を $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ に変えて, 局所 Langlands 対応を定式化することもでき, 以下では, この $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ 係数の局所 Langlands 対応を考える.

局所 Langlands 対応の幾何化 (Fargues 予想) は, 幾何学的 Langlands 対応の定式化を, p 進的な設定で実現するものであり, 系として, Scholze によって導入された p 進シュトゥーカのモジュライ空間の ℓ 進エタールコホモロジーにおける局所 Langlands 対応の実現が従う.

本稿では, 局所 Langlands 対応の幾何化及び知られている結果について説明する.

2 幾何学的 Langlands 対応

まず幾何学的 Langlands 対応の定式化について説明する. \mathbb{F}_q を標数 p の有限体とし, X を \mathbb{F}_q 上の幾何的連結で固有滑らかな代数曲線とする. X の関数体を F で表し, X の閉点全体の集合を $|X|$ で表す.

$x \in |X|$ とし, $\mathcal{O}_x = \widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$ とおく. F_x を \mathcal{O}_x の商体とする.

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{C}_c(\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x) \backslash \mathrm{GL}_n(F_x) / \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x), \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

とおく. ただし \mathcal{C}_c はコンパクト台関数を表す. \mathcal{H}_x は Hecke 環とよばれ, 積構造は, $f_1, f_2 \in \mathcal{H}_x$ に対し,

$$f_1 * f_2(g) = \int_{\mathrm{GL}_n(F_x)} f_1(gh) f_2(h^{-1}) \mu_x(h)$$

とおくことで定まる. ただし, μ_x は $\mu_x(\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x)) = 1$ となる $\mathrm{GL}_n(F_x)$ の Haar 測度を表す.

このとき F_x の素元 ϖ_x を i 個並べた対角行列の両側剰余類

$$\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x) \mathrm{diag}(\varpi_x, \dots, \varpi_x, 1, \dots, 1) \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x)$$

の特性関数を $T_{x,i}$ に対応させることによって定まる $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 代数の同型

$$\mathcal{H}_x \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell[T_{x,1}, T_{x,2}, \dots, T_{x,n}, T_{x,n}^{-1}]$$

が存在する.

$$\mathbb{A}_F = \left\{ (a_x)_x \in \prod_{x \in |X|} F_x \mid \text{ほとんど全ての } x \text{ で } a_x \in \mathcal{O}_x \right\}$$

とおく.

F 上の GL_n に対する Langlands 対応は, Lafforgue によって証明された ([Laf02]).
ここでは不分岐表現の場合の主張を述べる.

定理 2.1. $\sigma: \pi_1(X) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を既約連続表現で $\det \sigma$ が有限位数のものとする. このとき, ゼロでない関数

$$f_\sigma: \mathrm{GL}_n(F) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F) / \prod_{x \in |X|} \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

で, 任意の $x \in |X|$ と $1 \leq i \leq n$ に対して,

$$T_{x,i} * f_\sigma = \mathrm{Tr}(\wedge^i \sigma(\mathrm{Frob}_x)) f_\sigma$$

となるものが存在する. ここで Frob_x は x での *Frobenius* 元である.

この対応を幾何化することを考える. Bun_n を X 上の階数 n のベクトル束のモジュライスタックとする.

観察 2.2. X 上の階数 n のベクトル束 \mathcal{E} に対し, 自明化

$$\phi_F: F^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} F, \quad \phi_x: \mathcal{O}_x^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_x$$

をとって $((\phi_F \otimes_F F_x)^{-1} \circ (\phi_x \otimes_{\mathcal{O}_x} F_x))_{x \in |X|}$ を対応させることで,

$$\mathrm{Bun}_n(\mathbb{F}_q) \simeq \mathrm{GL}_n(F) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F) / \prod_{x \in |X|} \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x)$$

が定まる. また Bun_n 上の ℓ 進層 \mathcal{F} に対して, $\mathrm{Bun}_n(\mathbb{F}_q)$ 上の関数 $y \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_q, y^* \mathcal{F})$ が定まる.

上の観察に基づき, 関数 f_σ の代わりに, Bun_n 上の ℓ 進層を考える. 次に Langlands 対応の主張に現れた Hecke 作用に関する条件を幾何化することを考える.

$1 \leq i \leq n$ とし, Hecke ^{i} を組 $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', x, \alpha)$ のモジュライスタックとする. ただし

- $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ は X 上の階数 n のベクトル束,
- x は X の点,
- $\alpha: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ は単射で, $\mathcal{E}'/\alpha(\mathcal{E})$ は x に台を持ち, x 上階数 i 局所自由であるもの

とする。二つの射

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hecke}^i & \\ \swarrow \overleftarrow{h}_i & & \searrow \overrightarrow{h}_i \\ \text{Bun}_n & & \text{Bun}_n \times X \end{array}$$

を

$$\overleftarrow{h}_i(\mathcal{E}, \mathcal{E}', x, \alpha) = \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{h}_i(\mathcal{E}, \mathcal{E}', x, \alpha) = (\mathcal{E}', x)$$

によって定める。このとき Hecke 作用の幾何化は、 Bun_n 上の ℓ 進層に対する $(\overrightarrow{h}_i)_!(\overleftarrow{h}_i)^*$ で与えられる。

次に幾何学的 Langlands 対応の主張を述べる。 $T \subset B$ を GL_n の対角トーラスと上三角 Borel 部分群とする。 T の B に関する支配的余指標全体を $X_*(T)^+$ で表し、 $\mu \in X_*(T)^+$ とする。

$\text{Hecke}^{\leq \mu}$ を組 $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', x, \beta)$ のモジュライスタックとする。ただし

- $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ は X 上の階数 n のベクトル束,
- x は X の点,
- $\beta: \mathcal{E}|_{X \setminus x} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'|_{X \setminus x}$ は x での修正が μ で抑えられるもの

とする。二つの射

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hecke}^{\leq \mu} & \\ \swarrow \overleftarrow{h} & & \searrow \overrightarrow{h} \\ \text{Bun}_n & & \text{Bun}_n \times X \end{array}$$

を

$$\overleftarrow{h}(\mathcal{E}, \mathcal{E}', x, \beta) = \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{h}(\mathcal{E}, \mathcal{E}', x, \beta) = (\mathcal{E}', x)$$

によって定める。

\widehat{T} を $\text{GL}_n = \widehat{\text{GL}}_n$ の対角トーラスとし、 \widehat{T} の上三角 Borel 部分群に関する支配的指標全体を $X^*(\widehat{T})^+$ で表す。 $\mu \in X^*(\widehat{T})^+ = X_*(T)^+$ とみなし、 r_μ を GL_n の最高ウェイト μ の既約代数表現とする。さらに IC_μ を幾何学的佐武対応で r_μ に対応する $\text{Hecke}^{\leq \mu}$ 上の偏屈層とする。このとき幾何学的 Langlands 対応の主張は次のとおりである。

定理 2.3 ([FGV02]). $\sigma: \pi_1(X) \rightarrow \text{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を既約連続表現で $\det \sigma$ が有限位数のものとする。このとき、ゼロでない \mathcal{F}_σ で

$$R\overrightarrow{h}_!(\overleftarrow{h}^* \mathcal{F}_\sigma \otimes \text{IC}_\mu) = \mathcal{F}_\sigma \boxtimes V(r_\mu \circ \sigma) \quad (2.1)$$

が成り立つものが存在する。ただし $V(r_\mu \circ \sigma)$ は、 $\pi_1(X)$ の表現 $r_\mu \circ \sigma$ に対応する X 上の ℓ 進層を表す。

等式 (2.1) を Hecke 固有層性質という。

注意 2.4. 一般の簡約代数群 G に対しても、 Bun_n を X 上の G 束のモジュライスタックに変えることによって予想を定式化できる。

3 Fargues 予想

E を \mathbb{Q}_p の有限次拡大体とし, \mathbb{F}_q を E の剰余体とする. $\Gamma_E = \text{Gal}(\overline{E}/E)$ とし, $I_E \subset W_E \subset \Gamma_E$ を E の惰性群および Weil 群とする. G を E 上の準分裂簡約代数群とする.

X を E から定まる Fargues–Fontaine 曲線とする. これはものとしては, \mathbb{F}_q 上のパーフェクトイド空間 S に対して, ある p 進解析空間 X_S を付随させる関手である. X_S のことを相対 Fargues–Fontaine 曲線といい, S が幾何学的点ならば, X_S は 1 次元である.

注意 3.1. X_S から S に射はない. X_S の S 値点というものも意味をなさない.

X 上の次数 1 の有効 Cartier 因子のモジュライスタックを Div_X^1 で表す. このとき, [Far17, Proposition 3.1] により, $\text{Div}_{X, \overline{\mathbb{F}}_q}^1$ 上のスムーズ ℓ 進層と W_E の ℓ 進表現が対応する.

代数曲線の場合と同様に

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hecke}^{\leq \mu} & \\ \swarrow \overleftarrow{h} & & \searrow \overrightarrow{h} \\ \text{Bun}_G & & \text{Bun}_G \times \text{Div}_X^1 \end{array}$$

を構成できる.

\widehat{G} を G の $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の双対群とし, ${}^L G = \widehat{G} \rtimes \Gamma_E$ とおく. ここでは, 連続準同型

$$\varphi: W_E \rightarrow {}^L G$$

で Γ_E 成分への射影が自然な包含 $W_E \subset \Gamma_E$ と一致するものを局所 Langlands パラメータということにする. 実際には, 局所 Langlands 対応で局所 Langlands パラメータに付随する表現の集合が空でないためには, さらに条件が必要になる (cf. [Bor79, §8]).

$$S_\varphi = \{g \in \widehat{G} \mid g\varphi g^{-1} = \varphi\}$$

とおく. $Z(\widehat{G})^{\Gamma_E} \subset S_\varphi$ となる.

定義 3.2. φ を局所 Langlands パラメータとする. $S_\varphi/Z(\widehat{G})^{\Gamma_E}$ が有限かつ $\varphi(I_E)$ の \widehat{G} への射影が有限であるとき, φ は尖点的であるという.

予想 3.3 (Fargues 予想). 尖点的 Langlands パラメータ φ に対し, $\text{Bun}_{G, \overline{\mathbb{F}}_q}$ 上の ℓ 進層 \mathcal{F}_φ が存在し,

$$R\overrightarrow{h}_!(\overleftarrow{h}^* \mathcal{F}_\varphi \otimes \text{IC}_\mu) \simeq \mathcal{F}_\varphi \boxtimes V(r_\mu \circ \varphi)$$

となる. さらに次が成り立つ.

- $\text{Supp} \mathcal{F}_\varphi$ は $\text{Bun}_{G, \overline{\mathbb{F}}_q}$ の半安定部分 $\text{Bun}_{G, \overline{\mathbb{F}}_q}^{\text{ss}}$ に含まれる.
- \mathcal{F}_φ は, G の拡大純内部形式に対する局所 Langlands 対応で, φ に付随する表現を用いて記述される.

特に、局所 Langlands 対応が知られている場合には、 \mathcal{F}_φ を構成することができる。

注意 3.4. 幾何学的 Langlands 対応の設定においては、関手性の一例である保型誘導の幾何学的実現が *Braverman–Gaitsgory [BG02]* によって知られており、この類似をたどることによって、 p 進的な設定においても保型誘導の幾何学的実現が得られると期待される。

Fargues 予想については以下が知られている。

- G がトーラスの場合に成立 ([Far16])
- $G = \mathrm{GL}_2$ で μ が minuscule の場合に成立 ([GI16])
- $G = \mathrm{GL}_2$ で μ が一般の場合に半安定部分上で成立 ([Ima19])
- $G = \mathrm{GL}_3$ で μ が minuscule の場合に半安定部分上で成立 ([Ima19])

$G = \mathrm{GL}_3$ で $\mu = (1, 0, 0)$ の場合の証明のあらすじについて説明する。 E の最大不分岐拡大の完備化を \check{E} で表す。 n を正の整数、 m 整数としたとき、 $\mathrm{GL}_n(\check{E})$ の基本元 b_1 で、行列式の正規付置が -1 であるものを取ると、 [Far16, 2.2.2] のように X 上の階数 n 次数 m の半安定ベクトル束 $\mathcal{E}_{b_1^m}$ が構成でき、このベクトル束を $\mathcal{V}(n, m)$ とかく。

m, m' を整数とし、 $\mathcal{M}_{\frac{m}{n}, \frac{m'}{n}}^{\leq \mu}$ を $\mathcal{V}(n, m)$ と $\mathcal{V}(n, m')$ の間の修正で μ で抑えられるものモジュライ空間とする。以下では代数閉体上に底変換したものを同じ記号であらわす。

半安定部分上での Hecke 固有層性質は、コホモロジー $H_c^*(\mathcal{M}_{\frac{m}{3}, \frac{m'}{3}}^{\leq \mu}, \mathrm{IC}_\mu)$ を調べることに帰着される。

[SW13] により、 $\mathcal{M}_{\frac{0}{3}, \frac{1}{3}}^{\leq (1,0,0)}$ は GL_3 に対する Lubin–Tate 空間のレベルに関する極限と一致する。よって、非可換 Lubin–Tate 理論により

$$H_c^*(\mathcal{M}_{\frac{0}{3}, \frac{1}{3}}^{\leq (1,0,0)}, \mathrm{IC}_{(1,0,0)})$$

については、どのような表現が現れるかがわかっている。

すると、問題は、 $H_c^*(\mathcal{M}_{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}}^{\leq (1,0,0)}, \mathrm{IC}_{(1,0,0)})$ を調べることに帰着される。修正の合成によって定義される次のような畳み込み射を考える。

$$m: \mathcal{M}_{\frac{-1}{3}, \frac{0}{3}}^{\leq (1,0,0)} \times \mathcal{M}_{\frac{0}{3}, \frac{1}{3}}^{\leq (1,0,0)} \rightarrow \mathcal{M}_{\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}}^{\leq (2,0,0)}.$$

この射と、幾何学的佐武対応における畳み込み積の分解

$$\mathrm{IC}_{(1,0,0)} * \mathrm{IC}_{(1,0,0)} = \mathrm{IC}_{(2,0,0)} \oplus \mathrm{IC}_{(1,1,0)}$$

を用いることによって、

$$H_c^*(\mathcal{M}_{\frac{-1}{3}, \frac{0}{3}}^{\leq (1,0,0)}, \mathrm{IC}_{(1,0,0)}) \otimes H_c^*(\mathcal{M}_{\frac{0}{3}, \frac{1}{3}}^{\leq (1,0,0)}, \mathrm{IC}_{(1,0,0)})$$

と

$$H_c^*(\mathcal{M}_{\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}}^{\leq (2,0,0)}, \mathrm{IC}_{(2,0,0)} \oplus \mathrm{IC}_{(1,1,0)})$$

を関係づけることができる.

さらに commutativity constraint の同型

$$c: \mathrm{IC}_{(1,0,0)} * \overline{\mathrm{IC}}_{(1,0,0)} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{IC}}_{(1,0,0)} * \mathrm{IC}_{(1,0,0)}$$

を用いると

$$H_c^*(\mathcal{M}_{\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}}^{\leq(2,0,0)}, \mathrm{IC}_{(2,0,0)} \oplus \mathrm{IC}_{(1,1,0)})$$

に対合が定まる. 一方, 双対により定まる同型

$$\mathcal{M}_{\frac{-1}{3}, \frac{0}{3}}^{\leq(1,0,0)} \simeq \mathcal{M}_{\frac{0}{3}, \frac{1}{3}}^{\leq(1,0,0)}$$

を用いて,

$$H_c^*(\mathcal{M}_{\frac{-1}{3}, \frac{0}{3}}^{\leq(1,0,0)}, \mathrm{IC}_{(1,0,0)}) \otimes H_c^*(\mathcal{M}_{\frac{0}{3}, \frac{1}{3}}^{\leq(1,0,0)}, \mathrm{IC}_{(1,0,0)})$$

にも対合が定まる. このとき二つの対合が整合的であることが証明できる. このことを用いて, $H_c^*(\mathcal{M}_{\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}}^{\leq(2,0,0)}, \mathrm{IC}_{(1,1,0)})$ を分離できる.

さらに

$$H_c^*(\mathcal{M}_{\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}}^{\leq(2,0,0)}, \mathrm{IC}_{(1,1,0)}) \simeq H_c^*(\mathcal{M}_{\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}}^{\leq(1,1,0)}, \mathrm{IC}_{(1,1,0)})$$

である. 捻りによって定まる射

$$\mathcal{M}_{\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}}^{\leq(1,1,0)} \times \mathcal{M}_{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}}^{\leq(1)} \rightarrow \mathcal{M}_{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}}^{\leq(1,0,0)}$$

を用いて, $\mathcal{M}_{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}}^{\leq(1,0,0)}$ のコホモロジーを調べることができる.

参考文献

- [BG02] A. Braverman and D. Gaitsgory, Geometric Eisenstein series, *Invent. Math.* 150 (2002), no. 2, 287–384.
- [Bor79] A. Borel, Automorphic L -functions, in *Automorphic forms, representations and L -functions* (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979 pp. 27–61.
- [Far16] L. Fargues, Geometrization of the local Langlands correspondence: An overview, 2016, arXiv:1602.00999.
- [Far17] L. Fargues, Simple connexité des fibres d’une application d’Abel-Jacobi et corps de classe local, 2017, arXiv:1705.01526, to appear in *Annales Scientifiques de l’ENS*.
- [FGV02] E. Frenkel, D. Gaitsgory and K. Vilonen, On the geometric Langlands conjecture, *J. Amer. Math. Soc.* 15 (2002), no. 2, 367–417.

- [GI16] I. Gaisin and N. Imai, Non-semi-stable loci in Hecke stacks and Fargues' conjecture, 2016, arXiv:1608.07446.
- [Ima19] N. Imai, Convolution morphisms and Kottwitz conjecture, 2019, arXiv:1909.02328.
- [Laf02] L. Lafforgue, Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands, *Invent. Math.* 147 (2002), no. 1, 1–241.
- [SW13] P. Scholze and J. Weinstein, Moduli of p -divisible groups, *Camb. J. Math.* 1 (2013), no. 2, 145–237.

GL(2) の跡公式の一般化と L 関数の特殊値への応用について

杉山 真吾 (日本大学 理工学部)

ABSTRACT. 本記事は, 2019 年 9 月 2 日 (月)~5 日 (木) に東北大学で開催された代数学シンポジウム (第 6 4 回) の筆者の講演内容を纏めたものである. 本記事では, 楕円モジュラー形式・Maass 波動形式の Hecke 固有値や L 関数に関する成果を紹介する. 具体的には, うまく取ってきたテスト関数 $f : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{C}$ の積分核の対角成分への制限 $K_f(g, g)$ と保型形式 $\varphi(g)$ に対して, 跡公式の一般化に相当する積分

$$\int_{\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})} K_f(g, g) \varphi(g) dg$$

から生じる公式を紹介する. この公式は φ がカस्प形式と Eisenstein 級数の場合にそれぞれ明示的に記述可能であり, 保型 L 関数の特殊値への応用についても触れる. またこの成果は, 基礎体 \mathbb{Q} を広いクラスの有限次総実代数体に置き換えても, Hilbert モジュラー形式の意味で成立する. 本研究は都築正男氏 (上智大学) との共同研究に基づく.

1. 序文

F を有限次総実代数体とし, F のアデル環を \mathbb{A}_F とする. テスト関数 $f = \otimes_v f_v \in C^\infty(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F))$ を “うまく” 取っておく.

$$K_f(g, h) = \sum_{\gamma \in \mathrm{PGL}_2(F)} f(g^{-1}\gamma h), \quad (g, h) \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F) \times \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F)$$

とおく. さて, $\varphi : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F) \rightarrow \mathbb{C}$ を Hilbert-Maass 波動形式のアデリックリフトであるような保型形式とする. F や f の細かい条件はここでは説明しないが, 主結果は以下の通り ([16]).

Theorem 1. 積分

$$\int_{\mathrm{PGL}_2(F) \backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F)} K_f(g, g) \varphi(g) dg$$

のスペクトル展開と幾何的展開を実行することで “明示公式” が得られる.

なぜこれが跡公式の一般化なのかを簡単に説明する. 跡公式を考察する上では f のサポートのコンパクト性だとか積分の収束性の問題だとか細かい事は色々あるが, 今は無視して heuristic な説明をつける. R を $L^2(\mathrm{PGL}_2(F) \backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F))$ 上の $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F)$ の右正則表現とする. この表現により, f が $L^2(\mathrm{PGL}_2(F) \backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F))$ に作用する.

$$R(f) \text{ " = " } \int_{\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F)} f(g) R(g) dg.$$

この作用素の積分核が $K_f(g, h)$ である. この作用素の跡 (トレース) は

$$\mathrm{tr} R(f) \text{ " = " } \int_{\mathrm{PGL}_2(F) \backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F)} K_f(g, g) dg$$

と書ける. $\mathrm{tr} R(f)$ を 2 通りに表示することによって得られる等式のことを跡公式と呼ぶ. まず第一の方法として, $K_f(g, g)$ のスペクトル分解の項別積分という計算方法がある. 第二に, $K_f(g, g)$ の定義に基づいて, γ に関して和をとる時に, 添え字集合 $\mathrm{PGL}_2(F)$ を共役類毎に分解し, その各部分の積分を計算するという方法もある. 前者の積分計算で得られるものをスペクトルサイドと呼び, 後者の積分計算で得られるものを幾何サイドと呼ぶ.

さて, rough に述べた Theorem 1 において, 跡公式を与える積分の被積分関数に φ が組み込まれている. だから跡公式の一般化とみなせるのである.

2. 関数論的な言い換え

$GL_2(\mathbb{A}_F)$ の表現論の観点で跡公式について説明したが、これは保型形式という複素関数のなす空間上の Hecke 作用素の跡に関する公式と同等である。簡単のため $F = \mathbb{Q}$ で保型形式のレベルが 1 の時の場合に Theorem 1 を記述する。その際に位相群 $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の表現論の言葉ではなく、関数論の言葉で記述する。

さて、複素関数としての保型形式を定義しよう。まず $\mathfrak{H} = \{\tau = x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ とおく ($i = \sqrt{-1}$ は虚数単位)。これは Poincaré 上半平面と呼ばれる。この空間には $SL_2(\mathbb{R})$ が一次分数変換で推移的に作用する：

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \tau \right) \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \forall \tau \in \mathfrak{H}, \quad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}).$$

特に、一次分数変換により $SL_2(\mathbb{Z})$ も \mathfrak{H} に作用している。 $N \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

とおく (\mathbb{N} は正の整数全体からなる集合)。 $\Gamma_0(N)$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ の指数有限部分群であり、これも \mathfrak{H} に作用している。保型形式とは、この作用に関するある種の不変性と微分方程式を満たす関数のことである。ここでは保型形式として、楕円モジュラー形式と Maass 波動形式を定義する。楕円モジュラー形式は誤解のない限りしばしばモジュラー形式と呼ばれる。Maass 波動形式も単に Maass 形式と呼ばれる。

さて、普段の研究集会では楕円モジュラー形式と Maass 波動形式は定義されることがほとんどないので、この機会に定義を試みる。

まずは楕円モジュラー形式から始めよう。

Definition 2. $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $N \in \mathbb{N}$ とする。この時 $f : \mathfrak{H} \rightarrow \mathbb{C}$ が重さ k , レベル N の楕円モジュラー形式であるとは以下の 3 つを満たす時にいう。

- (1) f は正則。
- (2) $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k f(\tau)$, $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N)$, $\forall \tau \in \mathfrak{H}$.
- (3) $\forall \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, $\exists a(\gamma; f) \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{\text{Im}(\tau) \rightarrow \infty} (c\tau+d)^{-k} f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = a(\gamma; f).$$

特に、重さ k , レベル N の楕円モジュラー形式 f が $a(\gamma; f) = 0$, $\forall \gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ を満たす時、 f は重さ k , レベル N の楕円カスプ形式と呼ばれる。

次に Maass 波動形式を定義しよう。

Definition 3. $N \in \mathbb{N}$, $\nu_{\infty} \in \mathbb{C}$ とする。 $f : \mathfrak{H} \rightarrow \mathbb{C}$ がタイプ ν_{∞} , レベル N の Maass 波動形式であるとは、以下の 3 つを満たす時にいう。

- (1) $(x, y) \mapsto f(x + iy)$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ 上の関数として C^{∞} であり、 f は双曲ラプラシアン の固有関数になっていてその固有値は $\frac{1}{4}(1 - \nu_{\infty}^2)f$ である：

$$-y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)f = \frac{1}{4}(1 - \nu_{\infty}^2)f.$$

- (2) $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = f(\tau)$, $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N)$, $\forall \tau \in \mathfrak{H}$.
- (3) $\forall \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, $\exists \alpha > 0$,

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = O(\text{Im}(\tau)^{\alpha}), \tau \in \mathfrak{H}.$$

特にタイプ ν_{∞} , レベル N の Maass 波動形式 f が $\int_0^1 f(\gamma(x + iy))dx = 0$ for $\forall \gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ を満たす時、タイプ ν_{∞} , レベル N の Maass カスプ形式と呼ぶ。

Monstrous Moonshine に出てくる j 関数 $j(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + \dots$ ($q = e^{2\pi i\tau}$) は正則で $SL_2(\mathbb{Z})$ 不変である。 j 関数は楕円モジュラー関数と呼ばれ、Monstrous Moonshine に現れるだけでなく、整数論でも活躍する興味深い関数であるが、本講演で扱う保型形式には含まれていない。実際、 $\frac{1}{q}$ の項の存在のため、 $\text{Im}(\tau) \rightarrow \infty$ とした時に指数関数的に増大するので

j 関数は楕円モジュラー形式でも Maass 形式でもない. もっと詳しく述べると, j 関数は楕円モジュラー形式の定義の (1), (2) を $k = 0, N = 1$ の場合に満たすが, (3) を満たさない. また, Maass 波動形式の定義の (1), (2) を $\nu_\infty = 1, N = 1$ の場合に満たすが, (3) を満たさない.

重さ k , レベル N の楕円カスプ形式全体の集合を $S_k(N)$ とおくと, これは自然に \mathbb{C} ベクトル空間となる. しかも有限次元である. 簡単のため $N = 1$ とすると, Hecke 作用素とは自然数でラベル付けされる $\text{End}(S_k(1))$ の元の族 $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ のことである.

Definition 4 (Hecke 作用素). $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(T_n f)(\tau) := n^{k-1} \sum_{\substack{a \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N} \\ ad=n}} \frac{1}{d^k} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{a\tau + b}{d}\right), \quad \tau \in \mathfrak{H}$$

とおく.

基本的な性質として,

- (1) $T_n \in \text{End}(S_k(1))$,
- (2) $T_m T_n = T_n T_m$,
- (3) $T_1 = \text{id}$

が知られている. N が 1 と限らぬ一般の自然数の場合は N と互いに素な n について T_n が定義される. また, T_n は Maass 形式の場合も同様に定義できる (上の定義で $k = 0$ とすればよい)¹.

実は $\text{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の言葉で述べられた跡公式を T_n のトレースに関して記述することができて, 以下のように記述される.

Theorem 5 (Eichler-Selberg 跡公式). 簡単のため, レベルは $N = 1$ とし, 重さは偶数 $k \geq 4$ とする. この時, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\sum_{\lambda \in \text{Eigen}(T_n)} \lambda = \text{tr}(T_n) = J_i + J_u + J_h + J_e$$

という等式が成り立つ. ここで左辺の $\text{Eigen}(T_n)$ は T_n の固有値の多重集合である. 条件 P に対して P が成り立つ時に $\delta(P) = 1$, P が成り立たない時に $\delta(P) = 0$ として *generalized Kronecker* デルタ δ を定義しておく, 右辺の 4 つの項は以下で定義される:

$$J_i = \delta(\sqrt{n} \in \mathbb{N}) \frac{k-1}{12} n^{(k-1)/2}, \quad J_u = -\delta(\sqrt{n} \in \mathbb{N}) \frac{n^{(k-1)/2}}{2}$$

$$J_h = -\frac{1}{2} \sum_{d, d' > 0, n=dd', d \neq d'} \min(d, d')^{k-1}$$

$$J_e = \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z}, \\ t^2 - 4n = f^2 D_E < 0}} \frac{-h(E)}{\#\mathfrak{o}_E^\times} \sum_{0 < d|f} d \prod_{p|d} (1 - p^{-1} \chi_{D_E}(p)) n^{(k-2)/2} U_{k-2}\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right)$$

ここで, $t^2 - 4n < 0$ となる整数 t に対して $E = \mathbb{Q}(\sqrt{t^2 - 4n})$ とおいた. これは虚 2 次体であることに注意. $h(E)$ は E の類数であり, \mathfrak{o}_E は E の整数環である. また, D_E は E の判別式である. χ_{D_E} は大域類体論により E に対応する 2 次 *Dirichlet* 指標である. U_{k-2} は $k-2$ 番目の第 2 種 *Chebyshev* 多項式である.

関数論的な線型写像 T_n の跡が, 初等的な数や数論的なデータで書けるというのがこの跡公式の意味するところである. なぜ $\text{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の跡公式と Eichler-Selberg 跡公式が同等なのかは割愛するが, 正確には, Eichler-Selberg 跡公式は $\text{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の跡公式の特別な場合である.

レベル 1 の保型形式 ϕ として, Hecke 作用素の族 $\{T_p\}_{p < \infty}$ の同時固有関数となるものを今後扱う. ($p < \infty$ は素数全体を走る.)

¹ $k = 0$ の時の Hecke 作用素の定義に出てくる因子 n^{-1} は, しばしば $n^{-1/2}$ になっていると思われるが, 今回は楕円モジュラー形式の Hecke 作用素の因子を $n^{(k-1)/2}$ ではなく n^{k-1} にしたので, 後者に合わせた.

[例 1] 無限遠点 $i\infty$ の固定部分群を $\Gamma_\infty \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ とする. $\Gamma_\infty = \{\pm[\frac{x}{0} \ 1] \mid x \in \mathbb{Z}\}$ である. $z \in \mathbb{C}$ が $\mathrm{Re}(z) > 1$ を満たす時,

$$E(z, \tau) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \mathrm{Im}(\gamma\tau)^{(z+1)/2}$$

は τ に関して広義一様絶対収束し, レベル 1 の Maass 波動形式となる. ただし Maass カスプ形式ではない. $E(z)$ は実解析的 Eisenstein 級数と呼ばれる. ここでは完備 Riemann ゼータ関数 $\hat{\zeta}(s)$ を掛けた $E^*(z) := \hat{\zeta}(z+1)E(z)$ を扱う.

[例 2] ϕ をレベル 1 の Maass カスプ形式とする. ϕ は Hecke 作用素の同時固有関数であるとする. この時, 複素数の族 $\nu = (\nu_\infty, (\nu_p)_{p<\infty}) \in \prod_v \mathbb{C}$ を用いて, 双曲的ラプラシアンと Hecke 作用素の固有値を,

$$-y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)\phi = \frac{1 - \nu_\infty^2}{4}\phi,$$

$$T_p\phi(\tau) := p^{-1/2}(p^{-\nu_p/2} + p^{\nu_p/2})\phi(\tau).$$

のように表示することができる. さらに ϕ は even であるとする. ここで ϕ が even とは $\phi(-z) = \varepsilon\phi(z)$, $\varepsilon = +1$ の時にいう. (ちなみに $\varepsilon = -1$ の時には odd と呼ぶ.) 上述のレベル 1 の even Hecke-Maass カスプ形式 ϕ に対して, $\nu_\phi = (\nu_\infty, (\nu_p)_p)$ を ϕ のスペクトルパラメーターと呼ぶことにする.

Remark 6. ここで, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 上の保型形式が \mathfrak{H} 上の楕円モジュラー形式や Maass 形式と関連していることを説明しておく. [例 1], [例 2] で説明がなされた Maass 波動形式を ϕ とする. SL_2 の強近似定理「 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}, \mathrm{fin}})$ の中で稠密」により,

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = Z(\mathbb{A}_\mathbb{Q})\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$$

という分解が成り立つので, この分解を用いて

$$\tilde{\phi}(z\gamma g_\infty k) := \phi\left(\frac{a\sqrt{-1}+b}{c\sqrt{-1}+d}\right), \quad z \in Z(\mathbb{A}_\mathbb{Q}), \gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}), g_\infty = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+, k \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$$

により $\tilde{\phi} : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{C}$ を定める (これは *well-defined* である). $\varphi := \tilde{\phi} : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{C}$ とおくと, φ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 上の関数として保型形式になっている. φ の右移動たちが生成する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現を π_φ とする:

$$\pi_\varphi := \langle R(g)\varphi \mid g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \rangle.$$

これは [例 1], [例 2] のいずれの場合であっても, 既約ユニタリー化可能表現になり, 中心指標は自明である. また π_φ は *local* な群の球的主系列表現の制限テンソル積に分解可能である:

$$\pi_\varphi \cong \bigotimes'_v \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_v)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_v)} (|\cdot|_v^{\nu_v/2} \boxtimes |\cdot|_v^{-\nu_v/2}).$$

3. 主定理

$F = \mathbb{Q}$ の場合に相当する主定理を述べる. k は 4 以上の偶数とし, ϕ を [例 1] か [例 2] の Maass 形式とする. ϕ のスペクトルパラメーターを $\nu = (\nu_\infty, (\nu_p)_{p<\infty})$ とする. $\nu_{\mathrm{fin}} = (\nu_p)_{p<\infty}$ とおく. $a \in \mathbb{R}$ に対して, a を変数とする関数を 2 種類用意する.

$$\mathcal{O}_k^{+, (\nu_\infty)}(a) := \frac{2\pi}{\Gamma(k)} \frac{\Gamma(k + \frac{\nu_\infty - 1}{2})\Gamma(k + \frac{-\nu_\infty - 1}{2})}{\Gamma_\mathbb{R}(\frac{1 + \nu_\infty}{2})\Gamma_\mathbb{R}(\frac{1 - \nu_\infty}{2})} \mathrm{ch}_{\{|x|>1\}}(a) \sqrt{a^2 - 1} \mathfrak{P}_{\frac{\nu_\infty - 1}{2}}^{1-k}(|a|),$$

$$\mathcal{O}_k^{-, (\nu_\infty)}(a) := \frac{\pi i}{\Gamma(k)} \Gamma(k + \frac{\nu_\infty - 1}{2})\Gamma(k + \frac{-\nu_\infty - 1}{2}) \mathrm{sgn}(a) \sqrt{a^2 + 1} \{ \mathfrak{P}_{\frac{\nu_\infty - 1}{2}}^{1-k}(ia) - \mathfrak{P}_{\frac{\nu_\infty - 1}{2}}^{1-k}(-ia) \}$$

とおく. ここで, $\Gamma_\mathbb{R}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ とおいた. また, 集合 X とその部分集合 $A \subset X$ に対して ch_A を X 上の A の特性関数とする. 上の場合 $X = \mathbb{R}$ である. また, \mathfrak{P}_μ^ν は第 1 種 Legendre 陪関数である. 第 1 種 Legendre 陪関数の定義域 $\mathbb{C} - (-\infty, 1]$ に $a = 0$ が含まれていないため,

$a = 0$ の時は見かけ上定義されていない。しかし $a \rightarrow 0$ の時の値は定まるのでそれを $a = 0$ の値とする。この関数は跡公式の幾何サイドの archimedean factors を記述するために後で用いる。

判別式 $\Delta = Df^2$ (D は基本判別式で, $f \in \mathbb{N}$) に対して,

$$\mathbf{B}(\nu_{\text{fin}}; \Delta) := \prod_{p|f} \left(\frac{\zeta_p(-\nu_p)}{L_p\left(\frac{-\nu_p+1}{2}, \chi_D\right)} |f|_p^{\frac{\nu_p-1}{2}} + \frac{\zeta_p(\nu_p)}{L_p\left(\frac{\nu_p+1}{2}, \chi_D\right)} |f|_p^{-\frac{\nu_p-1}{2}} \right)$$

とおく。幾何サイドの non-archimedean factors を記述するために後で用いる。 ζ_p, L_p は Riemann ゼータ関数や Dirichlet L 関数の p -th Euler 因子とする。 χ_D は類体論により $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ に対応する 2 次 Dirichlet 指標である。

ϕ の周期 $\mathbb{P}_D(\phi)$ を以下のように定める。基本判別式 D に対して

$$\mathcal{F}(D) := \{Q(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y] \mid \text{primitive, not negative-definite, disc}(Q) = D\}$$

とおく。 $\text{disc}(Q)$ は Q の判別式である。この 2 次形式の集合には右から $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \text{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ が作用している:

$$(Q \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})(x, y) := Q(ax + by, cx + dy), \quad Q \in \mathcal{F}(D), \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

すると $\mathcal{F}(D)/\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ は有限集合であることが知られている。しかも濃度は $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の狭義類数 h と一致する。この事の詳細は例えば Zagier の本『Zetafunktionen und quadratische Körper』(1981) の日本語訳 [22] の第 II 部を参照されたい。実際に [22, p.99] の定理で狭義のイデアル類と 2 次形式の同値類の 1 対 1 対応が述べられている。以降では $\mathcal{F}(D)/\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ の完全代表系 $\{Q_j\}_{j=1}^h$ をひとつ固定しておく。

$D < 0$ の時は $z_{Q_j} \in \mathfrak{H}$ で $Q_j(z_{Q_j}, 1) = 0$ なるものが唯一つ存在する。この時

$$\mathbb{P}_D(\phi) := \sum_{j=1}^h \frac{1}{\#\text{Stab}(Q_j)} \phi(z_{Q_j})$$

とおく。ここで $\text{Stab}(Q_j)$ は $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 内の Q_j の固定部分群である。

$D > 0$ の時は, $z_{Q_j,1}, z_{Q_j,2} \in \mathbb{R}$ を $Q_j(z, 1) = 0$ の相異なる実数解とする。 $\Omega_j \subset \mathfrak{H}$ を $z_{Q_j,1}$ と $z_{Q_j,2}$ を直径の両端とする半円の上半分 (\mathfrak{H} に含まれるほう) とする。要するに, $z_{Q_j,1}$ と $z_{Q_j,2}$ を \mathfrak{H} 内の測地線で結んでいる。ちなみにこの半円 Ω_j の方程式

$$\left| z - \frac{z_{Q_j,1} + z_{Q_j,2}}{2} \right| = \left| \frac{z_{Q_j,1} - z_{Q_j,2}}{2} \right|, \quad (\text{Im}(z) > 0)$$

は, $Q_j(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ なる $a, b, c \in \mathbb{Z}$ を用いて $a|z|^2 + b\text{Re}(z) + c = 0, (\text{Im}(z) > 0)$ と書ける。さて, この時 $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \Omega_j$ は Riemann 面 $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{H}$ 上の閉測地線になる。以下のようなサイクル積分によって $\mathbb{P}_D(\phi)$ を定義する。

$$\mathbb{P}_D(\phi) := \sum_{j=1}^h \int_{\text{Stab}(Q_j) \backslash \Omega_j} \phi(z) \frac{\sqrt{D} dz}{Q_j(z, 1)}.$$

ここで Ω_j の向きは, $Q_j(z, 1)$ の z^2 の係数が正の時に反時計回りとし, 負の時に時計回りとする。

Remark 7. ここで 2 次形式と狭義類数との関連について注意を述べておく。2 次形式の集合において, $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ と同様に $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ の作用も考えることができる。まず $\mathcal{F}(D)$ の条件の “not negative-definite” を外すことで定義される 2 次形式の集合を $\mathcal{F}'(D)$ とする。すなわち, 原始的な整数係数 2 元 2 次形式で判別式が D のもの全体を $\mathcal{F}'(D)$ とする。この時, $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ が $\mathcal{F}'(D)$ に右から作用する:

$$(Q \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})(x, y) := (ad - bc)Q(ax + by, cx + dy), \quad Q \in \mathcal{F}'(D), \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}).$$

この作用は $ad - bc \in \{\pm 1\}$ の因子があるので, 正定値と負定値の 2 次形式が同一視される。したがって, $D < 0$ の時には最初に導入した $\mathcal{F}(D)$ には $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ が上のルールでは作用していないことに注意せよ。この作用から得られる事実として, D の正負に関わらず, $\mathcal{F}'(D)/\text{GL}_2(\mathbb{Z})$

も有限集合で、この濃度は $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の類数と一致する。Zagierの本では2次形式の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ における同値類の個数として $h(D)$ を導入し、 $h(D)$ は「類数」と呼ばれているが、[22, p.64–65]を見ると分かるように $h(D)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の狭義類数であり、この本の p.65 に出てくる $h_0(D)$ のほうが $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の類数である。これは [22, p.99] の定理を見ても分かる。類数公式 [22, p.75] に出てくる $h(D)$ も $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の狭義類数であるし、2次形式の世界で定義された基本単数 ε_0 (cf. [22, p.68]) も $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の基本単数とは限らない (2乗のズレが生じうる)。代数体の世界と2次形式の世界で類数などの専門用語が錯綜しているので、注意が必要である。

さて、以上の準備のもとに、定理を述べよう。 k を正の偶数とし、 $k \geq 4$ とする。重さ k 、レベル1の楕円カスプ形式全体を $S_k(1)$ とし、Peterson内積に関する正規直交基底 H_k をとる。任意の $f \in H_k$ が Hecke 作用素 $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の同時固有関数になるように H_k をとることができる。 $n^{(1-k)/2}T_n$ の f に対する固有値を $\lambda_f(n)$ とする：

$$T_n f = n^{(k-1)/2} \lambda_f(n) f$$

$f \in H_k$ に対して

$$\mu_f(\phi) := \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{H}} \phi(\tau) |f(\tau)|^2 y^k \frac{dx dy}{y^2}$$

とおく。これはモジュラー曲線 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{H}$ 上の確率測度である。主定理 ([16] で $F = \mathbb{Q}$ かつレベル1にしたもの。[例2]の場合は[17])は以下のように述べられる。

Theorem 8. [Generalized Trace Formula ($F = \mathbb{Q}$, $N = 1$)] $k \geq 4$ を偶数とする。 ϕ を [例1] または [例2] のものとし、 ϕ が実解析的 Eisenstein 級数の時は $|\mathrm{Re}(z)| < k - 3$ を仮定する。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\frac{4\pi}{k-1} n^{1/2} \sum_{f \in H_k} \mu_f(\phi) \lambda_f(n) = J_{\mathrm{id}} + J_{\mathrm{unip}} + J_{\mathrm{hyp}} + J_{\mathrm{ell}}$$

が成立する。

上の定理は ϕ が実解析的 Eisenstein 級数の場合は [16]、カスプ形式の場合は [16]、[17] で与えられている。ちなみに公式の右辺に現れる項は以下のように記述される：

- $J_{\mathrm{id}} = 0$.
- ϕ がカスピダルのは $J_{\mathrm{unip}} = 0$. $\phi = E^*(z)$ の時は、

$$J_{\mathrm{unip}} = \delta(n^{1/2} \in \mathbb{N}) \hat{\zeta}((z+1)/2) n^{1/2} \{G(z) + G(-z)\},$$

ここで、

$$G(z) := \hat{\zeta}(-z) 2^{1-z} \pi^{(3-z)/4} \frac{\Gamma(k + (z-1)/2)}{\Gamma(k) \Gamma((z+1)/4)} n^{(-z-1)/4}.$$

•

$$J_{\mathrm{hyp}} = \frac{1}{2^{1+\delta(\phi: \mathrm{cusp})}} \hat{L}(1/2, \phi) \sum_{\substack{(d_1, d_2) \in \mathbb{N}^2 \\ n=d_1 d_2, d_1 \neq d_2}} \mathbf{B}(\nu_{\mathrm{fin}}; (d_1 - d_2)^2) \mathcal{O}_k^{+, (\nu_\infty)} \left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 - d_2} \right),$$

ここで、 $\delta(\phi: \mathrm{cusp})$ は ϕ がカスプ形式の時に1、 ϕ が実解析的 Eisenstein 級数の時に0とする。 $\hat{L}(s, \phi)$ は ϕ の完備スタンダード L 関数とする。すなわち

$$\hat{L}(s, \phi) = \Gamma_{\mathbb{R}} \left(s + \frac{\nu_\infty}{2} \right) \Gamma_{\mathbb{R}} \left(s - \frac{\nu_\infty}{2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_\phi(n)}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > \frac{3}{2}$$

を \mathbb{C} 上の解析関数に解析接続したもの。

•

$$J_{\mathrm{ell}} = \frac{1}{2} \sum_{D \in \mathcal{D}} 2^{\delta(D < 0)} \mathbb{P}_D(\phi) \sum_{t \in \mathcal{T}(n, D)} \mathbf{B}(\nu_{\mathrm{fin}}; t^2 - 4n) \mathcal{O}_k^{\mathrm{sgn}(t^2 - 4n), (\nu_\infty)} \left(\frac{t}{\sqrt{|t^2 - 4n|}} \right),$$

ここで \mathcal{D} は基本判別式全体の集合であり, $\delta(D < 0)$ は $D < 0$ の時に 1, $D > 0$ の時に 0 とする. また,

$$\mathcal{T}(n, D) := \{t \in \mathbb{Z} \mid \exists f \in \mathbb{N}, t^2 - 4n = Df^2\}$$

とおく.

Remark 9. • $\phi = E^*(z)$ の公式は Zagier (1977) の公式 [21] と同値である.

- 主定理の公式の $z = 1$ における留数 $\text{Res}_{z=1} \sum_{f \in H_k} \mu_f(E^*(z)) \lambda_f(n) = \dots$ を計算することで Eichler-Selberg 跡公式: $\text{tr}(T_n) = \dots$ を復元することができる. 復元計算の際には, $\text{Res}_{z=1} E^*(z) = 1$ に注意².
- ϕ がカスプ形式の時は新しい公式である. 我々の公式は $S_k(N)$ (ただし N は *odd square-free*) の場合でも成立する.

Remark 10. F/\mathbb{Q} を有限次総実代数体とする. 素数 2 は F の中で完全分解するとする. $k = (k_v)_{v|\infty}$, $k_v \geq 4$ は偶数の組とする. \mathfrak{n} は F の整数環 \mathfrak{o}_F の非ゼロ *square-free* イデアルで $(\mathfrak{n}, 2\mathfrak{o}_F) = \mathfrak{o}_F$ を満たすとする. 非ゼロイデアル $\mathfrak{m} = \prod_{v|\mathfrak{m}} \mathfrak{p}_v^{n_v} \subset \mathfrak{o}_F$ は $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \mathfrak{o}_F$ を満たすとする. F の狭義類数 h_F^+ には何も課さない. この設定で, 我々の公式は $\text{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ 上の保型形式に一般化できる. つまり Hilbert モジュラー形式の場合に拡張できる. 実際, 公式の記述は $\text{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現論を用いておこなっている. [16] を参照されたし.

Remark 11. Hilbert モジュラー形式の場合の拡張については, $\phi = E^*(z)$ の場合に対応するもののみ先行研究がある³.

水本 (1984) [9] は有限次総実代数体 F が狭義類数 1 の時に *parallel* 重さ k , レベル \mathfrak{o}_F の Hilbert カスプ形式の場合に Zagier の公式を一般化した. 高瀬 (1986) [18] は後に総実代数体 F が狭義類数 1 で, 一般の重さ $(k_v)_{v \in \Sigma_\infty}$, 一般のレベル \mathfrak{n} *nebentypus* ω が *primitive* の場合に Zagier の公式を与えた. 我々の公式は *nebentypus* ω が自明指標でレベル \mathfrak{n} を考慮しているので, $\mathfrak{n} = \mathfrak{o}_F$ の場合に限り, 高瀬の公式との間に *overlap* がある.

水本氏, 高瀬氏の設定だと, 例えば 2 次体だと $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ が含まれる. これらの中では 2 が完全分解しないので我々の設定には含まれていない. 一方, 狭義類数が 1 という仮定を満たす代数体 F が無限個あるかどうかは未解決である (これが解ければ類数 1 の実 2 次体の無限性が分かり, いわゆる Gauss 予想も解決できる). 我々の公式では $F = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, ($D \in \mathbb{Z}_{>0}$, $D \equiv 1 \pmod{8}$) なる 2 次体であれば狭義類数の値は何でも良いので, F として無限個の例を扱うことができる $\mathbb{Q}(\sqrt{33})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{57})$ は狭義類数が 2 であるので我々の設定で扱える 2 次体である⁴.

Remark 12. Jacquet, Zagier (1987) [6] は $f \in C_c^\infty(\text{PGL}_2(\mathbb{A}_k))$ に対して以下の積分の幾何的展開を実行した.

$$\int_{\text{PGL}_2(k) \backslash \text{PGL}_2(\mathbb{A}_k)} K_{f, \text{cusp}}(g, g) E(z, g) dg = \dots$$

ここで $E(z, g)$ は Eisenstein 級数である. 彼らの手法では明示的な計算はなされなかった. 特に, 我々の公式のように固定された重さをもつ楕円モジュラー形式の項のみを Jacquet, Zagier の公式の場合に抽出可能かもいまだ不明である. したがって, $z = 1$ での留数を計算することによって Selberg 跡公式が復元可能かどうかさえ最近まで不明であった. Selberg 跡公式が復元できることに関しては Wu [20] によって最近になって証明されたが, 以下の問題はいまだ残っている.

Jacquet-Zagier 公式から Zagier の公式を復元できるだろうか?

4. 応用

保型 L 関数の特殊値の非ゼロ性への応用をいくつか紹介する.

² $s = \frac{z+1}{2}$ の変数変換のもとで $s = 1$ での留数を考えると $\frac{1}{2}$ である.

³ $\phi = E^*(z)$ の場合の先行研究については拙著 [13] に詳細あり.

⁴実 2 次体の狭義類数と類数の関係については拙著 [15] に詳細あり.

4.1. GL_2 の対称 2 次 L 関数の特殊値. まず [例 1] の場合の結果の応用を紹介しよう.

$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)e^{2\pi in\tau} \in S_k(1) - \{0\}$ に対して, 対称 2 次 L 関数を

$$\hat{L}(s, \text{Sym}^2(f)) := \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)2(2\pi)^{-s-k+1}\Gamma(s+k-1) \times \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f(n^2)}{n^{s+k-1}}$$

($\text{Re}(s) > 1$) で定義する. ここで, $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ とおいた. $\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s+k-1)$ の因子を排除したものは $L(s, \text{Sym}^2(f))$ とおく. Rankin (1939), Selberg (1940) が独立にこの L 関数の解析性を与えたことは有名である.

Theorem 13. • $\hat{L}(s, \text{Sym}^2(f))$ は \mathbb{C} 上有理型関数に解析接続される.

- 関数等式 $\hat{L}(s, \text{Sym}^2(f)) = \hat{L}(1-s, \text{Sym}^2(f))$ が成立する.
- $\hat{L}(1, \text{Sym}^2(f)) = 2^k(f, f) > 0$ が成立する.

f のレベルが $N > 1$ より大きい場合も $L(s, \text{Sym}^2(f))$ を導入することができて, 同様の解析接続や関数等式などが成立する. [2] によって, $L(s, \text{Sym}^2(f))$ は $GL_3(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ 上のある Hecke 固有カスプ形式のスタンダード L 関数に一致することが知られている. その Hecke 固有カスプ形式を $\text{Sym}^2(f)$ と書くことで, Sym^2 という記号は $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の保型形式から $GL_3(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ へのリフティングとみなせる. このリフティング (Gelbart-Jacquet リフティング) の詳細も [2] にある.

Rankin-Selberg theory によって,

$$\mu_f(E^*(z)) \doteq \frac{\zeta(\frac{z+1}{2})L(\frac{z+1}{2}, \text{Sym}^2(f))}{L(1, \text{Sym}^2(f))}$$

が成り立つので, 我々の公式は $L(\frac{z+1}{2}, \text{Sym}^2(f))$ に関する和の $N \rightarrow \infty$ とした時の挙動を調べることができる.

重さ $k \geq 4$ を固定する. n を自然数とする. $H_k(N)$ を $S_k(N)$ の正規直交基底で, Hecke 固有形式からなるものとする. 以下の仮定を考える.

$$(\mathbf{P}) : L(s, \text{Sym}^2(f)) \geq 0, \quad (1/2 \leq \forall s < 1, \forall f \in H_k(N), \forall N).$$

上の (\mathbf{P}) 内のレベル N は $(N, 2n) = 1$ を満たす自然数を走るとする. この仮定は一般 Riemann 予想を仮定すると中間値の定理から得られることに注意.

Corollary 14. ([16, Theorem 1.3] の特別な場合) $k \geq 6$ とする. また (\mathbf{P}) を仮定する. 部分区間 $J_p = [t_p, t'_p] \subset [-2, 2]$ ($t_p < t'_p$) を各素因子 $p|n$ 毎に任意にとって固定する. この時, $M > 0$ があって, $N > M$ なる任意の素数 N と $1/2 \leq \forall s \leq 1$ に対して, Hecke 固有新形式 $f \in S_k(N)^{\text{new}}$ が存在して, 次を満たす:

- (1) (非ゼロ性) $L(s, \text{Sym}^2(f)) \neq 0$,
- (2) (Hecke 固有値の分布) $(\lambda_f(p))_{p|n} \in \prod_{p|n} J_p$.

特に, $\prod_{p|n} J_p = \prod_{p|n} [-2, 2]$ の時は (\mathbf{P}) を仮定しなくて良い.

4.2. $GL_2 \times GL_3$ の L 関数の中心値. 次に [例 2] の場合の結果の応用を紹介しよう. ϕ の T_p における固有値を $\lambda_{\phi}(p) = p^{\nu_p/2} + p^{-\nu_p/2}$ ($\nu_p \in \mathbb{C}$), $f \in H_k = H_k(1)$ の T_p における固有値を $\lambda_f(p) = \alpha_p + \alpha_p^{-1}$ ($\alpha_p \in \mathbb{C}^{\times}$) と表せることに注意しておく. ϕ と f の対称 2 次リフト $\text{Sym}^2(f)$ の Rankin-Selberg L 関数を以下のように定める.

$$L(s, \phi \times \text{Sym}^2(f)) := \prod_{p < \infty} \det(1_6 - p^{-s} \begin{bmatrix} p^{\nu_p/2} & & & & & \\ & p^{-\nu_p/2} & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \otimes \text{Sym}^2 \begin{pmatrix} \alpha_p & \\ & \alpha_p^{-1} \end{pmatrix})$$

これは整関数として解析接続できて, $L(s, \phi \times \text{Sym}^2(f)) \doteq L(1-s, \phi \times \text{Sym}^2(f))$ の形の関数等式を持つ ([5]).

$\mu_f(\phi)$ は f, \bar{f}, ϕ の 3 つのカスプ形式の積の積分である. これは三重線型周期と呼ばれていて, Watson (2002) の学位論文 [19] と, その一般化である市野 (2008) の結果 [4] により, 三重積 L 関数の $1/2$ における特殊値を使った公式が知られている. いまは三重積 L 関数の代わりに上で導入した L 関数を用いて $|\mu_f(\phi)|^2$ を以下のように記述することができる.

Theorem 15.

$$\frac{|\mu_f(\phi)|^2}{\|\phi\|^2} = \frac{L(1/2, \phi)L(1/2, \phi \times \text{Sym}^2(f))}{L(1, \text{Sym}^2(\phi))L(1, \text{Sym}^2(f))^2}.$$

$k \geq 4$ を偶数とする. H_k は $S_k(1)$ の正規直交基底であったことを思い出しておく. $f \in H_k$ を固定する毎に, $\phi : \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{H} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して

$$\mu_f(\phi) := \int_{\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{H}} \phi(\tau) |f(\tau)|^2 y^k \frac{dx dy}{y^2}$$

とおく. f が Maass 形式だったならラプラシアン固有値を ∞ に飛ばした時の確率測度 μ_f の振る舞いに関する量子一意エルゴード性 (Quantum Unique Ergodicity, 略して QUE) の予想があるが⁵, f が正則の場合にも $k \rightarrow \infty$ とすることで QUE の正則類似を考えることができる. この QUE の正則類似は (レベルが 1 の場合に) Holowinsky, Soundararajan によって解かれた.

Theorem 16. (Holowinsky, Soundararajan (2010) [3]) k ごとに $f \in H_k$ を任意にとって固定する. この時, 弱収束の意味で以下が成り立つ.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_f = \frac{3}{\pi} \frac{dx dy}{y^2}.$$

上の QUE の正則類似が証明される前に, QUE の正則類似の平均版が先に証明された.

Theorem 17. (Luo (2003) [7]) $A \subset \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{H}$ を可測集合とする時,

$$\frac{1}{\dim S_k(1)} \sum_{f \in H_k} \mu_f(A) = \int_A \frac{3}{\pi} \frac{dx dy}{y^2} + O(k^{-1/2+\epsilon}).$$

また, μ_f の 2 次モーメントの f に関する和の重さに関する平均 (Quantum variance の和で $2 \leq k \leq K$ を $K \leq k < 2K$ に置き換えたもの) の漸近公式も知られている.

Theorem 18. (Luo, Sarnak (2004) [8] + Sarnak, Zhao (2018) [11])

ϕ をレベル 1 の even Hecke-Maass カスプ形式とする. この時,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{-1}K} \sum_{k \in [K, 2K]} \sum_{f \in H_k} |\mu_f(\phi)|^2 \rightarrow C(\phi) \pi L(1/2, \phi) \|\phi\|^2.$$

ただし,

$$C(\phi) = \frac{1}{\zeta(2)} \prod_p \left(1 - \frac{p^{-1} \lambda_\phi(p)}{p^{1/2} + p^{-1/2}} \right)$$

とおく. この無限積は Kim-Sarnak bound $|\lambda_\phi(p)| \leq p^{7/64} + p^{-7/64} < 2p^{7/64}$ を使うことで収束することが示せる.

Luo, Sarnak の μ_f の 2 次モーメントの漸近公式の類似として, 我々の公式から μ_f の 1 次モーメントの漸近公式を与えることができる.

Theorem 19. (Average of 1st moments [17])

$$\frac{1}{2^{-1}K} \sum_{k \in [K, 2K]} (-1)^{k/2} \sum_{f \in H_k} \mu_f(\phi) \lambda_f(n) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}_{-4n}(\phi) B(\nu_{\text{fin}}; -4n)}{\sqrt{4n}}.$$

ここで, $-4n = Df^2$ (D は基本判別式で f は自然数) の時に $\mathbb{P}_{-4n}(\phi) := \mathbb{P}_D(\phi)$ とおいた.

ϕ に対して,

$$X_\phi := \{n \in \mathbb{N} \mid -4n : \text{fundamental discriminant} \ \& \ L(1/2, \phi \otimes \chi_{-4n}) \neq 0\}$$

⁵保型形式に関連する QUE については, 拙著 [14, §1] にも詳細あり.

とおく. [1] により, $\#X_\phi = \infty$ となることが知られている. 我々の1次モーメントの漸近公式と Luo-Sarnak の2次モーメントの漸近公式を組み合わせることで,

$$N_{\phi,n}(K) := \#\{f \in \bigcup_{k \in [K, 2K)} H_k \mid L(1/2, \phi \times \text{Sym}^2(f))\lambda_f(n) \neq 0\}$$

の下界を定量的に与えることができる.

Theorem 20. (*Quantitative non-vanishing of L-values* [17]) $L(1/2, \phi) \neq 0$ を仮定する.

この時, $\forall n \in X_\phi, \forall \epsilon > 0, \exists K_{\phi,n,\epsilon} > 0, \forall K \geq K_{\phi,n,\epsilon},$

$$\frac{N_{\phi,n}(K)}{K} \geq \frac{1-\epsilon}{16\pi} \frac{1}{\sqrt{n}d(n)^2} \frac{L(1/2, \phi \otimes \chi_{-4n})}{C(\phi)L(1, \text{Sym}^2(\phi))} (> 0).$$

ここで次元公式により

$$\#\left(\bigcup_{K \leq k < 2K} H_k\right) \asymp K^2$$

なので, 上の定理の左辺は割合にはなっていないことに注意.

Luo, Sarnak の公式から, $\lim_{K \rightarrow \infty} N_{\phi,1}(K) = \infty$ が分かるが, 上記の結果は $n \geq 2$ に対する $\lambda_f(n)$ の非ゼロ性も考慮しているし, 無限大に発散するスピードの下界を L 関数などの数論的データで与えているところが興味深い.

Remark 21. 本橋 (1992) [10] の $L(1/2, \phi)$ の2次モーメントの漸近公式により, $L(1/2, \phi) \neq 0$ を満たす *even Hecke-Maass* カスプ形式 ϕ は無数に存在する.

5. 証明

簡単のため, $F = \mathbb{Q}, N = 1$ としておく. 証明を厳密に紹介すると, 様々な記号が乱舞し, 積分の発散もたくさん生じるので, 計算のアイディアを軸とする rough sketch を書くに留める.

証明のポイントは跡公式で用いるテスト関数 $f = \prod_v f_v \in C^\infty(\text{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$ における局所成分 $f_v \in C^\infty(\text{PGL}_2(\mathbb{Q}_v))$ は,

- f_∞ は重さ k の $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$ の離散系列表現の行列係数,
- local な Hecke 作用素 T_p のレゾルベント核関数 (但し素数 p は $p|n$ となるもの),
- $\text{PGL}_2(\mathbb{Z}_p)$ の特性関数 (p は n を割らない素数).

f は $n \in \mathbb{N}$ に依存して定まる関数である. 重要なこととして, $\text{Supp}(f)$ がコンパクトでないことが挙げられる. $f_\infty, f_p (p|n)$ はサポートがコンパクトではない. なので, 積分や無限和の収束性や順序交換は慎重に行わなければならない. このような欠点がある一方で, コンパクト性を捨てて f_∞ として行列係数を採用した恩恵として,

$$K_f(g, h) = \sum_{\gamma \in \text{PGL}_2(\mathbb{Q})} f(g^{-1}\gamma h)$$

が各変数 g, h に対して, 重さ k のカスプ形式となる. この和が絶対収束するためには, $k \geq 4$ が必要である. ここで $k = 2$ が除外される.

通常跡公式は

$$\int_{\text{PGL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \text{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})} K_f(g, g) dg.$$

を2通りに計算することで得られたのだが, ここでは

$$\int_{\text{PGL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \text{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})} K_f(g, g) \varphi(g) dg.$$

なる積分を考える. ここで, $\varphi : \text{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{C}$ は [例1] または [例2] でみた保型形式である. この積分のスペクトルサイドは,

$$K_f(g, g) = C \sum_{\psi \in H_k} c_\psi \overline{\tilde{\psi}(g)} \tilde{\psi}(g) \quad (C, c_\psi \in \mathbb{C})$$

という核関数のスペクトル展開を用いて計算すれば良い。各 ψ はカスプ形式なので急減少であるから、この有限和に φ を書けて積分したものは収束する。

次に幾何的展開について述べよう。 $K_f(g, h)$ の定義式を出発点とし、 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ を共役類で分解することによって、

$$K_f(g, g) = \Phi_{\mathrm{id}}(g) + \Phi_{\mathrm{unip}}(g) + \Phi_{\mathrm{hyp}}(g) + \Phi_{\mathrm{ell}}(g)$$

という表示が得られる。ここで、

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{id}}(g) &= f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right), \\ \Phi_{\mathrm{unip}}(g) &= \sum_{\xi \in Z(\mathbb{Q}) \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})} f(g^{-1}\xi^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\xi g), \\ \Phi_{\mathrm{hyp}}(g) &= \frac{1}{2} \sum_{\xi \in \left\{ \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \right\} \setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})} \sum_{a \in \mathbb{Q}^\times - \{1\}} f(g^{-1}\xi^{-1}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\xi g), \\ \Phi_{\mathrm{ell}}(g) &= \frac{1}{2} \sum_{E=\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})} \sum_{\xi \in E^\times \setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})} \sum_{\gamma \in \mathbb{Q}^\times \setminus (E^\times - \mathbb{Q}^\times)} f(g^{-1}\xi^{-1}\gamma\xi g).\end{aligned}$$

この時、各 Φ_* に φ を書けて積分を実行すれば幾何的展開が得られる。

本研究において、この幾何的展開が先行研究にはない new insight を提示している。 $\gamma \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ に対して γ の $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ 内の中心化群を G_γ とする。すると幾何的展開における γ に対応する項の積分計算は形式的に以下のようにできる。

$$\begin{aligned}& \int_{\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}) \setminus \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})} \left\{ \sum_{\xi \in G_\gamma(\mathbb{Q}) \setminus \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})} f(g^{-1}\xi^{-1}\gamma\xi g) \right\} \varphi(g) dg \\ &= \int_{G_\gamma(\mathbb{Q}) \setminus \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})} f(g^{-1}\gamma g) \varphi(g) dg \\ &= \int_{G_\gamma(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \setminus \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})} f(g^{-1}\gamma g) \left\{ \int_{G_\gamma(\mathbb{Q}) \setminus G_\gamma(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})} \varphi(tg) dt \right\} dg\end{aligned}$$

よって φ の G_γ に沿った周期積分の荷重付きの軌道積分が生じる。あとは球関数の重複度 1 定理を用いて素点ごとの積分に分解し、各素点ごとに local な重み付き軌道積分を計算すれば良い。

Remark 22. 水本, 高瀬, *Jacquet, Zagier* の手法は幾何サイドの計算で *unfolding* が本質的に用いられた。しかし我々の手法では幾何サイドで *unfolding* を必要としない。そこが従来の計算方法と大きく異なる点である。 *unfolding* を必要としない手法を開拓したことにより、 *Eisenstein* 級数をカスプ形式に置き換えることが可能となったのである。

φ がカスプ形式の時は周期積分はいつでも収束する。しかし、もし φ が *Eisenstein* 級数なら軌道積分は発散してしまう。 *unfolding* を用いない代わりに、積分が収束しないという問題が生じたのである。例えば $J_{\mathrm{id}} = \infty$ となってしまう。しかし、 *Eisenstein* 級数を *smoothed Eisenstein* 級数に変形することで、発散の問題を解消することができる。実際、 *smoothed Eisenstein* 級数は急減少関数になる⁶ ので、積分の発散問題をうまく正当化することができる。

Zagier の公式の一般化を目的として φ が *Eisenstein* 級数の場合の計算を実行していた際に、表現論を用いて素点ごとの積分に帰着できることに気づき、 φ がカスプ形式の場合の公式が後から得られた。しかし積分の収束性の観点から見れば、数学的には φ がカスプ形式の場合のほうが幾何サイドの計算が容易である。

⁶概均質ベクトル空間のゼータ関数の解析接続に用いられたオリジナルの *smoothed Eisenstein* 級数 (cf. [12, Lemma 2.9]) は *smoothed Eisenstein* 級数の定義において、極付きの関数を使用している。そのため、オリジナルの *smoothed Eisenstein* 級数は急減少ではない。しかし今回はこの *smoothed* 化を参考に *Eisenstein* 級数を急減少関数に変形することを考えたので、我々が構成したものも *smoothed Eisenstein* 級数と呼んでいる。数学的な性質はどちらかというと *pseudo Eisenstein* 級数に近い。

謝辞

第 64 回代数学シンポジウム (於 東北大学) での講演, 執筆の機会を与えて下さった世話人の皆様にこの場を借りて感謝致します.

なお, 本研究は JSPS 科研費 18H05835 (研究活動スタート支援) の助成を受けたものであります. (2019 年度からの基金化に伴い, 執筆時の課題番号は 19K21025 に変わっております.)

REFERENCES

- [1] Friedberg, S., Hoffstein, J., *Nonvanishing theorems for automorphic L -functions on $GL(2)$* , Ann. of Math. (2) **142** No.2 (1995), 385–423.
- [2] Gelbart, S., Jacquet, H., *A relation between automorphic representations of $GL(2)$ and $GL(3)$* , Ann. Sci. Ecole Normale Sup. 4 série, **11** (1978), 471–552.
- [3] Holowinsky, R., Soundararajan, K., *Mass equidistribution for Hecke eigenforms*, Ann. Math., **172** (2010), 1517–1528.
- [4] Ichino, A., *Trilinear forms and the central values of triple product L -functions*, Duke Math. J. **145** No.2 (2008), 281–307.
- [5] Jacquet, H., Piatetskiĭ-Shapiro, I. I., Shalika, J. A., *Rankin-Selberg convolutions*, Amer. J. Math., **105**, No. 2, 367–464, 1983.
- [6] Jacquet, H., Zagier, D., *Eisenstein series and the Selberg trace formula II*, Trans. Amer. Math. Soc. **300** No.1 (1987), 1–48.
- [7] Luo, W., *Equidistribution of Hecke eigenforms on the modular surface*, Proc. Amer. Math. Soc. vol. **131** (2003), no. 1, 21–27.
- [8] Luo, W., Sarnak, P., *Quantum variance for Hecke eigenforms*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **37** (2004), no. 5, 769–799.
- [9] Mizumoto, S., *On the second L -functions attached to Hilbert modular forms*, Math. Ann. **269**, 191–216, 1984.
- [10] Motohashi, Y., *Spectral mean values of Maass wave form L -functions*, J. Number Theory **42** (1992), no.3, 258–284.
- [11] Sarnak, P., Zhao, P., *The quantum variance of the modular surface*, with Appendix by Michael Woodbury, preprint (2018). <https://arxiv.org/abs/1303.6972>
- [12] Shintani, T., *On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms*, J. Math. Soc. Japan **24** (1972), 132–188.
- [13] 杉山真吾, Hilbert モジュラー形式に対する Jacquet-Zagier 型の跡公式, 第 11 回福岡数論研究集会報告集, 2018, 57–69.
- [14] 杉山真吾, モジュラー形式の三重積に関する変形された跡公式, to appear in 「保型形式, 保型表現とその周辺」RIMS 講義録.
- [15] 杉山真吾, On generalized trace formulas for $GL(2)$, to appear in 「2019 早稲田整数論研究集会」報告集.
- [16] Sugiyama, S., Tsuzuki, M., *An explicit trace formula of Jacquet-Zagier type for Hilbert modular forms*, J. Funct. Anal., **275** (2018), no. 11, 2978–3064.
- [17] Sugiyama, S., Tsuzuki, M., *Quantitative non-vanishing of central values of certain L -functions on $GL(2) \times GL(3)$* , preprint. <https://arxiv.org/abs/1805.00209>
- [18] Takase, K., *On the trace formula of the Hecke operators and the special values of the second L -functions attached to the Hilbert modular forms*, manuscripta math. **55**, 137–170, (1986).
- [19] Watson, T., *Rankin triple products and quantum chaos*, Ph.D Thesis (Princeton, 2002). <https://arxiv.org/abs/0810.0425>
- [20] Wu, H., *Deducing Selberg trace formula via Rankin-Selberg method for GL_2* , Trans. Amer. Math. Soc. **372**, Number 12, (2019), 8507–8551.
- [21] Zagier, D., *Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields*, Lecture Notes in Math., **627**, 105–169, Springer, 1977.
- [22] Zagier, Don 著, 片山孝次 訳, 数論入門 - ゼータ関数と 2 次体 -, 岩波書店, 1990.

Shingo Sugiyama

Department of Mathematics, College of Science and Technology, Nihon University, Suruga-Dai, Kanda, Chiyoda, Tokyo 101-8308, Japan

E-mail : s-sugiyama@math.cst.nihon-u.ac.jp

Factorization algebras in algebraic geometry

Mikhail Kapranov

January 26, 2020

This is a summary of the talk I gave at the Algebra Symposium, held at Tohoku University in September 2019. It is based on the papers [6, 8], joint with B. Hennion and E. Vasserot. The common theme of these papers is application of the concept of factorization algebras, originally defined for the needs of Quantum Field Theory, to “purely algebro-geometric” problems, i.e., problems in Algebraic Geometry which a priori do not involve this concept.

1 Factorization algebras: algebro-geometric version

The concept of factorization algebras on an algebraic curve was introduced by Beilinson and Drinfeld in their 2004 book [1]. Their goal was to give a geometric axiomatization of the theory of vertex algebras or, in the physical language, of 2-dimensional Conformal Field Theory. This theory has been extended to varieties of arbitrary dimensions by Francis and Gaitsgory [3]. The fundamental tool here is the concept of the *Ran space*.

Let X be a smooth algebraic variety over a field \mathbf{k} , $\text{char}(\mathbf{k}) = 0$. The Ran space of X , is, informally, the “space”

$$\text{Ran}(X) = \{\text{all finite, nonempty subsets } I \subset X\}.$$

In this definition a subset $I \subset X$ is considered without multiplicity. So, for example, a 2-element subset $\{x, y\}$ can, if x and y merge, degenerate into a 1-element subset $\{x\} = \{x, x\}$. In the opposite direction, one point can split into many, similarly to elementary particles in physics. Combining all finite subsets together can be seen as an instance of “second quantization of algebraic geometry” (Y.I. Manin).

There is no way of making $\text{Ran}(X)$ into an algebraic variety in a rigorous sense of the word. However, we can do meaningful algebraic geometry on it: consider sheaves, \mathcal{D} -modules, etc. This is explained in [1, 3, 6].

In particular, a *factorization algebra* on X is a sheaf (\mathcal{D} -module) on $\text{Ran}(X)$ with natural identifications

$$\mathcal{F}_{I \sqcup J} \simeq \mathcal{F}_I \otimes \mathcal{F}_J.$$

where \mathcal{F}_I means the fiber of \mathcal{F} at a point $I \in \text{Ran}(X)$, i.e., a finite subset $I \subset X$. This corresponds to the principle of locality in Quantum Field Theory: points which are away

from each other are “independent”. Tensor multiplication of vector spaces can be seen as a quantum analog of the usual multiplication of probabilities, something that happens for independent events.

There are various versions of the notion of a factorization algebra, corresponding to different meanings of the word “sheaf” that can be defined for $\text{Ran}(X)$.

A factorization algebra has a global invariant, the *factorization cohomology*

$$\int_X \mathcal{F} = R\Gamma(\text{Ran}(X), \text{DR}(\mathcal{F})).$$

Here $R\Gamma$ is the derived functor of global sections, and DR is the de Rham complex of a \mathcal{D} -module.

Example 1.1. Let $X = \mathbb{A}^1$ be the affine line. A translation invariant factorization algebra \mathcal{F} on X is the same as a vertex algebra V which is recovered as the fiber \mathcal{F}_0 of \mathcal{F} at 0.

2 Smooth Manifold version

A different framework for factorization algebras, closer to the Quantum Field Theory intuition, was given by Lurie [9] and Costello-Gwilliam [2].

Let M be a C^∞ -manifold. It is not assumed to be algebraic but can be (in which one can compare with the previous setting). We consider M with the usual topology (so not Zariski if M is in fact algebraic).

A *factorization algebra* on M is a datum \mathcal{A} associating:

- (1) Any open $(U \subset M) \mapsto \mathcal{A}(U)$, a cochain complex / \mathbf{k} .
- (2) Any $(U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_m \subset U_0) \mapsto$ multiplication

$$\mu : \mathcal{A}(U_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}(U_m) \longrightarrow \mathcal{A}(U_0), \text{ so that:}$$

- (3) For U_0 equalling $U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_m$, μ is a quasi-isomorphism.
- (4) The $m = 1$ part of data (pre-co-sheaf) is a cosheaf for a certain class of coverings, called *Weiss coverings*.

The condition (3) corresponds to locality in Quantum Field Theory. A covering $V = \bigcup V_i$ is called a Weiss covering, if any finite subset $I \subset V$ is contained in one of the V_i . This may seem counterintuitive, but it simply means that $\text{Ran}(V)$ is covered by the $\text{Ran}(V_i)$. So the Weiss topology is simply a means to bring the Ran space into the consideration without mentioning it explicitly and working on M all along.

3 Locally constant factorization algebras: topological QFT

A factorization algebra \mathcal{A} is called *locally constant*, if for any two *disks* $U_1 \subset U_0$ the map μ is a quasi-isomorphism. In the physical jargon this condition means that the de Rham differential d_{DR} acts “trivially” (in a Q -exact way). In other words, our quantum field theory is “topological”.

In the flat case $M = \mathbb{R}^n$ it was proved by Lurie that we have a 1:1 correspondence

$$\text{Locally constant FA } \mathcal{A} \longleftrightarrow E_n - \text{algebras } A = \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$$

Here E_n is the operad of little n -disks. It describes commutativity “up to level n ”.

In the curved case (any M with G -structure in the tangent bundle, $G \subset O(n)$, e.g., $G = U(d)$ for d -dim \mathbb{C} -mflds) we have the following extension of the above, also due to Lurie:

Every E_n -algebra A equipped with a *homotopy G -action* gives a locally constant factorization algebra \underline{A}_M on M . In particular, we can form the factorization homology $\int_M(A) := \underline{A}_M(M)$.

4 Nonabelian Poincaré duality (Salvatore-Lurie)

Suppose that we are given:

Y : a topological space with G -action;

M : an n -manifold with G -structure;

Let $Y_M \rightarrow M$ be the fibration with fiber Y associated to TM .

Let also $A = C^\bullet(Y, \mathbf{k})$ be the cochain algebra. It is:

- “Commutative”: E_n for any n .
- Has a homotopy G -action.

One formulation of the Non-Abelian Poincaré duality is as follows: If Y is $(n - 1)$ -connected, then

$$\int_M (C^\bullet(Y)) = C^\bullet(\text{Sect}(Y_M/M), \mathbf{k}).$$

Here Sect means the space of continuous sections. Statements of such kind goback to the work of Bott-Segal and Haefliger on cohomology of Lie algebras of vector fields (see below), well before factorization algebras.

Let us explain, roughly, the meaning of this statement. Suppose G acts trivially, so $\text{Sect}(Y_M/M) = \text{Map}(M, Y)$ is the space of maps $M \rightarrow Y$.

Approximate statement: if $A = H^\bullet(Y)$ has the form $A = \text{Sym}^\bullet(V)$, then

$$\int_M (A) = \text{Sym}^\bullet(V \otimes H_\bullet(M)).$$

How is this related? In such cases typically $V^\bullet = (\pi_\bullet(Y) \otimes \mathbf{k})^*$. Expecting the same for $\text{Map}(M, Y)$ we reduce to the known fact (Haefliger)

$$\pi_\bullet \text{Map}(M, Y) \otimes \mathbf{k} = H^\bullet(M, \mathbf{k}) \otimes \pi_\bullet(Y).$$

How is this related to the usual Poincaré duality? We have an alternative (Koszul dual) formulation (w.r.t. Koszul self-duality of the E_n -operad):

Suppose $y \in Y$ is G -fixed point. Then $Y_M \rightarrow M$ has a distinguished section \underline{y} corresponding to y . Let also $B = \Omega^n(Y, y)$ be n -fold loop space, an E_n -algebra in spaces. Then (as spaces!):

$$\int_M (\Omega^n(Y, y)) = \text{Sect}_c(Y_M/M).$$

Here Sect_c means the space of sections with “compact support”, i.e., sections which coincide with \underline{y} outside a compact set. If $Y = K(\pi, n)$, then $\Omega^n(Y) = \pi$. Assume G -action trivial. Then:

$\int_M(\pi)$ is the space with homotopy groups being the homology $H_\bullet(M, \pi)$, and we get

$$H_i(M, \pi) = \pi_i \text{Map}_c(M, K(\pi, n)) = H_c^{n-i}(M, \pi).$$

5 Holomorphic FA: vertex algebras

On $M = \mathbb{C}$, we can speak about *holomorphic* factorization algebras \mathcal{A} (in which the antiholomorphic Dolbeault differential $\bar{\partial}$, rather than the de Rham differential d , acts in a Q -exact way). As shown in [2], under appropriate assumptions,

$$\text{Such } \mathcal{A} \xleftarrow{1:1} \text{Vertex Algebras } V = \mathcal{A}\{|z| < 1\}.$$

Remarks 5.1. (a) The Algebro-Geometric (AG) and Smooth-Manifold versions are intuitively equivalent: the important U 's are

$$\bigsqcup \text{small disks} \sim \text{finite sets of points.}$$

(b) Most “outside” applications of AG formalism have been in $\dim_{\mathbb{C}} = 1$ case: Geometric Langlands etc.

6 Application 1: Gelfand-Fuchs cohomology in AG

Let X/\mathbf{k} be smooth algebraic variety. Let $\mathfrak{g} = T(X) = R\Gamma(X, T)$ be the (derived, dg-) Lie algebra of global vector fields. Usual global vector fields, if X affine. We want to find the Lie algebra cohomology (with coefficients in \mathbf{k})

$$H_{\text{Lie}}^\bullet(T(X)) = ?$$

This cohomology is important (e.g., $H_{\text{Lie}}^2 \sim$ central extensions) but usually hard to find. Already here:

Example 6.1. $X = \mathbb{A}^1 - \{0\}$ punctured affine line. In this case $T(X)$ has basis $L_i = z^{i+1}d/dz$, $i \in \mathbb{Z}$ with the well known commutation relations

$$[L_i, L_j] = (j - i)L_{i+j}.$$

It is known: $H_{\text{Lie}}^\bullet = \mathbf{k}[\beta_2, \beta_3]$, with $\beta_2 =$ being the famous Virasoro cocycle. But no direct purely algebraic proof of this fact is known (!), the classical argument goes through the case of C^∞ vector fields on the circle (for $\mathbf{k} = \mathbb{R}$).

Example 6.2. An easier example is obtained for $X = \mathbb{A}^1$, so $\mathfrak{g} = \text{Der } \mathbf{k}[z]$, with basis only L_{-1}, L_0, L_1, \dots . Note: L_{-1}, L_0, L_1 span an \mathfrak{sl}_2 .

Recall: any \mathfrak{g} acts trivially on its own H_{Lie}^\bullet . So

$$C_{\text{Lie}}^\bullet(\mathfrak{g}) \sim C_{\text{Lie}}^\bullet(\mathfrak{g})_{L_0} \quad (\text{degree 0 wedges}).$$

But this $= C_{\text{Lie}}^\bullet(\mathfrak{sl}_2)$ (balanced wedges cannot involve $L_{\geq 2}$).

$$H_{\text{Lie}}^\bullet(\mathfrak{g}) = H_{\text{Lie}}^\bullet(\mathfrak{sl}_2) = H_{\text{top}}^\bullet(SU_2).$$

Now $SU(2) = S^3$ is the 3-sphere, so we get

$$H_{\text{Lie}}^\bullet(\mathfrak{g}) = H_{\text{top}}^\bullet(S^3) = \mathbf{k}[\beta_3].$$

Note: for $\text{Der } \mathbf{k}[z, z^{-1}]$ the degree 0 complex is still very hard to analyze.

7 Classical Gelfand-Fuchs theory

The classical theory (explained in more detail in [4]) addresses the following question. Let M be C^∞ manifold, and consider the Lie algebra $\text{Vect}(M)$ of C^∞ vector fields. What is its H_{Lie}^\bullet ? The theory then proceeds in two stages:

Stage 1: formal vector fields. We start with the Lie algebra

$$W_n = \left\{ \sum f_i \partial / \partial z_i, f_i \in \mathbb{R}[[z_1, \dots, z_n]] \right\}.$$

For this Lie algebra, Gelfand and Fuchs found that:

$$H_{\text{Lie}}^\bullet(W_n) = H_{\text{top}}^\bullet(Y_n)$$

where Y_n is the fiber product

$$\begin{array}{ccc} Y_n & \longrightarrow & EGL_n(\mathbb{C}) = \text{Stiefel variety} \\ \downarrow GL_n(\mathbb{C}) & & \downarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ \text{sk}_{2n} BGL_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & BGL_n(\mathbb{C}) = \text{Gr}(n, \mathbb{C}^\infty) \end{array}$$

and $\text{sk}_{2n} BGL_n(\mathbb{C})$ is the $2n$ -skeleton of the infinite Grassmannian in the cell decomposition by Schubert cells.

Stage 2: general M : We form the fibration $Y_M \xrightarrow{Y_n} M$, via T_M and $GL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{C})$. Then the result is:

$$H_{\text{Lie}}^\bullet(\text{Vect}(M)) \simeq H_{\text{top}}^\bullet(\text{Sect}(Y_M/M)).$$

Example 7.1. Suppose $M = S^1$ is the circle. In this case:

$\text{Vect}(S^1)$ is a completion of the $(L_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ algebra above.

$$BGL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}P^\infty; \quad \text{sk}_2 BGL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}P^1 = S^2; \quad Y_1 \stackrel{\text{hom.eq.}}{\sim} S^3.$$

So we get the statement of Example 6.2. Further, T_{S^1} is trivial, so $Y_{S^1} \sim S^1 \times S^3$,

$$\text{Sect}(Y_{S^1}/S^1) \sim \text{Map}(S^1, S^3) \stackrel{S^3 \text{ is a group}}{=} S^3 \times \Omega(S^3),$$

and the cohomology of this is $\mathbf{k}[\beta_3] \otimes \mathbf{k}[\beta_2]$.

8 Algebro-Geometric version

Let now X/\mathbb{C} be a smooth algebraic variety, $\dim_{\mathbb{C}}(X) = n$. We then have $Y_X \xrightarrow{Y_n} X$, via T_X and $GL_n(\mathbb{C})$. Note that its fibers are identified with Y_n , not Y_{2n} , even though from the C^∞ -point of view, X is of dimension $2n$.

Theorem 8.1 (B. Hennion-M.K.[6]¹). (a) We have a canonical map $\lambda : H_{\text{Lie}}^\bullet(T(X)) \longrightarrow H_{\text{top}}^\bullet(\text{Sect}(Y_X/X))$.

(b) If X is affine, λ is an isomorphism.

The proof is based on the theory of factorization algebras (both in the n -dimensional AG and $2n$ -dimensional Smooth-Manifold versions). It is straightforward:

\exists natural (algebro-geometric) FA $\check{\mathcal{C}}^\bullet$ on $\text{Ran}(X)$ s.t.

$$H_{\text{Lie}}^\bullet(T(X)) \simeq \int_X \check{\mathcal{C}}^\bullet.$$

The crucial tool for the next step is the Covariant Verdier Duality of Gaitsgory-Lurie [5] which can be explained as follows.

The “space” $\text{Ran}(X)$ is ∞ -dimensional, union of fin-dim skeleta

$$X = \text{Ran}_1 \subset \text{Ran}_2 \subset \dots \subset \text{Ran}(X).$$

Here $\text{Ran}_p(X)$ is formed by finite subsets $I \subset X$ of cardinality $\leq p$. Given a FA \mathcal{F} on $\text{Ran}(X)$, there is a new FA $\psi(\mathcal{F})$ with

$$\psi(\mathcal{F})|_{\text{Ran}_k} = \underline{R}\Gamma_{\text{Ran}_k}(\mathcal{F}) \quad (\text{Cohomology with support})$$

There is always a map

$$\lambda : \int_X \mathcal{F} \longrightarrow \int_X \psi(\mathcal{F})$$

¹Conjectured by B. Feigin in the 80’s.

Its image consists of classes “supported on a finite-dimensional skeleton”.

In our case the Covariant Verdier Duality allows us to pass from algebro-geometric to C^∞ FA. Here are the main points.

Main Point 1: $\psi(\check{\mathcal{C}}^\bullet)$ is topological (locally constant) while $\check{\mathcal{C}}^\bullet$ itself is holomorphic, related to the vacuum module (with $c = 0$)

$$\mathcal{V} = \text{Ind}_{W_n=T(\text{Formal } n\text{-disk})}^{T(\text{Punctured formal disk})} \mathbb{C},$$

which is a vertex algebra (derived (dg), for $n > 1$).

Main Point 2: Factorization homology of $\psi(\check{\mathcal{C}}^\bullet)$ are found topologically, via $\text{Sect}(Y_X/X)$. This is done by associating to it a locally constant FA in the C^∞ sense and applying Non-Abelian Poincaré Duality.

9 Application 2: Cohomological Hall Algebras for surfaces

We recall the classical concept of the *Hall Algebra* in the following context. Let X be an algebraic variety over a finite field \mathbb{F}_q . Let $\text{Coh}(X)$ be the category of coherent sheaves on X with proper support. Then for any two $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Coh}(X)$ all the Ext-groups $\text{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ are finite-dimensional \mathbb{F}_q -vector spaces, in particular, they are finite sets.

Let $H = \text{Fun}(\text{Coh}(X) \rightarrow \mathbb{C})$ be the space of isomorphism invariant functions on objects of $\text{Coh}(X)$. This space carries the *Hall Multiplication* via the *Induction Diagram*

$$\begin{array}{ccc} & \{0 \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow 0\} & \\ & \begin{array}{ccc} \swarrow & & \searrow \\ (p', p'') & & p \end{array} & \\ \text{Coh} \times \text{Coh} & & \text{Coh} \end{array}$$

where on the top we have the category of short exact sequences. The multiplication is defined by the pullback and pushforward of functions:

$$H \otimes H = \text{Fun}(\text{Coh}(X) \times \text{Coh}(X)) \xrightarrow{p_* \circ (p', p'')^*} \text{Fun}(\text{Coh}(X)) = H.$$

This makes H into an associative algebra known as the *Hall algebra* of $\text{Coh}(X)$.

Examples 9.1. (a) Suppose that X a smooth projective curve. In this case Coh splits into:

- Vector bundles. They give rise to an algebra H_{Bun} formed by unramified automorphic forms on all the GL_n (with r being the rank of the bundle). The multiplication is given by Eisenstein series, and the resulting algebra is related/similar to quantum affine algebras [7].

- Sheaves with 0-dimensional support. They give rise to an algebra H_0 formed by classical Hecke operators. It is commutative. Its multiplication with elements of H_{Bun} gives the classical action of Hecke operators on automorphic forms.

(b) In the case $\dim(X) > 1$, nothing interesting is known about such algebras. They have huge size, and it is not clear what are the good questions to ask.

In higher-dimensional case one can follow a different approach, forming the so-called *cohomological Hall algebra*, or COHA. For this, we consider X defined over \mathbb{C} , not over a finite field and consider $\text{Coh}(X)$ as an algebraic stack. Instead of invariant functions on objects, we consider the stack-theoretic (co)homology of this stack. (roughly, equivariant (co)homology with respect to the stabilizer groups. Then we want to use the functoriality of (co)homology to produce a multiplication out of the Induction Diagram. However, the maps in the diagram are singular, so it is subtle, as we need both types of functorialities, covariant as well as contravariant, for a single theory (say, homology).

For $n = 1$ and 2 it was shown in [8] and [10] that one can define the multiplication using *virtual fundamental classes* to account for the singular nature of the maps. More precisely, we work with $H_{\bullet}^{\text{BM}}(\text{Coh}_0(X))$, the Borel-Moore homology of the stack of coherent sheaves with 0-dimensional support. So the resulting algebra is the analog of the classical algebra of Hecke operators for curves over a finite field.

Remark 9.2. This construction is related to the concept of COHA for 3-dimensional Calabi-Yau (CY^3) categories, as defined by Kontsevich and Soibelman. This COHA, is defined, intuitively, as the space of vanishing cycles for (holomorphic) Chern-Simons functional. Given a surface X , one can form the CY^3 manifold $\text{Tot}(K_X)$ (the total space of the canonical bundle), and the two constructions should match in this case. But there is so far, no geometric treatment (for CY^3 categories associated to manifolds), the examples considered being related to quivers.

10 Factorization of COHA

Observation (M.K. - E. Vasserot, [8]): $H(\text{Coh}_0)$ is a factorization algebra on X , in the Smooth-Manifold sense:

$$\text{Coh}_0(U_1 \sqcup U_2) = \text{Coh}_0(U_1) \times \text{Coh}_0(U_2).$$

Further, this factorization algebra is locally constant. Therefore, $H(\text{Coh}_0(X))$ found from the case of the flat space $H_{\text{flat}} = H(\text{Coh}_0(\mathbb{A}^2))$ by Factorization Homology. Now, a coherent sheaf \mathcal{F} on \mathbb{A}^2 with 0-dimensional support is the same as a finite-dimensional vector space $V = H^0(\mathcal{F})$ with action of $\mathbb{C}[x, y]$, i.e., with a pair of commuting operators $x, y : V \rightarrow V$. Therefore the stack $\text{Coh}_0(\mathbb{A}^2)$ is identified with a disjoint union of quotient stacks:

$$\text{Coh}_0(\mathbb{A}^2) = \bigsqcup_{n \geq 0} C_n // GL_n, \quad \text{where}$$

$C_n = \{(A, B) \in \mathfrak{gl}_n \times \mathfrak{gl}_n \mid [A, B] = 0\}$ is the commuting variety.

It is known (goes back to the Feit-Fine 1962 formula for $|C_n(\mathbb{F}_q)|$) that as a bigraded vector space (by n above and coh. degree),

$$H_{\text{flat}} \simeq \text{Sym}^\bullet(V), \quad V = qt\mathbb{C}[q^{-1}, t], \quad \deg(q) = (0, -2), \quad \deg(t) = (1, 0).$$

Theorem 10.1 ([8]). (a) $H_{\text{flat}} \simeq \text{Sym}^\bullet(V)$ as an algebra, in particular, it is commutative.

(b) (Poincaré-Birkhoff-Witt-type theorem for COHA) For any surface X , we have an identification as bigraded vector spaces

$$(10.2) \quad H_\bullet^{\text{BM}}(\text{Coh}_0(X)) \simeq \text{Sym}^\bullet(H_\bullet^{\text{BM}}(X) \otimes V').$$

Here $V' = V(0, 4)$ (shifted grading), so that for $X = \mathbb{A}^2$ with $H_4^{\text{BM}}(\mathbb{A}^2) = \mathbb{C}$ we have

$$V = V' \otimes H_\bullet^{\text{BM}}(\mathbb{A}^2).$$

(Note that Eq. (10.2) is analogous to the Non-abelian Poincaré Duality.)

This means that we can find the size (graded dimension) of $H(\text{Coh}_0(X))$, and the answer looks like

$$H_{\text{top}}^\bullet(\text{Sect}(F_X/X))$$

for a fibration $F_X \rightarrow X$ with fiber F s.t. $H_{\text{top}}^\bullet(F) = H_{\text{flat}}$. So the situation here is formally similar to Gelfand-Fuchs!

References

- [1] A. Beilinson, V. Drinfeld. Chiral Algebras. Amer. Math. Soc. Publ. 2004.
- [2] K. Costello, O. Gwilliam. Factorization Algebras in Quantum Field Theory, vol. 1. Cambridge Univ. Press, 2017.
- [3] J. Francis, D. Gaitsgory. Chiral Koszul duality. *Selecta Math.* **18** (2012) 27-97.
- [4] D. B. Fuchs. Cohomology of Infinite-Dimensional Lie Algebras. Consultants Bureau Publ. New York, 1986.
- [5] D. Gaitsgory, J. Lurie. Weil's Conjecture for Function Fields. Princeton Univ. Press, 2019.
- [6] B. Hennion, M. Kapranov. Gelfand-Fuchs cohomology in algebraic geometry and factorization algebras. arXiv: 1811.05032.
- [7] M. Kapranov. Eisenstein series and quantum affine algebras. *J. Math. Sci.* **84** (1997) 1311-1360.

- [8] M. Kapranov, E. Vasserot. The cohomological Hall algebra of a surface and factorization cohomology. arXiv:1901.07641.
- [9] J. Lurie. Higher Algebra, available on the author's web page.
- [10] M. Porta, F. Sala. Categorification of two-dimensional cohomological Hall algebras. arXiv:1903.07253.

COMPUTATION OF AUTOMORPHISM GROUPS OF K3 AND ENRIQUES SURFACES

ICHIRO SHIMADA

ABSTRACT. In virtue of the advances of computer, we can calculate various geometric data of $K3$ surfaces and Enriques surfaces by brute-force method. The lattice theory plays an important role in this method. We give a survey of the lattice theory used in the computer-aided algebraic geometry of $K3$ surfaces and Enriques surfaces. In particular, we explain Borchers' method for the calculation of automorphism groups of these surfaces. As an example, we compute the automorphism groups of Enriques surfaces covered by a general Jacobian Kummer surface.

1. INTRODUCTION

Machine-aided computation has now become a very strong tool in the study of $K3$ surfaces and Enriques surfaces. In this survey, we show how far we can go with computers in the algebraic geometry of these surfaces.

We mainly deal with the automorphism group of a $K3$ surface or an Enriques surface. The automorphism group is calculated from the numerical Néron–Severi lattice and the nef-and-big cone of the surface. Borchers [2], [3] developed a computational method to determine the shape of the nef-and-big cone by embedding the Néron–Severi lattice into an even unimodular hyperbolic lattice $\text{II}_{1,25}$ of rank 26, which is unique up to isomorphism. In this paper, we write L_{26} for $\text{II}_{1,25}$. The lattice L_{26} has many beautiful combinatorial properties related to the *Leech lattice*, and these properties are used in the study of geometry of $K3$ and Enriques surfaces.

We explain Borchers' method and its generalization. In particular, we present our recent result (joint work [4] with Simon Brandhorst) on Borchers' method for Enriques surfaces. As an example, we compute the automorphism groups of complex Enriques surfaces covered by a general Jacobian Kummer surface.

2. LATTICES

First we fix notation and terminologies about lattices. A *lattice* is a free \mathbb{Z} -module L of finite rank with a non-degenerate symmetric bilinear form

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: L \times L \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Let e_1, \dots, e_n be a basis of a lattice L of rank n . The *Gram matrix* of L with respect to e_1, \dots, e_n is the $n \times n$ matrix whose (i, j) -component is $\langle e_i, e_j \rangle$. The automorphism group of a lattice L is denoted by $\text{O}(L)$. The action of $\text{O}(L)$ on L is from the *right*, and we write the action as $v \mapsto v^g$ for $v \in L$ and $g \in \text{O}(L)$. A lattice L is *unimodular* if the determinant of the Gram matrix is ± 1 . A lattice L is *even* (or *of type II*) if $\langle x, x \rangle \in 2\mathbb{Z}$ holds for all $x \in L$. A lattice L of rank n is *hyperbolic*

For the proceedings of Algebra Symposium, 2019 September, Tohoku University.

(resp. *positive-definite*, resp. *negative-definite*) if the signature of the real quadratic space $L \otimes \mathbb{R}$ is $(1, n - 1)$ (resp. $(n, 0)$, resp. $(0, n)$).

Let L be an even hyperbolic lattice. A *positive cone* of L is one of the two connected components of

$$\{x \in L \otimes \mathbb{R} \mid \langle x, x \rangle > 0\}.$$

Let \mathcal{P} be a positive cone of L . We put

$$\mathrm{O}(L, \mathcal{P}) := \{g \in \mathrm{O}(L) \mid \mathcal{P}^g = \mathcal{P}\}.$$

Then we have $\mathrm{O}(L) = \mathrm{O}(L, \mathcal{P}) \times \{\pm 1\}$. For a vector $v \in L \otimes \mathbb{Q}$ with $\langle v, v \rangle < 0$, we put

$$(v)^\perp := \{x \in \mathcal{P} \mid \langle v, x \rangle = 0\},$$

which is a real hyperplane of \mathcal{P} . Let D be a closed subset of \mathcal{P} defined by countably many inequalities of the form

$$\langle x, v_i \rangle \geq 0 \quad (v_i \in L \otimes \mathbb{Q}).$$

Suppose that D contains a non-empty open subset of \mathcal{P} . A closed subset w of D is a *wall* of D if there exists a hyperplane $(v)^\perp$ of \mathcal{P} such that w is written as $D \cap (v)^\perp$, that $(v)^\perp$ is disjoint from the interior of D , and that $D \cap (v)^\perp$ contains a non-empty open subset of $(v)^\perp$. Let w be a wall of D . We say that a vector $v \in L \otimes \mathbb{Q}$ *defines* the wall w if $w = D \cap (v)^\perp$ and $\langle v, x \rangle \geq 0$ holds for all points x of D .

A vector $r \in L$ is called a *(-2)-vector* if $\langle r, r \rangle = -2$. A *(-2)-vector* $r \in L$ defines the *reflection* $s_r \in \mathrm{O}(L, \mathcal{P})$ into the mirror $(r)^\perp$, which is given by

$$s_r : x \mapsto x + \langle x, r \rangle r.$$

Let $W(L)$ denote the subgroup of $\mathrm{O}(L, \mathcal{P})$ generated by all reflections s_r with respect to *(-2)-vectors* r . Note that $W(L)$ is a normal subgroup in $\mathrm{O}(L, \mathcal{P})$. A *standard fundamental domain* of the action of $W(L)$ on \mathcal{P} is the closure in \mathcal{P} of a connected component of

$$\mathcal{P} \setminus \bigcup (r)^\perp,$$

where r runs through the set of all *(-2)-vectors*. Then $W(L)$ acts on the set of standard fundamental domains simple-transitively. Let N be a standard fundamental domain. We put

$$\mathrm{O}(L, N) := \{g \in \mathrm{O}(L) \mid N^g = N\}.$$

Then $W(L)$ is generated by the reflections s_r with respect to the *(-2)-vectors* r defining walls of N , and we have $\mathrm{O}(L, \mathcal{P}) = W(L) \rtimes \mathrm{O}(L, N)$. Therefore, for the study of $\mathrm{O}(L)$, it is important to calculate the walls of a standard fundamental domain of the action of $W(L)$ on \mathcal{P} .

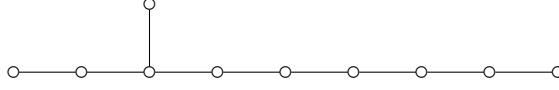
The following is well-known. See, for example, [31, Chapter V].

Theorem 2.1. *For a positive integer n with $n \equiv 2 \pmod{8}$, there exists an even unimodular hyperbolic lattice L_n of rank n . (A more standard notation is $\mathrm{II}_{1, n-1}$.) For each n , the lattice L_n is unique up to isomorphism.*

We denote by U (instead of L_2) the *hyperbolic plane*, a Gram matrix of which is

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

When $n = 8m + 2$, the lattice L_n is obtained as the orthogonal direct-sum of U and m copies of the negative-definite root lattice of type E_8 .

FIGURE 2.1. Coxeter graph of $W(L_{10})$

Example 2.2. Vinberg [41] proved the following. Let \mathcal{P}_{10} be a positive cone of L_{10} . A standard fundamental domain of the action of $W(L_{10})$ on \mathcal{P}_{10} has exactly 10 walls defined by (-2) -vectors that form the dual graph given in Figure 2.1. Hence $W(L_{10})$ is the Coxeter group whose Coxeter graph is Figure 2.1. Since this graph has no non-trivial symmetries, we have $O(L_{10}, \mathcal{P}_{10}) = W(L_{10})$.

3. GEOMETRY OF $K3$ SURFACES

For simplicity, we work over the complex number field \mathbb{C} .

For a non-singular projective surface Z , we denote by S_Z the lattice of numerical equivalence classes of divisors of Z . For a divisor Γ of Z , let $[\Gamma] \in S_Z$ denote the class of Γ . Note that S_Z is hyperbolic by Hodge index theorem. If Z is a $K3$ surface, then S_Z is even. If Z is an Enriques surface, then S_Z is isomorphic to L_{10} . Let \mathcal{P}_Z be the positive cone of S_Z containing an ample class of Z . We put

$$N_Z := \{ x \in \mathcal{P}_Z \mid \langle x, [C] \rangle \geq 0 \text{ for all curves } C \text{ on } Z \},$$

and call it the *nef-and-big cone* of Z .

Suppose that X is a complex $K3$ surface. The following is well-known.

Theorem 3.1. *The nef-and-big cone N_X of X is a standard fundamental domain of the action of $W(S_X)$ on \mathcal{P}_X . The mapping $C \mapsto [C]$ gives rise to a bijection from the set of smooth rational curves C on X to the set of (-2) -vectors $[C]$ defining the walls of N_X .*

The following is a corollary of Torelli theorem for complex algebraic $K3$ surfaces [29].

Theorem 3.2. *The natural homomorphism $\text{Aut}(X) \rightarrow O(S_X, N_X)$ is an isomorphism up to finite kernel and finite cokernel.*

Remark 3.3. The kernel and cokernel can be calculated by looking at the period $H^{2,0}(X)$ of X and the action of $\text{Aut}(X)$ on the discriminant form of S_X , which is canonically anti-isomorphic to the discriminant form of the transcendental lattice of X [23].

Let $a \in S_X$ be an ample class. Note that a is an interior point of N_X . Since $\langle a, a \rangle > 0$, the orthogonal complement of $\mathbb{Z}a$ in S_X is negative-definite. Therefore, for integers c and d , we can calculate the finite set

$$\{ v \in S_X \mid \langle a, v \rangle = c, \langle v, v \rangle = d \}.$$

Then we have the following algorithms.

- A vector $v \in \mathcal{P}_X \cap S_X$ is nef (that is, $v \in N_X$) if and only if the finite set

$$\{ r \in S_X \mid \langle r, r \rangle = -2, \langle r, a \rangle > 0, \langle r, v \rangle < 0 \}$$

is empty. See [32] for the algorithm to calculate this set.

- Let $r \in S_X$ be a (-2) -vector such that

$$d := \langle r, a \rangle > 0,$$

so that r is the class of an effective divisor Γ . Then Γ is irreducible if and only if $\langle r, [C'] \rangle \geq 0$ for all smooth rational curves C' with $\langle [C'], a \rangle < d$. Hence we can determine whether r is the class of a smooth rational curve or not by induction on d .

Example 3.4. The Fermat quartic surface

$$X_{\text{FQ},p} : x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 0$$

in characteristic p is a $K3$ surface if $p \neq 2$. The complex Fermat quartic surface $X_{\text{FQ},0}$ is a singular $K3$ surface whose transcendental lattice is

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix},$$

whereas the Fermat quartic surface $X_{\text{FQ},3}$ in characteristic 3 is a supersingular $K3$ surface with Artin invariant 1. Let h_4 be the class of a hyperplane section of $X_{\text{FQ},p}$. We denote by R_d the set of smooth rational curves C on $X_{\text{FQ},p}$ such that $\langle h_4, [C] \rangle = d$. Then the sizes $|R_d|$ of the sets R_d are given as follows:

d	1	2	3	4	5	6	7
$p = 0$	48	320	1152	15456	136896	743808	3851136
$p = 3$	112	0	0	18144	0	0	2177280

See [37] and [28].

Example 3.5. Suppose that $h_2 \in S_X$ is a nef vector with $\langle h_2, h_2 \rangle = 2$, and \mathcal{L} a line bundle whose class is h_2 . By [25], the complete linear system $|\mathcal{L}|$ is fixed-component free if and only if the finite set

$$\{e \in S_X \mid \langle e, e \rangle = 0, \langle e, h_2 \rangle = 1\}$$

is empty. Suppose that $|\mathcal{L}|$ is fixed-component free. Then $|\mathcal{L}|$ is base-point free by [30], and hence $|\mathcal{L}|$ defines a double covering $\Phi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$. The set of classes of smooth rational curves contracted by Φ is the fundamental root system in

$$\{r \in S_X \mid \langle r, r \rangle = -2, \langle r, h_2 \rangle = 0\}$$

with respect to the ample class a , and hence we can compute it explicitly. (See, for example, [11].) The matrix representation of the action of the deck transformation $\iota(h_2) \in \text{Aut}(X)$ of $\Phi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ on S_X is then calculated from this set of classes of contracted curves. See [32] or [34]. Calculating vectors h_2 with $\langle h_2, h_2 \rangle = 2$ and $\langle h_2, a \rangle = d$ for small d , we can obtain many involutions $\iota(h_2) \in \text{Aut}(X)$.

Remark 3.6. In [19], a generating set of the automorphism group of $X_{\text{FQ},3}$ is obtained by the method above. In [34], using randomly generated involutions, we carried out an experiment on the characteristic polynomials of automorphisms of supersingular $K3$ surfaces.

no.	R	$N/\langle R \rangle$	no.	R	$N/\langle R \rangle$
1	$24 A_1$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{12}$	13	$3 A_8$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$
2	$A_{11} + D_7 + E_6$	$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$	14	$2 A_9 + D_6$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$
3	$2 A_{12}$	$\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$	15	$D_{10} + 2 E_7$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
4	$A_{15} + D_9$	$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$	16	$2 D_{12}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
5	$A_{17} + E_7$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	17	$D_{16} + E_8$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
6	$12 A_2$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$	18	D_{24}	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
7	A_{24}	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$	19	$6 D_4$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$
8	$8 A_3$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4$	20	$4 D_6$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$
9	$6 A_4$	$(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$	21	$3 D_8$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$
10	$4 A_5 + D_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$	22	$4 E_6$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$
11	$4 A_6$	$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$	23	$3 E_8$	0
12	$2 A_7 + 2 D_5$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$	24	none	\mathbb{Z}^{24}

TABLE 4.1. Niemeier lattices

4. CONWAY THEORY

A positive-definite even unimodular lattice of rank 24 is called a *Niemeier lattice*. Niemeier showed that there exist exactly 24 isomorphism classes of Niemeier lattices, one of which is the famous *Leech lattice* Λ . See [8, Chapter 16] or [40]. The isomorphism classes of Niemeier lattices are described in Table 4.1, where the second column is the *ADE*-type of the set R of vectors $r \in N$ with $\langle r, r \rangle = 2$, and the third column shows the group $N/\langle R \rangle$, where $\langle R \rangle$ is the sublattice of N generated by R . The Leech lattice Λ (no. 24) is characterized as the unique Niemeier lattice that does not contain any vectors of square-norm 2.

Recall that L_{26} is an even unimodular hyperbolic lattice of rank 26, which is unique up to isomorphism. Note that the lattice L_{26} is written as

$$U \oplus N^-,$$

where N is a Niemeier lattice and N^- is the negative-definite lattice obtained from N by multiplying the intersection form by -1 . We fix a positive cone \mathcal{P}_{26} of L_{26} , and let $\overline{\mathcal{P}}_{26}$ denote the closure of \mathcal{P}_{26} in $L_{26} \otimes \mathbb{R}$. We put $\partial \overline{\mathcal{P}}_{26} := \overline{\mathcal{P}}_{26} \setminus \mathcal{P}_{26}$.

Definition 4.1. A vector $\mathbf{w} \in L_{26}$ is called a *Weyl vector* if \mathbf{w} is a non-zero primitive vector of L_{26} contained in $\partial \overline{\mathcal{P}}_{26}$ (in particular, we have $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 0$ and hence $\mathbb{Z}\mathbf{w} \subset (\mathbb{Z}\mathbf{w})^\perp$) such that $(\mathbb{Z}\mathbf{w})^\perp/\mathbb{Z}\mathbf{w}$ is isomorphic to the negative-definite Leech lattice Λ^- . A (-2) -vector $r \in L_{26}$ is called a *Leech root* with respect to a Weyl vector \mathbf{w} if $\langle \mathbf{w}, r \rangle = 1$.

Let $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Lambda$ denote the intersection form of the (positive-definite) Leech lattice Λ . Note that every Weyl vector \mathbf{w} is written as $(1, 0, \mathbf{0})$ in an orthogonal direct-sum decomposition

$$L_{26} = U \oplus \Lambda^-,$$

and, under this decomposition, Leech roots with respect to \mathbf{w} are written as

$$r_\lambda := \left(\frac{\langle \lambda, \lambda \rangle_\Lambda}{2} - 1, 1, \lambda \right), \quad \text{where } \lambda \in \Lambda.$$

For a Weyl vector \mathbf{w} , we put

$$N_{26}(\mathbf{w}) := \{x \in \mathcal{P}_{26} \mid \langle x, r \rangle \geq 0 \text{ for all Leech roots } r \text{ with respect to } \mathbf{w}\}.$$

Definition 4.2. A standard fundamental domain of the action of $W(L_{26})$ on \mathcal{P}_{26} is called a *Conway chamber*.

Conway [5] proved the following.

Theorem 4.3. *The mapping $\mathbf{w} \mapsto N_{26}(\mathbf{w})$ gives a bijection from the set of Weyl vectors to the set of Conway chambers.*

We fix a Conway chamber N_{26} . Let \mathbf{w}_0 be the corresponding Weyl vector, and let $L_{26} = U \oplus \Lambda^-$ be an orthogonal direct-sum decomposition such that $\mathbf{w}_0 = (1, 0, \mathbf{0})$.

Corollary 4.4. *The group $O(L_{26}, N_{26}) = \{g \in O(L_{26}) \mid N_{26}^g = N_{26}\}$ is the group Co_∞ of affine isometries of Λ , that is, the group generated by $\text{Co}_0 = O(\Lambda)$ and the affine translations of Λ .*

Let \overline{N}_{26} be the closure of N_{26} in $L_{26} \otimes \mathbb{R}$. We investigate the rays in $\overline{N}_{26} \cap \partial \overline{\mathcal{P}}_{26}$. Suppose that

$$v := (a, b, x) \in L_{26} \otimes \mathbb{R}$$

be a non-zero vector in $\overline{N}_{26} \cap \partial \overline{\mathcal{P}}_{26}$, where $(a, b) \in U \otimes \mathbb{R}$ and $x \in \Lambda \otimes \mathbb{R}$. Then we have

$$\langle v, v \rangle = 2ab - \langle x, x \rangle_\Lambda = 0,$$

and, for every $\lambda \in \Lambda$, we have

$$(4.1) \quad \langle v, r_\lambda \rangle = a + b \left(\frac{\langle \lambda, \lambda \rangle_\Lambda}{2} - 1 \right) - \langle x, \lambda \rangle_\Lambda \geq 0.$$

Considering the limit of $\langle v, r_\lambda \rangle$ when $\langle \lambda, \lambda \rangle_\Lambda \rightarrow \infty$, we see that $b \geq 0$. If $b = 0$, then we have $x = 0$ and $a > 0$. Hence the ray $\mathbb{R}_{\geq 0}v$ is equal to $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{w}_0$. Suppose that $b > 0$. We can assume that $b = 1$ without changing $\mathbb{R}_{\geq 0}v$. Then we have $a = \langle x, x \rangle_\Lambda / 2$ and hence

$$(4.2) \quad \langle v, r_\lambda \rangle = \frac{1}{2} \langle x - \lambda, x - \lambda \rangle_\Lambda - 1.$$

Therefore we have $\langle x - \lambda, x - \lambda \rangle_\Lambda \geq 2$ for all $\lambda \in \Lambda$, which means that $x \in \Lambda \otimes \mathbb{R}$ is a *deep hole* of the Leech lattice [6]. In particular, we have $x \in \Lambda \otimes \mathbb{Q}$ and $a \in \mathbb{Q}$, and hence there exists a primitive vector $f \in L_{26}$ with $\langle f, f \rangle = 0$ such that $\mathbb{R}_{\geq 0}v = \mathbb{R}_{\geq 0}f$. Thus we obtain the following:

Proposition 4.5. *The intersection $\overline{N}_{26} \cap \partial \overline{\mathcal{P}}_{26}$ consists of countably many rational rays. One of them is $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{w}_0$, and the other rays are in one-to-one correspondence with the deep holes of Λ .*

Let $f \in L_{26}$ be as above, and let $x_f \in \Lambda \otimes \mathbb{Q}$ be the corresponding deep hole. Since f is primitive and L_{26} is unimodular, we have a vector $z \in L_{26}$ such that $\langle f, z \rangle = 1$ and $\langle z, z \rangle = -2$. Let $U_{f,z} \subset L_{26}$ be the hyperbolic plane generated by f and z , and let $N_{f,z}^-$ be the orthogonal complement of $U_{f,z}$ in L_{26} , which is obtained from a Niemeier lattice $N_{f,z}$ by changing the sign of the intersection form. By (4.2), the mapping $\lambda \mapsto r_\lambda$ gives a bijection from the set of vectors $\lambda \in \Lambda$ with $\langle x_f - \lambda, x_f - \lambda \rangle_\Lambda = 2$ to the set

$$R_f := \{r \in L_{26} \mid \langle r, r \rangle = -2, \langle r, \mathbf{w}_0 \rangle = 1, \langle r, f \rangle = 0\}$$

of Leech roots r with $\langle r, f \rangle = 0$. By [6] and [7], we see that R_f form a Dynkin diagram whose ADE -type is the ADE -type of the Niemeier lattice $N_{f,z}$ given in Table 4.1, and we obtain one-to-one correspondences between the following three sets:

- the set of deep holes of Λ modulo the action of Co_∞ ,
- the set of rays in $\overline{N}_{26} \cap \partial \overline{\mathcal{P}}_{26}$ other than $\mathbb{R}_{\geq 0} \mathbf{w}_0$ modulo the action of $\text{O}(L_{26}, N_{26}) = \text{Co}_\infty$, and
- the isomorphism classes of Niemeier lattices other than the Leech lattice.

Remark 4.6. Let \mathbb{X}_{26} be a $K3$ surface such that the Néron–Severi lattice of \mathbb{X}_{26} is isomorphic to L_{26} . Of course, such a $K3$ surface \mathbb{X}_{26} does *not* exist. We introduce \mathbb{X}_{26} only for heuristic purpose: Using this *non-existing* “ $K3$ surface” \mathbb{X}_{26} , we can state results about the lattice L_{26} as results about geometry of \mathbb{X}_{26} . Note that the nef-and-big cone of \mathbb{X}_{26} can be identified with the Conway chamber N_{26} .

“Theorem”. The smooth rational curves C_λ on \mathbb{X}_{26} are indexed by vectors $\lambda \in \Lambda$ in such a way that $[C_\lambda] = r_\lambda$, and $\text{Aut}(\mathbb{X}_{26})$ is isomorphic to Co_∞ up to finite kernel and finite cokernel in such a way that the action of $\text{Aut}(\mathbb{X}_{26})$ on the set of smooth rational curves on \mathbb{X}_{26} and the action of Co_∞ on Λ are compatible under the correspondence $C_\lambda \leftrightarrow \lambda$.

Using the theory of elliptic $K3$ surfaces (see, for example, [39]), the classical result of Niemeier can also be regarded as a “theorem” on the elliptic fibrations of the “ $K3$ surface” \mathbb{X}_{26} .

“Theorem”. Modulo the action of Co_∞ , there exist exactly 24 elliptic fibrations on \mathbb{X}_{26} . Each of them has a zero section. The ADE -type of singular fibers and the Mordell–Weil group of each of these elliptic fibrations are given in Table 4.1. In particular, the Leech lattice is realized as the Mordell–Weil lattice of a Jacobian fibration of \mathbb{X}_{26} .

5. BORCHERDS’ METHOD

Let X be a $K3$ surface. Suppose that we have a primitive embedding

$$S_X \hookrightarrow L_{26}.$$

By this embedding, we regard the positive cone \mathcal{P}_X of S_X as a subspace of a positive cone \mathcal{P}_{26} of L_{26} . Recall that the positive cone \mathcal{P}_{26} is tessellated by Conway chambers $N_{26}(\mathbf{w})$.

Definition 5.1. An *induced chamber* is a closed subset D of \mathcal{P}_X that contains a non-empty open subset of \mathcal{P}_X and is obtained as the intersection $\mathcal{P}_X \cap N_{26}(\mathbf{w})$ of \mathcal{P}_X with a Conway chamber $N_{26}(\mathbf{w})$. The tessellation of \mathcal{P}_{26} by Conway chambers induces a tessellation of \mathcal{P}_X by the induced chambers, which we call the *induced tessellation* of \mathcal{P}_X .

Since the nef-and-big cone N_X is bounded by hyperplanes $(r)^\perp$ defined by (-2) -vectors $r \in S_X$, and a (-2) -vector r of S_X is a (-2) -vector of L_{26} , the cone N_X is also tessellated by induced chambers.

We assume the following mild assumption:

Assumption 5.2. The orthogonal complement of S_X in L_{26} contains at least one (-2) -vector.

Then any induced chamber $D = \mathcal{P}_X \cap N_{26}(\mathbf{w})$ of \mathcal{P}_X has only finite number of walls, and these walls can be calculated explicitly from the Weyl vector \mathbf{w} of the Conway chamber $N_{26}(\mathbf{w})$ inducing D . See [33] for the detail. A linear programming plays an important role in this algorithm.

Definition 5.3. We say that the induced tessellation of \mathcal{P}_X is *simple* if the induced chambers are congruent to each other by the action of $O(S_X, \mathcal{P}_X)$.

When the induced tessellation of \mathcal{P}_X is simple, we can calculate the shape of N_X by means of this tessellation. This method was contrived by Borcherds [2], [3], and the automorphism groups $\text{Aut}(X)$ of many $K3$ surfaces X have been calculated by this method.

Remark 5.4. Borcherds' method is regarded as a calculation of $\text{Aut}(X)$ by a generalization of “the $K3$ surface” \mathbb{X}_{26} to X , that is, we regard the embedding $S_X \hookrightarrow L_{26}$ as the embedding induced by a “specialization” of X to \mathbb{X}_{26} .

5.1. Jacobian Kummer surface. Let

$$X := \text{Km}(\text{Jac}(C))$$

be the Kummer surface associated with the Jacobian variety $\text{Jac}(C)$ of a complex general genus 2 curve

$$C : y^2 = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_6).$$

The $K3$ surface X has three famous projective models.

- The $K3$ surface X is embedded into \mathbb{P}^3 as a quartic surface $X_4 \subset \mathbb{P}^3$ with 16 ordinary nodes corresponding to the points of the 2-torsion subgroup of $\text{Jac}(C)$. This quartic surface is called the *Kummer quartic surface*.
- The dual $X_4^\vee \subset (\mathbb{P}^3)^\vee$ of the Kummer quartic surface $X_4 \subset \mathbb{P}^3$ is also a quartic surface with 16 ordinary nodes.
- The $K3$ surface X is embedded into \mathbb{P}^5 as a smooth $(2, 2, 2)$ -complete intersection $X_{2,2,2}$ defined by

$$(5.1) \quad \sum_{i=1}^6 x_i^2 = \sum_{i=1}^6 \lambda_i x_i^2 = \sum_{i=1}^6 \lambda_i^2 x_i^2 = 0.$$

The surface $X_{2,2,2}$ contains 32 lines, which are the exceptional curves over the ordinary nodes of X_4 and of X_4^\vee .

The Néron–Severi lattice S_X of X is of rank 17. Kondo [18] found a primitive embedding $S_X \hookrightarrow L_{26}$ such that \mathcal{P}_X is *simply* tessellated by induced chambers, and using this embedding, he obtained the following:

Theorem 5.5. *Every induced chamber D has $32 + 60 + 32 + 192$ walls.*

There exists a unique induced chamber D_0 that contains the class h_8 of a hyperplane section of $X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^5$. Then the 32 walls of D_0 are defined by the classes of the 32 lines on $X_{2,2,2}$, and the group

$$\text{Aut}(X, D_0) := \{g \in \text{Aut}(X) \mid D_0^g = D_0\}$$

is equal to the projective automorphism group

$$\text{Aut}(X_{2,2,2}) = \{g \in \text{Aut}(X) \mid h_8^g = h_8\} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$$

of $X_{2,2,2}$. For each of the other $60+32+192$ walls w of D_0 , there exists an involution $g_w \in \text{Aut}(X)$ that maps D_0 to the induced chamber adjacent to D_0 across the wall

w. These automorphisms g_w are classically known and described geometrically as follows.

- (a) 60 involutions are obtained as Hutchinson–Göpel involutions. See Hutchinson [13] and [14].
- (b) $32 = 16 + 16$ involutions are obtained as the deck-transformation of the double covering $X \rightarrow \mathbb{P}^2$ given by the projection with the center being an ordinary node of X_4 or of X_4^\vee .
- (c) 192 involutions are obtained as Hutchinson–Weber involutions. See Hutchinson [15].

Corollary 5.6. *The group $\text{Aut}(X)$ is generated by $\text{Aut}(X_{2,2,2}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$ and $60 + 32 + 192$ involutions described above.*

Remark 5.7. The fact that the 192 involutions above are Hutchinson–Weber involutions was proved by Ohashi [27].

5.2. Fifteen nodal quartic surface. As is expected from Remark 5.4, Borcherds’ method is especially suitable for the analysis of the change of automorphism group under generalization/specialization of $K3$ surfaces.

The surface $X = \text{Km}(\text{Jac}(C))$ is obtained as the minimal resolution of a quartic surface $X_4 \subset \mathbb{P}^3$ with 16 ordinary nodes (Kummer quartic surface), and it is classically known (see, for example, [12, Chapter 6]) that a Kummer quartic surface is related to the line congruence of type $(2, 2)$ in $\text{Grass}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^3)$. We generalize X to a $K3$ surface X' that is the minimal resolution of a general quartic surface X'_4 with 15 ordinary nodes. This surface was investigated by Dolgachev [9] in the relation to the line congruence of type $(2, 3)$ in $\text{Grass}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^3)$. Using this result, we determined $\text{Aut}(X')$ in [10].

Compositing Kondo’s embedding $S_X \hookrightarrow L_{26}$ with the primitive embedding $S_{X'} \hookrightarrow S_X$ induced by the specialization of X' to X , we obtain a primitive embedding $S_{X'} \hookrightarrow L_{26}$. It turns out that this embedding also induces a simple tessellation of $\mathcal{P}_{X'}$, and we obtain the following:

Theorem 5.8. *The automorphism group of X' is generated by*

$$6 + 45 + 6 + 15 + 120 + 72$$

automorphisms, each of which is described explicitly and geometrically.

Example 5.9. Let p_1, \dots, p_5 be distinct ordinary nodes of the 15-nodal quartic surface X'_4 , no four of them are coplanar. Then we obtain a birational involution g of X'_4 defined as follows. Let q be a general point of X'_4 . There exists a unique twisted cubic curve Γ in \mathbb{P}^3 passing through p_1, \dots, p_5 and q . Let q' be the point such that $\Gamma \cap X'_4 = \{p_1, \dots, p_5, q, q'\}$. Then the involution g interchanges q and q' . Choosing suitable 5-tuples p_1, \dots, p_5 of ordinary nodes of X'_4 , we obtain 72 generators of $\text{Aut}(X')$ in Theorem 5.8.

Remark 5.10. Enumerating the faces of an induced chamber with codimension 2, we also obtained a set of defining relations of $\text{Aut}(X')$ with respect to the generators given in Theorem 5.8.

Remark 5.11. In [35], we calculated the automorphism group $\text{Aut}(\mathcal{X}/R)$ of a certain $K3$ surface \mathcal{X} defined over a complete discrete valuation ring R of mixed characteristics by comparing the automorphism groups of the special fiber and of the generic fiber.

5.3. Non-simple tessellation. For every complex $K3$ surface X , we can embed S_X into L_{26} primitively. Usually, however, the induced tessellation of \mathcal{P}_X is not simple. In [33], Borchers' method is generalized for the case where the induced tessellation of \mathcal{P}_X is not simple.

Let X be a singular $K3$ surface whose transcendental lattice is

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Then we have 1098 distinct types of induced chambers, and obtain a generating set of $\text{Aut}(X)$ consisting of 764 elements.

Recall that $X_{\text{FQ},0}$ is the complex Fermat quartic surface. We have observed that, for $X_{\text{FQ},0}$, there exist more than 10^5 types of induced chambers, and we have not yet obtained a generating set of $\text{Aut}(X_{\text{FQ},0})$.

6. BORCHERS METHOD FOR ENRIQUES SURFACES

We work over \mathbb{C} . An involution ε of a $K3$ surface X is called an *Enriques involution* if ε is fixed-point free, or equivalently, if the quotient surface $Y := X/\langle\varepsilon\rangle$ is an Enriques surface. Ohashi [26] showed that the set of Enriques involutions of a $K3$ surface X is a union of finitely many conjugacy classes of $\text{Aut}(X)$.

Example 6.1. The Hutchinson–Göpel involutions and the Hutchinson–Weber involutions on $\text{Km}(\text{Jac}(C))$ are Enriques involutions.

Let $\pi: X \rightarrow Y$ be the universal covering of an Enriques surface $Y = X/\langle\varepsilon\rangle$. Then the pull-back by π gives a primitive embedding

$$\pi^*: S_Y(2) \cong L_{10}(2) \hookrightarrow S_X,$$

where $S_Y(2)$ is the lattice with the same underlying \mathbb{Z} -module as S_Y and with the intersection form being that of S_Y multiplied by 2. The image of π^* is equal to the invariant part $\{v \in S_X \mid v^\varepsilon = v\}$ of the action of the Enriques involution ε on S_X . Since π is étale, the orthogonal complement of the image of π^* does not contain any (-2) -vector. The following is due to Keum [16].

Theorem 6.2. *An involution ε of a $K3$ surface X is an Enriques involution if and only if the fixed sublattice $\{v \in S_X \mid v^\varepsilon = v\}$ of S_X is isomorphic to $L_{10}(2)$ and its orthogonal complement in S_X contains no (-2) -vectors.*

In a joint work with S. Brandhorst [4], we have classified all primitive embeddings of $L_{10}(2)$ into L_{26} .

Theorem 6.3. *Up to the action of $O(L_{10})$ and $O(L_{26})$, there exist exactly 17 primitive embeddings*

$$12\text{A}, 12\text{B}, 20\text{A}, \dots, 20\text{F}, 40\text{A}, \dots, 40\text{E}, 96\text{A}, 96\text{B}, 96\text{C}, \text{infy}$$

of $L_{10}(2)$ into L_{26} .

Recall that the positive cone \mathcal{P}_{26} of L_{26} is tessellated by Conway chambers. A primitive embedding $L_{10}(2) \hookrightarrow L_{26}$ induces a tessellation of the positive cone \mathcal{P}_{10} of L_{10} that is mapped into \mathcal{P}_{26} by $L_{10}(2) \hookrightarrow L_{26}$. The following theorem is very useful in the calculation of the automorphism group of an Enriques surface.

Theorem 6.4. *Except for the embedding of type infy, the following hold.*

- (i) *The induced tessellation on \mathcal{P}_{10} is simple.*

No.	name	rt	m4	og
1	12A	D_8	1376	$2^{29} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^2$
2	12B	A_7	1824	$2^{23} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^2$
3	20A	$D_4 + D_5$	1760	$2^{25} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7$
4	20B	$2D_4$	1888	$2^{29} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$
5	20C	$10A_1 + D_6$	1632	$2^{28} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7$
6	20D	$A_3 + A_4$	2016	$2^{16} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7$
7	20E	$5A_1 + A_5$	1952	$2^{20} \cdot 3^7 \cdot 5^3$
8	20F	$2A_3$	2080	$2^{23} \cdot 3^4 \cdot 5^2$
9	40A	$4A_1 + 2A_3$	2016	$2^{25} \cdot 3^5 \cdot 5$
10	40B	$8A_1 + 2D_4$	1760	$2^{30} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7$
11	40C	$6A_1 + A_3$	2080	$2^{20} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7$
12	40D	$12A_1 + D_4$	1888	$2^{28} \cdot 3^5 \cdot 5^2$
13	40E	$2A_1 + 2A_2$	2144	$2^{16} \cdot 3^6 \cdot 5^2$
14	96A	$8A_1$	2144	$2^{28} \cdot 3^3$
15	96B	$16A_1$	2016	$2^{31} \cdot 3^5$
16	96C	$4A_1$	2208	$2^{22} \cdot 3^5$
17	infy		2272	$2^{26} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

TABLE 6.1. Primitive embeddings of $L_{10}(2)$ into L_{26}

- (ii) Each wall of every induced chamber is defined by a (-2) -vector r of L_{10} .
- (iii) For each wall $D \cap (r)^\perp$ of an induced chamber D with $\langle r, r \rangle = -2$, the reflection s_r maps D to the induced chamber adjacent to D across the wall $D \cap (r)^\perp$.

Table 6.1 shows the 17 primitive embeddings of $L_{10}(2)$ into L_{26} , and Table 6.2 shows properties of induced chambers.

- The **name** of the primitive embedding indicates the number of walls of an induced chamber. For example, each induced chamber of the embedding 96A has 96 walls.
- The column **rt** in Table 6.1 shows the *ADE*-type of the set of (-2) -vectors in the orthogonal complement ι^\perp of the image of the primitive embedding $\iota: L_{10}(2) \hookrightarrow L_{26}$. For the embedding **infy**, the orthogonal complement ι^\perp contains no (-2) -vectors (that is, Assumption 5.2 is not satisfied), and the induced chamber has infinitely many walls.
- The column **m4** in Table 6.1 shows the number of vectors v with $\langle v, v \rangle = -4$ in the orthogonal complement ι^\perp , and the column **og** gives the order of the orthogonal group $O(\iota^\perp)$ of ι^\perp .
- Recall that the standard fundamental domain of the action of $W(L_{10})$ on \mathcal{P}_{10} is bounded by 10 walls defined by (-2) -vectors that form the dual graph in Figure 2.1. Since every wall of an induced chamber is defined by a (-2) -vector, each induced chamber is a union of standard fundamental domains.

No.	name	volume	aut	isom	NK
1	12A	269824	2^2		I
2	12B	12142080	$2^3 \cdot 3$		II
3	20A	64757760	$2^3 \cdot 3$		V
4	20B	145704960	2^6		III
5	20C	777093120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	20D	VII
6	20D	777093120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	20C	VII
7	20E	906608640	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$		VI
8	20F	2039869440	$2^6 \cdot 5$		IV
9	40A	8159477760	$2^7 \cdot 3$		
10	40B	18650234880	$2^7 \cdot 3^2$	40C	
11	40C	18650234880	$2^7 \cdot 3^2$	40B	
12	40D	32637911040	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$	40E	
13	40E	32637911040	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$	40D	
14	96A	163189555200	$2^{13} \cdot 3$		
15	96B	652758220800	$2^{12} \cdot 3^3$	96C	
16	96C	652758220800	$2^{12} \cdot 3^3$	96B	
17	infty	∞			

TABLE 6.2. Induced chambers of \mathcal{P}_{10}

The column `volume` in Table 6.2 shows how many standard fundamental domains are contained in an induced chamber.

- The column `|aut|` in Table 6.2 shows the order of the automorphism group

$$O(L_{10}, D) := \{ g \in O(L_{10}) \mid D^g = D \}$$

of an induced chamber D in $O(L_{10})$.

- Distinct embeddings can produce congruent induced chambers. The column `isom` in Table 6.2 shows that, for example, two embeddings 20C and 20D yield congruent induced chambers.
- Nikulin [24] and Kondo [17] classified Enriques surfaces Y with finite automorphism group. If $\text{Aut}(Y)$ is finite, then Y contains only finite number of smooth rational curves. By the configuration of these smooth rational curves, Enriques surfaces with finite automorphism group are divided into 7 classes I, II, ..., VII. These 7 configurations appear as the configurations of (-2) -vectors defining walls of an induced chamber of \mathcal{P}_{10} . The column `NK` in Table 6.2 shows this correspondence.

The induced chambers are much bigger than the standard fundamental domain Δ of the action of $W(L_{10})$ on \mathcal{P}_{10} , and hence we need only small number of copies of chambers to describe the nef-and-big cone N_Y of an Enriques surface Y . For example, let Y be a complex *generic* Enriques surface. We have $N_Y = \mathcal{P}_Y$. By Barth–Peters [1], the fundamental domain \mathcal{F} of the action of $\text{Aut}(Y)$ on $N_Y = \mathcal{P}_Y$

number	ε	name
6	Hutchinson–Weber	20E
15	Hutchinson–Göpel	40A
10	in $\text{Aut}(X_{2,2,2})$	40C .

TABLE 7.1. Conjugacy classes of Enriques involutions

is a union of

$$|\text{O}(L_{10} \otimes \mathbb{F}_2)| = 2^{21} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 31 = 46998591897600$$

copies of Δ . If we use induced chambers of the embedding 96C, we can express \mathcal{F} as a union of

$$\frac{46998591897600}{652758220800} = 72$$

copies of induced chambers.

7. ENRIQUES SURFACES COVERED BY A JACOBIAN KUMMER SURFACE

We illustrate Borchers’ method for Enriques surfaces by applying it to Enriques surfaces covered by the Kummer surface

$$X = \text{Km}(\text{Jac}(C))$$

associated with the Jacobian variety $\text{Jac}(C)$ of a general curve C of genus 2. Recall that $\text{Aut}(X)$ was calculated by Kondo [18], as was explained in Section 5.1. Ohashi [27] gave the complete classification of conjugacy classes of Enriques involutions in $\text{Aut}(X)$, which had been conjectured by Mukai [21].

Theorem 7.1. *There exist exactly 6 + 15 + 10 conjugacy classes of Enriques involutions in $\text{Aut}(X)$. A representative of each conjugacy class is given in Table 7.1.*

Remark 7.2. A representative of the conjugacy class in the third line of Table 7.1 is given as follows. The projective automorphism group $\text{Aut}(X_{2,2,2}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$ of the (2, 2, 2)-complete intersection $X_{2,2,2}$ in \mathbb{P}^5 defined by (5.1) consists of the involutions

$$(x_1 : x_2 : \cdots : x_6) \mapsto (\pm x_1 : \pm x_2 : \cdots : \pm x_6).$$

This involution is fixed-point free if and only if there exist exactly three minuses in $(\pm x_1 : \pm x_2 : \cdots : \pm x_6)$, and hence there exist exactly ten Enriques involutions in $\text{Aut}(X_{2,2,2})$.

Kondo [18] used a primitive embedding $\iota_X : S_X \hookrightarrow L_{26}$ to calculate $\text{Aut}(X)$. Let ε be an Enriques involution of X with the quotient morphism

$$\pi : X \rightarrow Y = X/\langle \varepsilon \rangle.$$

Then the composite of $\pi^* : S_Y(2) \hookrightarrow S_X$ and $\iota_X : S_X \hookrightarrow L_{26}$ gives a primitive embedding

$$\iota_Y : S_Y(2) \cong L_{10}(2) \hookrightarrow L_{26}.$$

The type of this primitive embedding is given in Table 7.1. We investigate the automorphism groups of these Enriques surfaces $Y = X/\langle \varepsilon \rangle$. We have a canonical isomorphism

$$\text{Aut}(Y) \cong \text{Cen}(\varepsilon)/\langle \varepsilon \rangle,$$

where $\text{Cen}(\varepsilon)$ is the centralizer of ε in $\text{Aut}(X)$. Therefore, to calculate $\text{Aut}(Y)$, it is enough to calculate $\text{Cen}(\varepsilon)$.

Remark 7.3. Mukai and Ohashi [22] investigated automorphisms of an Enriques surface in the conjugacy class of type 40A (an Enriques surface of Hutchinson–Göpel type). See also [20].

Recall that $h_8 \in S_X$ is the class of a hyperplane section of $X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^5$. Let D_X be the induced chamber in \mathcal{P}_X containing h_8 . (This induced chamber was denoted by D_0 in Section 5.1.) Let ε and $\pi: X \rightarrow Y = X/\langle\varepsilon\rangle$ be as above. We identify S_Y (resp. \mathcal{P}_Y) with the invariant part of the action of ε on S_X (resp. on \mathcal{P}_X). Then the nef-and-big cone N_Y of Y is equal to the intersection $\mathcal{P}_Y \cap N_X$. Suppose that $\varepsilon' = g^{-1}\varepsilon g$ is a conjugate of ε , where $g \in \text{Aut}(X)$, and let $\pi': X \rightarrow Y' = X/\langle\varepsilon'\rangle$ be the corresponding covering morphism. Then we have $\mathcal{P}_{Y'} = \mathcal{P}_Y^g$. Recall that N_X is tessellated by the induced chambers D_X^g , where g runs through $\text{Aut}(X)$. Therefore, replacing ε with a conjugate of ε , we can and will assume that

$$D_Y := \mathcal{P}_Y \cap D_X$$

contains a non-empty open subset of \mathcal{P}_Y , and hence D_Y is an induced chamber of the primitive embedding $\iota_Y: S_Y(2) \hookrightarrow L_{26}$. We put

$$\text{Cen}(\varepsilon, D_Y) := \{g \in \text{Cen}(\varepsilon) \mid D_Y^g = D_Y\},$$

which is a finite subgroup of $\text{Cen}(\varepsilon)$. We then put

$$\text{Cen}(\varepsilon, D_Y)|_{\mathcal{P}_Y} := \{g|_{\mathcal{P}_Y} \mid g \in \text{Cen}(\varepsilon, D_Y)\},$$

where $g|_{\mathcal{P}_Y}$ is the restriction of g to \mathcal{P}_Y .

Definition 7.4. Let $w = D_Y \cap (r)^\perp$ be a wall of D_Y , and let r be the (-2) -vector defining w . We say that w is an *outer wall* if the following mutually equivalent conditions are satisfied.

- w is contained in a wall of N_Y ,
- the induced chamber of \mathcal{P}_Y adjacent to D_Y across the wall w is not contained in N_Y ,
- the (-2) -vector r is the class of a smooth rational curve on Y , and
- there exists a smooth rational curve C of X such that $\pi^*(r) = [C] + [\varepsilon(C)]$.

Otherwise we say that w is an *inner wall*.

Definition 7.5. We say that a wall $D_X \cap (v)^\perp$ of D_X is *perpendicular* to D_Y if the vector $v \in S_X \otimes \mathbb{Q}$ defining $D_X \cap (v)^\perp$ belongs to $S_Y \otimes \mathbb{Q}$.

In the following, a configuration of (-2) -vectors in L_{10} is described by a pair (Γ, μ) , where Γ is a set of indexes γ of (-2) -vectors r_γ , and $\mu: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ gives the intersection pairing $\mu(\gamma, \gamma') = \langle r_\gamma, r_{\gamma'} \rangle$. The configuration of type τ means the configuration of (-2) -vectors defining the walls of an induced chamber obtained by the primitive embedding $L_{10}(2) \hookrightarrow L_{26}$ of type τ .

7.1. An Enriques surface in the conjugacy class of type 20E. First we describe the configuration of type 20E. This configuration is isomorphic to the configuration of Nikulin–Kondo type VI (Fig. 6.4 of [17]). The description below of this configuration was obtained in [36]. Let A be the set of subsets a of $\{1, \dots, 5\}$ with

$|a| = 3$. Let A_1 and A_2 be two copies of A with the natural bijection to A denoted by $a \mapsto \bar{a}$. We then put

$$\Gamma := A_1 \sqcup A_2,$$

and define a symmetric function $\mu: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ with $\mu(a, a) = -2$ for all $a \in \Gamma$ as follows.

- Suppose that $a, a' \in A_1$ with $a \neq a'$. Then

$$\mu(a, a') = \begin{cases} 1 & \text{if } |a \cap a'| = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Suppose that $a, a' \in A_2$ with $a \neq a'$. Then

$$\mu(a, a') = \begin{cases} 1 & \text{if } |a \cap a'| = 2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Suppose that $a \in A_1$ and $a' \in A_2$. Then

$$\mu(a, a') = \begin{cases} 2 & \text{if } \bar{a} = \bar{a}', \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then (Γ, μ) defines the configuration of type 20E.

Remark 7.6. The sub-configuration $(A_1, \mu|_{A_1})$ of (Γ, μ) is isomorphic to the famous Petersen graph, and the sub-configuration $(A_2, \mu|_{A_2})$ is isomorphic to the complement of the Petersen graph. The automorphism group of (Γ, μ) is equal to the automorphism group of the Petersen graph, which is isomorphic to \mathfrak{S}_5 .

Let ε be a Hutchinson–Weber involution of X . Calculating the ADE -type of the set of (-2) -vectors in the orthogonal complement ι_Y^\perp of the image of ι_Y , we see that ι_Y is of type 20E. We assume that ε is the involution that maps D_X to the induced chamber of \mathcal{P}_X adjacent to D_X , and let $w := D_X \cap (v_\varepsilon)^\perp$ be the wall of D_X between D_X and D_X^ε , that is, w is the wall in Theorem 5.5 (c). Then $D_Y := \mathcal{P}_Y \cap D_X$ is contained in w , and D_Y contains an interior point of w (as a subset of the hyperplane $(v_\varepsilon)^\perp$). The group $\text{Cen}(\varepsilon, D_Y)$ is contained in $\text{Aut}(X_{2,2,2}) \cup \text{Aut}(X_{2,2,2})\varepsilon$. Looking at all $32 + 32$ elements of this set, we see that $\text{Cen}(\varepsilon, D_Y)$ is equal to $\{1, \varepsilon\}$, and hence $\text{Cen}(\varepsilon, D_Y)|_{\mathcal{P}_Y}$ is trivial.

In 20 walls of D_Y , 10 are outer and 10 are inner. There exists an indexing $\gamma \mapsto r_\gamma$ of the (-2) -vectors defining the walls $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp$ of D_Y by the set $\Gamma = A_1 \sqcup A_2$ above with the following properties.

- Suppose that $\gamma \in A_1$. Then the wall $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp$ of D_Y is outer. There exists a unique pair of lines $C, \varepsilon(C)$ of $X_{2,2,2}$ such that $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp$ is equal to $\mathcal{P}_Y \cap D_X \cap ([C])^\perp$, and we have $\pi^*(r) = [C] + [\varepsilon(C)]$.
- Suppose that $\gamma \in A_2$. Then the wall $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp$ of D_Y is inner. There exists a unique wall $D_X \cap (v_\gamma)^\perp$ of D_X such that the wall $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp$ of D_Y is equal to $\mathcal{P}_Y \cap D_X \cap (v_\gamma)^\perp$. The wall $D_X \cap (v_\gamma)^\perp$ is perpendicular to D_Y , and corresponds to a Hutchinson–Göpel involution g_γ of X (Theorem 5.5 (a)). The defining vector v_γ is perpendicular to the defining vector v_ε of the wall w . There exists exactly one element h_γ in $\text{Aut}(X_{2,2,2}) = \text{Aut}(X, D_X)$ such that $h_\gamma g_\gamma$ commutes with ε . Then the restriction $h_\gamma g_\gamma|_{\mathcal{P}_Y}$ of $h_\gamma g_\gamma$ to \mathcal{P}_Y maps D_Y to the induced chamber adjacent to D_Y across the wall $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp$. The automorphism $h_\gamma g_\gamma$ is of order 2, and the eigenvalues of $h_\gamma g_\gamma|_{\mathcal{P}_Y}$ are $1^6(-1)^4$.

Therefore the group $\text{Cen}(\varepsilon)$ is generated by ε and 10 involutions $h_\gamma g_\gamma$, where γ runs through A_2 .

7.2. An Enriques surface in the conjugacy class of type 40A. We describe the configuration of type 40A. Let \mathcal{C}_+ and \mathcal{C}_- be two copies of the cube $I^3 \subset \mathbb{R}^3$, where $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ is the unit interval. Let σ be $+$ or $-$. A vertex of \mathcal{C}_σ is written as $((a_x, a_y, a_z), \sigma)$, where $a_x, a_y, a_z \in \{0, 1\}$, and a face of \mathcal{C}_σ is written as $(w = a, \sigma)$, where $w \in \{x, y, z\}$ and $a \in \{0, 1\}$. Let V be the set of vertices of \mathcal{C}_\pm , and let F be the set of faces of \mathcal{C}_\pm . Let P be the set of pairs of a face $f_+ = (w = a_+)$ of \mathcal{C}_+ and a face $f_- = (w = a_-)$ of \mathcal{C}_- that are parallel. Each element of P is written as $(w = a_+, w = a_-)$, where $w \in \{x, y, z\}$ and $a_\pm \in \{0, 1\}$. We have $|V| = 16$, $|F| = 12$, $|P| = 12$. We put

$$\Gamma := V \sqcup F \sqcup P,$$

and define a symmetric function $\mu: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ with $\mu(a, a) = -2$ for all $a \in \Gamma$ as follows.

- Suppose that $v_1, v_2 \in V$ with $v_1 \neq v_2$. Then

$$\mu(v_1, v_2) = \begin{cases} 0 & \text{if } v_1 v_2 \text{ is an edge of } \mathcal{C}_+ \text{ or } \mathcal{C}_-, \\ 4 & \text{if } v_1 v_2 \text{ is a diagonal of } \mathcal{C}_+ \text{ or } \mathcal{C}_-, \\ 2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Suppose that $v \in V$ and $f \in F$. Then

$$\mu(v, f) = \begin{cases} 2 & \text{if } v \in f, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Suppose that $v \in V$ and $p = (f_+, f_-) \in P$. Then

$$\mu(v, p) = \begin{cases} 2 & \text{if } v \in f_+ \cup f_-, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Suppose that $f_1, f_2 \in F$ with $f_1 \neq f_2$. Let f_i be $(w_i = a_i, \sigma_i)$, where $w_i \in \{x, y, z\}$, $a_i \in \{0, 1\}$, and $\sigma_i \in \{+, -\}$. Then

$$\mu(f_1, f_2) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma_1 \neq \sigma_2 \text{ and } w_1 \neq w_2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Suppose that $f = (w = a, \sigma) \in F$ and $p = (f'_+, f'_-) \in P$. Let \bar{f} be the unique face of \mathcal{C}_σ that is disjoint from f . Then

$$\mu(f, p) = \begin{cases} 2 & \text{if } \bar{f} = f'_+ \text{ or } \bar{f} = f'_-, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Suppose that $p_1, p_2 \in P$ with $p_1 \neq p_2$. Let $\text{faces}(p_i)$ denote the set of 2 faces contained in p_i , and let $\text{verts}(p_i)$ denote the set of 8 vertices contained in the two faces of p_i .

$$\mu(p_1, p_2) = \begin{cases} 2 & \text{if } \text{verts}(p_1) \cap \text{verts}(p_2) = \emptyset, \\ 0 & \text{if } \text{faces}(p_1) \cap \text{faces}(p_2) \neq \emptyset, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then (Γ, μ) defines the configuration of type 40A.

Remark 7.7. The automorphism group $\text{Aut}(\Gamma, \mu)$ is of order 768, and V, F, P are the orbits of the action of $\text{Aut}(\Gamma, \mu)$ on Γ . Let V_+ and V_- be the set of vertices of \mathcal{C}_+ and of \mathcal{C}_- , respectively. We regard each of V_\pm as a graph with edges being the edges of the cube. The automorphism group $\text{Aut}(V_+)$ of the graph V_+ is of order 48. The stabilizer subgroup $\text{Stab}(V_+)$ of V_+ in $\text{Aut}(\Gamma, \mu)$ is of index 2, the natural homomorphism $\text{Stab}(V_+) \rightarrow \text{Aut}(V_+)$ is surjective, and its kernel is isomorphic to $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ acting on V_- as $((a_x, a_y, a_z), -) \mapsto ((\pm a_x, \pm a_y, \pm a_z), -)$.

Let ε be a Hutchinson–Göpel involution of X . Calculating the ADE -type of the set of (-2) -vectors in ι_Y^\perp , we see that ι_Y is of type 40A. As in the previous section, we assume that ε maps D_X to the induced chamber of \mathcal{P}_X adjacent to D_X across the wall $w := D_X \cap (v_\varepsilon)^\perp$, that is, w is a wall in Theorem 5.5 (a). Then $D_Y := \mathcal{P}_Y \cap D_X$ is an induced chamber of \mathcal{P}_Y , and D_Y is contained in w . Moreover D_Y contains an interior point of w (as a subspace of the hyperplane $(v_\varepsilon)^\perp$).

The group $\text{Cen}(\varepsilon, D_Y)$, which is a subset of $\text{Aut}(X_{2,2,2}) \cup \text{Aut}(X_{2,2,2})\varepsilon$, is isomorphic to $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$, and the group $\text{Cen}(\varepsilon, D_Y)|_{\mathcal{P}_Y}$ is isomorphic to $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. The eigenvalues of a non-trivial element of $\text{Cen}(\varepsilon, D_Y)|_{\mathcal{P}_Y}$ are $1^6(-1)^4$.

Remark 7.8. In [22], it was shown that the action of $\text{Cen}(\varepsilon, D_Y)|_{\mathcal{P}_Y} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ characterizes the Enriques surfaces of Hutchinson–Göpel type.

In the 40 walls of D_Y , 20 are outer and 20 are inner. There exists an indexing $\gamma \mapsto r_\gamma$ of the (-2) -vectors defining the walls of D_Y by the set $\Gamma = V \sqcup F \sqcup P$ above with the following properties. Let V_0 (resp. V_1) be the subset of V consisting of $((a_x, a_y, a_z), \pm)$ such that $a_x + a_y + a_z$ is even (resp. odd).

- Suppose that $\gamma \in V_0$. Then the wall $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp$ is inner. There exists a unique wall $D_X \cap (v_\gamma)^\perp$ of D_X such that $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp = \mathcal{P}_Y \cap D_X \cap (v_\gamma)^\perp$. We have $\langle v_\varepsilon, v_\gamma \rangle = 0$. This wall $D_X \cap (v_\gamma)^\perp$ is perpendicular to D_Y , and corresponds to an involution $g_\gamma \in \text{Aut}(X)$ obtained by the projection from an ordinary node of X_4 or of X_4^\vee (Theorem 5.5 (b)). The involution g_γ commutes with ε , and its restriction $g_\gamma|_{\mathcal{P}_Y}$ to \mathcal{P}_Y maps D_Y to the induced chamber adjacent to D_Y across the wall $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp$. The eigenvalues of $g_\gamma|_{\mathcal{P}_Y}$ are $1^9(-1)^1$. Hence $g_\gamma \in \text{Cen}(\varepsilon)$ induces a numerically reflective involution [21] on Y .
- Suppose that $\gamma \in V_1$. Then the wall $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp$ is outer. There exists a unique line C of $X_{2,2,2}$ such that $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp = \mathcal{P}_Y \cap D_X \cap ([C])^\perp$ and $\pi^*(r) = [C] + [\varepsilon(C)]$. The curve $\varepsilon(C)$ is of degree 5 with respect to h_8 .
- Suppose that $\gamma \in F$. Then $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp$ is outer. There exists a unique pair of lines $C, \varepsilon(C)$ of $X_{2,2,2}$ such that $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp$ is equal to $\mathcal{P}_Y \cap D_X \cap ([C])^\perp$, and we have $\pi^*(r) = [C] + [\varepsilon(C)]$.
- Suppose that $\gamma \in P$. Then $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp$ is inner. There exists a unique wall $D_X \cap (v_\gamma)^\perp$ of D_X such that $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp = \mathcal{P}_Y \cap D_X \cap (v_\gamma)^\perp$. We have $\langle v_\varepsilon, v_\gamma \rangle = 0$. This wall $D_X \cap (v_\gamma)^\perp$ is perpendicular to D_Y , and corresponds to a Hutchinson–Göpel involution g_γ (Theorem 5.5 (a)). The involution g_γ commutes with ε , and $g_\gamma|_{\mathcal{P}_Y}$ maps D_Y to the induced chamber adjacent to D_Y across $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp$. The eigenvalues of $g_\gamma|_{\mathcal{P}_Y}$ are $1^6(-1)^4$.

Therefore $\text{Cen}(\varepsilon)$ is generated by a subgroup of $\text{Aut}(X_{2,2,2})$ of order 2^4 , eight involutions associated with projections from ordinary nodes of X_4 or of X_4^\vee , and 12 Hutchinson–Göpel involutions.

7.3. An Enriques surface in the conjugacy class of type 40C. We describe the configuration of type 40C. We put $F := \{1, 2, 3, 4\}$. Let P be the set $F \times F$ with the projections $\text{pr}_1: P \rightarrow F$ and $\text{pr}_2: P \rightarrow F$, and let B be the set of bijections $f: F \rightarrow F$. We put

$$\Gamma := P \sqcup B.$$

We define a symmetric function $\mu: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ with $\mu(a, a) = -2$ for all $a \in \Gamma$ as follows.

- Suppose that $p, p' \in P$ with $p \neq p'$. Then

$$\mu(p, p') = \begin{cases} 1 & \text{if } \text{pr}_1(p) = \text{pr}_1(p') \text{ or } \text{pr}_2(p) = \text{pr}_2(p'), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Suppose that $p \in P$ and $f \in B$. Then

$$\mu(p, f) = \begin{cases} 2 & \text{if } f(\text{pr}_1(p)) = \text{pr}_2(p), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Suppose that $f, f' \in B$ with $f \neq f'$. Then $\gamma := ff'^{-1}$ is a permutation of F . Let $\tau(\gamma)$ denote the lengths of cycles in the cycle decomposition of $\gamma \in \mathfrak{S}_4$. Then

$$\mu(f, f') = \begin{cases} 2 & \text{if } \tau(\gamma) = (4), \\ 2 & \text{if } \tau(\gamma) = (2, 2), \\ 1 & \text{if } \tau(\gamma) = (3, 1), \\ 0 & \text{if } \tau(\gamma) = (2, 1, 1). \end{cases}$$

Remark 7.9. The group $\text{Aut}(\Gamma, \mu)$ is isomorphic to $(\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_4) \rtimes C_2$, which acts on P in the natural way.

Let ε be an Enriques involution belonging to $\text{Aut}(X_{2,2,2}) = \text{Aut}(X, D_X)$ (see Remark 7.2). Then $D_Y := \mathcal{P}_Y \cap D_X$ is an induced chamber of ι_Y , and since $h_8^\varepsilon = h_8$, the class h_8 is an interior point of D_Y . The group $\text{Cen}(\varepsilon, D_Y)$ is equal to $\text{Aut}(X_{2,2,2})$, and $\text{Cen}(\varepsilon, D_Y)|_{\mathcal{P}_Y}$ is isomorphic to $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$. The eigenvalues of 6 elements of $\text{Cen}(\varepsilon, D_Y)|_{\mathcal{P}_Y}$ are $1^4(-1)^6$, whereas the eigenvalues of 9 elements of $\text{Cen}(\varepsilon, D_Y)|_{\mathcal{P}_Y}$ are $1^6(-1)^4$.

In the 40 walls of D_Y , 16 are outer and 24 are inner. There exists an indexing $\gamma \mapsto r_\gamma$ of the (-2) -vectors defining the walls of D_Y by the set $\Gamma = P \sqcup B$ above with the following properties.

- Suppose that $\gamma \in P$. Then $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp$ is outer. There exists a unique pair of lines $C, \varepsilon(C)$ of $X_{2,2,2}$ such that $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp = \mathcal{P}_Y \cap D_X \cap ([C])^\perp$, and we have $\pi^*(r) = [C] + [\varepsilon(C)]$.
- Suppose that $\gamma \in B$. Then $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp$ is inner. There exists a unique wall $D_X \cap (v_\gamma)^\perp$ of D_X such that $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp = \mathcal{P}_Y \cap D_X \cap (v_\gamma)^\perp$. This wall $D_X \cap (v_\gamma)^\perp$ is perpendicular to D_Y , and corresponds to a Hutchinson–Göpel involution g_γ (Theorem 5.5 (a)). The involution g_γ commutes with ε , and $g_\gamma|_{\mathcal{P}_Y}$ maps D_Y to the induced chamber adjacent to D_Y across $D_Y \cap (r_\gamma)^\perp$. The eigenvalues of $g_\gamma|_{\mathcal{P}_Y}$ are $1^6(-1)^4$.

Therefore the group $\text{Cen}(\varepsilon)$ is generated by $\text{Aut}(X_{2,2,2})$ and 24 Hutchinson–Göpel involutions.

Remark 7.10. In [38], we have determined conjugacy classes of Enriques involutions of singular $K3$ surfaces whose transcendental lattice is of discriminant ≤ 36 .

REFERENCES

- [1] W. Barth and C. Peters. Automorphisms of Enriques surfaces. *Invent. Math.*, 73(3):383–411, 1983.
- [2] Richard Borcherds. Automorphism groups of Lorentzian lattices. *J. Algebra*, 111(1):133–153, 1987.
- [3] Richard E. Borcherds. Coxeter groups, Lorentzian lattices, and $K3$ surfaces. *Internat. Math. Res. Notices*, 1998(19):1011–1031, 1998.
- [4] Simon Brandhorst and Ichiro Shimada. Borcherds’ method for Enriques surfaces, 2019. arXiv:1903.01087.
- [5] J. H. Conway. The automorphism group of the 26-dimensional even unimodular Lorentzian lattice. *J. Algebra*, 80(1):159–163, 1983. Chapter 27 of [8].
- [6] J. H. Conway, R. A. Parker, and N. J. A. Sloane. The covering radius of the Leech lattice. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 380(1779):261–290, 1982. Chapter 23 of [8].
- [7] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. Twenty-three constructions for the Leech lattice. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 381(1781):275–283, 1982. Chapter 24 of [8].
- [8] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. *Sphere packings, lattices and groups*, volume 290 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, third edition, 1999. With additional contributions by E. Bannai, R. E. Borcherds, J. Leech, S. P. Norton, A. M. Odlyzko, R. A. Parker, L. Queen and B. B. Venkov.
- [9] Igor Dolgachev. 15-nodal quartic surfaces. I: quintic del Pezzo surfaces and congruences of lines in \mathbf{P}^3 , 2019. arXiv:1906.12295.
- [10] Igor Dolgachev and Ichiro Shimada. 15-nodal quartic surfaces. Part II: The automorphism group, 2019. arXiv:1908.05390. To appear in *Rend. Circ. Mat. Palermo*.
- [11] Wolfgang Ebeling. *Lattices and codes*. Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, revised edition, 2002. A course partially based on lectures by F. Hirzebruch.
- [12] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.
- [13] J. I. Hutchinson. The Hessian of the cubic surface. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 5(6):282–292, 1899.
- [14] J. I. Hutchinson. The Hessian of the cubic surface. II. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 6(8):328–337, 1900.
- [15] J. I. Hutchinson. On some birational transformations of the Kummer surface into itself. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 7(5):211–217, 1901.
- [16] Jong Hae Keum. Every algebraic Kummer surface is the $K3$ -cover of an Enriques surface. *Nagoya Math. J.*, 118:99–110, 1990.
- [17] Shigeyuki Kondo. Enriques surfaces with finite automorphism groups. *Japan. J. Math. (N.S.)*, 12(2):191–282, 1986.
- [18] Shigeyuki Kondo. The automorphism group of a generic Jacobian Kummer surface. *J. Algebraic Geom.*, 7(3):589–609, 1998.
- [19] Shigeyuki Kondo and Ichiro Shimada. The automorphism group of a supersingular $K3$ surface with Artin invariant 1 in characteristic 3. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (7):1885–1924, 2014.
- [20] S. Mukai and H. Ohashi. The automorphism groups of Enriques surfaces covered by symmetric quartic surfaces. In *Recent advances in algebraic geometry*, volume 417 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 307–320. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2015.
- [21] Shigeru Mukai. Kummer’s quartics and numerically reflective involutions of Enriques surfaces. *J. Math. Soc. Japan*, 64(1):231–246, 2012.
- [22] Shigeru Mukai and Hisanori Ohashi. Enriques surfaces of Hutchinson-Göpel type and Mathieu automorphisms. In *Arithmetic and geometry of $K3$ surfaces and Calabi-Yau threefolds*, volume 67 of *Fields Inst. Commun.*, pages 429–454. Springer, New York, 2013.
- [23] V. V. Nikulin. Integer symmetric bilinear forms and some of their geometric applications. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 43(1):111–177, 238, 1979. English translation: *Math USSR-Izv.* 14 (1979), no. 1, 103–167 (1980).

- [24] V. V. Nikulin. Description of automorphism groups of Enriques surfaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 277(6):1324–1327, 1984. English translation: *Soviet Math. Dokl.* 30 (1984), No.1 282–285.
- [25] Viacheslav V. Nikulin. Weil linear systems on singular $K3$ surfaces. In *Algebraic geometry and analytic geometry (Tokyo, 1990)*, ICM-90 Satell. Conf. Proc., pages 138–164. Springer, Tokyo, 1991.
- [26] Hisanori Ohashi. On the number of Enriques quotients of a $K3$ surface. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 43(1):181–200, 2007.
- [27] Hisanori Ohashi. Enriques surfaces covered by Jacobian Kummer surfaces. *Nagoya Math. J.*, 195:165–186, 2009.
- [28] Norifumi Ojio. Rational curves on a smooth Hermitian surface. *Hiroshima Math. J.*, 49(1):161–173, 2019.
- [29] I. I. Pjateckiĭ-Šapiro and I. R. Šafarevič. Torelli’s theorem for algebraic surfaces of type $K3$. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 35:530–572, 1971. Reprinted in I. R. Shafarevich, *Collected Mathematical Papers*, Springer-Verlag, Berlin, 1989, pp. 516–557.
- [30] B. Saint-Donat. Projective models of $K - 3$ surfaces. *Amer. J. Math.*, 96:602–639, 1974.
- [31] J.-P. Serre. *A course in arithmetic*. Springer-Verlag, New York, 1973. Translated from the French, Graduate Texts in Mathematics, No. 7.
- [32] Ichiro Shimada. Projective models of the supersingular $K3$ surface with Artin invariant 1 in characteristic 5. *J. Algebra*, 403:273–299, 2014.
- [33] Ichiro Shimada. An algorithm to compute automorphism groups of $K3$ surfaces and an application to singular $K3$ surfaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (22):11961–12014, 2015.
- [34] Ichiro Shimada. Automorphisms of supersingular $K3$ surfaces and Salem polynomials. *Exp. Math.*, 25(4):389–398, 2016.
- [35] Ichiro Shimada. The elliptic modular surface of level 4 and its reduction modulo 3, 2018. arXiv:1806.05787. To appear in *Ann. Mat. Pura Appl.*
- [36] Ichiro Shimada. On an Enriques surface associated with a quartic Hessian surface. *Canad. J. Math.*, 71(1):213–246, 2019.
- [37] Ichiro Shimada and Tetsuji Shioda. On a smooth quartic surface containing 56 lines which is isomorphic as a $K3$ surface to the Fermat quartic. *Manuscripta Math.*, 153(1-2):279–297, 2017.
- [38] Ichiro Shimada and Davide Cesare Veniani. Enriques involutions on singular $K3$ surfaces of small discriminants, 2019. arXiv:1902.00229. To appear in *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*
- [39] Tetsuji Shioda. On the Mordell-Weil lattices. *Comment. Math. Univ. St. Paul.*, 39(2):211–240, 1990.
- [40] B. B. Venkov. Even unimodular 24-dimensional lattices. Chapter 18 of [8].
- [41] È. B. Vinberg. Some arithmetical discrete groups in Lobachevskiĭ spaces. In *Discrete subgroups of Lie groups and applications to moduli (Internat. Colloq., Bombay, 1973)*, pages 323–348. Oxford Univ. Press, Bombay, 1975.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, HIROSHIMA UNIVERSITY, 1-3-1 KAGAMIYAMA, HIGASHI-HIROSHIMA, 739-8526 JAPAN
Email address: ichiro-shimada@hiroshima-u.ac.jp

ULRICH MODULE と正標数の不変量

吉田健一

1. 導入

本研究は、渡辺敬一氏（日本大学文理学部/明治大学）、中嶋祐介氏（東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構）及び Ilya Smirnov 氏（ストックホルム大学）との共同研究の成果をベースにした内容である。

この講演を通して、特に断らない限り、 A を可換ネーター局所環で、素数標数 $p > 0$ の完全体を含むと仮定する。 A のただ1つの極大イデアルを \mathfrak{m} とし、その剰余体を $k = A/\mathfrak{m}$ とおく。

A から自分自身への環準同型 $F: A \rightarrow A (a \mapsto a^p)$ を **Frobenius 射** と呼ぶ。自然数 e と A -加群 M に対して、 F^e を通して M を A -加群とみなしたものを $F_*^e(M)$ と書き、 M の **Frobenius 押し出し (pushforward)** と呼ぶ。特に、

- (1) 任意の自然数 $e \geq 1$ に対して、 $F^e: A \rightarrow F_*^e(A)$ は A -線型射とみなすことができる。
- (2) 任意の自然数 $e \geq 1$ に対して、 $F_*^e(A)$ は有限生成 A -加群 (i.e. A は F -有限) である。
- (3) A は優秀 (excellent) で、Gorenstein 局所環の準同型像である。特に、標準加群 ω_A が存在する。

正標数の可換環論において、 $F_*^e(A) \cong A^{1/p^e}$ の A -加群としての構造を知ることは重要な課題であるが、その間を定量的に捉えて、次の2つの不変量を調べることが多くの研究者によってなされてきた ([AE08, AE13, BE04, ES05, GM10, HM93, Han03, HL02, HY02, Mon83, Sin05, Tuc12, Von12, WY00, WY01, WY04, WY05, Yao05a, Yao05b] など)。

定義 1.1 (Hilbert-Kunz 重複度, F-記号). A -加群 M に対して、 $\mu_A(M)$ により M の極小生成系の個数、 $\text{frank}_A(M)$ を M に含まれる自由加群 A の直和因子の個数を表すものとする。このとき、

$$(1) e_{\text{HK}}(A) = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\mu_A(F_*^q(A))}{p^{ed}}$$

を A の **Hilbert-Kunz 重複度 (Hilbert-Kunz multiplicity)** と言う。

$$(2) s(A) = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\text{frank}_A(F_*^q(A))}{p^{ed}}$$
 を A の **F-記号 (F-signature)** と言う。

本研究は、科研費基盤研究 (C)19K034030 の支援を受けている。

Hilbert-Kunz 重複度は, Kunz [Ku69] の研究に端を発し, [Mon83] により定義と存在証明が与えられた概念である. 後に, [HH90] が密着閉包 (tight closure) の判定法として重複度との類似性に注目して, 環論的研究が始まった.

一方, F -記号は [SmVa97] に現れているが, 公式には, [HL02] により定義された. 一方, [WY04] は Hilbert-Kunz 重複度の差の「最小値」として, 極小相対的 Hilbert-Kunz 重複度 (minimal relative Hilbert-Kunz multiplicity) の概念を導入した. 後に, [Tuc12] が F -記号の存在証明を与え, これらの概念の関係を明確にした. F -記号が「1組の」イデアルの Hilbert-Kunz 重複度の差として表現できるかどうかという問は, 未解決問題「弱 F 正則 = 強 F 正則」の肯定的な解決を導く重要な問であることが知られている.

本講演で用いられる可換環論の基本的な概念を思い出しておこう.

定義 1.2. ネーター局所環 A の完備化 \widehat{A} が $k[[x_1, \dots, x_d]]$ に同型であるとき, A は正則局所環 (regular local ring) であると言う.

一般に, $\mu_A(\mathfrak{m}) \geq \dim A$ であるが, A が正則局所環であることと, 等号が成立することとは同値である. さらに, 正標数の場合の著しい結果として, 次の Kunz の定理が知られている.

定理 1.3 ([Ku69]). A が正則局所環であることと, 任意の $e \geq 1$ (または, ある $e \geq 1$) に対して $F_*^e(A)$ が自由 A -加群であることとは同値である.

Kunz の定理は Hilbert-Kunz 関数 $\text{HK}(e) = \ell_A(A/\mathfrak{m}^{[q]})$ を用いて, 述べ直すことができる.

定理 1.4 ([Ku69]). 任意の $q = p^e$ に対して, $\mathfrak{m}^{[q]} = (a^q \mid a \in \mathfrak{m})$ とおく.

- (1) $\ell_A(A/\mathfrak{m}^{[q]}) \geq q^d$ である. 特に, $e_{\text{HK}}(A) \geq 1$ が成り立つ.
- (2) A が正則局所環であることと, $\ell_A(A/\mathfrak{m}^{[q]}) = q^d$ ($\exists q = p^e, e \geq 1$) が成り立つこととは同値である. また, このとき, 任意の $e \geq 1$ に対して, $\ell_A(A/\mathfrak{m}^{[q]}) = q^d$ が成り立つ.

系 1.5. A が正則局所環ならば, $e_{\text{HK}}(A) = 1$ である.

以下, この節の残りでは, (A, \mathfrak{m}) を任意標数のネーター局所環 ($d = \dim A$) とし, M を有限生成 A -加群とする.

定義 1.6. $e(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_A(A/\mathfrak{m}^{n+1})}{n^d} \times d!$ を A の重複度という.

(注) $e(A)$ は非負整数である.

事実 1.7 (永田). A が正則局所環であることと, A が清純 (unmixed) で, $e(A) = 1$ であることとは同値である. ただし, $\text{Ass}(\widehat{A}) = \text{Assh}(\widehat{A})$ が成り立つとき, A は清純であるという.

定義 1.8. $\text{depth } M = \inf\{i \in \mathbb{Z} \mid \text{Ext}_A^i(k, M) = 0\}$ を M の深さ (depth) という.

一般に, $\text{depth } M \leq \dim M$ である.

定義 1.9. $\text{depth } M = \dim M = \dim A$ が成り立つとき, M は **MCM** A -加群であると言う. 特に, A 自身が **MCM** A -加群のとき, A を **Cohen-Macaulay** 局所環という.

定義 1.10. A を **Cohen-Macaulay** 局所環とし, ω_A をその標準加群とする. $\text{type}(A) = \mu_A(\omega_A)$ を A の **CM 型** という. $\text{type}(A) = 1$ の **Cohen-Macaulay** 局所環を **Gorenstein** 局所環という.

一般に, A が **Cohen-Macaulay** 局所環のとき, $\mu_A(\mathfrak{m}) \leq e(A) + \dim A - 1$ が成り立つ (**Sally** の不等式). 等号が成立するとき, A は **極小重複度** を持つと言う. さらに, このとき, A が正則でなければ, $\mu_A(\omega_A) = e(A) - 1$ が成り立つ.

2. LOWER BOUND OF HILBERT-KUNZ MULTIPLICITIES

以下, この節では, (A, \mathfrak{m}) をネーター局所環 ($d = \dim A \geq 1$) とし, I を \mathfrak{m} -準素イデアルとする.

定義 2.1. $e(I) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_A(A/I^{n+1})}{n^d} \times d!$ を I の **重複度** という. (注意) $e(A) = e(\mathfrak{m})$ である.

さらに, A を標数 $p > 0$ とし, $q = p^e$ に対して, $I^{[q]} = (a^q \mid a \in I)$ とおく.

定義 2.2 ([Mon83]). $e_{\text{HK}}(I) = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\ell_A(A/I^{[q]})}{q^d}$ を I の **Hilbert-Kunz 重複度** という.

次の不等式について, 高次元の場合に精密化を与えたい.

命題 2.3 (cf. [Hun96B, Han03]). 次の不等式が成り立つ:

$$\frac{e(I)}{d!} \leq e_{\text{HK}}(I) \leq e(I).$$

さらに, $d > 2$ ならば, $\frac{e(I)}{d!} < e_{\text{HK}}(I)$ が成り立つ.

命題 2.4. I がパラメーターイデアルならば, $e_{\text{HK}}(I) = e(I)$ である.

次の定理は正標数の正則局所環の特徴づけを与える (**Kunz** の定理, 永田の定理参照).

定理 2.5 ([WY00]). A が正則局所環であることと, A が清純で, $e_{\text{HK}}(A) = 1$ であることは同値である.

定理 2.6 ([WY01]). (A, \mathfrak{m}) を 2次元の **Cohen-Macaulay** 局所環とし, $e = e(A)$ とおく. I を \mathfrak{m} -準素イデアルとするとき,

$$(1) \ e_{\text{HK}}(A) \geq \frac{e+1}{2} \text{ が成り立つ. 同様に, } e_{\text{HK}}(I) \geq \frac{e(I)+1}{2}.$$

$$(2) \ e_{\text{HK}}(A) = \frac{e+1}{2} \text{ が成り立つことと, } \text{gr}_{\mathfrak{m}}(A) \cong K[X, Y]^{(e)} \text{ とは同値である. ここで, } \text{gr}_{\mathfrak{m}}(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1} \text{ は } \mathfrak{m} \text{ に付随する次数付き環を表す.}$$

特に, A が正則でなければ, $e_{\text{HK}}(A) \geq \frac{3}{2}$ が成立する.

次の定理はこの節の主結果である.

定理 2.7. (A, \mathfrak{m}) を **Cohen-Macaulay** 局所環とし, $d = \dim A \geq 3$ と仮定する.

このとき, 任意の \mathfrak{m} -準素イデアル I に対して,

$$e_{\text{HK}}(I) > \frac{e(I) + d}{d!}$$

が成り立つ.

以下, この定理を証明しよう.

- 任意の実数 $s \geq 0$ に対して, $\{(x_1, \dots, x_d) \in [0, 1]^d \mid \sum_{i=1}^d x_i \leq s\}$ の体積は次の式で与えられる ([CL91, (16), p.233]):

$$v_s = \sum_{n=0}^{\lfloor s \rfloor} (-1)^n \frac{(s-n)^d}{(d-n)! n!}.$$

- イデアル J の **密着閉包 (tight closure)** J^* は次で与えられる (cf. [HH90]):

$$z \in J^* \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists c \in A \setminus \bigcup_{P \in \text{Min}(A)} P \text{ s.t. } cz^q \in J^{[q]} \text{ (} q = p^e, e \gg 0 \text{)}$$

- \mathfrak{m} -準素イデアル I に含まれるパラメータイデアル J が十分大きな整数 n に対して $I^{n+1} = JI^n$ をみたすとき, J を I の **極小還元 (minimal reduction)** と呼ぶ.

補題 2.8. A が *Cohen-Macaulay* ならば, $e(I) = e(J) = \ell_A(A/J)$ が成り立つ.

命題 2.9 ([AE13] (cf. [WY05])). A は清純かつ \hat{A} は被約 (*reduced*) と仮定する. J を $I = I^*$ の極小還元とすると, $r \geq \mu_A(I/J^*)$ とすれば, 任意の $s \geq 0$ に対して,

$$e_{\text{HK}}(I) \geq e(I)(v_s - r \cdot v_{s-1})$$

が成り立つ.

例えば, $\lfloor s \rfloor = 1$ ならば,

$$v_s = \frac{s^d}{d!} - \frac{(s-1)^d}{(d-1)!}, \quad v_{s-1} = \frac{(s-1)^d}{d!}.$$

- $e_{\text{HK}}(I) = e_{\text{HK}}(I^*)$ 及び $e(I) = e(I^*)$ なので, I を I^* と置き換えることにより, $I = I^*$ としてよい. また, $e(I) = 1$ ならば, $I = \mathfrak{m}$, A は正則となるのが容易にわかるので, $e = e(I) \geq 2$ としてよい.

Case 1. $I^2 \not\subset J$ (特に, $\mathfrak{m}I \not\subset J$) の場合.

$\mu_A(I/J^*) \leq \mu_A(I/J) = \ell_A(I/J + \mathfrak{m}I) \leq \ell_A(I/J) - 1 \leq e(I) - 2 = e - 2$ だから,
 $r = e - 2$ かつ $s = 1 + \frac{1}{e}$ として, 上の命題を適用できる. このとき, $[s] = 1$ なので,

$$d! \cdot e^d(v_s - r \cdot v_{s-1}) = (e+1)^d - d - (e-2) > e^{d-1}(e+d).$$

ゆえに, $e_{\text{HK}}(I) \geq e(v_s - r \cdot v_{s-1}) > \frac{e+d}{d!}$.

Case 2. $I^2 \subset J$ の場合.

次の命題を利用する.

命題 2.10 (cf. [AE08]). A は *Cohen-Macaulay* と仮定する. I の極小還元 J で $I^2 \subset J$ なるものがあれば,

$$e_{\text{HK}}(I) \geq \frac{e(I)}{2}$$

が成り立つ.

$d \geq 3$ で $e(I) \geq 2$ ならば, 容易に $e_{\text{HK}}(I) \geq \frac{e(I)}{2} > \frac{e(I)+d}{d!}$ を得る. (証明終)

$d = 3$ の場合, より sharp な不等式を得る.

定理 2.11. (A, \mathfrak{m}) が 3 次元 *Cohen-Macaulay* 被約な局所環ならば,

$$e_{\text{HK}}(A) \geq \frac{e(A)}{6} + 1.$$

さらに, A/\mathfrak{m} が代数的閉体で, p が奇素数のとき, 等号が成立するのは, 次の場合に限る: $\hat{A} \cong K[[X, Y, Z, W]]/(XW - YZ)$. このとき,

$$e_{\text{HK}}(A) = \frac{4}{3}.$$

事実 2.12 ([WY05]). $d = 3$, A/\mathfrak{m} が代数的閉体で, p が奇素数のとき,

$$e_{\text{HK}}(A) = \frac{4}{3} \iff \text{gr}_{\mathfrak{m}}(A) \cong K[X, Y, Z, W]/(XW - YZ).$$

以下では, (A, \mathfrak{m}) を標数 p のネーター局所環 ($d = \dim A$) とし, A/\mathfrak{m} は代数的閉体と仮定する.

問 2.13. A が非正則局所環のとき, $e_{\text{HK}}(A)$ の下限は?

(1) $\dim A = 0, 1$ のとき, $e_{\text{HK}}(A) \geq 2$.

(2) $\dim A = 2$ のとき, $e_{\text{HK}}(A) \geq \frac{3}{2}$.

(3) $\dim A = 3$ のとき, $e_{\text{HK}}(A) \geq \frac{4}{3}$.

(4) $\dim A = 4$ のとき, $e_{\text{HK}}(A) \geq \frac{29}{24}$.

実際, $e_{\text{HK}}(A_{p,4}) = \frac{29p^2 + 15}{24p^2 + 12}$.

予想 2.14 ([WY05]). (A, \mathfrak{m}) を清純な完備な非正則局所環とし, $p = \text{char} A \geq 3$, $d = \dim A \geq 1$ と仮定する. このとき,

(1) $e_{\text{HK}}(A) \geq 1 + \frac{c_d}{d!}$.

(2) $e_{\text{HK}}(A) < 1 + \frac{c_d + 1}{d!} \iff A \cong A_{p,d} \quad (d \geq 4)$

ここで,

$$\sec x + \tan x = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{c_d}{d!} x^d \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2} \right),$$

及び, $A_{p,d} = k[[x_0, x_1, \dots, x_d]] / (x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_d^2)$.

渡辺・吉田予想は次の場合には肯定的に解かれている:

- (1) $\dim A = 2$ の場合 [WY01]
- (2) $\dim A = 3, 4$ の場合 [WY05]
- (3) $\dim A = 5, 6$ の場合 [AE13]
- (4) A が完全交叉の場合 [ES05]

定理 2.15 ([GM10]).

$$\lim_{p \rightarrow \infty} e_{\text{HK}}(A_{p,d}) = 1 + \frac{c_d}{d!}.$$

さらに, 標数 2 の場合の値を考慮して, 次の予想を新たに提出する.

予想 2.16. (A, \mathfrak{m}) を清純な完備非正則局所環で, $p = \text{char} A \geq 2$, $d = \dim A \geq 1$ とする. さらに, A は $A_{p,d}$ に同型でないと仮定すると,

(1) $d = 2m - 1$ のとき, $e_{\text{HK}}(A) \geq \frac{2^m}{2^m - 1}$.

(2) $d = 2m$ のとき, $e_{\text{HK}}(A) \geq \frac{2^m + 1}{2^m}$.

$d = 1$ のとき, 右辺 = 2, $d = 2$ のとき, 右辺 = $\frac{3}{2}$.

$d = 3$ のとき, 右辺 = $\frac{4}{3}$, $d = 4$ のとき, 右辺 = $\frac{5}{4} = \frac{30}{24} > \frac{29}{24}$.

$d = 5$ のとき, 右辺 = $\frac{8}{7} > \frac{17}{15} = 1 + \frac{c_5}{5!}$.

3. MAXIMAL F -SIGNATURE

以下, A を正標数の F 有限な Cohen-Macaulay 局所整域とする.

定義 3.1 ([HH94]). 任意の $c \neq 0$ に対して, $q = p^e$, $e \geq 1$ が存在して, $A \hookrightarrow A^{1/q}$ ($1 \mapsto c^{1/q}$) が A -線型射として分裂するとき, A は強 F 正則 (**strongly F -regular**) であるという.

- 強 F 正則環は 整閉整域である.
- \mathbb{Q} -Gorenstein な強 F 正則性は, 対数的端末 (log-terminal) 特異点に対応する概念である.
- Toric 特異点, 商特異点などは強 F 正則性を持つ.

定義 3.2 ([HL02]). 各 $q = p^e$ に対して,

$$F_*^e(A) = A^{1/q} \cong A^{a_q} \oplus M_q$$

となる $a_q \in \mathbb{Z}$ と $\text{frank}_A M_q = 0$ の MCM A -加群 M_q がとれる. このとき,

$$s(A) = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{a_q}{q^d}$$

を A の F -記号 (**F -signature**) という.

強 F 正則性は, F -記号 $s(A)$ のふるまいにより特徴づけられる.

定理 3.3 ([AE05]). (1) $0 \leq s(A) \leq 1$.

(2) A が強 F -正則であることと, $s(A) > 0$ であることは同値である.

(3) A が正則であることと, $s(A) = 1$ であることは同値である.

F 有理性を特徴づける概念として, Dual F -signature という概念が定義されている (三内 [San15]).

例 3.4 ([WY05]). $A = k[[x_1, \dots, x_d]]^G$, ただし, G は有限群で, $(|G|, p) = 1$ をみたすとき, A は商特異点であるという. このとき, $s(A) = \frac{1}{|G|}$ が成り立つ.

2次元の F -正則局所環は本質的に商特異点であるので, A が正則でなければ,

$$s(A) = \frac{1}{|G|} \leq \frac{1}{2}$$

である. このような考察から, 次の問いを考えたい.

問 3.5. A が d -次元の非正則な強 F 正則局所環のとき, $s(A)$ の上限は何か?

この問いを考える前に, Ulrich 加群の概念を思い出しておこう.

定義 3.6. M を MCM A -加群とするとき, $\mu_A(M) \leq e_A(M) = e(A) \cdot \text{rank}_A M$ が成立する. さらに, 等号が成立するとき, M は **Ulrich A -加群** であるという.

一般の Cohen-Macaulay 局所環上に Ulrich A -加群が存在するかどうか (Ulrich の予想) は未解決問題である. 下の命題からもわかるように, 特定の MCM 加群が Ulrich 加群になるのは環に強い制限を与える.

命題 3.7 (cf. [BHU87]). (A, \mathfrak{m}) を *Cohen-Macaulay* 局所整域とする.

- (1) 次の 3 条件は同値である:
 - (a) A は *Ulrich* A -加群である.
 - (b) ω_A は *Ulrich* A -加群である.
 - (c) A は正則局所環である.
- (2) $k = A/\mathfrak{m}$ の d th シジジー加群 $\text{Syz}_A^d(A/\mathfrak{m})$ が *Ulrich* A -加群になるための必要十分条件は, A が極小重複度を持つことである.

また, 重複度が 2 の場合には, $s(A)$ と $e_{\text{HK}}(A)$ が強い関係にある.

命題 3.8. A を重複度 2 の *Cohen-Macaulay* 局所整域とする. このとき,

- (1) A は超曲面である.
- (2) A は *Gorenstein*, かつ, 極小重複度を持つ.
- (3) $s(A) = 2 - e_{\text{HK}}(A)$.
- (4) $F_*^e(A)$ は A と *Ulrich* A -加群のいくつかの直和で表される.

この講演では, 次の間についても考えたい.

問 3.9. (1) $F_*^e(A)$ が単純な構造をもつとき, $s(A)$ と $e_{\text{HK}}(A)$ の関係を求めよ.

(2) $s(A)$ の上限 (上界) を求めよ.

予想 3.10. A を正則でない d 次元の *Cohen-Macaulay* 局所整域とするとき,

- (1) 「 $s(A)$ が上限を取る」 \iff 「 $e_{\text{HK}}(A)$ が下限を取る」
- (2) m を自然数として,

$$d = 2m - 1 \implies s(A) \leq \frac{2^m - 2}{2^m - 1},$$

$$d = 2m \implies s(A) \leq \frac{2^m - 1}{2^m}.$$

次の命題は, *Gorenstein* でない *Cohen-Macaulay* 局所整域の F -記号の上限を与える.

命題 3.11. A は完全体を含む (F 有限な) *Cohen-Macaulay* 局所整域とする. もし, A が *Gorenstein* でないならば, 次の不等式を得る.

- (1) $s(A) \leq 1/2$.
- (2) $e_{\text{HK}}(A) \leq s(A)(\text{type}(A) + 1) + 2 \cdot e(A) \{1/2 - s(A)\}$.

(証明). 各 $e \geq 1$ に対して, $F_*^e A = A^{\oplus a_e} \oplus \omega_A^{\oplus b_e} \oplus M_e$ と書ける. このとき,

$$F_*^e \omega_A \cong \text{Hom}_A(F_*^e(A), \omega_A) \cong \omega_A^{\oplus a_e} \oplus A^{\oplus b_e} \oplus \text{Hom}_A(M_e, \omega_A)$$

ただし, $\text{frank } M_e = \text{frank } \text{Hom}_A(M_e, \omega_A) = 0$ と書ける.

$$\begin{aligned}
\ell_A(A/\mathfrak{m}^{[q]}) &= \mu_A(F_*^e(A)) = a_e + b_e \cdot \text{type}(A) + \mu_A(M_e) \\
&\leq a_e + b_e \cdot \text{type}(A) + e_A(M_e) \\
&= a_e + b_e \cdot \text{type}(A) + e(A) \cdot (q^d - a_e - b_e).
\end{aligned}$$

さらに, [San15] の考察によれば, $s(A) = \lim_{e \rightarrow \infty} \frac{a_e}{p^{ed}} = \lim_{e \rightarrow \infty} \frac{b_e}{p^{ed}}$ だから,

両辺を q^d で割って, limit を取れば求める不等式を得る. また, $\text{rank}_A M_e \geq 0$ だから, $1 - 2 \cdot s(A) \geq 0$ である. \square

定義 3.12. A を F -有限な完備局所環とする. ある有限個の加群 $\{M_0, M_1, \dots, M_n\}$ が存在して, 任意の $e \geq 1$ に対して,

$$F_*^e(A) \cong M_0^{c_0,e} \oplus M_1^{c_1,e} \oplus \dots \oplus M_n^{c_n,e}$$

が成立するとき, A は **FFRT (finite F -representation type)** であるという. 特に, M_i がある分解に実際に現れるとき, $\{M_0, M_1, \dots, M_n\}$ は A の FFRT system であるという.

例えば, Cohen-Macaulay 有限表現型は FFRT である. また, 任意のアフィン toric 特異点も FFRT である.

さて, 先の上限の等号成立を $F_*^e(A)$ の言葉で特徴づけよう.

定理 3.13. A を Gorenstein でない Cohen-Macaulay 整閉整域とする. このとき, 次は同値である:

- (1) $s(A) = 1/2$.
- (2) A は強 F 正則で, $\{A, \omega_A\}$ を FFRT system に持つ FFRT である.
すなわち, $s(A) > 0$ で, 任意の $e \geq 1$ に対して, $F_*^e(A)$ は A と ω_A のみの有限直和である.

また, このとき, $e_{\text{HK}}(A) = \frac{\text{type}(A) + 1}{2}$ が成り立つ.

前の結果の類似として, $F_*^e(A)$ が「3種類」の加群を system に持つ場合も特徴づけできる. $s(A) = 1/2$ もこの場合に含まれる.

定理 3.14. A を Gorenstein でない Cohen-Macaulay 整閉整域とする.

このとき, 次は同値である:

- (1) $e_{\text{HK}}(A) = s(A)(\text{type}(A) + 1) + 2 \cdot e(A) \left\{ \frac{1}{2} - s(A) \right\}$ が成り立つ.
- (2) A は強 F 正則で, 任意の $e \geq 1$ に対して, $F_*^e(A)$ は A , ω_A , 及び直既約 Ulrich A -加群の有限直和で書ける.

例 3.15. $A = k[[x^3, x^2y, xy^2, y^3]] = k[[x, y]]^{(3)}$ は上の条件をみたす. 実際, $\text{type}(A) = 2$, $s(A) = 1/3$, $e(A) = 3$, 及び $e_{\text{HK}}(A) = 2$ である.

A が非正則で, 極小重複度を持つとき, $\text{type}(A) = e(A) - 1$ である.

系 3.16. A が極小重複度を持つ *Cohen-Macaulay* 局所環で, $e(A) \geq 3$ ならば,

$$\frac{e(A)}{2} \leq e_{\text{HK}}(A) \leq (1 - s(A))e(A).$$

特に, $s(A) = 1/2$ のとき, $e_{\text{HK}}(A) = \frac{e(A)}{2}$.

例 3.17. $A = K[[X, Y, Z]]^{(2)}$ を $K[X, Y, Z]$ の 2 次の Veronese 部分環の完備化とすると, これは $\text{type}(A) = 3$ の極小重複度をもつ CM 局所環である. また, $e_{\text{HK}}(A) = \frac{e(A)}{2} = 2$ である.

$A = k[\sigma^\vee \cap M]$ を (アフィン) toric 環とする. さらに, A の class group $Cl(A)$ に トーション元で, その位数が p と互いに素なるものが存在すると仮定する. このとき, $s(A) = 1/2$ はさらなる特徴づけをもつ.

定理 3.18. A を上記のような toric 環とし, *Gorenstein* でないと仮定する. このとき, 次は同値である:

- (1) $s(A) = 1/2$.
- (2) ある A -加群 $M \neq A$ が存在して, A は $\{A, M\}$ を *system* に持つ *FFRT* である.
- (3) $A \cong k[[x_1, \dots, x_d]]^{(2)}$.
- (4) A は $\{A, \omega_A\}$ を *FFRT system* にもつ.

A を \mathbb{Q} -*Gorenstein* 局所整閉整域 とし, ω_A を標準加群とする. このとき, $\omega_A^{(r)}$ が単項イデアルになるような正の整数の最小値を $\text{index}(A)$ と定める.

$$B = A \oplus \omega_A \oplus \omega_A^{(2)} \cdots \oplus \omega_A^{(r-1)}$$

に適当な環構造を入れたものを A の 標準被覆 (**canonical cover**) と呼ぶ.

事実 3.19 (cf. [Von12]). A を強 F 正則な \mathbb{Q} -*Gorenstein* 局所整域とし, *Gorenstein* でないと仮定する. $r = \text{index}(A)$ s.t. $(r, p) = 1$ とし, B をその標準被覆とすると, $A \hookrightarrow B$ は *etale in codimension 1* であり,

$$s(A) = \frac{s(B)}{r} = \frac{s(B)}{[Q(B): Q(A)]}$$

が成り立つ.

定理 3.20. A を F 有限な \mathbb{Q} -*Gorenstein* 局所整域とし, $r = \text{index}(A)$ とおくとき, $(r, p) = 1$ と仮定する. このとき, 次は同値である:

- (1) $s(A) = 1/2$.
- (2) A の標準被覆 B は正則で, $r = 2$ である.

3次元の場合は, Matlis duality などを用いて, より精密な評価が得られる.

定理 3.21. A を 3次元の Gorenstein 局所整域とし, $e \geq 3$ と仮定すると,

$$s(A) \leq \frac{e(A)}{24}$$

が成り立つ.

これはベストポッシブルである.

例 3.22. $A = K[[X, Y, Z, W]]/(X^3 + Y^3 + Z^3 + W^3)$ とすると, $s(A) = \frac{1}{8} = \frac{e(A)}{24}$.

例 3.23. A を $R = K[X, Y, Z, W]/(XW - YZ)$ の 2 次の Veronese 部分環の自然な完備化とすれば, A は 3次元 Gorenstein 局所環で,

$$e(A) = \mu(\mathfrak{m}) - d + 2 = 9 - 3 + 2 = 8$$

だから,

$$s(A) = \frac{s(R)}{2} = \frac{1}{3} = \frac{e(A)}{24}.$$

注意 3.24. A が 3次元 Gorenstein F 正則ならば, $e(A) = 2$ の超曲面であるか, $\mu(\mathfrak{m}) = e(A) + 3 - 2 = e(A) + 1$ をみたま.

Gorenstein case も次のような不等式が成り立つ.

命題 3.25. A を完備な Gorenstein 局所整域とする. このとき,

- (1) $e_{\text{HK}}(A) \leq s(A) + (1 - s(A))e(A)$.
- (2) $s(A) > 0$ と仮定する. このとき, (1) で等号が成立 $\iff F_*^e(A)$ は A と Ulrich A 加群の直和で書ける.

$e(A) = 2$ の場合もこの条件をみたま.

命題 3.26. A が 3次元 CM 局所環ならば, $s(A) < \frac{5}{6}$ (予想は $s(A) \leq \frac{2}{3}$ である).

Proof. A は F 正則, Gorenstein としてよい. このとき, $e_{\text{HK}}(A) \geq \frac{e(A)}{6} + 1$.

また, $e_{\text{HK}}(A) \leq s(A) + e(A)(1 - s(A))$.

合わせると,

$$\frac{e(A)}{6} + 1 \leq e_{\text{HK}}(A) \leq s(A) + e(A)(1 - s(A)).$$

ゆえに,

$$e(A) \left(s(A) - \frac{5}{6} \right) \leq s(A) - 1 \leq 0$$

となり, $s(A) < \frac{5}{6}$ を得る. □

問 3.27 (Schwede). $s(A) = \frac{2}{3}$ ならば, terminal 特異点であるか?

REFERENCES

- [AE05] Ian M. Aberbach and Florian Enescu, *The structure of F -pure rings*, Math. Z. **250** (2005), 791–806.
- [AE08] Ian M. Aberbach and Florian Enescu, *Lower bounds for Hilbert-Kunz multiplicities in local rings of fixed dimension*, Michigan Math. J. **57** (2008), 1–16.
- [AE13] Ian M. Aberbach and Florian Enescu, *New estimates of Hilbert-Kunz multiplicities for local rings of fixed dimension*, Nagoya Math. J. **212** (2013), 59–85.
- [AL03] Ian M. Aberbach and Graham Leuschke, *The F -signature and strongly F -regularity*, Math. Res. Lett. **10** (2003), 51–56.
- [BE04] Manuel Blickle and Florian Enescu, *On rings with small Hilbert-Kunz multiplicity*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 2505–2509.
- [BHU87] Joseph P. Brennan, Jürgen Herzog, and Bernd Ulrich, *Maximally generated Cohen-Macaulay modules*, Math. Scand. **61** (1987), 181–203.
- [CL91] D. Chakerian and D. Logothetti, *Cube slices, pictorial triangles, and probability*, Math. Mag. **64** (1991), 219–241. MR 1131009.
- [ES05] Florian Enescu and Kazuma Shimomoto, *On the upper semi-continuity of the Hilbert-Kunz multiplicity*, J. Algebra **285** (2005), 222–237.
- [Gab04] O. Gabber, *Notes on some structures*, Geometric Aspects of Dwork Theory. Vol. II, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG (2004), 711–734.
- [GM10] Ira M. Gessel and Paul Monsky, *The limit as $p \rightarrow \infty$ of the Hilbert-Kunz multiplicity of $\sum_{i=1}^d x_i^{d_i}$* , arXiv:1007.2004.
- [HM93] C. Han and Paul Monsky, *Some surprising Hilbert-Kunz functions*, Math. Z. **214**, 119–135.
- [Han03] Douglas Hanes, *Notes on the Hilbert-Kunz function*, J. Algebra **265** (2003), 619–630.
- [HH90] Melvin Hochster and Craig Huneke, *Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 31–116.
- [HH94] Melvin Hochster and Craig Huneke, *F -regularity, test elements, and smooth base change*, Trans. Amer. Math. Soc. **346** (1994), 1–62.
- [Hun96B] Tight Closure and Its Applications, CBMS Regional Conf. Ser. Math. **88**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [HL02] Craig Huneke and Graham Leuschke, *Two theorems about maximal Cohen-Macaulay modules*, Math. Ann. **324** (2002), no. 2, 391–404.
- [HY02] Craig Huneke and Yongyei Yao, *Unmixed local rings with minimal Hilbert-Kunz multiplicity are regular*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 661–665.
- [Ku69] Ernst Kunz, *Characterizations of regular local rings of characteristic p* , Amer. J. Math. **41** (1969), 772–784.
- [MPST19] Linquan Ma, Thomas Polstra, Karl Schwede, Kevin Tucker, *F -signature under birational morphisms*, Forum Math. Sigma **7** (2019), e11, 20 pp.
- [Mon83] Paul Monsky, *The Hilbert-Kunz function*, Math. Ann. **263** (1983), 43–49.
- [PS] Thomas Polstra, Ilya Smirnov, *Equimultiplicity theory of strongly F -regular rings*, Mich. Math. J. to appear.
- [RST18] Javier Carvajal-Rojas, Karl Schwede, Kevin Tucker, *Fundamental groups of F -regular singularities via F -signature*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **51** (2018), no. 4, 993–1016.
- [San15] Akiyoshi Sannai, *On Dual F -Signature*, Int. Math. Res. Not. IMRN, Vol. 2015, no.1, pp. 197–211.
- [Sin05] Anurag K. Singh, *The F -signature of an affine semigroup ring*, J. Pure Appl. Algebra **196** (2005), no. 2-3, 313–321.
- [SmVa97] Karen E. Smith, Michel Van den Bergh, *Simplicity of Rings of Differential Operators in Prime Characteristic*, Proc. London Math. Soc. (3) **75** (1997), 32–62.
- [Tuc12] Kevin Tucker, *F -signature exists*, Invent. Math. **190** (2012), 743–765.

- [Von12] Michael R. Von Korff, *The F -signature of Toric Varieties*, the dissertation in the University of Michigan, 2012.
- [WY00] Kei-ichi Watanabe and Ken-ichi Yoshida, *Hilbert-Kunz multiplicity and an inequality between multiplicity and colength*, J. Algebra **230**, (2000), 295–317.
- [WY01] Kei-ichi Watanabe and Ken-ichi Yoshida, *Hilbert-Kunz multiplicity of two-dimensional local rings*, Nagoya Math. J. **162** (2001), 87–110.
- [WY04] Kei-ichi Watanabe and Ken-ichi Yoshida, *Minimal relative Hilbert-Kunz multiplicity*, Illinois J. Math. J. **48** (2004), 273–294.
- [WY05] Kei-ichi Watanabe and Ken-ichi Yoshida, *Hilbert-Kunz multiplicity of three-dimensional local rings*, Nagoya Math. J. **177** (2005), 47–75.
- [Yao05a] Yongwei Yao, *Modules with Finite F -Representation Type*, J. London Math. Soc. **72** (2005), no. 2, 53–72.
- [Yao05b] Yongwei Yao, *Observations on the F -signature of local rings of characteristic p* , J. Algebra **299** (2006) no. 1, 198–218.

吉田健一 (KEN-ICHI YOSHIDA) 〒 156-8550 東京都世田谷区桜上水 3-25-40 日本大学文理学部数学科

K. YOSHIDA: DEPARTMENT OF MATHEMATICS, COLLEGE OF HUMANITIES AND SCIENCES, NIHON UNIVERSITY, 3-25-40 SAKURAJOSUI, SETAGAYA-KU, TOKYO 156-8550, JAPAN
E-mail address: `yoshida@math.chs.nihon-u.ac.jp`

自明拡大環の岩永-Gorenstein 性と三角圏

山浦 浩太

1 はじめに

環の表現論の目標の 1 つは環上の加群や準同型写像を分類し、加群圏を始めとする様々な圏の構造を明らかにすることである。圏を調べるときに重要となる道具が圏同値を扱う理論である。代表的なものとして、加群圏の間の圏同値を扱った森田理論 [1, 第 5 章] が挙げられる。2 つの環 Λ と Γ に対して $\text{Mod } \Lambda \simeq \text{Mod } \Gamma$ となるとき、 Λ と Γ は森田同値であるという。このとき Λ と Γ は非常に多くの性質を共有し、特に加群に関する議論は両者の間で全く等価になる。従って Λ 加群に関する様々な問題を Γ 加群に関する問題に書き換えて考察することが可能となる。

環 Λ と森田同値になる環は、有限生成射影 Λ 加群の準同型環として特徴付けられている。これを用いると、例えば体 K 上の n 次全行列環 $M_n(K)$ は K と森田同値となることが直ちにわかる。つまり圏同値 $\text{Mod } M_n(K) \simeq \text{Mod } K$ が存在する。これにより $M_n(K)$ 加群とその準同型写像の分類は K 上のベクトル空間と線形写像の分類に帰着される。

環の表現論において力を発揮している圏同値をもう 1 つ挙げる。 K を代数的閉体とし、 Λ を K 上の有限次元多元環とする。このとき Λ はあるクイバー Q の道多元環 KQ の剰余環 KQ/I と森田同値となる (Gabriel の定理)。 KQ/I 加群の圏は Q の K 線形表現のなす圏 $\text{Rep}_K(Q, I)$ と圏同値となるため、 $\text{Mod } \Lambda \simeq \text{Mod } KQ/I \simeq \text{Rep}_K(Q, I)$ が成り立つ。この圏同値から K 上の線形代数を利用した Λ 加群の種々の計算・研究が可能となる ([3] 参照)。

他にも加群圏の部分圏の間の圏同値や、加群の導来圏の間の圏同値を扱う傾斜理論が 1980 年頃に生み出されてから大きく発展を遂げ、現在の環の表現論における主要な道具となっている ([3, 2, 13, 27])。また、傾斜理論は代数的三角圏と環上の加群の導来圏との間の圏同値を扱う理論 [18] に拡張され、適用範囲を拡大しており、代数幾何学やミラー対称性等の研究と環の表現論を結びつける大事な役割を果たしている。

このように環の表現論では重要な圏同値が数多く存在する。本報告書では 1980 年後半に Happel によって発見された圏同値に焦点をあてる。それは異なる三角圏である導来圏と安定圏を繋げる興味深い圏同値であり、両者の間に見られる類似性や関係性を俯瞰で理解することを可能とする ([13])。本稿では Happel の圏同値と応用例を紹介した後、源氏との共同研究 [23] で得られた Happel の圏同値の拡張に関する最近の研究結果を概説する。

記号など。 本稿で多元環というときは、体 K 上の有限次元多元環を意味するものとする。また環上の加群はすべて右加群を考えているものとする。

- Λ を環とする。このとき $\text{Mod } \Lambda$ を Λ 加群の圏とする。また $\text{mod } \Lambda$ を有限生成 Λ 加群の圏、 $\text{proj } \Lambda$ を有限生成射影 Λ 加群の圏、 $\text{Inj } \Lambda$ を入射 Λ 加群の圏とする。
- Λ を環とする。 Λ 加群 M の射影次元を $\text{pd } M_\Lambda$ 、入射次元を $\text{id } M_\Lambda$ で表す。また Λ の大域次元を $\text{gl.dim } \Lambda$ で表す。
- 環 Λ の反転環を Λ^{op} で表す。
- K 双対を $D := \text{Hom}_K(-, K)$ と表す。
- 加法圏 \mathcal{A} に対して、 \mathcal{A} 上の有界複体のなすホモトピー圏を $\text{K}^b(\mathcal{A})$ と表す。アーベル圏 \mathcal{B} に対して、 \mathcal{B} の導来圏を $\text{D}(\mathcal{B})$ 、有界導来圏を $\text{D}^b(\mathcal{B})$ と表す。ホモトピー圏や導来圏については [19, 32] などを参照されたい。
- 本稿では次数付き環が登場する。次数付き環というときは正次数付き環を意味するものとする。

次数付き環 $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ に対して、次数付き A 加群の圏 $\text{Mod}^{\mathbb{Z}} A$ を次で定める。

– 対象は次数付き A 加群 $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ 。

– 次数付き A 加群 M, N に対して, M から N への射の集合は次で定める.

$$\mathrm{Hom}_A^{\mathbb{Z}}(M, N) = \{f \in \mathrm{Hom}_A(M, N) \mid \forall i \in \mathbb{Z}, f(M_i) \subset N_i\}$$

通常の加群圏と同様に, $\mathrm{mod}^{\mathbb{Z}} A$, $\mathrm{proj}^{\mathbb{Z}} A$, $\mathrm{Inj}^{\mathbb{Z}} A$ を定める. 次数付き Artin 多元環の表現論の基本事項について, 例えば [11, 12] を参照されたい.

- A を次数付き環とし, k を整数とする. 次数付き A 加群 $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ に対して, 次数付き A 加群 $M(k)$ を次で定める.

$$M(k) := M, \quad M(k)_i = M_{i+k} \quad (i \in \mathbb{Z})$$

これにより次数 shift 関手 $(k) : \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}} A \rightarrow \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}} A$ が定まる.

- \mathcal{A} を加法圏とする. \mathcal{A} の任意の対象 M に対して, $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M_i)$ が局所環である \mathcal{A} の対象 M_1, \dots, M_n が存在し

$$M \simeq M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$$

となるとき, \mathcal{A} を Krull-Schmidt 圏という. $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M_i)$ は局所環なので M_i は直既約対象であり, 上記の直和分解は M の唯一つの直既約分解となる. Krull-Schmidt 圏 \mathcal{A} に対して, その直既約対象の同型類全体の集合を $\mathrm{ind}(\mathcal{A})$ と表す.

例えば Λ を有限次元多元環とすると $\mathrm{mod} \Lambda$ や $\mathrm{D}^b(\mathrm{mod} \Lambda)$ は Krull-Schmidt 圏であり, $\mathrm{ind}(\mathrm{mod} \Lambda)$ は直既約 Λ 加群の同型類全体の集合を意味する.

- \mathcal{D} を三角圏とする. \mathcal{D} の直和因子で閉じた三角部分圏を \mathcal{D} の thick 部分圏という. $M \in \mathcal{D}$ に対して, M を含む最小の thick 部分圏を thick M と表す.

2 Happel による三角圏同値

環の表現論で扱われる主要な三角圏として導来圏と安定圏が挙げられる.

アーベル圏 \mathcal{A} の導来圏 $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ は Grothendieck と Verdier によって導入され, 三角圏の構造をもつことが示されている. この導来圏の中では \mathcal{A} のホモロジー代数を快適に行うことができる. そのため環上の加群圏の導来圏 $\mathrm{D}(\mathrm{Mod} \Lambda)$ は環のホモロジー代数的研究において強力な道具となっている.

一方で 1980 年後半, Happel は Frobenius 圏の安定圏に自然な三角圏構造が入ることを示した. Frobenius 圏の典型的な例が自己入射多元環 A の加群圏 $\mathrm{mod} A$ であり, その安定圏 $\underline{\mathrm{mod}} A$ は三角圏となる. これにより自己入射多元環を三角圏の一般論を用いて研究することが可能となった.

同時期に Happel は導来圏と安定圏の間に深い関係があることを示した. 多元環 Λ に対して, 自明拡大環をとる操作により次数付き自己入射多元環 $T(\Lambda)$ が構成される. このとき次数付き $T(\Lambda)$ 加群の安定圏 $\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)$ は三角圏となる. Happel は導来圏から安定圏への三角関手 $\mathcal{F} : \mathrm{D}^b(\mathrm{mod} \Lambda) \rightarrow \underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)$ を具体的に構成し, ある条件下では \mathcal{F} が三角圏同値になることを証明した.

本章では, この三角圏同値を与えた Happel の定理を紹介し, 関連する話題をほんの少しお話する. 2.1 節で自明拡大環の定義を復習し, $T(\Lambda)$ を定義する. そして Λ と $T(\Lambda)$ の間の興味深い表現論的対応を紹介する. 2.2 節では Happel の定理を述べ, 2.1 節で紹介する Λ と $T(\Lambda)$ の表現論的対応が Happel の圏同値から俯瞰的に観察できることを説明する. 2.3 節では Happel の圏同値の拡張に向けて, 少しの準備を行う.

2.1 自明拡大環

本節では自明拡大環の定義を復習し, その表現論に関する定理を紹介する.

定義 2.1. 環 Λ と Λ -両側加群 C に対して, 加法群 $A = \Lambda \oplus C$ を考える. A の元 $(\lambda_1, c_1), (\lambda_2, c_2)$ の積を

$$(\lambda_1, c_1) \cdot (\lambda_2, c_2) := (\lambda_1 \lambda_2, \lambda_1 c_2 + c_1 \lambda_2)$$

と定める. これにより A は環となる. この環 A を Λ の C による自明拡大環という. 明らかに Λ は A の部分環である. また C は A の両側イデアルであり $\Lambda \simeq A/C$ であるから, Λ は A の剰余環とみなすことができる.

自明拡大環を取る操作は自己入射多元環を豊富に構成する方法を提供する.

命題 2.1. Λ を多元環とする. Λ の $D\Lambda$ による自明拡大環 $T(\Lambda) := \Lambda \oplus D\Lambda$ は自己入射多元環である.

この構成を利用した自己入射多元環の研究が数多く行われている ([29]). その中で Λ と $T(\Lambda)$ の表現論的対応を調べるといった研究がなされている ([13, Chapter III, V], [30, X. 7]). 例えば次の定理が知られている.

定理 2.2. [31, Proposition 1.3, Theorem 1.4] Λ を大域次元 1 以下の多元環とする.

(1) 射影的でない直既約 $T(\Lambda)$ 加群の同型類の完全系は次で与えられる.

$$\text{ind}(\text{mod } \Lambda) \cup \{ \Omega_A^{-1}(M) \mid M \in \text{ind}(\text{mod } \Lambda) - \text{ind}(\text{inj } \Lambda) \}$$

(2) (1) より次の式が成立する.

$$\# \text{ind}(\text{mod } T(\Lambda)) = 2 \times \# \text{ind}(\text{mod } \Lambda)$$

特に

$$\Lambda \text{ が有限表現型} \Leftrightarrow T(\Lambda) \text{ が有限表現型}$$

である.

定理 2.2 (1) を例で確認してみよう.

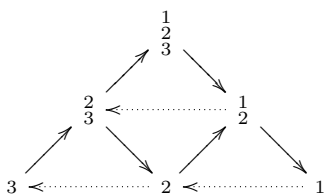
例 2.1. Λ を次のクイバー Q により定まる道多元環 $\Lambda = KQ$ とする.

$$Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

Q の各頂点に対応して 3 つの単純 Λ 加群が存在し, それぞれ次の Q の K 線形表現で表される.

$$(K \rightarrow 0 \rightarrow 0), \quad (0 \rightarrow K \rightarrow 0), \quad (0 \rightarrow 0 \rightarrow K)$$

これらを順に 1, 2, 3 と表し, 一般の Λ 加群を Loewy 列によって表す. このとき $\text{mod } \Lambda$ の Auslander-Reiten クイバーは次のようになる.

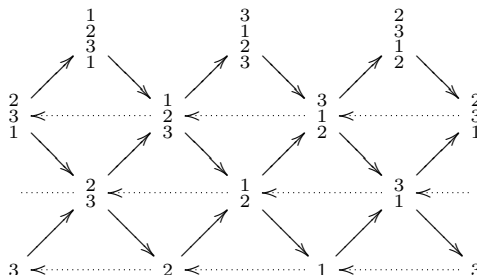


次に $T(\Lambda)$ は次のクイバーと関係式で定まる多元環となる.

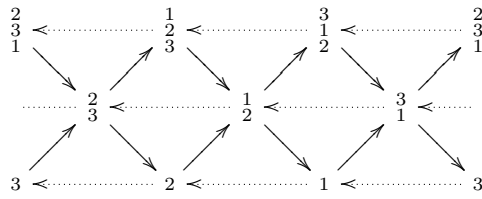
$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \quad \alpha\beta\gamma = \beta\gamma\alpha = \gamma\alpha\beta = 0$$

γ (curved arrow from 3 to 1)

$\text{mod } A$ の Auslander-Reiten クイバーは次である.

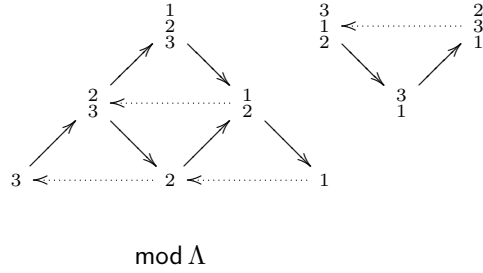


直既約射影 A 加群は一番上の行にある加群であり, それを除外すると



となる. これを見ると定理 2.2 (1) の通りになっていることを観察できる.

$$\{\Omega_A^{-1}(M) \mid M \in \text{mod } \Lambda - \text{inj } \Lambda\}$$



定理 2.2 (1) は $T(\Lambda)$ 加群の標準表現を詳細に調べることにより証明されている. 標準表現とは, 与えられた $T(\Lambda)$ 加群の構造を Λ 加群の準同型写像を用いて表示する方法のことである. 他方, 定理 2.2 (1) は Happel による圏同値の帰結として理解できる. このことを次節で説明する.

2.2 Happel の圏同値

本節では Happel の圏同値を述べる. それを用いて定理 2.2 (1) の説明を与える.

定義 2.2. Λ を環とし, C を Λ -両側加群とする. 自明拡大環 $A = \Lambda \oplus C$ について

$$A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i, \quad A_i = \begin{cases} \Lambda & (i = 0) \\ C & (i = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とする. このとき A は次数付き環となる.

Λ は A の次数付き剰余環であるから, Λ 加群は次数付き A 加群とみなすことができる. これにより忠実充満な関手

$$\text{mod } \Lambda \hookrightarrow \text{mod}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)$$

が定まる.

定義 2.3. A を多元環とする. このとき $\text{mod } A$ の安定圏 $\underline{\text{mod}} A$ を次で定める.

- 対象は有限生成 A 加群とする.
- 次数付き A 加群 M, N に対して

$$\underline{\text{Hom}}_A(M, N) = \text{Hom}_A(M, N) / \{ \text{射影加群を通過する射} \}$$

と定める.

安定圏 $\underline{\text{mod}} A$ は Krull-Schmidt 圏であり

$$\text{ind}(\underline{\text{mod}} A) = \text{ind}(\text{mod } A) - \text{ind}(\text{proj } A) \tag{2.1}$$

が成り立つ.

今 A が自己入射多元環であるとする. このとき $\text{mod } A$ は Frobenius 圏となり, 安定圏 $\underline{\text{mod}} A$ には三角圏構造が入る [13, Chapter I.2.]. 三角圏 $\underline{\text{mod}} A$ の shift 関手 $[1]$ は cosyzygy 関手 Ω_A^{-1} である.

$$[1] = \Omega_A^{-1} : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A$$

A が次数付き多元環のとき, 上と同様に $\text{mod}^{\mathbb{Z}} A$ の安定圏 $\underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} A$ が定義される. また A が次数付き自己入射多元環のとき, $\underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} A$ には三角圏の構造が入る.

特に多元環 Λ に対して $T(\Lambda)$ は次数付き自己入射多元環であり, 安定圏 $\underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)$ は三角圏となる. このとき元の多元環 Λ の導来圏 $D^b(\text{mod } \Lambda)$ と $\underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)$ との関係が次の定理によって与えられた.

定理 2.3 (Happel [13]). Λ を多元環とする. 以下の主張が成立する.

(1) ある忠実充満な三角関手 $\mathcal{F} : D^b(\text{mod } \Lambda) \rightarrow \underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)$ で, 次の図式を可換にするものが存在する.

$$\begin{array}{ccc} \text{mod } \Lambda \subset & \longrightarrow & \text{mod}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda) \\ \text{inc.} \downarrow & & \downarrow \text{nat.} \\ D^b(\text{mod } \Lambda) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda) \end{array}$$

また次の可換図式が存在する.

$$\begin{array}{ccc} D^b(\text{mod } \Lambda) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda) \\ -\frac{1}{\otimes_{\Lambda}} D\Lambda[1] \downarrow & & \downarrow (1) \\ D^b(\text{mod } \Lambda) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda) \end{array}$$

(2) \mathcal{F} が圏同値となる必要十分条件は $\text{gl.dim } \Lambda < \infty$ である.

注意 2.1. 三角関手 \mathcal{F} の構成は具体的に与えられているが, やや複雑であるため, ここでは省略する. 後に別の形で \mathcal{F} を与える (定義 3.1).

定理 2.3 を用いて定理 2.2 (1) を説明する. Λ を大域次元 1 以下の多元環とし, $G = -\frac{\mathbb{L}}{\otimes_{\Lambda}} D\Lambda[1]$ とおく. (2.1) より定理 2.2 (1) の主張は

$$\text{ind}(\underline{\text{mod}} T(\Lambda)) = \text{ind}(\text{mod } \Lambda) \cup \{ \Omega_A^{-1}(M) \mid M \in \text{ind}(\text{mod } \Lambda) - \text{ind}(\text{inj } \Lambda) \}$$

と言い換えることができる. この式を導いてみよう.

まず [31] の中で, すべての $T(\Lambda)$ 加群は次数付き $T(\Lambda)$ 加群であることが示されている. 従って $\underline{\text{mod}} T(\Lambda) \simeq \underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)/(1)$ である. これと定理 2.3 より次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} D^b(\text{mod } \Lambda) & \xrightarrow[\simeq]{\mathcal{F}} & \underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda) \\ \text{nat.} \downarrow & & \downarrow \text{forget} \\ D^b(\text{mod } \Lambda)/G & \xrightarrow[\simeq]{} & \underline{\text{mod}} T(\Lambda) \end{array}$$

よって $\text{ind}(\underline{\text{mod}} T(\Lambda))$ を調べることは $\text{ind}(D^b(\text{mod } \Lambda)/G)$ を調べることに置き換わる. $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の構造は良く調べられており, $D^b(\text{mod } \Lambda)$ は $\text{mod } \Lambda$ の shift の“張り合わせ”になっていることが知られている ([13, Chapter I] 参照). 特に

$$\text{ind}(D^b(\text{mod } \Lambda)) = \{ M[n] \mid M \in \text{ind}(\text{mod } \Lambda), n \in \mathbb{Z} \}$$

であり, この G 軌道の代表系は

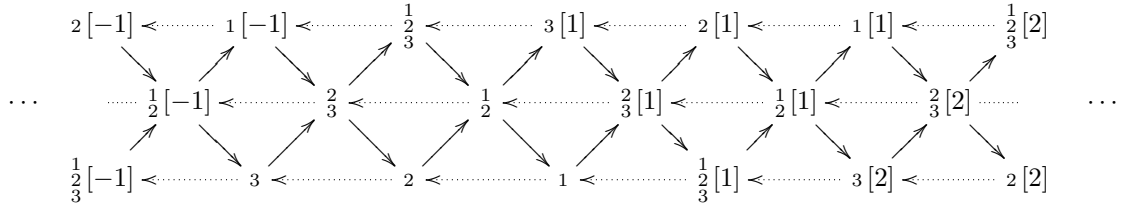
$$\text{ind}(D^b(\text{mod } \Lambda)/G) = \text{ind}(\text{mod } \Lambda) \cup \{ M[1] \mid M \in \text{ind}(\text{mod } \Lambda) - \text{ind}(\text{inj } \Lambda) \}$$

により与えられる. この式を \mathcal{F} を通して $\text{mod } T(\Lambda)$ の情報に書き換えると

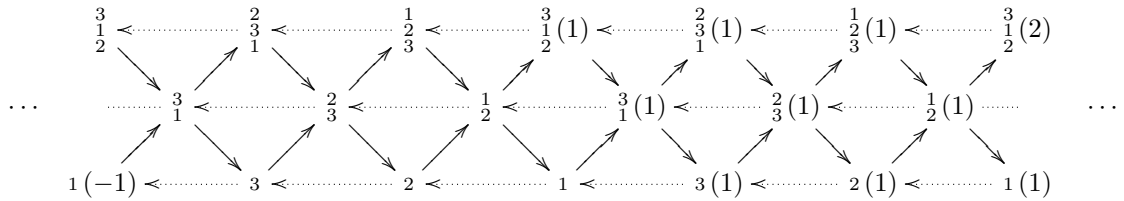
$$\text{ind}(\text{mod } T(\Lambda)) = \text{ind}(\text{mod}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)/(1)) = \text{ind}(\text{mod } \Lambda) \cup \{\Omega_A^{-1}(M) \mid M \in \text{ind}(\text{mod } \Lambda) - \text{ind}(\text{inj } \Lambda)\}$$

であることがわかる. ここで $\text{mod}^{\mathbb{Z}} A$ の shift 関手は $[1] = \Omega_A^{-1}$ であることを用いた. 以上で定理 2.2 (1) が得られた.

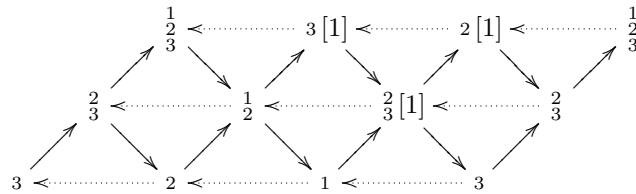
例 2.2. 例 2.1 を Happel の圏同値から見てみよう. $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の Auslander-Reiten クイバーは次のようになる.



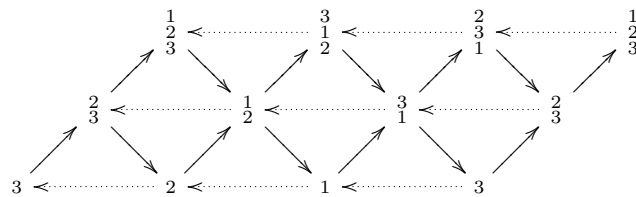
$T(\Lambda)$ の次数付けはクイバーと関係式による表示において $\deg \alpha = \deg \alpha\beta = 0, \deg \gamma = 1$ として定まる次数付けと一致する. $\text{mod}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)$ の Auslander-Reiten クイバーは次のようになる.



$D^b(\text{mod } \Lambda)$ と $\text{mod}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)$ の Auslander-Reiten クイバーは一致しており, 定理 2.3 の圏同値 $D^b(\text{mod } \Lambda) \simeq \text{mod}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)$ が視覚的に確認できる. $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の Auslander-Reiten クイバーの G 軌道の代表系をとると次のようになる.



これは $\text{mod } A \simeq \text{mod}^{\mathbb{Z}} A/(1)$ の Auslander-Reiten クイバーと一致する.



以上より, Happel の圏同値を通して例 2.1 と同じ観察が得られた.

このように定理 2.3 の三角圏同値や既知である導来圏の構造を用いて, 定理 2.2 を見通し良く理解することができる. 安定圏と導来圏の比較研究を行い, 定理 2.3 と類似の圏同値を構成することができれば, 環の表現論において有用な道具となる. この理由から定理 2.3 の拡張となる理論の構築が重要な課題であると思われる. 次節では岩永-Gorenstein 環と Cohen-Macaulay 加群の定義を復習し, 定理 2.3 の拡張に関する問題を述べる.

2.3 岩永-Gorenstein 環, Cohen-Macaulay 加群

この節では自己入射多元環の一般化である岩永-Gorenstein 環の定義と, 岩永-Gorenstein 環の表現論において主要な研究対象である Cohen-Macaulay 加群の定義を述べる.

定義 2.4. [16] 両側 Noether 環 A が

$$\text{id } A_A < \infty \quad \text{かつ} \quad \text{id } {}_A A < \infty$$

を満たすとき, A を岩永-Gorenstein 環という.

例 2.3. (1) 自己入射多元環 A は $\text{id } A_A = \text{id } {}_A A = 0$ の岩永-Gorenstein 多元環である.

(2) 可換 Gorenstein 環は岩永-Gorenstein 環である.

(3) 大域次元が有限である両側 Noether 環は岩永-Gorenstein 環である.

例 2.3 (1) (2) からわかるように, 岩永-Gorenstein 環は自己入射多元環と可換 Gorenstein 環の共通の一般化である. 次に Cohen-Macaulay 加群の定義を述べる.

定義 2.5. A を岩永-Gorenstein 環とする. $M \in \text{mod } A$ が $\text{Ext}_A^i(M, A) = 0$ ($i > 0$) を満たすとき, M を Cohen-Macaulay 加群という. Cohen-Macaulay 加群のなす $\text{mod } A$ の充満部分圏を

$$\text{CM } A := \{M \in \text{mod } A \mid \forall i > 0, \text{Ext}_A^i(M, A) = 0\}$$

と表す. また A が次数付き岩永-Gorenstein 環のとき, 次数付き Cohen-Macaulay 加群のなす $\text{mod}^{\mathbb{Z}} A$ の充満部分圏を

$$\text{CM}^{\mathbb{Z}} A := \{M \in \text{mod}^{\mathbb{Z}} A \mid \forall i > 0, \text{Ext}_A^i(M, A) = 0\}$$

と表す. これらの圏は Frobenius 圏であり, 安定圏 $\underline{\text{CM}} A$, $\underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ には三角圏の構造が入る [13, Chapter I.2.].

注意 2.2. A が自己入射多元環のとき, $\text{CM } A = \text{mod } A$ である.

安定圏 $\underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ は次に定義する安定導来圏と三角圏同値になる.

定義 2.6. [7, 25] A を次数付き両側 Noether 環とする. $D^b(\text{mod}^{\mathbb{Z}} A)$ は $K^b(\text{proj}^{\mathbb{Z}} A)$ を thick 部分圏として含む. $D^b(\text{mod}^{\mathbb{Z}} A)$ の $K^b(\text{proj}^{\mathbb{Z}} A)$ による Verdier 商

$$\text{Sing}^{\mathbb{Z}}(A) := D^b(\text{mod}^{\mathbb{Z}} A) / K^b(\text{proj}^{\mathbb{Z}} A)$$

を安定導来圏 (または特異導来圏) という. 自然な商関手を

$$\mathcal{Q} : D^b(\text{mod}^{\mathbb{Z}} A) \rightarrow \text{Sing}^{\mathbb{Z}}(A)$$

と表す.

定理 2.4. [7, 14, 28] A を次数付き岩永-Gorenstein 環とする. このとき次の図式を可換にする自然な三角圏同値 β が存在する.

$$\begin{array}{ccccc} \text{CM}^{\mathbb{Z}} A & \xrightarrow{\text{inc.}} & \text{mod}^{\mathbb{Z}} A & \xrightarrow{\text{inc.}} & D^b(\text{mod}^{\mathbb{Z}} A) \\ \text{nat.} \downarrow & & & & \downarrow \mathcal{Q} \\ \underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A & \xrightarrow[\beta]{\simeq} & & & \text{Sing}^{\mathbb{Z}}(A) \end{array}$$

定理 2.3 の拡張について次の問題が挙げられる.

問題 2.1. 定理 2.3 は多元環 Λ に対して, Λ -両側加群 $D\Lambda$ による自明拡大環を考えている. この $D\Lambda$ を別の Λ -両側加群に取り替えたとき, 類似の主張が成り立つだろうか. すなわち自明拡大環 $A = \Lambda \oplus C$ が岩永-Gorenstein 多元環となるように, Λ -両側加群 C を取る. このとき適当な仮定の下で, $D^b(\text{mod } \Lambda)$ と $\underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ の間に圏同値が成り立つなどの関係があるだろうか.

問題 2.2. 定理 2.3 は多元環 Λ からスタートして, 次数付き自己入射多元環 $T(\Lambda)$ を構成し, 三角圏同値 $D^b(\text{mod } \Lambda) \simeq \underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ を示している. これと順序を逆にして次数付き岩永-Gorenstein 環 A からスタートし, 三角圏同値

$$\underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A \simeq D^b(\text{mod } \Gamma)$$

が成り立つような環 Γ を構成することができるだろうか. この問いに対して答えが YES である (または NO である) 次数付き岩永-Gorenstein 環のクラスとして, どんなものがあるだろうか.

次章では問題 2.1 に関する研究結果を説明する. 問題 2.2 は環の表現論に限らず代数幾何学やミラー対称性などの多様な動機から研究が行われており, 非常に多くの結果が報告されている. これについては [17] を参照されたい.

3 岩永-Gorenstein 性と三角圏

本章では源氏との一連の共同研究 [21, 22, 23] によって得られた, 定理 2.3 の拡張について概説する. この章では断らない限り Λ を有限次元多元環とし, C を有限次元 Λ -両側加群とする. また Λ の C による自明拡大環を $A = \Lambda \oplus C$ で表す. A も有限次元多元環である.

A が岩永-Gorenstein 多元環のとき, 導来圏 $D^b(\text{mod } \Lambda)$ から安定圏 $\underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ への三角関手 \mathcal{H} が常に構成できる.

定義 3.1. Λ は A の次数付き剰余環であり, 忠実充満な三角関手

$$D^b(\text{mod } \Lambda) \hookrightarrow D^b(\text{mod }^{\mathbb{Z}} A)$$

が存在した. これと Q の合成により三角関手

$$\varpi : D^b(\text{mod } \Lambda) \hookrightarrow D^b(\text{mod }^{\mathbb{Z}} A) \xrightarrow{Q} \text{Sing}^{\mathbb{Z}}(A)$$

を得る. A が岩永-Gorenstein 環のとき, 定理 2.4 により三角関手

$$\mathcal{H} : D^b(\text{mod } \Lambda) \hookrightarrow D^b(\text{mod }^{\mathbb{Z}} A) \xrightarrow{Q} \text{Sing}^{\mathbb{Z}}(A) \xrightarrow{\simeq} \underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$$

が得られる. ここで $A = T(\Lambda)$ のとき \mathcal{H} は定理 2.3 の \mathcal{F} と同型であるので, \mathcal{H} は \mathcal{F} の一般化と捉えられる. そこで \mathcal{H} を Happel 関手と呼ぶことにする.

\mathcal{H} を通して $D^b(\text{mod } \Lambda)$ と $\underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ の関係を明らかにすることが本章の目標である. そのために以下の節では次の問題を順に考える.

問題 3.1.

(A) そもそも $\text{id } A_A < \infty$ かつ $\text{id } {}_A A < \infty$ となるための必要十分条件は何だろうか.

(B) A が岩永-Gorenstein 多元環であるとき, 適当な仮定の下で \mathcal{H} が圏同値になるだろうか. あるいは $\underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ と $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の三角部分圏や Verdier 商との圏同値を \mathcal{H} が誘導しないだろうか.

後でわかることだが, 問題 3.1 (A) で与えた解答が問題 3.1 (B) の解決に深く関係してくる.

記号. 整数 $n \geq 0$ に対して, 次の記号を定める.

$$\mathbb{R}\text{Hom}_{\Lambda}(C^n, -) := \begin{cases} \mathbb{R}\text{Hom}_{\Lambda}(C, -) \circ \cdots \circ \mathbb{R}\text{Hom}_{\Lambda}(C, -) & (n\text{-times}) \quad (n \geq 1) \\ \mathbb{R}\text{Hom}_{\Lambda}(\Lambda, -) & (n = 0) \end{cases}$$

$$C^n := \begin{cases} C \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} \cdots \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C & (n\text{-times}) \quad (n \geq 1) \\ \Lambda & (n = 0) \end{cases}$$

3.1 問題 (A)

本節に限り Λ を一般の環とし, C を一般の Λ -両側加群とする. また $A = \Lambda \oplus C$ は自明拡大環とする. この設定の下, 問題 3.1 (A) について述べる. 最初に $\text{id } A_A < \infty$ となる C に名前を付けておく.

定義 3.2. $\text{id } A_A < \infty$ であるとき, C を右 asid 加群^{*1}という. 同様に $\text{id } {}_A A < \infty$ であるとき, C を左 asid 加群という. また C が右 asid 加群かつ左 asid 加群であるとき, C は asid 加群であるという.

注意 3.1. A の次数付き構造を用いると, $\text{id } A_A < \infty$ ならば $\text{id } C_\Lambda < \infty$ であることが証明できる. 従って $\text{id } C_\Lambda$ の有限性は C が右 asid 加群であるための必要条件である.

asid 加群の例を挙げる.

例 3.1.

- (1) Λ が岩永-Gorenstein 環のとき, Λ は asid 加群である.
- (2) (R, \mathfrak{m}) を可換局所環とする. このとき $E(R/\mathfrak{m})$ は asid 加群である [26, (5) Proposition].
- (3) R を可換 Cohen-Macaulay 局所環とする. このとき標準加群は asid 加群である [10, 26].
- (4) Λ の大域次元が有限であるとする. このとき次が成り立つ [9, Theorem 4.14].

$$\text{gl.dim } A < \infty \iff \exists n \geq 0; \quad C^n = 0.$$

特にこのとき C は asid 加群である.

上で紹介した例 (1) (2) (3) は次の命題に含まれる.

定理 3.1. [9, Theorem 4.34] Λ を環とし, C を次の条件を満たす Λ -両側加群とする.

(FGR1) $\text{Ext}_\Lambda^i(C, C) = 0$ ($i > 0$).

(FGR2) Λ 加群の準同型 $\tilde{\lambda}_r : \Lambda \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(C, C)$, $\tilde{\lambda}_r(a)(c) = ac$ は同型である.

このとき $\text{id } A_A = \text{id } C_\Lambda$ が成り立つ. 特に $\text{id } C_\Lambda < \infty$ のとき, C は右 asid 加群である.

証明の概略. (FGR1), (FGR2) を仮定すると, C の入射分解から A の入射分解を構成できる. C の入射分解

$$0 \rightarrow C_\Lambda \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \cdots \rightarrow E^n \rightarrow \cdots$$

に対して $\text{Hom}_\Lambda(A, -)$ を適用すると, A 加群の複体

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(A, C)_A \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(A, E^0) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(A, E^1) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(A, E^n) \rightarrow \cdots \quad (3.1)$$

が得られる. ここで各 $\text{Hom}_\Lambda(A, E^i)$ は入射 A 加群となる. (FGR1) から (3.1) は完全列であることが従う. また (FGR2) から A 加群の準同型写像

$$\tilde{\varphi}_r : A_A \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(A, C)_A, \quad \tilde{\varphi}_r(a)(c) = ac$$

が同型であることがわかる. よって (3.1) は A の入射分解である. この構成から $\text{id } A_A = \text{id } C_\Lambda$ である. □

以下では Λ と C に何も仮定せず, $\text{id } A_A$ の有限性を調べる. $\text{id } A_A$ の有限性を調べるときは導来圏で考えると都合が良い. A を $\text{D}(\text{Mod } A)$ の対象とみなすと

$$\text{id } A_A < \infty \iff A \in \mathcal{K}^b(\text{Inj } A)$$

である.

^{*1} asid は attaching self-injective dimension の略である

考察の指針を見つけるために定理 3.1 証明中の C_Λ の入射分解から A_A の入射分解を構成する部分を見直し、それを導来圏の言葉に翻訳してみる。まず関手 $\text{Hom}_\Lambda(A, -) : \text{Mod } \Lambda \rightarrow \text{Mod } A$ の制限として $\text{Hom}_\Lambda(A, -) : \text{Inj } \Lambda \rightarrow \text{Inj } A$ を得る。よって導来関手 $\mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(A, -) : \text{D}(\text{Mod } \Lambda) \rightarrow \text{D}(\text{Mod } A)$ の制限として $\text{Hom}_\Lambda(A, -) : \mathbb{K}^{-\cdot, \text{b}}(\text{Inj } \Lambda) \rightarrow \mathbb{K}^{-\cdot, \text{b}}(\text{Inj } A)$ が得られる。次に仮定 (FGR1) と (FGR2) の下では複体の射

$$\varphi_r : A \xrightarrow{\tilde{\varphi}_r} \text{Hom}_\Lambda(A, C) \xrightarrow{\text{nat.}} \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(A, C) (\simeq \text{Hom}_\Lambda(A, E^\bullet))$$

が導来圏 $\text{D}(\text{Mod } A)$ において同型となり、 $\mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(A, C)$ が A の入射分解を与える。このように翻訳される。特に $\text{id } C_\Lambda < \infty$ のとき $A \simeq \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(A, C) \in \mathbb{K}^{\text{b}}(\text{Inj } A)$ となる。

もちろん一般の場合に φ_r は同型ではなく、 A と $\mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(A, C)$ の間にズレが生じる。そのズレを見るために φ_r の写像錐 $\text{cn}(\varphi_r)$ に注目する。今 $\text{D}(\text{Mod } A)$ の三角

$$A \xrightarrow{\varphi_r} \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(A, C) \rightarrow \text{cn}(\varphi_r) \rightarrow A[1]$$

を取る。 λ_r を次で定まる $\text{D}(\text{Mod } \Lambda)$ の射とする。

$$\lambda_r : \Lambda \xrightarrow{\tilde{\lambda}_r} \text{Hom}_\Lambda(C, C) \xrightarrow{\text{nat.}} \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(C, C)$$

このとき可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} C & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(\Lambda, C) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\varphi_r} & \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(A, C) & \longrightarrow & \text{cn}(\varphi_r) & \longrightarrow & A[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \\ \Lambda & \xrightarrow{\lambda_r} & \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(C, C) & \longrightarrow & \text{cn}(\lambda_r) & \longrightarrow & \Lambda[1] \end{array}$$

が存在する。ただし、図式の各行は $\text{D}(\text{Mod } A)$ の三角、各列は自然な分裂完全列である。従って $\text{cn}(\varphi_r) \simeq \text{cn}(\lambda_r)$ であり、 $\text{D}(\text{Mod } A)$ の三角

$$A \xrightarrow{\varphi_r} \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(A, C) \rightarrow \text{cn}(\lambda_r) \rightarrow A[1]$$

が存在する。この三角と注意 3.1 より

$$\text{id } A_A < \infty \Leftrightarrow A \in \mathbb{K}^{\text{b}}(\text{Inj } A) \Leftrightarrow \text{id } C_\Lambda < \infty \text{ かつ } \text{cn}(\lambda_r) \in \mathbb{K}^{\text{b}}(\text{Inj } A)$$

が成立する。よって $\text{cn}(\lambda_r) \in \text{D}(\text{Mod } \Lambda)$ が $\text{cn}(\lambda_r) \in \mathbb{K}^{\text{b}}(\text{Inj } A)$ となる必要十分条件が分かれば良い。ここで $M \in \text{D}(\text{Mod } \Lambda)$ が $M \in \mathbb{K}^{\text{b}}(\text{Inj } A)$ となる必要十分条件を Λ 加群の言葉で書き下すと

- (1) $\forall m \geq 0, \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(C^m, X) \in \mathbb{K}^{\text{b}}(\text{Inj } \Lambda)$.
- (2) $\exists n \geq 0; \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(C^n, X) = 0$.

となる (証明には A の次数付き入射加群の複体の構造 [21] を用いる)。

以上の話をまとめると、問題 3.1 (A) の解答となる次の定理を得る。

定理 3.2. [21] Λ を環とし、 C を Λ -両側加群とする。

- (1) C が右 asid 加群である必要十分条件は C が次の 3 つの条件を満たすことである。

(右 ASID1) $\text{id } C_\Lambda < \infty$.

(右 ASID2) $\forall m \geq 0, \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(C^m, \text{cn}(\lambda_r)) \in \mathbb{K}^{\text{b}}(\text{proj } \Lambda)$.

(右 ASID3) $\exists n \geq 0; \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(C^n, \text{cn}(\lambda_r)) = 0$.

- (2) Λ^{op} 加群の準同型 $\tilde{\lambda}_\ell : \Lambda \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda^{\text{op}}}(C, C)$, $\tilde{\lambda}_\ell(a)(c) = ca$ を用いて $\text{D}^{\text{b}}(\text{mod } \Lambda^{\text{op}})$ の射 λ_ℓ を次のように定める。

$$\lambda_\ell : \Lambda \xrightarrow{\tilde{\lambda}_\ell} \text{Hom}_{\Lambda^{\text{op}}}(C, C) \xrightarrow{\text{nat.}} \mathbb{R}\text{Hom}_{\Lambda^{\text{op}}}(C, C)$$

このとき C が右 asid 加群である必要十分条件は C が次の 3 つの条件を満たすことである。

(左 ASID1) $\text{id}_\Lambda C < \infty$.

(左 ASID2) $\forall m \geq 0, \mathbb{R}\text{Hom}_{\Lambda^{\text{op}}}(C^m, \text{cn}(\lambda_\ell)) \in \mathbb{K}^b(\text{proj } \Lambda^{\text{op}})$.

(左 ASID3) $\exists n \geq 0; \mathbb{R}\text{Hom}_{\Lambda^{\text{op}}}(C^n, \text{cn}(\lambda_\ell)) = 0$.

(3) Λ が有限次元多元環であり, C が有限次元 Λ -両側加群であるとする. このとき A が岩永-Gorenstein 多元環である必要十分条件は, C が (左右 ASID 1) (左右 ASID 2) (左右 ASID 3) を満たすことである.

定義 3.3. C が右 asid 加群であるとき

$$\alpha_r := \min\{n \geq 0 \mid \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(C^n, \text{cn}(\lambda_r)) = 0\}$$

を C の右 asid 数という. $\alpha_r = 0$ ということは, C が (FGR1), (FGR2) を満たすということである.

同様に左 asid 加群に対して左 asid 数 α_ℓ を定義する.

3.2 問題 (B)

本節では Happel 関手 \mathcal{H} の性質に触れながら, 問題 3.1 (B) の解答を与える. この節では簡単のために, 多くの定理において Λ の大域次元が有限であることを仮定する*2. この仮定の下では次のことが成立する.

- $D^b(\text{mod } \Lambda) = \mathbb{K}^b(\text{proj } \Lambda)$ である.
- C の導来テンソル関手は $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の自己関手を導く.

$$- \otimes_\Lambda^{\mathbb{L}} C : D^b(\text{mod } \Lambda) \rightarrow D^b(\text{mod } \Lambda)$$

- C は (左右 ASID1) と (左右 ASID2) を満たす. よって C は asid 加群である必要十分条件は, C が (左右 ASID3) を満たすことである.

まず最初に \mathcal{H} が忠実充満, または圏同値となる必要十分条件を述べる.

定理 3.3. [22] Λ を多元環とし, C を有限次元 Λ -両側加群とする. 以下の条件は同値である.

- \mathcal{H} は忠実充満である.
- $\text{Ker } \mathcal{H} = 0$ である.
- C は $\alpha_r = \alpha_\ell = 0$ を満たす asid 加群である. すなわち C は次の条件を満たす.
 - $\text{id } C_\Lambda < \infty$ かつ $\text{id } {}_\Lambda C < \infty$.
 - λ_r と λ_ℓ は同型である.

この同値条件が成り立つとき, \mathcal{H} が圏同値になる必要十分条件は $\text{gl.dim } \Lambda < \infty$ である.

上記の定理が示すように $\text{Ker } \mathcal{H} = 0$ のときは良い状況になっている. このことから $\text{Ker } \mathcal{H}$ が重要ではないかと思われる. ところで $\text{Ker } \mathcal{H}$ は一体どんな対象で構成されているのだろうか. $\text{Ker } \mathcal{Q} = \mathbb{K}^b(\text{proj}^{\mathbb{Z}} A)$ であるから

$$\text{Ker } \mathcal{H} = D^b(\text{mod } \Lambda) \cap \mathbb{K}^b(\text{proj}^{\mathbb{Z}} A)$$

である. ここで $M \in D^b(\text{mod } \Lambda)$ が $M \in \mathbb{K}^b(\text{proj}^{\mathbb{Z}} A)$ である必要十分条件を Λ 加群の言葉で書き下すと

$$M \in \mathbb{K}^b(\text{proj}^{\mathbb{Z}} A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \geq 0, & M \otimes_\Lambda^{\mathbb{L}} C^m \in \mathbb{K}^b(\text{proj } \Lambda) \\ \exists n \geq 0; & M \otimes_\Lambda^{\mathbb{L}} C^n = 0 \end{cases}$$

となる (証明には A の次数付き射影加群の複体の構造 [21] を用いる). これより次の定理を得る.

*2 Λ の大域次元が有限であるという仮定を, Λ が岩永-Gorenstein 多元環であるという仮定に置き換えても, この節で述べる定理と同様の結果が得られる. ただし, 定理の主張に適切な修正が必要となる. 詳細は [23] を参照されたい.

定理 3.4. [21] Λ を大域次元有限な多元環とし, C を有限次元 Λ -両側加群とする. このとき次の等式が成り立つ.

$$\text{Ker } \mathcal{H} = \bigcup_{n \geq 0} \text{Ker} \left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C^n \right).$$

定理 3.4 で得た $\text{Ker } \mathcal{H}$ の記述では $\text{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ の三角部分圏の上昇列

$$\text{Ker} \left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C \right) \subset \text{Ker} \left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C^2 \right) \subset \cdots \subset \text{Ker} \left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C^n \right) \subset \cdots \quad (3.2)$$

の合併が現れている. この対として $\text{D}^b(\text{mod } \Lambda^{\text{op}})$ の部分圏の下降列

$$\text{thick}_{\Lambda} C \supset \text{thick}_{\Lambda}(C^2) \supset \cdots \supset \text{thick}_{\Lambda}(C^n) \supset \cdots \quad (3.3)$$

も考えられる. ある条件の下で, これらの上昇および下降が止まる.

補題 3.5. [23] Λ を大域次元有限な多元環とし, C を有限次元 Λ -両側加群とする.

(1) C が (右 ASID3) を満たすとき, $n \geq \alpha_r$ に対して次が成り立つ.

- (i) $\text{thick}_{\Lambda}(C^n) = \text{thick}_{\Lambda}(C^{n+1})$.
- (ii) $\text{Ker} \left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C^n \right) = \text{Ker} \left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C^{n+1} \right)$.
- (iii) $\text{Ker } \mathcal{H} = \text{Ker} \left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C^n \right)$.

(2) C が (左 ASID3) を満たすとき, $n \geq \alpha_{\ell}$ に対して次が成り立つ.

- (i) $\text{thick}(C^n)_{\Lambda} = \text{thick}(C^{n+1})_{\Lambda}$.
- (ii) $\text{Ker} \left(C^n \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} - \right) = \text{Ker} \left(C^{n+1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} - \right)$.

この補題より, C に (左右 ASID3) を課して $\alpha := \max\{\alpha_{\ell}, \alpha_r\}$ とおくと, (3.2) が $\text{Ker} \left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C^{\alpha} \right)$ で止まり, (3.3) の右作用版が $\text{thick}(C^{\alpha})_{\Lambda}$ で止まる. この 2 対の圏 $\text{Ker } \mathcal{H} = \text{Ker} \left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C^{\alpha} \right)$ と $\text{thick}(C^{\alpha})_{\Lambda}$ は $\text{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ の半直交分解をなす.

定義 3.4. [5] \mathcal{D} を三角圏とする.

- \mathcal{D} の三角部分圏 \mathcal{T} に対して, その右直交圏 \mathcal{T}^{\perp} を

$$\mathcal{T}^{\perp} := \{M \in \mathcal{D} \mid \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{T}, M) = 0\}$$

と定める.

- \mathcal{D} の三角部分圏 \mathcal{T}, \mathcal{U} について次の条件が成り立つとき, \mathcal{D} は半直交分解 $\mathcal{D} = \mathcal{T} \perp \mathcal{U}$ をもつという.

- (1) $\mathcal{T}^{\perp} = \mathcal{U}$.
- (2) $\forall M \in \mathcal{D}, \exists$ 三角 $T \rightarrow M \rightarrow U \rightarrow T[1]; T \in \mathcal{T}$ かつ $U \in \mathcal{U}$.

このとき \mathcal{T} を \mathcal{D} の右許容部分圏, \mathcal{U} を \mathcal{D} の左許容部分圏という.

- \mathcal{D} の三角部分圏 \mathcal{T} が右許容部分圏かつ左許容部分圏であるとき, \mathcal{T} を \mathcal{D} の許容部分圏という.

定理 3.6. [23] Λ を大域次元有限な多元環とし, C を有限次元 asid 加群とする. また $\alpha = \max\{\alpha_{\ell}, \alpha_r\}$ とおき, $\text{T} := \text{thick } C^{\alpha}$ とする. このとき T は $\text{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ の許容部分圏であり, 特に半直交分解

$$\text{D}^b(\text{mod } \Lambda) = \text{T} \perp \text{Ker } \mathcal{H}$$

が存在する. ここで $\text{T}^{\perp} = \text{Ker } \mathcal{H}$ である. さらに半直交分解は次の性質を満たす.

(1) $- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C$ は T に圏同値として作用する. つまり $- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C$ の T への制限は圏同値

$$\left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C \right) \Big|_{\text{T}} : \text{T} \xrightarrow{\simeq} \text{T}$$

を引き起こす.

(2) $-\otimes_{\Lambda}^{\mathbb{L}} C$ は T^{\perp} に冪零に作用する. つまり $-\otimes_{\Lambda}^{\mathbb{L}} C$ の T^{\perp} への制限は自己関手

$$(-\otimes_{\Lambda}^{\mathbb{L}} C)|_{T^{\perp}} : T^{\perp} \rightarrow T^{\perp}$$

を引き起こし, また $(T^{\perp}) \otimes_{\Lambda}^{\mathbb{L}} C^{\alpha} = 0$ が成り立つ.

この定理の半直交分解から想像されるように次の定理が成り立つ.

定理 3.7. [23] Λ を大域次元有限な多元環とし, C を有限次元 asid 加群とする. また $\alpha = \max\{\alpha_{\ell}, \alpha_r\}$ とおき, $T := \text{thick } C^{\alpha}$ とする. このとき $\mathcal{H} : D^b(\text{mod } \Lambda) \rightarrow \underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ の制限により次の三角圏同値を得る.

$$\mathcal{H}|_T : T \xrightarrow{\simeq} \underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$$

従って安定圏 $\underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ は導来圏 $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の許容部分圏として実現される. また次の可換図式が存在する.

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\mathcal{H}|_T} & \underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A \\ -\otimes_{\Lambda}^{\mathbb{L}} C[1] \downarrow & & \downarrow (1) \\ T & \xrightarrow{\mathcal{H}|_T} & \underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A \end{array}$$

以上で問題 3.1 (B) の解答が与えられた.

3.3 岩永-Gorenstein 性と三角圏構造 (再び問題 (A))

定理 3.6 の中で A の岩永-Gorenstein 性が $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の半直交分解を導くことを述べた. 逆に $D^b(\text{mod } \Lambda)$ のある半直交分解の存在が A の岩永-Gorenstein 性を導く.

定理 3.8. [23] Λ を大域次元有限な多元環とする. 有限次元 Λ -両側加群 C に対して, 次の条件は同値である.

- (a) C は asid 加群である.
- (b) $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の許容部分圏 T で, 以下を満たすものが存在する.
 - (1) $-\otimes_{\Lambda}^{\mathbb{L}} C$ は T に同型に作用する.
 - (2) $-\otimes_{\Lambda}^{\mathbb{L}} C$ は T^{\perp} に冪零に作用する.

これらの条件が成立するとき, $T = \text{thick}(C^{\alpha})_{\Lambda}$ が成り立つ.

この定理を応用すると, ある岩永-Gorenstein 環のクラスのカテゴリが可能となる.

例 3.2. 次のクイバー Q の道代数を $\Lambda = KQ$ とおく.

$$Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$$

このとき $\text{gl.dim } \Lambda = 1$ である. 以下では Λ の asid 加群を分類し, Λ の自明拡大環として構成される岩永-Gorenstein 環の分類を与えよう. asid 加群の分類は 2 つの段階からなる.

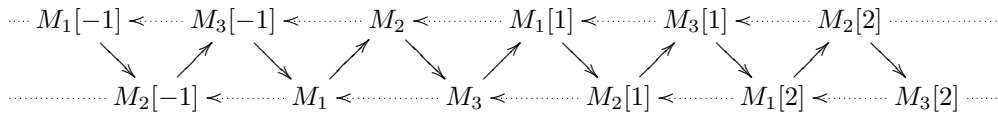
Step 1. $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の許容部分圏 T を分類する. Q の頂点 1, 2 に対応する Λ の原始冪等元をそれぞれ e_1, e_2 とし, Λ 加群 M を次のクイバー表現で表す.

$$Me_1 \xrightarrow{\alpha} Me_2$$

直既約 Λ 加群の同型類の完全代表系は

$$M_1 = (0 \rightarrow K), \quad M_2 = (K \xrightarrow{1} K), \quad M_3 = (K \rightarrow 0)$$

である. $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の Auslander-Reiten クイバーは次で与えられる.



$D^b(\text{mod } \Lambda)$ の thick 部分圏は分類されており ([6, Theorem 5.1], [15, Theorem 1.1]), それを用いると許容部分圏 \mathcal{T} は次の5つであることがわかる.

	\mathcal{T}	\mathcal{T}^\perp
(i)	$D^b(\text{mod } \Lambda)$	0
(ii)	thick M_1	thick M_3
(iii)	thick M_2	thick M_1
(iv)	thick M_3	thick M_2
(v)	0	$D^b(\text{mod } \Lambda)$

Step 2. $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の許容部分圏 \mathcal{T} に対して, 定理 3.8 (b) の (1)(2) を満たす Λ -両側加群 C を分類する. Λ -両側加群 C を次のクイバー表現で表す.

$$\begin{array}{ccc}
 e_1 C e_1 & \xrightarrow{\alpha} & e_1 C e_2 \\
 \alpha \uparrow & & \uparrow \alpha \\
 e_2 C e_1 & \xrightarrow{\alpha} & e_2 C e_2
 \end{array}$$

(i) から (v) の許容部分圏に対して, C の分類は以下で与えられる. 詳細な計算方法は [23] を参照されたい.

(i)	(1) $\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & K \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & K \end{array}$	(2) $\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ K & \longrightarrow & K \end{array}$	
(ii)	(1) $\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & K \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & K \end{array}$		
(iii)	(1) $\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & K \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$		
(iv)	(1) $\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ K & \longrightarrow & 0 \end{array}$		
(v)	(1) $\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & K^n \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$	(2) $\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ K^n & \longrightarrow & K^n \end{array}$	(3) $\begin{array}{ccc} K^n & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ K^n & \longrightarrow & 0 \end{array}$

上に挙げた Λ -両側加群のリストが asid 加群 C のリストである. これを元に Λ の C による自明拡大環として構成される岩永-Gorenstein 多元環 $A = \Lambda \oplus C$ のリストが得られる.

(i) A のクイバーと関係式は以下である. このとき $\underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A \simeq D^b(\text{mod } \Lambda)$ である.

$$(1) \quad \beta \begin{array}{c} \curvearrowright \\ 1 \end{array} \xrightarrow{\alpha} 2 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \gamma \end{array} \quad \beta\alpha = \alpha\gamma, \beta^2 = 0, \gamma^2 = 0. \quad (2) \quad 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \quad \alpha\beta\alpha = 0, \beta\alpha\beta = 0.$$

(ii) A のクイバーと関係式は以下である. このとき $\underline{\mathbf{CM}}^{\mathbb{Z}} A \simeq \text{thick } M_1 \simeq \mathbf{D}^b(\text{mod } K)$ である.

$$(1) \quad 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \begin{array}{c} \curvearrowright \beta \\ \curvearrowleft \end{array} \quad \beta^2 = 0.$$

(iii) A のクイバーと関係式は以下である. このとき $\underline{\mathbf{CM}}^{\mathbb{Z}} A \simeq \text{thick } M_2 \simeq \mathbf{D}^b(\text{mod } K)$ である.

$$(1) \quad \beta \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \quad \beta^2 = 0.$$

(iv) A のクイバーと関係式は以下である. このとき $\underline{\mathbf{CM}}^{\mathbb{Z}} A \simeq \text{thick } M_3 \simeq \mathbf{D}^b(\text{mod } K)$ である.

$$(1) \quad \beta \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \quad \beta^2 = 0, \beta\alpha = 0.$$

(v) A のクイバーと関係式は以下である. このとき $\text{gl.dim } A < \infty$ であり, $\underline{\mathbf{CM}}^{\mathbb{Z}} A \simeq 0$ である.

$$(1) \quad 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} 2 \\ \searrow \beta_1 \\ \vdots \\ \searrow \beta_n \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \end{array}$$

$$(2) \quad 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} 2 \\ \searrow \beta_1 \\ \vdots \\ \searrow \beta_n \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \end{array} \quad \alpha\beta_i = 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

$$(3) \quad 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} 2 \\ \searrow \beta_1 \\ \vdots \\ \searrow \beta_n \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \end{array} \quad \beta_i\alpha = 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

謝辞. 第 64 回代数学シンポジウムにて, 講演の機会を頂きましたことに感謝いたします.

参考文献

- [1] 岩永恭雄, 佐藤 眞久, 環と加群のホモロジー代数的理論, 日本評論社, 2002.
- [2] L. Angeleri Hügel, D. Happel and H. Krause, *Handbook of tilting theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 332. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [3] I. Assem, D. Simson, A Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, Techniques of representation theory. London Mathematical Society Student Texts, 65. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [4] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 36. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [5] A. I. Bondal and M. M. Kapranov, *Representable functors, Serre functors, and mutations* *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 53 (1989), no. 6, 1183–1205, 1337; translation in *Math. USSR-Izv.* 35 (1990), no. 3, 519–541.
- [6] K. Brüning, *Thick subcategories of the derived category of a hereditary algebra*, *Homology Homotopy Appl.* 9 (2007), no. 2, 165–176.
- [7] R-O. Buchweitz, *Maximal Cohen-Macaulay Modules and Tate-Cohomology Over Gorenstein Rings*, unpublished manuscript available at <https://tspace.library.utoronto.ca/handle/1807/16682>
- [8] X-W. Chen, *Graded self-injective algebras "are" trivial extensions*, *J. Algebra* 322 (2009), no. 7, 2601–2606.
- [9] R. M. Fossum, P. A. Griffith, I. Reiten, *Trivial extensions of abelian categories*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 456. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.
- [10] H. B. Foxby, *Gorenstein modules and related modules*, *Math. Scand.* 31 (1972), 267–284 (1973).
- [11] R. Gordon and E. L. Green, *Graded Artin algebras*, *J. Algebra* 76 (1982), no. 1, 111–137.
- [12] R. Gordon and E. L. Green, *Representation theory of graded Artin algebras*, *J. Algebra* 76 (1982), no. 1,

138–152.

- [13] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 119. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [14] D. Happel, *On Gorenstein algebras*, Representation theory of finite groups and finite-dimensional algebras (Bielefeld, 1991), 389–404, Progr. Math., 95, Birkhäuser, Basel, 1991.
- [15] C. Ingalls and H. Thomas, *Noncrossing partitions and representations of quivers*, Compos. Math. 145 (2009), no. 6, 1533–1562.
- [16] Y. Iwanaga, *On rings with finite self-injective dimension*, Comm. Algebra 7 (1979), no. 4, 393–414.
- [17] O. Iyama, *Tilting Cohen-Macaulay representations*, to appear in the ICM 2018 proceedings.
- [18] B. Keller, *Deriving DG categories*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 27 (1994), no. 1, 63–102.
- [19] H. Krause, *Derived categories, resolutions, and Brown representability*, Interactions between homotopy theory and algebra, 101–139, Contemp. Math., 436, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [20] M. Lu and B. Zhu, *Singularity categories of Gorenstein monomial algebras*, arXiv:1708.00311.
- [21] H. Minamoto and K. Yamaura, *Happel’s functor and homologically well-graded Iwanaga-Gorenstein algebras*, arXiv:1811.08036.
- [22] H. Minamoto and K. Yamaura, *Homological dimension formulas for trivial extension algebras*, arXiv:1710.01469.
- [23] H. Minamoto and K. Yamaura, *On finitely graded Iwanaga-Gorenstein algebras and the stable categories of their (graded) Cohen-Macaulay modules*, arXiv:1812.03746.
- [24] D. Orlov, *Triangulated categories of singularities and D-branes in Landau-Ginzburg models*, Tr. Mat. Inst. Steklova 246 (2004), Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh., 240–262
- [25] D. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities* Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. II, 503–531, Progr. Math., 270, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009.
- [26] I. Reiten, *The converse to a theorem of Sharp on Gorenstein modules*, Proc. Amer. Math. Soc. 32 (1972), 417–420.
- [27] J. Rickard, *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc. (2) 39 (1989), no. 3, 436–456.
- [28] J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence*, J. Pure Appl. Algebra 61 (1989), no. 3, 303–317.
- [29] A. Skowroński, *Selfinjective algebras: finite and tame type*, Trends in representation theory of algebras and related topics, 169–238
- [30] A. Skowroński and K. Yamagata, *Frobenius algebras. II. Tilted and Hochschild extension algebras*, EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2017.
- [31] H. Tachikawa, *Representations of trivial extensions of hereditary algebras*, Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979), pp. 579–599, Lecture Notes in Math., 832, Springer, Berlin, 1980.
- [32] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [33] K. Yamaura, *Realizing stable categories as derived categories*, Adv. Math. 248 (2013), 784–819.

山梨大学大学院総合研究部

〒400-8510 山梨県甲府市武田 4-3-11

E-mail address : kyamaura@yamanashi.ac.jp

向井対の分類とその応用について

金光 秋博*

向井対 (X, \mathcal{E}) とは, Fano 多様体 X とその上のベクトル束 \mathcal{E} の対であって, 第一 Chern 類に関する, ある条件を満たすものの事を言う. このような対 (X, \mathcal{E}) は 1988 年に向井によって, Fano 多様体のある種の一般化として導入されていた [13]. ここでは, 代数学シンポジウムでの講演に沿って, 向井対の分類問題とその応用について報告する. 証明や細部については, 論文 [5–7] を参照していただきたいが, 本報告では主に単純向井対と単純 K 同値射の関連を中心に説明したい. そこで, 本稿ではまず向井対, 単純向井対の定義を与えた後, 向井対の分類問題を単純向井対の場合を中心に扱う. その後に応用として, Duo Li によって導入された単純 K 同値射という概念と単純向井対との関連について扱う.

1 向井対

Fano 多様体 X とは, 滑らかな射影代数多様体 X であって, その反標準因子 $-K_X = c_1(X)$ が豊富であるもののことをいう. ここで, $-K_X = c_1(X)$ は接束の行列式束 $\det(T_X)$ に対応する因子である. 線束が豊富であることの定義は復習しないが, その概念はベクトル束にも一般化される. 本稿では, Hartshorne による豊富性の定義を用いる: すなわち, ベクトル束 \mathcal{E} が豊富であるとは, その射影化 $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ の上の普遍商線束 $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(1)$ が豊富であるときを言う.

向井対 (X, \mathcal{E}) の定義は次で与えられる:

定義 1.1 ([13]). 向井対 (X, \mathcal{E}) とは, Fano 多様体 X とその上の豊富ベクトル束 \mathcal{E} の対であって, $c_1(X) = c_1(\mathcal{E})$ を満たすもののことである.

向井対の次元とは $\dim X$ のこととして定め, その階数とは $\text{rank } \mathcal{E}$ のこととして定める.

言い換えれば, 向井対とは, その第一 Chern 類 $c_1(X)$ が豊富ベクトル束 \mathcal{E} の第一 Chern 類で表されているような Fano 多様体のことである. 一般に, 豊富ベクトル束が与えられたとき, そのベクトル束の階数 $\text{rank } \mathcal{E}$ が大きいほど, それに伴って, その行列式束, あるいは第一 Chern 類 $c_1(\mathcal{E})$ も大きくなる. したがって, 向井対の階数 $\text{rank}(\mathcal{E})$ は, その反標準束の大きさを図る一つの不変量と考えることができる.

注意 1.2. 一般偏極多様体とは, 多様体とその上の豊富ベクトル束の対 (X, \mathcal{E}) のことをいい, そのログ標準因子とは, $K_X + c_1(\mathcal{E})$ のことを指す. すると, 向井対とは, 一般偏極多様体 (X, \mathcal{E}) であって, ログ Calabi-Yau 条件 " $K_X + c_1(\mathcal{E}) = 0$ " を満たすものと言いかえることができる.

向井対の簡単な, しかし基本的である例は, Fano 多様体とその基本因子と呼ばれるものを用いて与えられる:

第 64 回代数学シンポジウム 報告.

The author is a JSPS Research Fellow and supported by the Grant-in-Aid for JSPS fellows (JSPS KAKENHI Grant Number 18J00681).

* 京都大学理学研究科, kanemitu@math.kyoto-u.ac.jp

例 1.3. Fano 多様体 M の, 指数 r_M とは, $\text{Pic } M$ 内で $-K_M$ を割り切る正の整数の最大値のことである:

$$r_M := \{a \in \mathbf{Z}_{>0} \mid \text{ある Cartier 因子 } H \text{ があって } -K_M = aH\}.$$

定義より, ある因子 H_M が存在して, $-K_M = r_M \cdot H_M$ と書ける. Fano 多様体の Picard 群には捻れがないことから, このような因子 H_M は一意的に定まる. この因子 H_M を Fano 多様体 M の基本因子と呼ぶ.

さて M を任意の n 次元 Fano 多様体とすると $(M, \mathcal{O}(H_M)^{\oplus r_M})$ は次元が n で階数が r_M である向井対を与える.

上記の例 1.3 では, 指数 r_M の Fano 多様体 M から, 階数 r_M の向井対が得られていた. したがって向井対は Fano 多様体の一般化とみなすことができ, “階数” は “指数” の一般化に相当する.

さて, 例 1.3 で与えた向井対のベクトル束 \mathcal{E} は直線束の直和であった. 一般の向井対については, もちろんこれは正しくない. 次が典型的な例である:

例 1.4. 射影空間 \mathbf{P}^n とその接束 $T_{\mathbf{P}^n}$ の対 $(\mathbf{P}^n, T_{\mathbf{P}^n})$ は向井対の一つである. 実際, 射影空間上の Euler 完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}^{n+1} \rightarrow T_{\mathbf{P}^n}(-1) \rightarrow 0$$

(に $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ をテンソルすること) により, $T_{\mathbf{P}^n}$ は豊富であることがわかる. また第一 Chern 類に関する条件 “ $c_1(X) = c_1(\mathcal{E})$ ” は定義に他ならない. $n \geq 2$ のとき $T_{\mathbf{P}^n}$ は, 線束の直和には分裂しない.

例 1.4 に挙げた向井対は, 本稿の後半において論ずる単純 K 同値射とも深い関係にある. その準備のために $(\mathbf{P}^n, T_{\mathbf{P}^n})$ の幾何をもう少し詳しく見よう:

\mathbf{P}^n とは, あるベクトル空間 $W := \mathbf{C}^{n+1}$ を決めたときに, その超平面をパラメーターづける多様体である:

$$\mathbf{P}^n = \{V_n \subset W \mid V_n \text{ は } n \text{ 次元部分空間}\}.$$

また, 上述の Euler 完全列の双対は, パラメーター空間 \mathbf{P}^n 上の普遍商束や普遍部分束を与える完全系列である.

一般にベクトル束 \mathcal{E} の射影化は, 各点ごとには \mathcal{E} の超平面のパラメーター空間を与える. したがって, $\mathbf{P}(T_{\mathbf{P}^n})$ は, 一次元部分空間 V_1 と n 次元部分空間 V_n の旗 ($V_1 \subset V_n$) のパラメーター空間になる:

$$\mathbf{P}(T_{\mathbf{P}^n}) = \text{Fl}(1, n; W) = \{(V_1 \subset V_n) \mid V_1 \text{ は一次元部分空間, } V_n \text{ は } n \text{ 次元部分空間}\}.$$

また, 射影化 $\mathbf{P}(T_{\mathbf{P}^n})$ からの自然な射影 $p_1: \mathbf{P}(T_{\mathbf{P}^n}) \rightarrow \mathbf{P}^n$ は, 旗 ($V_1 \subset V_n$) を $[V_n] \in \mathbf{P}^n$ に送ることで与えられる.

ここまででは, \mathbf{P}^n を超平面のパラメーター空間と考えていたが, 元のベクトル空間の双対 W^\vee の射影化を考えれば, 一次元部分空間のパラメーター空間が得られる:

$$\check{\mathbf{P}}^n = \{V_n \subset W^\vee \mid V_n \text{ は } n \text{ 次元部分空間}\} = \{V_1 \subset W \mid V_1 \text{ は } 1 \text{ 次元部分空間}\}.$$

対称性から, 自然に $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^n}(T_{\mathbf{P}^n}) \simeq \text{Fl}(1, n; W) \simeq \mathbf{P}_{\check{\mathbf{P}}^n}(T_{\check{\mathbf{P}}^n})$ であり, 次の図式が得られる:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{P}_{\mathbf{P}^n}(T_{\mathbf{P}^n}) = \text{Fl}(1, n; W) = \mathbf{P}_{\check{\mathbf{P}}^n}(T_{\check{\mathbf{P}}^n}) & \\ & \swarrow p_1 \qquad \searrow p_2 & \\ \mathbf{P}^n & & \check{\mathbf{P}}^n \end{array} \tag{1.1}$$

新しく現れた射 p_2 は、自然な射影 $p_2: \mathbf{P}_{\mathbf{P}^n}(T_{\mathbf{P}^n}) \rightarrow \mathbf{P}^n$ である。したがって $\mathbf{P}(T_{\mathbf{P}^n})$ は Picard 数が 2 の Fano 多様体であり、2つの射影空間束の構造 p_1 と p_2 を持つ。

このように射影化が2つの射影空間束の構造をもつ向井対を単純向井対といい、その射影化をここでは笠と呼ぶ。正確には、次で定義される:

定義 1.5 (単純向井対と笠).

- 階数 r の単純向井対とは、階数 r の向井対 (X, \mathcal{E}) であって、以下の条件を満たすものを言う:
 - (1) $\rho_X = 1$;
 - (2) $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ は別の \mathbf{P}^{r-1} 束の構造を持つ。
- 笠 (論文 [5] では *roof* と呼んでいる) とは単純向井対の射影化として得られる多様体 W のことである。

注意 1.6. 定義から、 (X_1, \mathcal{E}_1) を単純向井対とすると、その射影化 $W = \mathbf{P}(\mathcal{E}_1)$ が笠であり、別の \mathbf{P}^{r-1} 束の構造 $p_2: W \rightarrow X_2$ をもつ:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{P}(\mathcal{E}_1) = W & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ (X_1, \mathcal{E}_1) & & X_2. \end{array}$$

したがって、 W は

- (R1) Picard 数が 2 の Fano 多様体であり;
- (R2) 2つの \mathbf{P}^{r-1} 束の構造 p_1 と p_2 を持つ。

一方で、この2つの条件が笠を特徴づけるかどうかは、未解決である。現状では、笠を特徴づけるのにもう一つ次の条件が必要である [5, Proposition 1.5]:

- (R3) $r_W = r$.

さて、 W が笠である場合には、 $r_W = r$ であり、特に W の基本因子 H_W は各 p_i ファイバー \mathbf{P}^{r-1} 上の超平面因子に制限される。このとき $\mathcal{E}_1 = (p_1)_* \mathcal{O}(H_W)$ である。また、 $\mathcal{E}_2 := (p_2)_* \mathcal{O}(H_W)$ とおくと、 (X_2, \mathcal{E}_2) は向井対となる [16, Proposition 3.3]。とくに (X_2, \mathcal{E}_2) も単純向井対となる。

2 向井対の分類

Fano 多様体研究の一つの究極目標は、その分類であるが、一般状況での完全な分類は望めない。それでも、指数の大きい Fano 多様体は比較的簡単な構造を持っていることが知られており、実際 M を Fano 多様体としたとき、次が知られている:

- (1) $r_M \geq \dim M$ であれば、 $M \simeq \mathbf{P}^n$ あるいは \mathbf{Q}^n となる [9].
- (2) 藤田は $r_M = \dim M - 1$ となる Fano 多様体を分類していた [2, 3].
- (3) また、向井は $r_M = \dim M - 2$ となる Fano 多様体を分類していた [14]. 正確には向井は基本因子に関する条件の一つ仮定し、その仮定の元で分類を与えている。後に、その仮定は勝手に成り立つことが [1, 11] で示されている。

すでに見たように、向井対の階数は Fano 多様体の指数の一般化とみなす事ができるのであった。以上の観察をもとに、向井は“階数の大きい向井対の分類問題”を提示していた。より正確には $\text{rank } \mathcal{E} \geq \dim X$ を満たす向井対の詳細な分類を予想していた [13]。この予想は、向井対の分類問題における小林・落合の定理の対応物であり、藤田, Peternell, Ye-Zhang らによって解決されている:

定理 2.1 ([4, 21, 22, 26]). 向井対 (X, \mathcal{E}) であって $\text{rank } \mathcal{E} \geq \dim X$ を満たすものは次に限る:

- (1) $(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(1)^{\oplus n+1})$;
- (2) $(\mathbf{P}^n, T_{\mathbf{P}^n})$;
- (3) $(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(1)^{\oplus n-1})$;
- (4) $(\mathbf{Q}^n, \mathcal{O}(1)^{\oplus n})$.

注意 2.2. 定理 2.1 に現れる対のうち、(1) と (2) は単純向井対であり、ほかは単純ではない。

さて、上記の分類をすすめて、階数がもうすこし小さい場合にも分類したいと考えるのは、ごく当然の発想で、現在までに $\text{rank } \mathcal{E} \geq \dim X - 2$ を満たす場合には、分類が与えられている。この節の残りでは、これらの分類を紹介したいが、その前にいくつか注意を述べたい。

■Picard 数に関する注意 向井対 (X, \mathcal{E}) を分類することを考える際には、その様子は $\rho_X = 1$ の場合と $\rho_X > 1$ の場合とで、大きく異なる。乱暴に言えば、Picard 数が大きいほど、底空間 X や射影化 $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ は多くの端射線収縮をもち、そのために生じる制限から構造を決定しやすい。この場合には、結果として現れる対の種類は多いものの、それらの構造は比較的簡単である。他方で $\rho_X = 1$ の場合には、その構造を調べる際により詳細な情報を取り出す必要があり、また現れる対 (X, \mathcal{E}) たちも様々な幾何、とくに等質空間やその上の等質ベクトル束の幾何と深く関連するものが多く、大変興味深い。本稿の残りでは、筆者が主に携わった場合である、 $\rho_X = 1$ の場合に焦点を絞ることにする。 $\rho_X > 1$ の場合については、各所で参考文献を挙げるに留める。

■ベクトル束が分裂する場合に関する注意 定理 2.1 において、ベクトル束 \mathcal{E} が直線束の直和に分解しないのは、(2) の場合のみであることに注意されたい。一般に、向井対 (X, \mathcal{E}) が与えられたとする。 $\rho_X = 1$ は仮定しよう。すると、 $\text{Pic}(X)$ は基本因子 H_X に対応する直線束 $\mathcal{O}_X(1)$ によって生成されている。ベクトル束 \mathcal{E} が直線束の直和に分解する場合 (分裂型向井対と呼ぶ) には $\mathcal{E} \simeq \bigoplus_{i=1}^{\text{rank } \mathcal{E}} \mathcal{O}(a_i)$ と正の整数 a_i を用いて書け、 $\sum a_i = r_X$ を満たす事がわかる。したがって、 $r_X = \sum a_i \geq \text{rank } \mathcal{E}$ となる。

例えば $\text{rank } \mathcal{E} = \dim X - 2$ となる分裂型向井対を考えると、 $r_X \geq \dim X - 2$ となる。したがって底空間 X は指数の大きい Fano 多様体の分類からよく分かる。またベクトル束も明示的に書けているので、この場合には分類は完了している。つまり階数の大きい向井対の分類問題において、本質的なのは非分裂型の向井対を分類することである。そこで、以下では \mathcal{E} が分裂しない場合に主に焦点を絞る。

■余階数 2 の向井対 $\text{rank } \mathcal{E} = \dim X - 1$ となる向井対は、1990 年頃までに分類されている:

定理 2.3 (Wiśniewski [25]; Peternell-Szurek-Wiśniewski [23] (cf. Occhetta [17])). 向井対 (X, \mathcal{E}) であって $\text{rank } \mathcal{E} = \dim X - 1$ を満たすものの完全な分類があり、そのうち $\rho_X = 1$ かつ非分裂型であるものは、次に限る:

- (1) $(\mathbf{P}^3, \mathcal{N}(2))$, ここで \mathcal{N} は null correlation 束と呼ばれる \mathbf{P}^3 上のベクトル束 [18].
- (2) $(\mathbf{Q}^4, \mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{Q}}(1))$. ここで $\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$ は二次超曲面上のスピノル束 [19].

(3) $(\mathbf{Q}^3, \mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1))$.

注意 2.4. (1) と (3) は単純向井対である. より詳しく, 両者はその射影化を通じてお互いに関連しており, $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^3}(\mathcal{N}(2)) \simeq \mathbf{P}_{\mathbf{Q}^3}(\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1))$ が成り立ち, したがって次の図式がある:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{P}_{\mathbf{P}^3}(\mathcal{N}(2)) = \mathbf{P}_{\mathbf{Q}^3}(\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1)) & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \mathbf{P}^3 & & \mathbf{Q}^3 \end{array}$$

ここで, p_1, p_2 はそれぞれの射影化に対応する \mathbf{P}^1 束である. また, この多様体 $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^3}(\mathcal{N}(2)) \simeq \mathbf{P}_{\mathbf{Q}^3}(\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1))$ は, Dynkin 図形が $B_2 = C_2$ となる単純代数群 G の Borel 群による商 G/B である.

■余階数 3 の向井対 さて, 次に紹介したいのは, 階数 $\text{rank } \mathcal{E}$ が $\dim X - 2$ となる向井対の分類である. この場合には, Novelli-Occhetta [16] によって, $\dim X = 4$ かつ $\rho_X \geq 2$ の場合が調べられていた. 残りの場合については [6, 7] において完全に分類された. ここでは主に, 単純向井対に焦点を絞ることにする. それ以外の場合については元の論文を参照されたい.

定理 2.5. $\text{rank } \mathcal{E} = \dim X - 2$ を満たす向井対の同型類は完全に決定でき, 次が成り立つ:

- $\text{rank } \mathcal{E} = \dim X - 2$ かつ $\rho_X = 1$ を満たす非分裂型向井対は, ちょうど 9 個ある.
- そのうち単純向井対は次の 2 つ:
 - (1) $(\mathbf{Q}^6, \mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1))$, ここで $\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$ はスピノル束;
 - (2) $(\mathbf{Q}^5, \mathcal{G}_{\mathbf{Q}}(1))$, ここで $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}$ は, Ottaviani 束と呼ばれるベクトル束である.

詳しい性質やその幾何等は, [8, 19, 20] 等に譲るが, $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}$ は階数 3 の安定束で, $(c_1, c_2, c_3) = (2, 2, 2)$ を満たすものとして, 特徴づけられている. また, この 2 つの単純向井対はその射影化が笠を与えるが, その構造は次のようになる:

まず対 $(\mathbf{Q}^6, \mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1))$ を考えよう. 区別のために, この底空間 \mathbf{Q}^6 を X_1 と書く. また射影化を W と書く. この射影化 W は, 自然な射影 $p_1: W \rightarrow X_1$ を持つ. また単純向井対の定義にあるように別の射影空間束の構造 $p_2: W \rightarrow X_2$ も持つ. この 2 つの射影空間束の構造は対称である. すなわち $X_2 \simeq \mathbf{Q}^6$ が成り立ち, p_2 に対応するベクトル束は X_2 上のベクトル束 $\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1)$ で与えられる:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{P}_{X_1}(\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1)) = W = \mathbf{P}_{X_2}(\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1)) & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ X_1 \simeq \mathbf{Q}^6 & & X_2 \simeq \mathbf{Q}^6. \end{array}$$

似たような対称性を対 $(\mathbf{Q}^5, \mathcal{G}_{\mathbf{Q}}(1))$ も持っている: 同様に底空間を X'_1 と書こう. また射影化を W' と書く. この射影化 W' のもつ別の射影空間束の構造 $p'_2: W' \rightarrow X'_2$ を考えると, $X'_2 \simeq \mathbf{Q}^5$ であり, p'_2 に対応するベクトル束は X'_2 上のベクトル束 $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}(1)$ で与えられる:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{P}_{X'_1}(\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}(1)) = W' = \mathbf{P}_{X'_2}(\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}(1)) & \\ p'_1 \swarrow & & \searrow p'_2 \\ X'_1 \simeq \mathbf{Q}^5 & & X'_2 \simeq \mathbf{Q}^5. \end{array}$$

$W = \mathbf{P}_{\mathbf{Q}^6}(\mathcal{S}_{\mathbf{Q}^6}^*(1))$ は等質空間である: ベクトル空間 \mathbf{C}^8 とその上の非退化対称二次形式 q を考える. すると, その上の 3 次元等方的部分空間のパラメーター空間 $\text{OG}(3, 8)$ は等質空間であり, W と同型である. 3 次元等方的部分空間 V_3 を一つ固定する. すると $[V_3]$ は $\text{OG}(3, 8)$ の点を与える. この V_3 に対して, ちょうど二つの 4 次元等方的部分空間 V_4^+ と V_4^- とが存在して $V_4^+ \cap V_4^- = V_3$ となる. 4 次元等方的部分空間のパラメーター空間 $\text{OG}(4, 8)$ は二つの連結成分 $\text{OG}(4, 8)^+$ と $\text{OG}(4, 8)^-$ をもち

- (順番を適当に入れ替えれば) $[V_4^+] \in \text{OG}(4, 8)^+$, $[V_4^-] \in \text{OG}(4, 8)^-$ であり;
- 各連結成分 $\text{OG}(4, 8)^+$, $\text{OG}(4, 8)^-$ は \mathbf{Q}^6 と同型である.

したがって, 各点 $[V_3] \in \text{OG}(3, 8)$ に対して, $[V_4^+] \in \text{OG}(4, 8)^+$ と $[V_4^-] \in \text{OG}(4, 8)^-$ を対応させることで $\text{OG}(3, 8) \rightarrow \text{OG}(4, 8)^\pm$ なる写像が定義される. この写像が p_1 や p_2 である.

一方で, W' は等質ではない. 二次超曲面 \mathbf{Q}^5 と同型である X'_1 や X'_2 は自然に \mathbf{P}^6 に埋め込まれるが, この射影空間は八元数の純虚部分 $\text{Im } \mathbf{O}$ の射影化に対応している. また W' は $\mathbf{P}(\text{Im } \mathbf{O}) \times \mathbf{P}(\text{Im } \mathbf{O})$ 内で Cayley 積を用いて定義される. このことから G_2 型の代数群である $\text{Aut}(\mathbf{O})$ が W' に作用することはわかるが, しかし W は (どんな代数群の作用についても) 等質空間とはならない. 詳細は [8, 19, 20] を参考にされたい.

3 単純 K 同値

単純 K 同値射とは, Duo Li によって, ごく最近に導入された概念であり, Atiyah フロップや, この後に紹介する向井フロップの一般化に相当する概念である [10]. 定義は次で与えられる:

定義 3.1 (単純 K 同値射 [10]). 単純 K 同値射とは 2 つの滑らかな射影代数多様体の間の双有理射 $\chi: Z_1 \dashrightarrow Z_2$ であって, 次の条件を満たす不確定点解消 $Z_1 \xleftarrow{f_1} \tilde{Z} \xrightarrow{f_2} Z_2$ が存在するものをいう:

- (1) 各射 $f_i: \tilde{Z} \rightarrow Z_i$ は滑らかな連結部分多様体 Y_i に沿う爆発である;
- (2) χ は標準因子を保つ, すなわち $f_1^* K_{Z_1} = f_2^* K_{Z_2}$ が成り立つ.

したがって次の図式がある:

$$\begin{array}{ccccc}
 E_1 \hookrightarrow & \text{Bl}_{Y_1} Z_1 = \tilde{Z} = \text{Bl}_{Y_2} Z_2 & \hookleftarrow E_2 & & \\
 \swarrow & \searrow f_1 & \searrow f_2 & \swarrow & \\
 Y_1 \hookrightarrow & Z_1 & \dashrightarrow \chi & Z_2 & \hookrightarrow Y_2.
 \end{array}$$

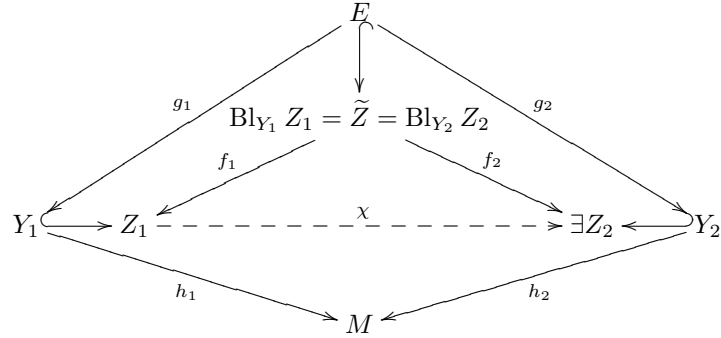
ここで E_i は f_i の例外因子である. 爆発に関する標準因子公式

$$K_{\tilde{Z}} = f_i^* K_{Z_i} + (\text{codim } Y_i - 1) E_i$$

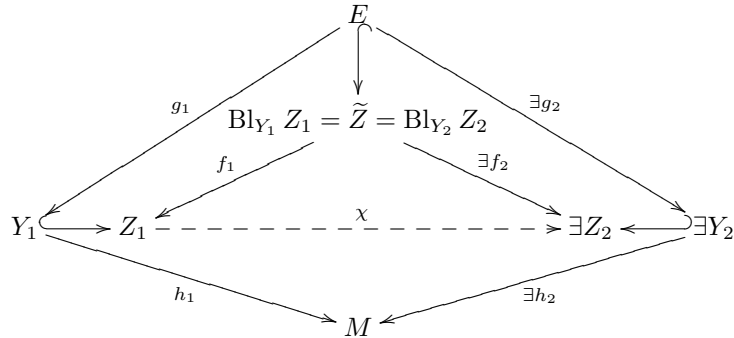
および $f_1^* K_{Z_1} = f_2^* K_{Z_2}$ という仮定から, $E_1 = E_2$ であり $\text{codim } Y_1 = \text{codim } Y_2$ となることがわかる [10, Lemma 2.1]. そこで, 以下では単に E と書いて例外因子 E_i を表す:

さて、標準因子を追いかけることで、勝手な g_2 ファイバー \mathbf{P}^{n-1} の上で、 $-E|_E = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)$ となることがわかる。したがって、中野・藤木判定法を用いることで、複素多様体 Z_2 と収縮 $\tilde{Z} \rightarrow Z_2$ をうまく見つけて、多様体 \tilde{Z} を g_2 に沿って潰すことができる。すなわち、 Z_2 は Y_2 を部分多様体として含むような多様体であり

- $\tilde{Z} = \text{Bl}_{Y_2} Z_2$ が成り立ち、その爆発 $\tilde{Z} \rightarrow Z_2$ を f_2 とすると、
- E は f_2 の例外因子であり、 $f_2|_E = g_2$ となるものが存在する:



まとめると、条件 3.3 のもと、次の図式を構成できる:



ここで得られた写像 χ が向井フロップと呼ばれる写像である。標準因子を追いかけることで、 χ が標準因子を保つ、すなわち

$$f_1^*(K_{Z_1}) = f_2^*(K_{Z_2})$$

を満たすことがわかる。したがって χ は (射影的とは限らない Z_2 への) 単純 K 同値射となる。

4 単純 K 同値射の構造定理およびその応用

さて、上記の向井フロップの構成で肝要であったのは、対 $(\mathbf{P}^n, T_{\mathbf{P}^n})$ が単純向井対であるという事実であり、実際に同様の構成で次が証明できる:

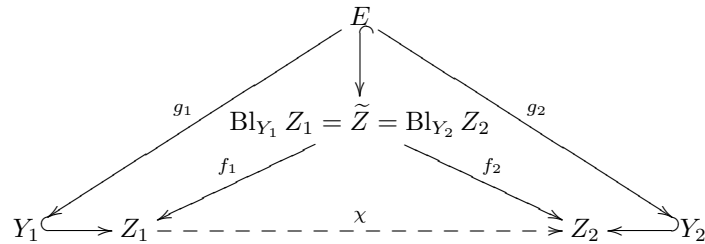
命題 4.1 ([5, Proposition 4.2]). 次の二条件が成り立つとしよう:

- Z_1 は滑らかな射影多様体、 $Y_1 \subset Z_1$ はその滑らかな部分多様体である;
- $h_1: Y_1 \rightarrow M$ は滑らかな射であって、勝手なファイバー F_1 に対して $(F_1, \mathcal{C}_{Y_1/Z_1}|_{F_1})$ が単純向井対である。

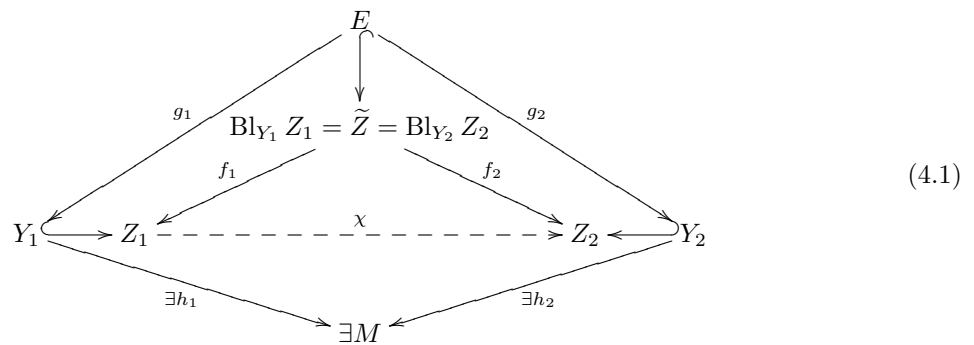
すると (複素多様体) Z_2 への単純 K 同値射 $Z_1 \dashrightarrow Z_2$ でその中心が Y_1 となるものが作れる。

上記の命題では、単純向井対から単純 K 同値射を構成している。実際には、この逆が成り立ち、単純 K 同値射はすべて単純向井対から得られる：

定理 4.2 ([5, Theorem 0.1]). 勝手な単純 K 同値射は命題 4.1 のようにして得られる。より正確には、次が成り立つ： $\chi: Z_1 \dashrightarrow Z_2$ を単純 K 同値射とし、図式 (3.1) を考えよう：



すると滑らかな射 $h_i: Y_i \rightarrow M$ であって、 $h_1 \circ g_1 = h_2 \circ g_2$ がなりたち、さらに各 h_i ファイバー F_i に対して $(F_i, \mathcal{C}_{Y_i/Z_i}|_{F_i})$ が単純向井対となるものがある：



言い換えれば、単純 K 同値射は、単純向井対が定める双有理射の族になっている。

■単純 K 同値射の分類問題への応用 さて、定理 4.2 より、単純 K 同値射に対して、図式 (4.1) が得られる。射 $E \rightarrow M$ のファイバーは単純向井対の射影化、すなわち笠である。また、射 χ は局所的には単純向井対 $(F_i, \mathcal{C}_{Y_i/Z_i}|_{F_i})$ の定める K 同値射になっており、とくに、単純 K 同値射の分類問題と単純向井対の分類問題とは (程度によるが) 同値となる。では、単純向井対 $(F_i, \mathcal{C}_{Y_i/Z_i}|_{F_i})$ はどのぐらいあるか？ 現在までに知られている例は 8 つある。詳細については、論文 [5] を参照して頂きたいが、次の表に、簡単にまとめておく：

型	笠 W
$A_{r-1} \times A_{r-1}$	$\mathbf{P}^{r-1} \times \mathbf{P}^{r-1}$
A_r^M	$\mathbf{P}(T_{\mathbf{P}^r}) = \text{Fl}(1, r; \mathbf{C}^{r+1})$
A_{2r-2}^G	$\text{Fl}(r-1, r; \mathbf{C}^{2r-1})$
$C_{\frac{3r}{2}-1}$ (r は偶数)	$\text{SFl}(r-1, r; \mathbf{C}^{3r-2})$
D_r	$\text{OG}(r-1; \mathbf{C}^{2r})$
F_4 ($r=3$)	例外型代数群 F_4 に関する 22 次元等質多様体
G_2 ($r=2$)	例外型代数群 G_2 の Borel 群 B による商 G_2/B
G_2^\dagger ($r=3$)	$\mathbf{P}^5(\mathcal{G})$ (Ottaviani 束 \mathcal{G} の射影化)

ここで、一番左の列には、その笠を識別するための名前 (型と呼んでいる) が書いてあり、右の列には“笠 W の同型類” が記してある。おおまかに言えば、型には W の自己同型群に対応する Dynkin 図形に対応しており、場合によっては、右肩に区別するための記号がついている。

また右の列で用いた記号は次のとおりである:

- $\text{Fl}(i, j; \mathbf{C}^n)$ は、ベクトル空間 \mathbf{C}^n 内の i 次元部分空間と j 次元部分空間から成る旗のパラメーター空間;
- $\text{SFl}(i, j; \mathbf{C}^{2n})$ は、斜交ベクトル空間 \mathbf{C}^{2n} 内の i 次元等方的部分空間と j 次元等方的部分空間からなる旗のパラメーター空間;
- $\text{OG}(k, \mathbf{C}^{2n})$ は、非退化対称二次形式をもつベクトル空間 \mathbf{C}^{2n} 内の k 次元等方的部分空間のパラメーター空間。

また、これまでに現れた単純向井対との関係を記しておく、次のようになる

- $A_{r-1} \times A_{r-1}$ は単純向井対 $(\mathbf{P}^{r-1}, \mathcal{O}(1)^{\oplus r})$ に対応する。
- A_r^M は単純向井対 $(\mathbf{P}^r, T_{\mathbf{P}^r})$ に対応する。
- C_2 は単純向井対 $(\mathbf{P}^3, \mathcal{N}(2))$ あるいは $(\mathbf{Q}^3, \mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1))$ に対応する。
- D_4 は単純向井対 $(\mathbf{Q}^6, \mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1))$ に対応する。
- G_2^\dagger は単純向井対 $(\mathbf{Q}^5, \mathcal{G}(1))$ に対応する。

D を 8 つの型のいずれかとしたとき、単純 K 同値射が“型 D を持つ”ということを図式 4.1 において、 $E \rightarrow M$ のすべてのファイバーが型 D の笠と同型であるときを言うことにする。すると、向井対の分類及び 2 つの \mathbf{P}^1 束の構造を持つ Fano 多様体の分類 [15, 24] の応用として、次を得る:

系 4.3 ([5, Theorem 0.3]). $\chi: Z_1 \dashrightarrow Z_2$ を単純 K 同値射とする。すると次が成り立つ:

- (1) $\text{codim } Y_i \geq \dim F_i - 2$ であれば、 χ の型は $A_{r-1} \times A_{r-1}$, A_r^M , C_2 , D_4 , G_2^\dagger のいずれかである。
- (2) $\dim Z_i \leq 8$ であれば、 χ の型は $A_{r-1} \times A_{r-1}$ ($r \leq 3$), A_r^M ($r \leq 3$), C_2 , D_4 , G_2^\dagger のいずれかである。

系 4.3 (2) は、Duo Li による 5 次元以下の分類の一般化を与える [10].

注意 4.4. 以上の系では低次元、あるいは余次元の大きいときに、単純 K 同値射の分類が与えられており、この場合には、その型はこれまでに知られている笠の例 (8 つ) のいずれかに対応する場合となった。また現在知られている例はこの 8 つに対応する場合のみである。

単純 K 同値や単純向井対、笠の例がこれらで尽くされるかどうかは、現状わかっておらず、今後の課題の一つである。これらの 8 つの笠の例を考えると、最後の例 G_2^\dagger を除いてはすべて等質空間になっている。一方で最後の例 G_2^\dagger に対応する笠 W は、 G_2 型の代数群の作用を持つ多様体ではあるが、等質空間にはならない。このような笠の例が他にも存在するかどうかは、著者が非常に興味を持っている問題の一つである。

謝辞. 代数学シンポジウムでの講演の機会をいただきましたオーガナイザーの皆様、とくにシンポジウム責任者であります金銅誠之先生、代数幾何プログラム責任者であります徳永浩雄先生と戸田幸伸先生、会場責任者であります山崎隆雄先生に感謝いたします。

参考文献

- [1] F. Ambro. Ladders on Fano varieties. *J. Math. Sci. (New York)*, Vol. 94, No. 1, pp. 1126–1135, 1999. Algebraic geometry, 9.
- [2] Takao Fujita. Classification of projective varieties of Δ -genus one. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, Vol. 58, No. 3, pp. 113–116, 1982.
- [3] Takao Fujita. On polarized varieties of small Δ -genera. *Tohoku Math. J. (2)*, Vol. 34, No. 3, pp. 319–341, 1982.
- [4] Takao Fujita. On adjoint bundles of ample vector bundles. In *Complex algebraic varieties (Bayreuth, 1990)*, Vol. 1507 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 105–112. Springer, Berlin, 1992.
- [5] Akihiro Kanemitsu. Mukai pairs and simple K -equivalence. arXiv:1812.05392v1, 2018.
- [6] Akihiro Kanemitsu. Classification of Mukai pairs with corank 3. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, Vol. 69, No. 1, pp. 231–282, 2019.
- [7] Akihiro Kanemitsu. Classification of Mukai pairs with dimension 4 and rank 2. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 372, No. 9, pp. 6629–6653, 2019.
- [8] Akihiro Kanemitsu. Extremal rays and nefness of tangent bundles. *Michigan Math. J.*, Vol. 68, No. 2, pp. 301–322, 2019.
- [9] Shoshichi Kobayashi and Takushiro Ochiai. Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics. *J. Math. Kyoto Univ.*, Vol. 13, pp. 31–47, 1973.
- [10] Duo Li. On certain K -equivalent birational maps. *Math. Z.*, Vol. 291, No. 3-4, pp. 959–969, 2019.
- [11] Massimiliano Mella. Existence of good divisors on Mukai varieties. *J. Algebraic Geom.*, Vol. 8, No. 2, pp. 197–206, 1999.
- [12] Shigeru Mukai. Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or $K3$ surface. *Invent. Math.*, Vol. 77, No. 1, pp. 101–116, 1984.
- [13] Shigeru Mukai. Problems on characterization of the complex projective space. In *Birational Geometry of Algebraic Varieties, Open Problems, Katata*, pp. 57–60. the 23rd Int'l Symp., Taniguchi Foundation, 1988.
- [14] Shigeru Mukai. Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, Vol. 86, No. 9, pp. 3000–3002, 1989.
- [15] Roberto Muñoz, Gianluca Occhetta, and Luis Eduardo Solá Conde. On rank 2 vector bundles on Fano manifolds. *Kyoto J. Math.*, Vol. 54, No. 1, pp. 167–197, 2014.
- [16] Carla Novelli and Gianluca Occhetta. Ruled Fano fivefolds of index two. *Indiana Univ. Math. J.*, Vol. 56, No. 1, pp. 207–241, 2007.
- [17] Gianluca Occhetta. A note on the classification of Fano manifolds of middle index. *Manuscripta Math.*, Vol. 117, No. 1, pp. 43–49, 2005.
- [18] Christian Okonek, Michael Schneider, and Heinz Spindler. *Vector bundles on complex projective spaces*, Vol. 3 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, Boston, Mass., 1980.
- [19] Giorgio Ottaviani. Spinor bundles on quadrics. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 307, No. 1, pp. 301–316, 1988.

- [20] Giorgio Ottaviani. On Cayley bundles on the five-dimensional quadric. *Boll. Un. Mat. Ital. A (7)*, Vol. 4, No. 1, pp. 87–100, 1990.
- [21] Thomas Peternell. A characterization of \mathbf{P}_n by vector bundles. *Math. Z.*, Vol. 205, No. 3, pp. 487–490, 1990.
- [22] Thomas Peternell. Ample vector bundles on Fano manifolds. *Internat. J. Math.*, Vol. 2, No. 3, pp. 311–322, 1991.
- [23] Thomas Peternell, Michał Szurek, and Jarosław A. Wiśniewski. Fano manifolds and vector bundles. *Math. Ann.*, Vol. 294, No. 1, pp. 151–165, 1992.
- [24] Kiwamu Watanabe. \mathbb{P}^1 -bundles admitting another smooth morphism of relative dimension one. *J. Algebra*, Vol. 414, pp. 105–119, 2014.
- [25] Jarosław A. Wiśniewski. Ruled Fano 4-folds of index 2. *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 105, No. 1, pp. 55–61, 1989.
- [26] Yun-Gang Ye and Qi Zhang. On ample vector bundles whose adjunction bundles are not numerically effective. *Duke Math. J.*, Vol. 60, No. 3, pp. 671–687, 1990.

TOWARD CRITERIA FOR K-STABILITY OF LOG FANO PAIRS

KENTO FUJITA

ABSTRACT. This is my proceedings of “64th Algebra Symposium” at Tohoku university. In the proceedings, we give a simplification for the proof of “a valuative criterion” for the uniform K-stability of log Fano pairs.

CONTENTS

1. K-stability of log Fano pairs	1
2. A valuative criterion and the purpose of this proceedings	4
3. From test configurations to $\hat{\beta}$	5
4. The uniform K-stability and the uniform Ding stability	7
5. A simplified proof	11
References	12

1. K-STABILITY OF LOG FANO PAIRS

We work over an arbitrary algebraically closed field \mathbb{k} of characteristic zero. Throughout this proceedings, we always assume that (X, Δ) is an n -dimensional *log Fano pair*, that is, X is a normal projective variety over \mathbb{k} and Δ is an effective \mathbb{Q} -Weil divisor with (X, Δ) a klt pair and $L := -(K_X + \Delta)$ an ample \mathbb{Q} -divisor. (For the theory of minimal model program, we refer the readers to [KM98].) We recall the *K-semistability* and the *uniform K-stability* of (X, Δ) .

Definition 1.1 (see, e.g., [Tia97, Don02]). (1) The following data

- a normal projective variety \mathcal{X} and a surjective morphism $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$,
- a p -semiample \mathbb{Q} -line bundle \mathcal{L} on \mathcal{X} ,
- a \mathbb{G}_m -action $\mathbb{G}_m \curvearrowright (\mathcal{X}, \mathcal{L})$ commuting with the action $\mathbb{G}_m \curvearrowright \mathbb{P}_t^1$ with $(a, t) \mapsto at$,

Date: December 24, 2019.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 14J45; Secondary 14E30.

Key words and phrases. Fano varieties, K-stability, Minimal model program.

- a \mathbb{G}_m -equivariant isomorphism

$$(\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_0, \mathcal{L}|_{\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_0}) \simeq (X \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}), p_1^*L),$$

where \mathcal{X}_0 is the fiber of p at $0 \in \mathbb{P}^1$,

is said to be a *test configuration* of (X, L) . We simply say that “ $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$ is a test configuration of (X, L) ”. For a test configuration $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$ of (X, L) , let $\Delta_{\mathcal{X}}$ be the \mathbb{Q} -Weil divisor on \mathcal{X} defined by the closure of $\Delta \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\})$.

- (2) A test configuration $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$ of (X, L) is said to be *trivial* if the ample model of \mathcal{L} over \mathbb{P}^1 is \mathbb{G}_m -equivariantly isomorphic to $(X \times \mathbb{P}^1, p_1^*L)$.
- (3) (see [LX14]) A test configuration $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$ of (X, L) is said to be *special* if \mathcal{L} is ample over \mathbb{P}^1 and the pair $(\mathcal{X}, \Delta_{\mathcal{X}} + \mathcal{X}_0)$ is a plt pair.
- (4) (see [Wan12, Oda13]) For a test configuration $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$ of (X, L) , the *Donaldson-Futaki invariant* $\text{DF}_{\Delta}(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ of $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$ is defined as follows:

$$\text{DF}_{\Delta}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) := \frac{n}{n+1} \cdot \frac{(\mathcal{L}^{n+1})}{(L^n)} + \frac{(\mathcal{L}^n \cdot (K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{X}}))}{(L^n)},$$

where $K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1} := K_{\mathcal{X}} - p^*K_{\mathbb{P}^1}$.

In the paper [Fuj19a], the *Ding invariant*, introduced by [Ber16] (see also [Fuj18]), plays an important role.

Definition 1.2 (see [Ber16, Fuj18]). For a test configuration $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$ of (X, L) , the *Ding invariant* $\text{Ding}_{\Delta}(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ of $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$ is defined as follows:

$$\text{Ding}_{\Delta}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) := -\frac{(\mathcal{L}^{n+1})}{(n+1)(L^n)} - 1 + \text{lct}(\mathcal{X}, \Delta_{\mathcal{X}} + D_{((\mathcal{X}, \Delta_{\mathcal{X}}), \mathcal{L}); \mathcal{X}_0}),$$

where $D_{((\mathcal{X}, \Delta_{\mathcal{X}}), \mathcal{L})}$ is the \mathbb{Q} -Weil divisor on \mathcal{X} supported on \mathcal{X}_0 with

$$D_{((\mathcal{X}, \Delta_{\mathcal{X}}), \mathcal{L})} \sim_{\mathbb{Q}} -(K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{X}}) - \mathcal{L},$$

and lct is the *log canonical threshold*, that is,

$$\begin{aligned} & \text{lct}(\mathcal{X}, \Delta_{\mathcal{X}} + D_{((\mathcal{X}, \Delta_{\mathcal{X}}), \mathcal{L}); \mathcal{X}_0}) \\ & := \max\{c \in \mathbb{R} \mid (\mathcal{X}, \Delta_{\mathcal{X}} + D_{((\mathcal{X}, \Delta_{\mathcal{X}}), \mathcal{L})} + c\mathcal{X}_0) \text{ is a sub-lc pair}\}. \end{aligned}$$

Definition 1.3. A log Fano pair (X, Δ) is said to be *K-semistable* (resp., *Ding semistable*) if $\text{DF}_{\Delta}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq 0$ (resp., $\text{Ding}_{\Delta}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq 0$) holds for any test configuration $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$ of (X, L) .

In the papers [Der16, BHJ17], they systematically treat the *norm* of test configurations.

Definition 1.4 (see [Der16, BHJ17]). For a test configuration $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$ of (X, L) , let us consider the normalization of the graph

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{Y} & \\ \Pi \swarrow & & \searrow \Theta \\ X \times \mathbb{P}^1 & & \mathcal{X} \end{array}$$

of the rational map $X \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathcal{X}$. The *minimal norm* (resp., the *non-archimedean J-norm*) $\|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_m$ (resp., $J^{\text{NA}}(\mathcal{X}, \mathcal{L})$) of $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$ is defined as follows:

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_m &:= \frac{(\Pi^* p_1^* L \cdot \Theta^* \mathcal{L}^{\cdot n})}{(L^n)} - \frac{n(\mathcal{L}^{\cdot n+1})}{(n+1)(L^n)}, \\ J^{\text{NA}}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) &:= \frac{(\Pi^* p_1^* L^n \cdot \Theta^* \mathcal{L})}{(L^n)} - \frac{(\mathcal{L}^{\cdot n+1})}{(n+1)(L^n)}. \end{aligned}$$

Remark 1.5. (1) The definition of test configurations in [Fuj19a] and the above definition differs. In [Fuj19a], we consider $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ over \mathbb{A}^1 . If we canonically compactify $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{A}^1$ over \mathbb{P}^1 , then we get the same notion.

(2) In [Fuj19a] and [BBJ15], we focused on $J^{\text{NA}}(\mathcal{X}, \mathcal{L})$. Recently, I recognized that considering $\|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_m$ is more natural in order to prove a “valuative criterion” for K-stability of log Fano pairs. It is the purpose of the proceedings explaining this observation.

Definition 1.6. A log Fano pair (X, Δ) is said to be *uniformly K-stable* (resp., *uniformly Ding stable*) if there exists $\delta \in (0, 1)$ such that $\text{DF}_\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq \delta \cdot J^{\text{NA}}(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ (resp., $\text{Ding}_\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq \delta \cdot J^{\text{NA}}(\mathcal{X}, \mathcal{L})$) holds for any test configuration $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$ of (X, L) .

We recall basic results:

Proposition 1.7. *Let $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$ be a test configuration of (X, L) with \mathcal{L} ample over \mathbb{P}^1 .*

(1) *We have the inequalities*

$$\frac{1}{n} \cdot J^{\text{NA}}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \leq \|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_m \leq n \cdot J^{\text{NA}}(\mathcal{X}, \mathcal{L}).$$

(2) *We have $\|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_m \geq 0$, and equality holds if and only if $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$ is trivial.*

(3) *We have $\text{DF}_\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq \text{Ding}_\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L})$, and equality holds if and only if $\mathcal{L} \sim_{\mathbb{Q}, \mathbb{P}^1} -(K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{X}})$ and the pair $(\mathcal{X}, \Delta_{\mathcal{X}} + \mathcal{X}_0)$ is an lc pair. (In particular, we have $\text{DF}_\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = \text{Ding}_\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ for any special test configuration.)*

Proof. (1) See [BHJ17, Proposition 7.8 and Remark 7.12].

(2) See [BHJ17] or [Der16].

(3) See [Ber16] or [Fuj18]. \square

2. A VALUATIVE CRITERION AND THE PURPOSE OF THIS PROCEEDINGS

We recall “a valuative criterion” for the K-stability of log Fano pairs introduced in [Li17] and [Fuj19a] independently.

Definition 2.1. Let F be a prime divisor over X , that is, there exists a log resolution $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X$ of (X, Δ) such that F is a prime divisor on \tilde{X} . (The following definitions does not depend on the choice of σ .)

- (1) Let $A(F)$ be the *log discrepancy* of (X, Δ) along F , that is, $A(F) := 1 + \text{ord}_F(K_{\tilde{X}} - \sigma^*(K_X + \Delta))$.
- (2) The divisor F is said to be *dreamy* if the graded \mathbb{k} -algebra

$$\bigoplus_{k, j \geq 0} H^0(\tilde{X}, \sigma^*(krL - jF))$$

is finitely generated, where r is some (hence, any) positive integer with rL Cartier.

- (3) For any $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, let us set

$$\text{vol}(L - xF) := \text{vol}_{\tilde{X}}(\sigma^*L - xF)$$

(see [Laz04a, Laz04b]). We define

$$\tau(F) := \min\{\tau \in \mathbb{R}_{>0} \mid \text{vol}(L - \tau F) = 0\}.$$

- (4) (see [BJ17]) We set

$$S(F) := \frac{1}{(L^n)} \int_0^\infty \text{vol}(L - xF) dx.$$

- (5) (see [Fuj19a, Li17]) We set

$$\begin{aligned} \beta(F) &:= (L^n)(A(F) - S(F)), \\ j(F) &:= (L^n)(\tau(F) - S(F)). \end{aligned}$$

- (6) (see [Fuj19b]) We set

$$\hat{\beta}(F) := \frac{\beta(F)}{A(F)(L^n)} = 1 - \left(\frac{A(F)}{S(F)} \right)^{-1}.$$

More generally, for a divisorial valuation $v = c \cdot \text{ord}_F$ with $c \in \mathbb{Q}_{>0}$, we naturally define $A(v) := c \cdot A(F)$, $\tau(v) := c \cdot \tau(F)$, $S(v) := c \cdot S(F)$, etc. See [Fuj19a] for detail.

In [Fuj19a], I proved the following “valuative criterion” for the uniform K-stability of (X, Δ) . For the K-semistability, the result was proved by [Li17] and [Fuj19a] independently.

Theorem 2.2 (see [Fuj19a]). *The following are equivalent:*

- (1) (X, Δ) is uniformly K-stable.
- (2) There exists $\delta \in (0, 1)$ such that $\beta(F) \geq \delta \cdot j(F)$ holds for any prime divisor F over X .
- (3) There exists $\delta \in (0, 1)$ such that $\beta(F) \geq \delta \cdot j(F)$ holds for any prime divisor F over X which is dreamy.

Nowadays, it has been known that the invariant $\hat{\beta}(F)$, more precisely, the invariant

$$\frac{A(F)}{S(F)},$$

is more important than $\beta(F)$ and $j(F)$. See, for example, [FO18, BJ17]. Actually, I proved the following result in [Fuj19b]:

Theorem 2.3 (see [Fuj19b]). *The following are equivalent:*

- (1) (X, Δ) is uniformly K-stable.
- (2) There exists $\varepsilon \in (0, 1)$ such that $\hat{\beta}(F) \geq \varepsilon$ holds for any prime divisor F over X .
- (3) There exists $\varepsilon \in (0, 1)$ such that $\hat{\beta}(F) \geq \varepsilon$ holds for any prime divisor F over X which is dreamy.

The purpose of this proceedings is to prove Theorem 2.3 directly, by changing the original proof of Theorem 2.2 a bit.

Remark 2.4. It is more convenient in many situations that considering not only divisorial valuations but also all valuations in order to consider K-stability of (X, Δ) . Actually, in [BJ17], they showed that the uniform K-stability of (X, Δ) is equivalent to

$$\inf_v \frac{A(v)}{S(v)} > 1,$$

where v runs through all valuations on X with $A(v) < +\infty$. See [BJ17] in detail.

3. FROM TEST CONFIGURATIONS TO $\hat{\beta}$

Let $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$ be a test configuration of (X, L) with \mathcal{L} ample over \mathbb{P}^1 and \mathcal{X}_0 integral. As we have seen in [Fuj19a, Proposition 2.10], we can naturally get the divisorial valuation $v_{\mathcal{X}_0}$ on X obtained by the restriction of the valuation $\text{ord}_{\mathcal{X}_0}$. The following theorem is important in [Fuj19a].

Theorem 3.1 (see [Fuj19a, Theorem 5.1]). *We have*

$$\mathrm{DF}_\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = A(v_{\mathcal{X}_0}) \cdot \hat{\beta}(v_{\mathcal{X}_0}) = A(v_{\mathcal{X}_0}) - S(v_{\mathcal{X}_0}).$$

The following theorem is important in this proceedings.

Theorem 3.2. *We have*

$$\|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_m = A(v_{\mathcal{X}_0}) \cdot \left(1 - \hat{\beta}(v_{\mathcal{X}_0})\right) = S(v_{\mathcal{X}_0}).$$

Proof. The proof is similar to the proof of [Fuj19a, Theorem 5.1]. Since \mathcal{X}_0 is integral, we may assume that $\mathcal{L} = -(K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{X}})$. Let

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{Y} & \\ \Pi \swarrow & & \searrow \Theta \\ X \times \mathbb{P}^1 & & \mathcal{X} \end{array}$$

be the normalization of the graph. Set

$$\begin{aligned} B &:= K_{\mathcal{Y}/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{Y}} - \Pi^*(K_{X \times \mathbb{P}^1/\mathbb{P}^1} + \Delta_{X \times \mathbb{P}^1}) \\ &\quad - (K_{\mathcal{Y}/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{Y}} - \Theta^*(K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{X}})), \end{aligned}$$

where $\Delta_{\mathcal{Y}}$ and $\Delta_{X \times \mathbb{P}^1}$ are the strict transforms of $\Delta_{\mathcal{X}}$. By [BHJ17, Proposition 4.11], we get

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_{\mathcal{X}_0} B &= \mathrm{ord}_{\mathcal{X}_0} (K_{\mathcal{Y}/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{Y}} - \Pi^*(K_{X \times \mathbb{P}^1/\mathbb{P}^1} + \Delta_{X \times \mathbb{P}^1})) \\ &= A(v_{\mathcal{X}_0}). \end{aligned}$$

Therefore, we have

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_m &= \frac{1}{(L^n)} \left(\frac{1}{n+1} (\mathcal{L}^{n+1}) + (\Theta^* \mathcal{L}^n \cdot (\Pi^* p_1^* L - \Theta^* \mathcal{L})) \right) \\ &= -\mathrm{DF}_\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) + \frac{1}{(L^n)} (\mathcal{L}^n \cdot \Theta_* B) \\ &= -A(v_{\mathcal{X}_0}) \cdot \hat{\beta}(v_{\mathcal{X}_0}) + \frac{1}{(L^n)} (\mathcal{L}^n \cdot A(v_{\mathcal{X}_0}) \mathcal{X}_0) \\ &= A(v_{\mathcal{X}_0}) \cdot \left(1 - \hat{\beta}(v_{\mathcal{X}_0})\right) \end{aligned}$$

by Theorem 3.1. □

Remark 3.3. In [Fuj19a], I showed the equality

$$J^{\mathrm{NA}}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = \frac{1}{(L^n)} \cdot j(v_{\mathcal{X}_0}).$$

Thanks to Theorem 3.2, it is more natural to focus on $\|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_m$ than to focus on $J^{\mathrm{NA}}(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ in order to evaluate $\hat{\beta}(F)$.

4. THE UNIFORM K-STABILITY AND THE UNIFORM DING STABILITY

Let $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$ be a test configuration of (X, L) with \mathcal{L} ample over \mathbb{P}^1 . In [Fuj19a, Section 3], I considered the behavior of the invariant

$$\text{Ding}_\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) - \delta \cdot J^{\text{NA}}(\mathcal{X}, \mathcal{L}),$$

under the processes of certain minimal model programs (MMP, in short) achieved in the important paper [LX14]. In the proceedings, we consider the behavior of the invariant

$$\text{Ding}_\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) - \delta \cdot \|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_m.$$

Actually, the invariant also non-increases under the processes of certain MMP in [LX14]. We briefly see the proof. The proof is more or less same as the argument in [Fuj19a, Section 3].

Theorem 4.1 (cf., [Fuj19a, Theorem 3.1]). *Let $\pi: \mathcal{X}^{\text{lc}} \rightarrow \mathcal{X}$ be the log canonical modification of $(\mathcal{X}, \Delta_{\mathcal{X}} + \mathcal{X}_0)$, that is, the pair $(\mathcal{X}^{\text{lc}}, \Delta_{\mathcal{X}^{\text{lc}}} + \mathcal{X}_0^{\text{lc}})$ is lc and $K_{\mathcal{X}^{\text{lc}}/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{X}^{\text{lc}}} + \mathcal{X}_0^{\text{lc}}$ is π -ample. Let E be the \mathbb{Q} -divisor supported on $\mathcal{X}_0^{\text{lc}}$ with*

$$E \sim_{\mathbb{Q}} K_{\mathcal{X}^{\text{lc}}/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{X}^{\text{lc}}} + \pi^* \mathcal{L}.$$

(Of course, E is π -ample.) For any $0 < t \ll 1$ with $t \in \mathbb{Q}$, let us set the ample \mathbb{Q} -line bundle

$$\mathcal{L}_t := \pi^* \mathcal{L} + tE.$$

Then, for any $\delta \in [0, 1/n]$, we have

$$\text{Ding}_\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) - \delta \cdot \|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_m \geq \text{Ding}_\Delta(\mathcal{X}^{\text{lc}}, \mathcal{L}_t^{\text{lc}}) - \delta \cdot \|(\mathcal{X}^{\text{lc}}, \mathcal{L}_t^{\text{lc}})\|_m.$$

Proof. From the definition of E , we have

$$D_t := D_{((\mathcal{X}^{\text{lc}}, \Delta_{\mathcal{X}^{\text{lc}}}), \mathcal{L}_t^{\text{lc}})} = -(1+t)E.$$

Let $\mathcal{X}_0^{\text{lc}} = \sum_{i=1}^p E_i$ be the irreducible decomposition and let us set $E = \sum_{i=1}^p e_i E_i$. We may assume that $e_1 \leq \dots \leq e_p$. Under the setting, we have

$$\text{lct}(\mathcal{X}^{\text{lc}}, \Delta_{\mathcal{X}^{\text{lc}}} + D_t; \mathcal{X}_0^{\text{lc}}) = 1 + (1+t)e_1.$$

Let

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{Y} & \\ \pi \swarrow & & \searrow \theta \\ X \times \mathbb{P}^1 & & \mathcal{X}^{\text{lc}} \end{array}$$

be the normalization of the graph. Moreover, let us set $\phi_t := \Theta^* \mathcal{L}_t^{\text{lc}}$ and $\phi_{\text{triv}} := \Pi^* p_1^* L$. Then we have

$$\begin{aligned} \text{Ding}_\Delta(\phi_t) &= -\frac{(\phi_t^{n+1})}{(n+1)(L^n)} + (1+t)e_1, \\ \|\phi_t\|_m &= \frac{1}{(L^n)} \left((\phi_{\text{triv}} \cdot \phi_t^n) - \frac{n}{n+1}(\phi_t^{n+1}) \right). \end{aligned}$$

Thus we get

$$\begin{aligned} & (n+1)(L^n) ((\text{Ding}_\Delta(\phi_0) - \delta \cdot \|\phi_0\|_m) - (\text{Ding}_\Delta(\phi_t) - \delta \cdot \|\phi_t\|_m)) \\ &= -(\phi_0^{n+1}) + (n+1)e_1(L^n) - \delta(n+1)(\phi_{\text{triv}} \cdot \phi_0^n) + \delta n(\phi_0^{n+1}) \\ & \quad - (-(\phi_t^{n+1}) + (n+1)(1+t)e_1(L^n) - \delta(n+1)(\phi_{\text{triv}} \cdot \phi_t^n) + \delta n(\phi_t^{n+1})) \\ &= (1-\delta n) ((\phi_t^{n+1}) - (\phi_0^{n+1})) - t(n+1)e_1(L^n) \\ & \quad + \delta(n+1)(\phi_{\text{triv}} \cdot (\phi_t^n - \phi_0^n)) \\ &= (1-\delta n) \sum_{j=0}^n ((\phi_t^{j+1} \cdot \phi_0^{n-j}) - (\phi_t^j \cdot \phi_0^{n+1-j}) - te_1(L^n)) \\ & \quad + \delta(n+1) \sum_{j=0}^{n-1} ((\phi_{\text{triv}} \cdot \phi_t^{j+1} \cdot \phi_0^{n-1-j}) - (\phi_{\text{triv}} \cdot \phi_t^j \cdot \phi_0^{n-j}) - te_1(L^n)) \\ &= (1-\delta n)t \sum_{j=0}^n (\phi_t^j \cdot \phi_0^{n-j} \cdot \Theta^*(E - e_1 \mathcal{X}_0^{\text{lc}})) \\ & \quad + \delta(n+1)t \sum_{j=0}^{n-1} (\phi_{\text{triv}} \cdot \phi_t^j \cdot \phi_0^{n-1-j} \cdot \Theta^*(E - e_1 \mathcal{X}_0^{\text{lc}})) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

This completes the proof. \square

Theorem 4.2 (cf. [Fuj19a, Theorem 3.2]). *Assume that $(\mathcal{X}, \Delta_{\mathcal{X}} + \mathcal{X}_0)$ is lc. Let $\sigma: \mathcal{X}^0 \rightarrow \mathcal{X}$ be a \mathbb{G}_m -equivariant small \mathbb{Q} -factorial modification. Fix $l \gg 0$ such that*

$$\mathcal{H}^0 := \frac{1}{l+1} (l\mathcal{L}^0 - (K_{\mathcal{X}^0/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{X}^0}))$$

is semiample and big over \mathbb{P}^1 , where $\mathcal{L}^0 := \sigma^ \mathcal{L}$. As in [LX14, Theorem 3], let us consider a $(K_{\mathcal{X}^0/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{X}^0})$ -MMP*

$$\mathcal{X}^0 \dashrightarrow \mathcal{X}^1 \dashrightarrow \dots \dashrightarrow \mathcal{X}^k$$

over \mathbb{P}^1 with scaling \mathcal{H}^0 . Set $\lambda_0 := l+1$ and

$$\lambda_{j+1} := \min\{\lambda \mid K_{\mathcal{X}^j/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{X}^j} + \lambda \mathcal{H}^j \text{ is nef over } \mathbb{P}^1\},$$

where \mathcal{H}^j is the strict transform of \mathcal{H}^0 on \mathcal{X}^j . Then we get

$$l + 1 = \lambda_0 > \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k > \lambda_{k+1} = 1$$

(see [LX14, Theorem 3]). For any $0 \leq j \leq k-1$ and $\lambda \in [\lambda_{j+1}, \lambda_j] \cap \mathbb{Q}$, let us set

$$\mathcal{L}_\lambda^j := \frac{1}{\lambda - 1} (K_{\mathcal{X}^j/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{X}^j} + \lambda \mathcal{H}^j).$$

Moreover, let $(\mathcal{X}^{\text{ac}}, \mathcal{L}^{\text{ac}})/\mathbb{P}^1$ be the ample model of $(\mathcal{X}^k, \mathcal{L}_{\lambda_k}^k)$ over \mathbb{P}^1 . Then, for any $\delta \in [0, 1/n]$, we have

$$\text{Ding}_\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) - \delta \cdot \|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_m \geq \text{Ding}_\Delta(\mathcal{X}^{\text{ac}}, \mathcal{L}^{\text{ac}}) - \delta \cdot \|(\mathcal{X}^{\text{ac}}, \mathcal{L}^{\text{ac}})\|_m.$$

Proof. Let E be the \mathbb{Q} -divisor on \mathcal{X}^0 supported on \mathcal{X}_0^0 such that $E \sim_{\mathbb{Q}} K_{\mathcal{X}^0/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{X}^0} + \mathcal{H}^0$. Then we have

$$D_\lambda := D_{((\mathcal{X}^j, \Delta_{\mathcal{X}^j}), \mathcal{L}_\lambda^j)} = -\frac{\lambda}{\lambda - 1} E^j,$$

where E^j is the strict transform of E on \mathcal{X}^j . In order to prove Theorem 4.2, it is enough to show the inequality

$$\text{Ding}_\Delta(\mathcal{X}^j, \mathcal{L}_{\lambda_j}^j) - \delta \cdot \|(\mathcal{X}^j, \mathcal{L}_{\lambda_j}^j)\|_m \geq \text{Ding}_\Delta(\mathcal{X}^j, \mathcal{L}_{\lambda_{j+1}}^j) - \delta \cdot \|(\mathcal{X}^j, \mathcal{L}_{\lambda_{j+1}}^j)\|_m$$

for any $0 \leq j \leq k-1$. Let

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{Y} & \\ \pi \swarrow & & \searrow \theta \\ X \times \mathbb{P}^1 & & \mathcal{X}^j \end{array}$$

be the normalization of the graph. Let $E^j = \sum_{i=1}^p E_i$ be the irreducible decomposition and let us set $E^j = \sum_{i=1}^p e_i E_i$. We may assume that $e_1 \leq \cdots \leq e_p$. Moreover, let us set $\phi_\lambda := \Theta^* \mathcal{L}_\lambda^j$ and $\phi_{\text{triv}} := \Pi^* p_1^* L$. Then we have

$$\text{Ding}_\Delta(\phi_\lambda) = -\frac{(\phi_\lambda^{n+1})}{(n+1)(L^n)} + \frac{\lambda}{\lambda - 1} e_1.$$

Note that

$$\phi_{\lambda_{j+1}} - \phi_{\lambda_j} = -D_{\lambda_{j+1}} + D_{\lambda_j} = \left(\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_{j+1} - 1} - \frac{\lambda_j}{\lambda_j - 1} \right) E^j.$$

Thus we have

$$\begin{aligned}
& (n+1)(L^n) \left((\text{Ding}_\Delta(\phi_{\lambda_j}) - \delta \cdot \|\phi_{\lambda_j}\|_m) - (\text{Ding}_\Delta(\phi_{\lambda_{j+1}}) - \delta \cdot \|\phi_{\lambda_{j+1}}\|_m) \right) \\
&= -(\phi_{\lambda_j}^{n+1}) + \frac{\lambda_j}{\lambda_j - 1} (n+1)e_1(L^n) - \delta(n+1)(\phi_{\text{triv}} \cdot \phi_{\lambda_j}^n) + \delta n(\phi_{\lambda_j}^{n+1}) \\
&\quad - \left(-(\phi_{\lambda_{j+1}}^{n+1}) + \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_{j+1} - 1} (n+1)e_1(L^n) - \delta(n+1)(\phi_{\text{triv}} \cdot \phi_{\lambda_{j+1}}^n) + \delta n(\phi_{\lambda_{j+1}}^{n+1}) \right) \\
&= (1 - \delta n) \left((\phi_{\lambda_{j+1}}^{n+1}) - (\phi_{\lambda_j}^{n+1}) \right) - \left(\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_{j+1} - 1} - \frac{\lambda_j}{\lambda_j - 1} \right) (n+1)e_1(L^n) \\
&\quad + \delta(n+1)(\phi_{\text{triv}} \cdot (\phi_{\lambda_{j+1}}^n - \phi_{\lambda_j}^n)) \\
&= \left(\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_{j+1} - 1} - \frac{\lambda_j}{\lambda_j - 1} \right) \left((1 - \delta n) \sum_{j=0}^n (\phi_{\lambda_{j+1}}^j \cdot \phi_{\lambda_j}^{n-j} \cdot \Theta^*(E - e_1 \mathcal{X}_0^j)) \right) \\
&\quad + \delta(n+1) \sum_{j=0}^{n-1} \left(\phi_{\text{triv}} \cdot \phi_{\lambda_{j+1}}^j \cdot \phi_{\lambda_j}^{n-1-j} \cdot \Theta^*(E - e_1 \mathcal{X}_0^j) \right) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

This completes the proof. \square

Theorem 4.3 (cf. [Fuj19a, Theorem 3.3]). *Assume that $(\mathcal{X}, \Delta_{\mathcal{X}} + \mathcal{X}_0)$ is lc and $\mathcal{L} = -(K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{X}})$. Assume also that there exists a birational map*

$$\mathcal{X} \dashrightarrow \mathcal{X}^s$$

over \mathbb{P}^1 such that $(\mathcal{X}^s, -(K_{\mathcal{X}^s/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{X}^s}))/\mathbb{P}^1$ is a special test configuration and the discrepancy of $(\mathcal{X}, \Delta_{\mathcal{X}})$ along \mathcal{X}_0^s is equal to zero. (By [LX14, Theorem 4], such birational map always exists after a base change of \mathcal{X} over \mathbb{P}^1 .) Then, for any $\delta \in [0, 1/n]$, we have

$$\text{Ding}_\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) - \delta \cdot \|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_m \geq \text{Ding}_\Delta(\mathcal{X}^s, \mathcal{L}^s) - \delta \cdot \|(\mathcal{X}^s, \mathcal{L}^s)\|_m.$$

Proof. There exists the extraction $\pi: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ of \mathcal{X}_0^s and we have $K_{\mathcal{X}'/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{X}'} = \pi^*(K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{X}})$. Let

$$\begin{array}{ccc}
X \times \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{\Pi} & \mathcal{Y} \xrightarrow{\Xi} \mathcal{X}^s \\
& & \downarrow \Theta \\
& & \mathcal{X}'
\end{array}$$

be a common resolution of the base locus of birational maps. Set $\phi_0 := \Theta^*(-(K_{\mathcal{X}'/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{X}'}))$, $\phi_1 := \Xi^*(-(K_{\mathcal{X}^s/\mathbb{P}^1} + \Delta_{\mathcal{X}^s}))$ and $\phi_{\text{triv}} := \Pi^*p_1^*L$. Let E be the \mathbb{Q} -divisor on \mathcal{Y} supported on \mathcal{Y}_0 with $E \sim_{\mathbb{Q}} \phi_1 - \phi_0$. Since

$-E$ is Ξ -nef and Ξ -exceptional, E is effective by negativity lemma. Therefore, we have

$$\begin{aligned}
& (n+1)(L^n) ((\text{Ding}_\Delta(\phi_0) - \delta \cdot \|\phi_0\|_m) - (\text{Ding}_\Delta(\phi_1) - \delta \cdot \|\phi_1\|_m)) \\
&= -(\phi_0^{n+1}) - \delta(n+1)(\phi_{\text{triv}} \cdot \phi_0^n) + \delta n(\phi_0^{n+1}) \\
&- \left(-(\phi_1^{n+1}) - \delta(n+1)(\phi_{\text{triv}} \cdot \phi_1^n) + \delta n(\phi_1^{n+1}) \right) \\
&= (1 - \delta n) ((\phi_1^{n+1}) - (\phi_0^{n+1})) + \delta(n+1)(\phi_{\text{triv}} \cdot (\phi_1^n - \phi_0^n)) \\
&= (1 - \delta n) \sum_{j=0}^n (\phi_1^j \cdot \phi_0^{n-j} \cdot E) + \delta(n+1) \sum_{j=0}^{n-1} (\phi_{\text{triv}} \cdot \phi_1^j \cdot \phi_0^{n-1-j} \cdot E) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

This completes the proof. \square

Corollary 4.4 (cf. [Fuj19a, Corollary 3.4]). *Take any $\delta \in [0, 1/n]$. The following are equivalent:*

- (1) *For any test configuration $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$, we have the inequality $\text{DF}_\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq \delta \cdot \|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_m$.*
- (2) *For any test configuration $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$, we have the inequality $\text{Ding}_\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq \delta \cdot \|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_m$.*
- (3) *For any special test configuration $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$, we have the inequality $\text{DF}_\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq \delta \cdot \|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_m$.*

Proof. Follows immediately from Theorems 4.1, 4.2 and 4.3. \square

5. A SIMPLIFIED PROOF

We recall the following theorem:

Theorem 5.1 ([Fuj19a, Theorem 4.1]). *Assume that there exists $\delta \in [0, 1)$ such that, for any test configuration $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$ of (X, L) , the inequality $\text{Ding}_\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq \delta \cdot J^{\text{NA}}(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ holds. Then, for any prime divisor F over X , we have $\beta(F) \geq \delta \cdot j(F)$.*

Remark 5.2. One of the idea of the proof of Theorem 5.1, which was already appeared in [Fuj18], is to consider a sequence of test configurations and taking a kind of limit. The proof is technical and complicated. It is an interesting problem to simplify the proof of the Theorem 5.1. In particular, I want to rephrase Theorem 5.1 without using the language of $J^{\text{NA}}(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ and $j(F)$. More precisely, I want to get a direct proof of Corollary 5.4.

We also recall the following easy lemma, proven by the log-concavity of the volume function (and the restricted volume function).

Lemma 5.3 (see [FO18, Lemma 1.2] and [Fuj19b, Theorem 2.3]). *For any prime divisor F over X , we have*

$$\frac{1}{n+1}\tau(F) \leq \frac{j(F)}{(L^n)} \leq \frac{n}{n+1}\tau(F).$$

As a consequence, we have the following corollary.

Corollary 5.4. *If there exists $\delta \in [0, 1)$ such that, for any test configuration $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$ of (X, L) , the inequality $\text{Ding}_\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq \delta \cdot \|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_m$ holds. Then, for any prime divisor F over X , we have*

$$\hat{\beta}(F) \geq \frac{\delta}{n(n+1)}.$$

Proof. By Proposition 1.7 (1) and Theorem 5.1, we have $\beta(F) \geq (\delta/n)j(F)$. If $\tau(F) \leq A(F)$, then we have

$$\hat{\beta}(F) \geq 1 - \left(\frac{A(F)}{\frac{n}{n+1}\tau(F)} \right)^{-1} \geq \frac{1}{n+1}$$

by Lemma 5.3. Thus we may assume that $\tau(F) > A(F)$. In this case, by Lemma 5.3, we have

$$\hat{\beta}(F) \geq \frac{\delta}{n} \cdot \frac{j(F)}{A(F)(L^n)} \geq \frac{\delta}{n(n+1)} \cdot \frac{\tau(F)}{A(F)} > \frac{\delta}{n(n+1)}.$$

Thus the assertion follows. \square

As a consequence, although there is an unsatisfactory point (the proof of Corollary 5.4), we can get a simple proof of Theorem 2.3.

Simplified proof of Theorem 2.3. By Corollary 4.4, we have already seen that the following three conditions are equivalent:

- (i) (X, Δ) is uniformly K-stable.
- (ii) (X, Δ) is uniformly Ding stable.
- (iii) There exists $\delta \in (0, 1)$ such that, for any special test configuration $(\mathcal{X}, \mathcal{L})/\mathbb{P}^1$ of (X, L) , we have $\text{DF}_\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq \delta \cdot \|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_m$.

By Corollary 5.4, the condition (ii) implies that the condition (2) in Theorem 2.3. Obviously, the condition (2) in Theorem 2.3 implies the condition (3) in Theorem 2.3. By Theorems 3.1 and 3.2, the condition (3) in Theorem 2.3 implies that the condition (iii). \square

REFERENCES

- [BBJ15] R. Berman, S. Boucksom and M. Jonsson, *A variational approach to the Yau-Tian-Donaldson conjecture*, arXiv:1509.04561v1.
- [Ber16] R. Berman, *K-polystability of Q-Fano varieties admitting Kähler-Einstein metrics*, Invent. Math. **203** (2016), no. 3, 973–1025.

- [BHJ17] S. Boucksom, T. Hisamoto and M. Jonsson, *Uniform K-stability, Duistermaat-Heckman measures and singularities of pairs*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **67** (2017), no. 2, 743–841.
- [BJ17] H. Blum and M. Jonsson, *Thresholds, valuations, and K-stability*, arXiv:1706.04548v1.
- [Der16] R. Dervan, *Uniform stability of twisted constant scalar curvature Kähler metrics*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2016**, no. 15, 4728–4783.
- [Don02] S. Donaldson, *Scalar curvature and stability of toric varieties*, J. Differential Geom. **62** (2002), no. 2, 289–349.
- [Fuj18] K. Fujita, *Optimal bounds for the volumes of Kähler-Einstein Fano manifolds*, Amer. J. Math. **140** (2018), no. 2, 391–414.
- [Fuj19a] K. Fujita, *A valuative criterion for uniform K-stability of \mathbb{Q} -Fano varieties*, J. Reine Angew. Math. **751** (2019), 309–338.
- [Fuj19b] K. Fujita, *Uniform K-stability and plt blowups of log Fano pairs*, Kyoto J. Math. **59** (2019), no. 2, 399–418.
- [FO18] K. Fujita and Y. Odaka, *On the K-stability of Fano varieties and anti-canonical divisors*, Tohoku Math. J. **70** (2018), no. 4, 511–521.
- [KM98] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti. Cambridge Tracts in Math., **134**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [Laz04a] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry, I: Classical setting: line bundles and linear series*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. (3) **48**, Springer, Berlin, 2004.
- [Laz04b] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry, II: Positivity for Vector Bundles, and Multiplier Ideals*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. (3) **49**, Springer, Berlin, 2004.
- [Li17] C. Li, *K-semistability is equivariant volume minimization*, Duke Math. J. **166** (2017), no. 16, 3147–3218.
- [LX14] C. Li and C. Xu, *Special test configuration and K-stability of Fano varieties*, Ann. of Math. **180** (2014), no. 1, 197–232.
- [Oda13] Y. Odaka, *A generalization of the Ross-Thomas slope theory*, Osaka. J. Math. **50** (2013), no. 1, 171–185.
- [Tia97] G. Tian, *Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature*, Invent. Math. **130** (1997), no. 1, 1–37.
- [Wan12] X. Wang, *Height and GIT weight*, Math. Res. Lett. **19** (2012), no. 4, 909–926.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA
UNIVERSITY, TOYONAKA, OSAKA 560-0043, JAPAN
E-mail address: fujita@math.sci.osaka-u.ac.jp

MOVABLE BEND AND BREAK FOR SECTIONS OF DEL PEZZO FIBRATIONS

SHO TANIMOTO

ABSTRACT. This is a report of the author's talk at Algebra Symposium 2019 held at Tohoku University. We discuss some improvements of Mori's Bend and Break for sections of del Pezzo fibrations over \mathbb{P}^1 .

1. INTRODUCTION

One of the main objects in diophantine geometry is a del Pezzo surface S defined over a number field k , i.e., a smooth geometrically integral projective surface such that the anti-canonical divisor $-K_S$ is ample. One can show that the degree $d = (-K_S)^2$ takes an integer value between 1 and 9, and we have the following classification of del Pezzo surfaces over an algebraic closure \bar{k} : let $\bar{S} = S \otimes_k \bar{k}$ and we have

- when $d = 9$, \bar{S} is isomorphic to \mathbb{P}^2 ;
- when $d = 8$, \bar{S} is isomorphic to $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ or the blow up of the plane at one point;
- when $d = 7$, \bar{S} is isomorphic to the blow up of the plane at two distinct points;
- when $d = 6$, \bar{S} is isomorphic to the blow up of the plane at three non-colinear points;
- when $d = 5$, \bar{S} is isomorphic to the blow up of the plane at four points such that any three points are not colinear;
- when $d = 4$, \bar{S} is isomorphic to a complete intersection of two quadrics in \mathbb{P}^4 ;
- when $d = 3$, \bar{S} is isomorphic to a smooth cubic surface in \mathbb{P}^3 ;
- when $d = 2$, \bar{S} is isomorphic to a double cover of the plane ramified along a smooth quartic;
- when $d = 1$, \bar{S} is isomorphic to a double cover of a quadric cone ramified along a degree 6 curve.

Moreover even when $1 \leq d \leq 4$, the surface \bar{S} is also realized as the blow up of the plane at $9 - d$ general points. Thus del Pezzo surfaces are geometrically rather well-understood objects.

However their arithmetic aspects remain mysterious and there are a lots of arithmetic questions one can ask for these surfaces. Among them the most important problems focus on the set $S(k)$ of rational points. Some of the natural questions on $S(k)$ are:

- (1) Existence of rational points;
- (2) Density of rational points;
- (3) Asymptotic formulas for the counting functions of rational points.

It is a well-known fact that any smooth conic satisfies the Hasse principle, i.e., the existence of rational points is equivalent to the existence of local points at every place of k . However this feature fails for del Pezzo surfaces and so far all failures of the Hasse principle have been

explained using the machinery of Brauer-Manin obstructions initiated in [Man86]. Moreover Colliot-Thélène conjecture predicts that the set of rational points is dense in the Brauer-Manin set and there are extensive studies on this subject. Readers interested in this story should consult [VA13].

The Zariski density of the set of rational points on a del Pezzo surface has been well studied too. Indeed if Colliot-Thélène conjecture is correct then this implies that $S(k)$ is Zariski dense as soon as it is non-empty. This prediction suggests that the set $S(k)$ is always Zariski dense for any degree 1 del Pezzo surface as the base locus of the anticanonical linear system always contains a unique rational point. However, this prediction is also out of reach to be proved at this moment.

The third question is about the asymptotic formula for the counting function of rational points of bounded height on a del Pezzo surface after removing the contribution from the exceptional set and Manin's Conjecture formulated in a series of papers [BM90], [Pey95], [BT98], [Pey03], [Pey17], and [LST18] predicts an explicit asymptotic formula in terms of geometric invariants of the underlying variety. There are extensive studies of this conjecture for del Pezzo surfaces, but so far there is no single smooth cubic surface defined over a number field which Manin's Conjecture has been established. We recommend interested readers to take a look at a survey paper on this subject [Bro07].

In this survey paper we would like to consider a del Pezzo surface over a different field, e.g., over $\mathbb{C}(t)$. In this setting, Graber-Harris-Starr established the following vastly general theorem:

Theorem 1.1. [GHS03] *Let B be a smooth projective curve defined over an algebraically closed field k of characteristic 0. Let X be a smooth projective geometrically rationally connected variety defined over the function field $k(B)$. Then X admits a $k(B)$ -rational point.*

Thus any del Pezzo surface defined over $\mathbb{C}(t)$ admits a rational point. Proving this theorem for del Pezzo surfaces is not so hard and one can appeal to the classification of minimal rational surfaces over non-closed fields. See [Has09] for more details. Weak approximation also has been studied in great details attested by [HT06], [HT08], [Xu12b], [Xu12a], [Tia15]. The situation for del Pezzo surfaces seems to be almost complete, but there are still some open cases of del Pezzo surfaces of degree 1 and 2.

However, the situation on Manin's Conjecture in the settings of function fields is not satisfactory, and there seem to be few results in this direction compared to the situation over number fields. Over $\mathbb{C}(t)$, using Batyrev's heuristics, Manin's Conjecture can be interpreted as the following geometric problems:

Suppose we have a del Pezzo surface X defined over $\mathbb{C}(t)$ and we fix an integral model $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$. We denote the space of sections for π by $\text{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)$. By valuative criterion there is a bijection between $\text{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)(\mathbb{C})$ and $X(\mathbb{C}(t))$. Then we ask

- (1) What are the dimension and the number of components of bounded height for $\text{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)$?
- (2) Does the space $\text{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)$ enjoy some cohomological stability when it is ordered by height?

In [LT19c] and [LT19e], Brian Lehmann and I have started a systematic study of Question (1) in the settings of trivial families of smooth Fano varieties using the geometry of the invariants appearing in Manin’s Conjecture, which is developed in a series of papers [HTT15], [LTT18], [HJ17], [LT17], [Sen17], [LST18], and [LT19d]. We obtained a satisfactory answer for the dimension of components of $\text{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)$ and classify irreducible components of $\text{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)$ for most Fano 3-folds of Picard rank 1.

In [LT19a] we take one step further and analyze sections of del Pezzo fibrations over \mathbb{P}^1 . We obtain a satisfactory answer for a question about the dimension of $\text{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)$ (Theorem 2.2) and we establish Movable Bend and Break which is an improvement of Mori’s Bend and Break (Theorem 3.3).

Mori invented a technique called Bend and Break lemma in [Mor82], and this shows that if we deform a rational curve while fixing two points, then it breaks into the union of rational curves. However, it is very difficult to control Bend and Break, i.e., a resulting curve may have more than two components and the corresponding point in the moduli space may not be a smooth point. Lehmann and I conjecture that for a Fano fibration, if the anticanonical height of section is sufficiently large, then it can break into the union of two free rational curves. We call this conjectural technique to be Movable Bend and Break and establish this for sections of del Pezzo fibrations over \mathbb{P}^1 in [LT19a].

In this survey paper we discuss results in [LT19a] as well as the following applications:

- (1) Batyrev’s conjecture for sections of del Pezzo fibrations;
- (2) Irreducibility of the space of sections for certain del Pezzo fibrations;
- (3) Stabilization of Abel-Jacobi maps;
- (4) Geometric Manin’s Conjecture

Here is the plan of the paper: In Section 2 we discuss the dimension of components of $\text{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)$. The main theorem is Theorem 2.2 which claims that outside of a proper closed subset on \mathcal{X} , the dimension of the space of sections coincides with the expected dimension. In Section 3, we discuss our Movable Bend and Break lemma for sections of del Pezzo fibrations (Theorem 3.3) and demonstrate its proof in the case of surfaces. In Section 4 we discuss several applications of Movable Bend and Break as listed above.

Acknowledgements: The author would like to thank Brian Lehmann for collaborations helping to shape his perspective on moduli of rational curves. The author also would like to thank Brian for comments on an early draft of this paper. The author would like to thank the organizers of Algebra Symposium 2019 for an opportunity to give a talk. Sho Tanimoto is partially supported by Inamori Foundation, by JSPS KAKENHI Early-Career Scientists Grant numbers 19K14512, and by MEXT Japan, Leading Initiative for Excellent Young Researchers (LEADER).

2. EXPECTED DIMENSION

In this paper we adopt the following definition:

Definition 2.1. An algebraic fiber space $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ is a del Pezzo fibration if

- (1) \mathcal{X} is a smooth projective 3-fold;
- (2) the relative anticanonical divisor $-K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1} = -K_{\mathcal{X}} + \pi^*K_{\mathbb{P}^1}$ is relatively ample.

Corti showed the existence of a model with the ample anticanonical divisor with mild singularities in [Cor96].

A central object in this paper is the space of sections $\text{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)$. It is an open subscheme of the Hilbert scheme and it consists of countably many irreducible components.

For each $C \in \text{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)$, we define the height of C by

$$h(C) := -K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1}.C.$$

This height satisfies the Northcott property, i.e., the number of components of $\text{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)$ parametrizing sections of bounded height is finite.

Here are the main questions we ask for the space of sections:

- (1) for each component $M \subset \text{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)$, what is the dimension of M ? Does it coincide with the expected dimension?
- (2) What is the number of components parametrizing sections of height $\leq d$?

Understanding these questions is one of key assumptions of Batyrev's heuristics for Manin's Conjecture for trivial Fano families over finite fields, and we further apply this heuristics to del Pezzo fibrations in [LT19a], leading to a conjectural solution to Geometric Manin's Conjecture formulated in [LT19a].

In [LT19a], we obtain a satisfactory answer for Question (1). To understand this result, we recall some deformation theory of rational sections: we fix a del Pezzo fibration $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$. We say a section $f : C \rightarrow \mathcal{X}$ is free if we have

$$f^*T_{\mathcal{X}} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2) \oplus \mathcal{O}(a_3)$$

with $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$. If a section C is free, then it is a smooth point of $\text{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)$ and the unique component containing C has dimension equal to the expected dimension, i.e.,

$$-K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1}.C + 2.$$

Let $M \subset \text{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)$ be a component and $p : \mathcal{U} \rightarrow M$ be the universal family. We say that M is dominant if the evaluation map $s : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ is dominant. It is known that if a component M is dominant, then a general member of M is free. Hence one can conclude that M has the expected dimension.

Keeping these facts in mind, now we state one of our main results from [LT19a]:

Theorem 2.2. [LT19a, Theorem 1.1] *Let $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ be a del Pezzo fibration. Then there exists a proper closed subset $V \subsetneq \mathcal{X}$ such that any component of $\text{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)$ parametrizing a non-dominant family of sections will parametrize sections in V . In other words any section not contained in V will deform to cover \mathcal{X} .*

Thus we can understand the dimension of each component inductively on dimension of the locus which sections sweep out.

Remark 2.3. In [LT19c], we prove a similar statement for any smooth weak Fano variety replacing the space of sections by $\text{Mor}(\mathbb{P}^1, X)$, and the main ingredient is the proper closedness of the exceptional set for Fujita invariants developed in [LTT18], [HJ17], [LT19c]. These results are based on the boundedness of singular Fano varieties proved by Birkar in [Bir16a] and [Bir16b].

In the above theorem, the set V is also related to the Fujita invariant though the actual construction is more involved compared to trivial family cases.

3. MOVABLE BEND AND BREAK LEMMA

In this section we discuss Movable Bend and Break for sections of del Pezzo fibrations which is established in [LT19a]. First of all we recall Mori's Bend and Break lemma from [KM98]:

Lemma 3.1 (Mori's Bend and Break). [KM98, Corollary 1.7] *Let X be a projective variety and $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ be a stable map. Suppose that we deform f while fixing two distinct points on X so that the image sweeps out a surface. Then f degenerates to a stable map $g : C \rightarrow X$ in the moduli space of stable maps such that*

- (1) C is a tree of rational curves;
- (2) C consists of at least two non-contracted components;
- (3) $g(C)$ contains two points we fix.

This lemma has vast applications to problems in algebraic geometry. Here are samples of applications:

- Cone theorem for smooth projective varieties ([Mor82]);
- Rationally connectedness of smooth Fano varieties ([KMM92] and [Cam92]);
- Boundedness of smooth Fano varieties ([KMM92]);
- Irreducibility of the space of rational curves on general Fano hypersurfaces ([HRS04], [RY19]).

However, as mentioned in the introduction, there are certain difficulties in controlling Bend and Break:

- a resulting curve may have more than two components;
- a resulting stable map may be a singular point of the moduli space of stable maps.

To overcome these issues we propose the following conjecture in [LT19a]:

Conjecture 3.2 (Movable Bend and Break). [LT19a, Conjecture 7.1] Let $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ be a Fano fibration, i.e, it is an algebraic fiber space such that the generic fiber is a smooth Fano variety and \mathcal{X} is smooth. Then there exists a constant $Q(\mathcal{X})$ with the following property: suppose that C is a movable section such that $-K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1}.C \geq Q(\mathcal{X})$. Then C deforms as a stable map to the union of two free curves.

Note that a tree of free rational curves is a smooth point of the moduli space $\overline{M}_{0,0}(\mathcal{X})$ of stable maps, so in particular there is the unique component containing it. Here is the main theorem of [LT19a]:

Theorem 3.3. [LT19a, Theorem 8.1] *Conjecture 3.2 holds when $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ is a del Pezzo fibration, i.e., the relative dimension is 2 and $-K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1}$ is relatively ample.*

Moreover we explicitly give a bound for $Q(\mathcal{X})$. Let us describe this bound: we define the minimum height of sections by

$$\text{neg}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1) = \min\{-K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1}.C \mid C \in \text{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)\}.$$

Note that this is well-defined due to the Northcott property of the height. For an integer $d \in \mathbb{Z}$, we let $\text{maxdef}(d)$ to be the maximum dimension of any component $M \subset \text{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)$

parametrizing sections of height d . When there is no section of height d we formally set $\max\text{def}(d) = -\infty$. Then we define

$$\max\text{def}(\mathcal{X}) = \max_{d < 0} \{\max\text{def}(d)\}.$$

Here is our bound:

$$\begin{aligned} Q(\mathcal{X}) = \sup\{ & 3, -2\text{neg}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1) - 5, -\text{neg}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1) + 3, \\ & 2\max\text{def}(\mathcal{X}) - 5\text{neg}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1) - 5, \\ & 2\max\text{def}(\mathcal{X}) - \text{neg}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1) - 3, \\ & 2\max\text{def}(\mathcal{X}) + 2 + 2\sup\{0, -\text{neg}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)\}\}. \end{aligned}$$

Furthermore, when $\max\text{def}(d) - d \leq 2$ holds for all $d < 0$ and there is no rational $-K_{\mathcal{X}_\eta}$ -conic on the generic fiber \mathcal{X}_η defined over $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$, then Conjecture 3.2 holds with $Q(\mathcal{X}) = 3$. ([LT19a, Lemma 8.1])

3.1. In dimension 2. Let us demonstrate a proof of Conjecture 3.2 for surfaces:

Proposition 3.4. [LT19b] *Let Y be a smooth projective surface with a morphism $\pi : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ such that a general fiber of π is isomorphic to \mathbb{P}^1 . Let C be a section of π such that*

$$-K_{Y/\mathbb{P}^1} \geq \max\{2, -\text{neg}(Y/\mathbb{P}^1) + 1\}.$$

Then one has

$$C \sim C_0 + F$$

where C_0 is a free section and F is a general fiber of π .

We will need the following lemma to prove Proposition 3.4:

Lemma 3.5. [LT19b] *Let $F = \sum_i m_i E_i$ be a singular fiber of π such that $m_1 = m_2 = 1$ and E_i 's are smooth rational curves. Let $Q = \sum_i a_i E_i \geq 0$ be an effective \mathbb{Q} -divisor such that we have*

$$Q.E_j = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 1 \\ -1 & \text{if } j = 2 \\ 0 & \text{otherwise} . \end{cases}$$

Then $-K_Y.Q > 0$.

This lemma can be proved using the induction on the number of components of F and the MMP for surfaces. Now let us explain a proof of Proposition 3.4:

A proof of Proposition 3.4: Since we have

$$-K_{Y/\mathbb{P}^1}.C = n \geq 2$$

there exists a one-parameter family of deformations of C passing through n general points. By Mori's Bend and Break we conclude that

$$C \sim C_0 + mF + T,$$

where C_0 is a section, F a general fiber and T is an effective divisor supported on singular fibers such that T does not contain any full fiber. Mori's Bend and Break actually shows

that one can find a degeneration with at least two components going through general points ([LT19a, Lemma 4.1]), and this means that we can assume that $m \geq 1$.

Let F_0 be a singular fiber and T_0 be the sum of terms in T supported on F_0 . If T_0 is non-zero, then the negativity lemma implies that there exists some component of F_0 with non-vanishing intersection with T_0 . Hence we conclude that T_0 satisfies the intersection property in Lemma 3.5, and this implies that $-K_Y.T_0 > 0$. The upshot is that we have $b = -K_Y.T > 0$ unless $T = 0$.

Now our assumption on the height implies that $-K_Y.C_0 \geq 0$. Thus C_0 can contain at most $n - 2m - b + 1$ general points. Each general fiber can contain at most 1 general point. Thus we obtain

$$n - 2m - b + 1 + m \geq n.$$

This is only possible when $m = 1$ and $b = 0$. Thus our assertion follows. \square

An idea of our proof in dimension 3 is similar to the above proof. In dimension 3, we separate analysis into two cases based on whether the normal bundle of a free section is balanced or not. When it is balanced, a similar but more complicated proof as above works fine. When it is not balanced, a free section will sweep out a surface after fixing an appropriate number of general points. Then we may reduce our analysis to the case of a surface.

4. APPLICATIONS

In this section we discuss multiple applications of Movable Bend and Break lemma (Theorem 3.3).

4.1. Batyrev's conjecture. First of all we would like to introduce the following conjecture of Batyrev:

Conjecture 4.1 (Batyrev's conjecture). Let X be a smooth projective weak Fano variety and L be an ample divisor on X . Then there exists a polynomial $P(d)$ in d such that the number of components of $\text{Mor}(\mathbb{P}^1, X)$ parametrizing rational curves of L -degree $\leq d$ is at most $P(d)$.

This conjecture should be contrasted with known exponential upper bounds for the number of irreducible components of Chow varieties/Hilbert schemes. See, e.g., [Kol96, I.3.28 Exercise].

In [LT19c], Lehmann and I took the first step towards proving the above conjecture:

Theorem 4.2. [LT19c, Theorem 1.4] *Let X be a smooth projective uniruled variety and L a big and nef divisor on X . Fix a positive integer q and let $\overline{M} \subset \overline{M}_{0,0}(X)$ be the union of all components which contain a chain of free curves whose components have L -degree at most q . Then there exists a polynomial $P(d)$ which is an upper bound for the number of components of \overline{M} of L -degree at most d .*

Thus essentially this theorem means that Movable Bend and Break for rational curves will imply Batyrev's conjecture for dominant components. Combining the above theorem with Theorem 3.3 (+ Proposition 3.4) we obtain:

Theorem 4.3. [LT19a, Corollary 1.5] *Let $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ be a del Pezzo fibration. Then there exists a polynomial $P(d)$ such that the number of components of $\text{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)$ parametrizing sections of height $\leq d$ is bounded by $P(d)$.*

4.2. Irreducibility of the space of sections. Movable Bend and Break (Theorem 3.3) can be used to prove the irreducibility of the space of sections of fixed height using induction on height:

Example 4.4. [LT19a, Section 8.2] Let Y be a smooth Fano 3-fold with $\text{Pic}(Y) = \mathbb{Z}H$ and $-K_Y = 2H$. The degree H^3 takes an integer value between 1 and 5, and for each degree, there is exactly one deformation type of Fano 3-folds. Here is the list of deformation types for $3 \leq H^3 \leq 5$:

- When $H^3 = 5$, Y is a codimension 3 linear section of $\text{Gr}(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$.
- When $H^3 = 4$, Y is a complete intersection of two quadrics in \mathbb{P}^5 .
- When $H^3 = 3$, Y is a cubic smooth hypersurface in \mathbb{P}^4 .

Assume that $d = H^3$ is in this range. Let $\beta : \mathcal{X} \rightarrow Y$ be the blow up of the base locus Z of a general pencil of hyperplane sections. Then \mathcal{X} comes with $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ induced by the pencil and π is a del Pezzo fibration of degree d . We denote the exceptional divisor by $E \rightarrow Z$ and the space of sections of height h by M_h .

Claim: M_h is irreducible.

Indeed, first of all one can prove the following facts:

- The minimum height is -1 and sections of the minimum height are fibers of $E \rightarrow Z$. Note that Z is an elliptic curve so there is no rational curve in E other than fibers.
- The exceptional set in Theorem 2.2 is E . Thus the only non-dominant family of sections are the family of sections of height -1 .
- By [LT19a, Lemma 8.1], Movable Bend and Break works for sections of height ≥ 3 .
- One can check by hands that for $h = -1, 0, 1, 2$, M_h is irreducible.

Assume that $h \geq 3$. Suppose that M_i is irreducible for any $i < h$. Let $\overline{M}_h \subset \overline{M}_{0,0}(\mathcal{X})$ be the Zariski closure of M_h in the moduli space of stable maps $\overline{M}_{0,0}(\mathcal{X})$. By Movable Bend and Break, one can conclude that $C_0 + F \in \overline{M}_h$ where C_0 is a free section and F is a free vertical curve. By [LT19a, Theorem 8.2], one can assume that C_0 is a section of height $h - 2$ and F is a vertical free conic.

Let N be the space of vertical free conics – this is irreducible because the monodromy on $N^1(\mathcal{X}_t)$ is the full Weyl group. For any component $M \subset \overline{M}_{0,0}(\mathcal{X})$, we denote, by $M^{(1)} \subset \overline{M}_{0,1}(\mathcal{X})$, the family above M . We thus already proved that

$$C_0 + F \in \overline{M}_h \cap (M_{h-2}^{(1)} \times_{\mathcal{X}} N^{(1)}).$$

Due to the maximal monodromy $M_{h-2}^{(1)} \times_{\mathcal{X}} N^{(1)}$ is also irreducible. On the other hand we have $C_0 + F \in \overline{M}_{0,0}(\mathcal{X})^{\text{sm}}$. Thus we conclude that

$$M_{h-2}^{(1)} \times_{\mathcal{X}} N^{(1)} \subset \overline{M}_h$$

It follows that M_h is unique.

4.3. Stabilization of the Abel-Jacobi maps. Let $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ be a del Pezzo fibration. Since \mathcal{X} is rationally connected, the intermediate Jacobian

$$\mathrm{IJ}(\mathcal{X}) = H^{2,1}(\mathcal{X})^\vee / H_3(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$$

is a principally polarized abelian variety. For any component $M \subset \mathrm{Sec}(\mathcal{X})$ we have the Abel-Jacobi map

$$\mathrm{AJ}_M : M \dashrightarrow \mathrm{IJ}(\mathcal{X}).$$

When this map is dominant, we take a resolution $\beta : \widetilde{M} \rightarrow \overline{M}$ of a projective compactification \overline{M} of M such that $\mathrm{AJ}_M \circ \beta : \widetilde{M} \rightarrow \mathrm{IJ}(\mathcal{X})$ is a morphism. We take the Stein factorization $Z_M \rightarrow \mathrm{IJ}(\mathcal{X})$ of $\mathrm{AJ}_M \circ \beta$ and call it as the Stein factorization of AJ_M .

Next theorem establishes the stabilization of the Abel-Jacobi maps when they are ordered by height.

Theorem 4.5. [LT19a, Theorem 1.6] *Let $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ be a del Pezzo fibration of degree ≥ 3 . Let*

$$\mathcal{F} = \{M \subset \mathrm{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1) \text{ a component} \mid \mathrm{AJ}_M \text{ is dominant.}\}.$$

Then the set

$$\{Z_M \rightarrow \mathrm{IJ}(\mathcal{X}) \mid M \in \mathcal{F}\} / \text{up to iso}$$

is finite.

A key lemma to prove the above theorem is the following:

Lemma 4.6. [LT19a, Proposition 10.1] *In the settings of Theorem 4.5, let $M \in \mathcal{F}$. Let $M' \subset \mathrm{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)$ be a component parametrizing smoothings of $C + F$ where $C \in M$ is a free section and F is a free vertical conic or cubic. Then $M' \in \mathcal{F}$.*

Moreover let $Z_M \rightarrow \mathrm{IJ}(\mathcal{X})$ and $Z_{M'} \rightarrow \mathrm{IJ}(\mathcal{X})$ be the Stein factorizations of AJ_M and $\mathrm{AJ}_{M'}$ respectively. Then $Z_M \rightarrow \mathrm{IJ}(\mathcal{X})$ factors through as $Z \rightarrow Z' \rightarrow \mathrm{IJ}(\mathcal{X})$.

Combining the above lemma with Theorem 3.3, one can deduce Theorem 4.5. Let us illustrate this proof for Example 4.4:

Example 4.7. [LT19a, Example 10.4] Let Y be a smooth Fano 3-fold with $\mathrm{Pic}(Y) = \mathbb{Z}H$, $-K_Y = 2H$ and $H^3 = 5$. We define $\beta : \mathcal{X} \rightarrow Y$ as the blow up of the base locus of a general pencil of hyperplane sections on Y . Then \mathcal{X} comes with a del Pezzo fibration $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ of degree 5. Let Z be the base locus of our pencil – this is an elliptic curve. Since the intermediate Jacobian of Y is trivial, we conclude that

$$\mathrm{IJ}(\mathcal{X}) = \mathrm{Jac}(Z).$$

Let M_h be the space of sections of height $h \geq 0$ – we proved that this is irreducible. Then the Abel Jacobi map $\mathrm{AJ}_{M_h} : M_h \dashrightarrow \mathrm{Jac}(Z)$ is described as follows: For a general $C \in M_h$ its pushforward β_*C is a rational curve of degree $h + 1$ meeting Z at h distinct points. Then the Abel-Jacobi map is described as

$$M_h \dashrightarrow \mathrm{Sym}^h(Z) \rightarrow \mathrm{Jac}(Z), C \mapsto \beta_*C \cap Z \mapsto [\beta_*C \cap Z] - [\beta_*C_0 \cap Z].$$

Using this description one may prove that AJ_{M_i} is a MRC fibration for $i = 1, 2$. Thus Lemma 4.6 implies that AJ_{M_i} has connected fibers for any $i \geq 1$.

It is natural to speculate the following questions:

Question 4.8. Is AJ_{M_i} a MRC fibration for any $i \geq 1$?

Question 4.9. Can we conduct a similar analysis for $H^3 = 3, 4$?

4.4. Geometric Manin's Conjecture. Finally we discuss a conjectural solution to Geometric Manin's Conjecture from [LT19a]. Let $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ be a del Pezzo fibration. Due to smoothness of \mathcal{X} every section intersects with a component of a π -vertical divisor with multiplicity 1. Conversely Weak Approximation conjecture predicts that every possible intersection pattern of this type can be realized by some section. We call this intersection pattern as an intersection profile and we let $\Gamma_{\mathcal{X}}$ be the set of all possible intersection profiles, i.e., the set parametrizing the ways of choosing one component of multiplicity one for each fiber. Note that this is a finite set.

Let $N_1(\mathcal{X})$ be the space of \mathbb{R} -cycles of dimension 1 modulo numerical equivalence and $N_1(\mathcal{X})_{\mathbb{Z}} \subset N_1(\mathcal{X})$ be the lattice generated by integral cycles. Let $\text{Nef}_1(\mathcal{X}) \subset N_1(\mathcal{X})$ be the nef cone of curves. Let $\lambda \in \Gamma_{\mathcal{X}}$ and we denote, by $N_{\lambda} \subset N_1(\mathcal{X})$, the set of classes of a given intersection profile λ – this is an affine linear space of $N_1(\mathcal{X})$. Finally we denote the Brauer group of \mathcal{X} by $\text{Br}(\mathcal{X})$. The following conjecture is a key to our conjectural solution to Geometric Manin's Conjecture:

Conjecture 4.10. [LT19a, Conjecture 9.3] For each intersection profile $\lambda \in \Gamma_{\mathcal{X}}$ we let $\text{Nef}_{\lambda} = \text{Nef}_1(\mathcal{X}) \cap N_{\lambda}$. Then there is some translate \mathcal{T} of Nef_{λ} in N_{λ} such that every integral class in \mathcal{T} is represented by exactly $|\text{Br}(\mathcal{X})|$ dominant families of sections.

We now formulate Geometric Manin's Conjecture discussed in [LT19c] and [LT19a]. We assume that a general fiber of $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ is not isomorphic to \mathbb{P}^2 nor $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. First let us define the notion of Manin components:

Definition 4.11. We say a component $M \subset \text{Sec}(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)$ a Manin component if for the universal family $p : \mathcal{U} \rightarrow M$, the evaluation map $s : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ does not factor through a proper subvariety $Y \subset \mathcal{X}$ such that the generic curve Y_{η} is geometrically integral and has the anticanonical degree ≤ 2 . We let Manin_h be the set of Manin components parametrizing sections of height h .

Using this we define the counting function which counts the number of Manin components of bounded height:

Definition 4.12. Fix a real number $q > 1$. For any positive integer d we define the counting function

$$N(\mathcal{X}, -K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1}, q, d) = \sum_{h=1}^d \sum_{M \in \text{Manin}_h} q^{\dim M}.$$

This function is closely related to the counting function over function fields of curves defined over \mathbb{F}_q .

Geometric Manin's Conjecture predicts an asymptotic formula for $N(\mathcal{X}, -K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1}, q, d)$ as $d \rightarrow \infty$. To demonstrate this formula let us define a few invariants of \mathcal{X} which will be used to formulate the leading constant of the asymptotic formula:

Definition 4.13. We fix the Lebesgue measure μ on $N_1(\mathcal{X}_{\eta})$ normalized so that the fundamental domain for $N_1(\mathcal{X}_{\eta})_{\mathbb{Z}}$ has volume 1. We define the alpha constant of \mathcal{X}_{η} by

$$\alpha(\mathcal{X}_{\eta}, -K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1}) := \dim N_1(\mathcal{X}_{\eta}) \mu(\text{Nef}(\mathcal{X}_{\eta}) \cap \{\gamma \in N_1(\mathcal{X}_{\eta}) \mid -K_{\mathcal{X}_{\eta}} \cdot \gamma \leq 1\}).$$

We also define the following invariant:

$$\tau_{\mathcal{X}} = |\Gamma_{\mathcal{X}}| \cdot [N_1(\mathcal{X})_{\mathbb{Z}} \cap N_1(\mathcal{X}_{\eta}) : N_1(\mathcal{X}_{\eta})_{\mathbb{Z}}]$$

Now let us state Geometric Manin’s Conjecture for del Pezzo fibrations:

Theorem 4.14. [LT19a, Theorem 9.10] *Let $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ be a del Pezzo fibration of degree ≥ 2 . Assume that Conjecture 4.10 holds for every intersection profile $\lambda \in \Gamma_{\mathcal{X}}$. Then*

$$N(\mathcal{X}, -K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1}, q, d) \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\alpha(X_{\eta}, -K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1}) \tau_{\mathcal{X}} |\mathrm{Br}(\mathcal{X})|}{1 - q^{-1}} q^d d^{\rho(\mathcal{X}_{\eta})-1}.$$

The proof of this theorem is inspired by Batyrev’s heuristics for Manin’s conjecture over finite fields for trivial Fano families and uses Movable Bend and Break in an essential way.

REFERENCES

- [Bir16a] C. Birkar. Anti-pluricanonical systems on Fano varieties, 2016. arXiv:1603.05765 [math.AG].
- [Bir16b] C. Birkar. Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties, 2016. arXiv:1609.05543 [math.AG].
- [BM90] V. V. Batyrev and Yu. I. Manin. Sur le nombre des points rationnels de hauteur borné des variétés algébriques. *Math. Ann.*, 286(1-3):27–43, 1990.
- [Bro07] T. D. Browning. An overview of Manin’s conjecture for del Pezzo surfaces. In *Analytic number theory*, volume 7 of *Clay Math. Proc.*, pages 39–55. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [BT98] V. V. Batyrev and Y. Tschinkel. Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties. Number 251, pages 299–340. 1998. *Nombre et répartition de points de hauteur bornée (Paris, 1996)*.
- [Cam92] F. Campana. Connexité rationnelle des variétés de Fano. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 25(5):539–545, 1992.
- [Cor96] A. Corti. Del Pezzo surfaces over Dedekind schemes. *Ann. of Math. (2)*, 144(3):641–683, 1996.
- [GHS03] T. Graber, J. Harris, and J. Starr. Families of rationally connected varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(1):57–67, 2003.
- [Has09] B. Hassett. Rational surfaces over nonclosed fields. In *Arithmetic geometry*, volume 8 of *Clay Math. Proc.*, pages 155–209. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [HJ17] Chr. D. Hacon and C. Jiang. On Fujita invariants of subvarieties of a uniruled variety. *Algebr. Geom.*, 4(3):304–310, 2017.
- [HRS04] J. Harris, M. Roth, and J. Starr. Rational curves on hypersurfaces of low degree. *J. Reine Angew. Math.*, 571:73–106, 2004.
- [HT06] B. Hassett and Y. Tschinkel. Weak approximation over function fields. *Invent. Math.*, 163(1):171–190, 2006.
- [HT08] B. Hassett and Y. Tschinkel. Approximation at places of bad reduction for rationally connected varieties. *Pure Appl. Math. Q.*, 4(3, Special Issue: In honor of Fedor Bogomolov. Part 2):743–766, 2008.
- [HTT15] B. Hassett, S. Tanimoto, and Y. Tschinkel. Balanced line bundles and equivariant compactifications of homogeneous spaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (15):6375–6410, 2015.
- [KM98] J. Kollár and Sh. Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, volume 134 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti, Translated from the 1998 Japanese original.
- [KMM92] J. Kollár, Y. Miyaoka, and Sh. Mori. Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds. *J. Differential Geom.*, 36(3):765–779, 1992.
- [Kol96] J. Kollár. *Rational curves on algebraic varieties*, volume 32 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [LST18] B. Lehmann, A. K. Sengupta, and S. Tanimoto. Geometric consistency of Manin’s Conjecture. submitted, 2018.

- [LT17] B. Lehmann and S. Tanimoto. On the geometry of thin exceptional sets in Manin’s conjecture. *Duke Math. J.*, 166(15):2815–2869, 2017.
- [LT19a] B. Lehmann and S. Tanimoto. Classifying sections of del Pezzo fibrations, I. preprint, 2019.
- [LT19b] B. Lehmann and S. Tanimoto. Classifying sections of del Pezzo fibrations, II. in preparation, 2019.
- [LT19c] B. Lehmann and S. Tanimoto. Geometric Manin’s Conjecture and rational curves. *Compos. Math.*, 155(5):833–862, 2019.
- [LT19d] B. Lehmann and S. Tanimoto. On exceptional sets in Manin’s Conjecture. *Res. Math. Sci.*, 6(1):Art 12, 2019.
- [LT19e] B. Lehmann and S. Tanimoto. Rational curves on prime Fano threefolds of index 1. *J. Algebraic Geom.*, 2019. to appear.
- [LTT18] B. Lehmann, S. Tanimoto, and Y. Tschinkel. Balanced line bundles on Fano varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 743:91–131, 2018.
- [Man86] Yu. I. Manin. *Cubic forms*, volume 4 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1986. Algebra, geometry, arithmetic, Translated from the Russian by M. Hazewinkel.
- [Mor82] Sh. Mori. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective. *Ann. of Math. (2)*, 116(1):133–176, 1982.
- [Pey95] E. Peyre. Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano. *Duke Math. J.*, 79(1):101–218, 1995.
- [Pey03] E. Peyre. Points de hauteur bornée, topologie adélique et mesures de Tamagawa. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 15(1):319–349, 2003.
- [Pey17] E. Peyre. Liberté et accumulation. *Doc. Math.*, 22:1615–1659, 2017.
- [RY19] E. Riedl and D. Yang. Kontsevich spaces of rational curves on Fano hypersurfaces. *J. Reine Angew. Math.*, 748:207–225, 2019.
- [Sen17] A. K. Sengupta. Manin’s conjecture and the Fujita invariant of finite covers. arXiv:1712.07780, 2017.
- [Tia15] Z. Tian. Weak approximation for cubic hypersurfaces. *Duke Math. J.*, 164(7):1401–1435, 2015.
- [VA13] A. Várilly-Alvarado. Arithmetic of del Pezzo surfaces. In *Birational geometry, rational curves, and arithmetic*, Simons Symp., pages 293–319. Springer, Cham, 2013.
- [Xu12a] C. Xu. Strong rational connectedness of surfaces. *J. Reine Angew. Math.*, 665:189–205, 2012.
- [Xu12b] C. Xu. Weak approximation for low degree del Pezzo surfaces. *J. Algebraic Geom.*, 21(4):753–767, 2012.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE, KUMAMOTO UNIVERSITY, KUROKAMI 2-39-1
KUMAMOTO 860-8555 JAPAN

PRIORITY ORGANIZATION FOR INNOVATION AND EXCELLENCE, KUMAMOTO UNIVERSITY
E-mail address: stanimoto@kumamoto-u.ac.jp

BV algebra structures on Hochschild cohomology of self-injective Nakayama algebras

板垣智洋（東京理科大学）*

概要

本稿では self-injective Nakayama algebra のホッホシルトコホモロジー上の Batalin-Vilkovisky 構造を決定する。

1 はじめに

ホッホシルトコホモロジーは Hochschild [5] によって導入され、導来同値の不変量として知られている。多元環 A の n 次ホッホシルトコホモロジー群 $\mathrm{HH}^n(A)$ はホッホシルト複体の n 次コホモロジー群で定義され、 $\mathrm{HH}^*(A) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{HH}^i(A)$ はカップ積とブラケットによって Gerstenhaber algebra となる ([3])。

Tradler [7] によって、対称多元環のホッホシルトコホモロジー上に Batalin-Vilkovisky (BV) algebra 構造が存在することが示され、ホッホシルトコホモロジー上の BV algebra 構造の存在性に関する研究が行われている。最近では、Volkov [8] や Lambre-Zhou-Zimmermann [6] によって中山自己同型が対角化可能であるフロベニウス多元環のホッホシルトコホモロジー上に BV algebra 構造が存在することが示された。しかしながら、中山自己同型が対角化可能でないフロベニウス多元環のホッホシルトコホモロジー上に BV algebra 構造が存在することは未だ解明されておらず、具体計算例も多くはない。

本稿では、self-injective Nakayama algebra Λ のホッホシルトコホモロジー $\mathrm{HH}^*(\Lambda)$ 上の BV algebra 構造について述べる。本稿を通して、 K は代数的閉体とし、多元環 A の n 個の K 上のテンソル積を $A^{\otimes n}$ で表す。また、次数付き加群 $V^* = \bigoplus_{n \leq 0} V^n$ の homogeneous な元 a に対して、 a の次数を $|a|$ で表す。

2 Batalin-Vilkovisky algebra

ここでは、Gerstenhaber algebra と Batalin-Vilkovisky algebra について説明する。

定義 1. Gerstenhaber algebra とは、次数付き K -加群 $V^* = \bigoplus_{n \geq 0} V^n$ 、カップ積 $\cup : V^n \times V^m \rightarrow V^{n+m}$ 、次数 -1 のリーブラケット $[\cdot, \cdot] : V^n \times V^m \rightarrow V^{n+m-1}$ の 3 つ組 $(V^*, \cup, [\cdot, \cdot])$ で次を満たすものをいう：

- (i) (V^*, \cup) は 0 次に単位元をもつ結合的な次数付き可換多元環である。
- (ii) $(V^*, [\cdot, \cdot])$ が次数付きリー代数である。
- (iii) 任意の homogeneous な元 $a, b, c \in V^*$ に対して、

$$[a, b \cup c] = [a, b] \cup c + (-1)^{(|a|-1)|b|} b \cup [a, c]$$

を満たす。

また、このブラケット $[\cdot, \cdot]$ を **Gerstenhaber bracket** という。

* 東京理科大学理学部第一部数学科 〒162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3
E-mail address: titagaki@rs.tus.ac.jp
本研究は科研費 若手研究 B(17K14175) の援助を受けている。

定義 2. Batalin-Vilkovisky algebra (BV algebra) とは、0 次に単位元をもつ次数付き可換多元環 $(H^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^n, \cup)$ と次の条件を満たす次数 -1 の operator $\Delta : H^* \rightarrow H^* :$ の 3 つ組 (H^*, \cup, Δ) のことをいう：

- (i) 任意の $r \in \mathbb{Z}$ に対して、 $\Delta_{r-1}\Delta_r = 0$ が成り立つ。
- (ii) $\Delta_0(1) = 0$ が成り立つ。
- (iii) 任意の homogeneous な元 $a, b, c \in H^*$ に対して、

$$\begin{aligned} \Delta(a \cup b \cup c) &= \Delta(a \cup b) \cup c + (-1)^{|a|} a \cup \Delta(b \cup c) + (-1)^{|b|(a-1)} \beta \cup \Delta(a \cup c) \\ &\quad - \Delta(a) \cup b \cup c - (-1)^{|a|} a \cup \Delta(b) \cup c - (-1)^{|a|+|b|} a \cup b \cup \Delta(c) \end{aligned}$$

を満たす。

また、 Δ を **BV differential** という。

注意 3. BV algebra (H^*, \cup, Δ) はブラケット $[,]$ を homogeneous な元 $a, b \in H^*$ に対して、

$$[a, b] = (-1)^{|a|} (\Delta(a \cup b) - \Delta(a) \cup b - (-1)^{|a|} a \cup \Delta(b))$$

定義すると、 $(H^*, \cup, [,], \Delta)$ は Gerstenhaber algebra となる [4, Proposition 1.2]。この Gerstenhaber algebra の構造も含めて $(H^*, \cup, [,], \Delta)$ を BV algebra という。

3 ホッホシルトコホモロジー

ここでは、ホッホシルトコホモロジーの定義、カップ積、Gerstenhaber bracket について説明し、フロベニウス多元環のホッホシルトコホモロジーの BV algebra 構造について述べる。

定義 4. K -多元環 A に対して、次の複体 $(C^*(A) = \bigoplus_{n \geq 0} C^n(A), \delta_*)$ を A のホッホシルト複体という：各加群は

$$\begin{aligned} C^0(A) &= \text{Hom}_K(K, A) \cong A \\ C^n(A) &= \text{Hom}_K(A^{\otimes n}, A) \end{aligned}$$

で定義され、 $\delta_n : C^n \rightarrow C^{n+1}$ は $f \in C^n(A)$, $a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \in A^{\otimes n+1}$ に対して、

$$\begin{aligned} \delta_n(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) &= a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) a_{n+1} \end{aligned}$$

で定義される。また、 A のホッホシルト複体 $(C^*(A), \delta_*)$ の n 次のコホモロジーを A の n 次ホッホシルトコホモロジー群といい、 $\text{HH}^n(A)$ で表す。

注意 5. K -多元環 A に対して、 $\text{HH}^n(A) \cong \text{Ext}_{A^e}^n(A, A)$ が成り立つ。

ホッホシルト複体 $(C^*(A), \delta_*)$ 上のカップ積 \cup は、 $f \in C^m(A)$, $g \in C^n(A)$ に対して $f \cup g \in C^{m+n}(A)$ を $a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m} \in A^{\otimes n+m}$ に対して

$$(f \cup g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m}) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) g(a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+m})$$

で定めることによって定義される。これはホッホシルトコホモロジー上のカップ積 $\cup : \text{HH}^n(A) \times \text{HH}^m(A) \rightarrow \text{HH}^{n+m}(A)$ を誘導する。

Gerstenhaber [3] によって導入されたホッホシルトコホモロジー上の Gerstenhaber bracket について述べる。 $f \in C^n(A)$, $g \in C^m(A)$ ($n+m \geq 1$) に対して、 $[f, g] \in C^{n+m-1}(A)$ を次で定義する：

$n, m \geq 1$ のとき、 $1 \leq i \leq n$ である自然数 i に対して、 $f \circ_i g \in C^{n+m-1}(A)$ を

$$\begin{aligned} (f \circ_i g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m-1}) \\ = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes g(a_i \otimes \cdots \otimes a_{i+m-1}) \otimes a_{i+m} \otimes \cdots \otimes a_{n+m-1}) \end{aligned}$$

で定義する。 $n \geq 1$, $m = 0$ であるとき、 $1 \leq i \leq n$ である自然数 n に対して、 $f \circ_i g \in C^{n-1}(A)$ を

$$(f \circ_i g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m-1}) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes g \otimes a_i \otimes \cdots \otimes a_{n-1})$$

で定義する。ここで g は A の元とみなしている。また、

$$f \circ g := \sum_{i=1}^n (-1)^{(m-1)(i-1)} f \circ_i g$$

と定義し、

$$[f, g] := f \circ g - (-1)^{(n-1)(m-1)} g \circ f \in C^{n+m-1}(A)$$

と定義すると、 $[\cdot, \cdot] : C^n(A) \times C^m(A) \rightarrow C^{n+m-1}(A)$ は $[\cdot, \cdot] : \mathrm{HH}^n(A) \times \mathrm{HH}^m(A) \rightarrow \mathrm{HH}^{n+m-1}(A)$ を誘導し、 $(\mathrm{HH}^*(A), \cup, [\cdot, \cdot])$ は Gerstenhaber algebra となる。

この Gerstenhaber algebra を誘導する BV algebra 構造が存在するののかということは、一般には知られていない。いくつかの多元環のクラスについてはホッホシルトコホモロジーの Gerstenhaber algebra 構造に対して、BV algebra 構造が存在することが示されている。ここでは、Volkov [8] の構成方法に沿って、フロベニウス多元環のホッホシルトコホモロジー上の BV algebra 構造について述べる。 A をフロベニウス多元環とし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を bilinear form、 ν を中山自己同型とする。写像 $\phi_\nu : C^n(A) \rightarrow C^n(A)$ を $f \in C^n(A)$ と $a_i \in A$ に対して、

$$(\phi_\nu(f))(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \nu^{-1}(f(\nu(a_1) \otimes \cdots \otimes \nu(a_n)))$$

で定める。 $C^n(A)^\nu := \{f \in C^n(A) \mid \phi_\nu(f) = f\}$ とすると、 δ_n は $\delta_n^\nu : C^n(A)^\nu \rightarrow C^{n-1}(A)^\nu$ を誘導し、複体 $(C^*(A)^\nu, \delta_*^\nu)$ が得られる。 $\mathrm{HH}^n(A)^{\nu\uparrow} = \mathrm{H}^n(C^*(A)^\nu, \delta_*^\nu)$ とおくと、ホッホシルトコホモロジー上の Gerstenhaber algebra の構造は $\mathrm{HH}^n(A)^{\nu\uparrow}$ 上の Gerstenhaber algebra の構造を誘導する。もし、 ν が対角化可能であれば、 $(\mathrm{HH}^*(A)^{\nu\uparrow}, \cup, [\cdot, \cdot])$ と $(\mathrm{HH}^*(A), \cup, [\cdot, \cdot])$ は同型である。

定理 6 ([8, Theorem 2.2]). A をフロベニウス多元環、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を bilinear form、 ν を中山自己同型とする。このとき、 $n \geq 1$, $f \in C^n(A)$ に対して、 $\Delta_i f \in C^{n-1}(A)$ ($1 \leq i \leq n$) を

$$\langle \Delta_i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}), a_n \rangle = \langle f(a_i \otimes \cdots \otimes a_n \otimes \nu a_1 \otimes \cdots \otimes \nu a_{i-1}), 1 \rangle$$

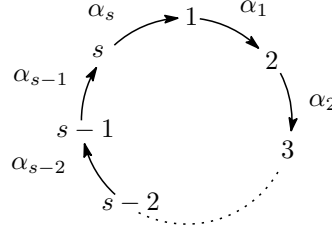
によって定義し、 $\Delta := \sum_{i=1}^n (-1)^{i(n-1)} \Delta_i : C^n(A) \rightarrow C^{n-1}(A)$ とすると、 Δ は Gerstenhaber algebra $(\mathrm{HH}^*(A)^{\nu\uparrow}, \cup, [\cdot, \cdot])$ 上の BV differential を誘導する。

注意 7. フロベニウス多元環 A の中山自己同型 ν が対角化可能であるとき、上の Δ は Gerstenhaber algebra $(\mathrm{HH}^*(A), \cup, [\cdot, \cdot])$ 上の BV differential を誘導する。

4 Self-injective Nakayama algebra のホッホシルトコホモロジー

ここでは、self-injective Nakayama algebra Λ について説明し、 Λ の中山自己同型 ν の位数 $\mathrm{ord} \nu$ について、 $\mathrm{char} K \nmid \mathrm{ord} \nu$ のとき、ホッホシルトコホモロジー $\mathrm{HH}^*(A)$ 上の BV algebra 構造を決定し、 $\mathrm{char} K \mid \mathrm{ord} \nu$ のとき、 $\mathrm{HH}^*(A)^{\nu\uparrow}$ 上の BV algebra 構造を決定する。

Self-injective Nakayama algebra は bound quiver algebra として、 $\Lambda = K\Gamma_s/J^N$ で与えられる。ここで、 Γ_s は以下のような点が s 個の quiver を表し、 $N \geq 2$ 、 J は道多元環 $K\Gamma_s$ の矢イデアルを表す。



点 l の trivial path を v_l 、始点が l で長さが n の道を γ_l^n で表す。このとき、bilinear form $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda \times \Lambda \rightarrow K$ は $1 \leq l \leq s$ と $0 \leq j \leq N-1$ に対して、

$$\langle \gamma_l^j, \gamma_{l+j}^{N-1-j} \rangle = 1$$

によって与えられる。また、 Λ の中山自己同型 ν は

$$\nu(v_l) = v_{l+N-1}, \quad \nu(\gamma_l^j) = \gamma_{l+N-1}^j$$

によって与えられる。特に、 $\text{ord } \nu = \frac{s}{\text{gcd}(N-1, s)}$ である。以後 $g_0 = \text{gcd}(N-1, s)$ とする。

Bardzell [1] によって monomial algebra の両側射影分解の構成法が与えられており、 Λ の両側射影分解 \mathbf{P} は次のように与えられる。各両側加群 P_n は

$$P_{2i} = \bigoplus_{l=1}^s \Lambda v_l \otimes v_{l+iN} \Lambda \text{ for } i = 0, 1, 2, \dots$$

$$P_{2i+1} = \bigoplus_{l=1}^s \Lambda v_l \otimes v_{l+iN+1} \Lambda \text{ for } i = 0, 1, 2, \dots$$

で与えられ、各 differential $d_n : P_n \rightarrow P_{n-1}$ は、

$$d_{2i} : P_{2i} \rightarrow P_{2i-1}$$

$$v_l \otimes v_{l+iN} \mapsto v_l \left(\sum_{k=0}^{N-1} \gamma_l^k \otimes \gamma_{l+k+(i-1)N+1}^{N-k-1} \right) v_{l+iN}$$

$$d_{2i+1} : P_{2i+1} \rightarrow P_{2i}$$

$$v_l \otimes v_{l+iN+1} \mapsto v_l (\gamma_l^1 \otimes 1 - 1 \otimes \gamma_{l+iN}^1) v_{l+iN+1}$$

で与えられる。

$x, y \in \Lambda$ に対して、 $\varphi_x \in \text{Hom}_{\Lambda^e}(P_{2i}, \Lambda)$ を $\varphi_x(v_l \otimes v_{l+iN}) = v_l x v_{l+iN}$ によって定める。同様に $\varphi_y \in \text{Hom}_{\Lambda^e}(P_{2i+1}, \Lambda)$ を $\varphi_y(v_l \otimes v_{l+iN+1}) = v_l y v_{l+iN+1}$ によって定める。Bardzell-Locateli-Marcos [2] によって、 Λ のホッホシルトコホモロジー環 $\text{HH}^*(\Lambda)$ が計算されているが、ここでは $\text{char } K \nmid \text{ord } \nu$ の場合の Λ のホッホシルトコホモロジー群 $\text{HH}^n(\Lambda) \cong \text{H}^n(\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathbf{P}, \Lambda))$ の結果を紹介する。

命題 8 ([2, Proposition 5.1]). $N > 2$ のとき、 $\text{HH}^0(\Lambda)$ の K -basis は次で与えられる。

$$\begin{cases} B = \left\{ \varphi_{\sum_{i=1}^s \gamma_i^{as}} \mid 0 \leq a \leq \left\lfloor \frac{N-2}{s} \right\rfloor \right\} & \text{if } N \not\equiv 1 \pmod{s}, \\ B \cup \{ \varphi_{\gamma_i^{N-1}} \mid 0 \leq l \leq s \} & \text{if } N \equiv 1 \pmod{s}. \end{cases}$$

命題 9 ([2, Proposition 5.2, Proposition 5.3]). $i \geq 1$ に対して、 $\text{HH}^{2i}(\Lambda)$ の K -basis は次で与えられる。

$$\begin{cases} B = \left\{ \varphi_{\sum_{i=1}^s \gamma_i^j} \mid 0 \leq j \leq N-2 \text{ and } j \equiv Ni \pmod{s} \right\} \\ \quad \text{if } \text{char } K \nmid N \text{ or } Ni \not\equiv N-1 \pmod{s}, \\ B \cup \{ \varphi_{\sum_{i=1}^s \gamma_i^{N-1}} \} \text{ if } \text{char } K \mid N \text{ and } Ni \equiv N-1 \pmod{s}. \end{cases}$$

また、 $\mathrm{HH}^{2i-1}(\Lambda)$ の K -basis は次で与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \left\{ \varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord} \nu)-1}} \gamma_{1+k g_0}^{j+1} \mid 0 \leq j \leq N-2 \text{ and } j \equiv N(i-1) \pmod{s} \right\} \\ \quad \text{if } \mathrm{char} K \nmid N \text{ or } Ni \not\equiv N-1 \pmod{s}, \\ B \cup \{\varphi_{\sum_{l=1}^s} v_l\} \text{ if } \mathrm{char} K \mid N \text{ and } Ni \equiv N-1 \pmod{s}. \end{array} \right.$$

$\mathrm{ord} \nu < \infty$ かつ $\mathrm{char} K \nmid \mathrm{ord} \nu$ のとき、 ν は対角化可能である。したがって、ホッホシルトコホモロジーは BV algebra 構造をもつ。具体的に計算することによって、次の結果が得られる。

定理 10. $\mathrm{char} K \nmid \mathrm{ord} \nu$ とする。このとき、次数 -1 の BV differential $\Delta : \mathrm{HH}^*(\Lambda) \rightarrow \mathrm{HH}^*(\Lambda)$ は次で与えられる：

$i \geq 0$ とする。 $\Delta(\mathrm{HH}^{2i}(\Lambda)) = 0$ であり、 $\varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord} \nu)-1}} \gamma_{1+k g_0}^{j+1} \in \mathrm{HH}^{2i+1}(\Lambda)$ に対して、

$$\Delta(\varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord} \nu)-1}} \gamma_{1+k g_0}^{j+1}) = \frac{Ni - j - 1}{g_0} \varphi_{\sum_{l=1}^s} \gamma_l^j$$

となる。また、 $\mathrm{char} K \mid N$ かつ $Ni \equiv N-1 \pmod{s}$ のとき、 $\varphi_{\sum_{l=1}^s} v_l \in \mathrm{HH}^{2i+1}(\Lambda)$ に対して、

$$\Delta(\varphi_{\sum_{l=1}^s} v_l) = 0$$

となる。

系 11. $\mathrm{char} K \nmid \mathrm{ord} \nu$ とする。このとき、 $\mathrm{HH}^*(\Lambda)$ 上の Gerstenhaber bracket $[,]$ は次で与えられる：

$\varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord} \nu)-1}} \gamma_{1+k g_0}^{j_1+1} \in \mathrm{HH}^{2i_1+1}(\Lambda)$, $\varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord} \nu)-1}} \gamma_{1+k g_0}^{j_2+1} \in \mathrm{HH}^{2i_2+1}(\Lambda)$, $\varphi_{\sum_{l=1}^s} \gamma_l^j \in \mathrm{HH}^{2i}(\Lambda)$ に対して、

$$[\varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord} \nu)-1}} \gamma_{1+k g_0}^{j_1+1}, \varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord} \nu)-1}} \gamma_{1+k g_0}^{j_2+1}] = \begin{cases} \frac{N(i_1 - i_2) - j_1 + j_2}{g_0} \varphi_{\sum_{l=1}^s} \gamma_l^{j_1+j_2+1} & \text{if } \gamma_l^{j_1+j_2+1} \neq 0 \text{ in } \Lambda, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$[\varphi_{\sum_{l=1}^s} \gamma_l^j, \varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord} \nu)-1}} \gamma_{1+k g_0}^{j_1+1}] = \begin{cases} \frac{Ni - j}{g_0} \varphi_{\sum_{l=1}^s} \gamma_l^{j+j_1} & \text{if } \gamma_l^{j+j_1+1} \neq 0 \text{ in } \Lambda, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

また、 $\mathrm{char} K \mid N$ かつ $Ni_0 \equiv N-1 \pmod{s}$ のとき、 $\varphi_{\sum_{l=1}^s} v_l \in \mathrm{HH}^{2i_0+1}(\Lambda)$ に対して、

$$[\varphi_{\sum_{l=1}^s} v_l, \varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord} \nu)-1}} \gamma_{1+k g_0}^{j_1+1}] = (Ni_1 - j_1) \varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord} \nu)-1}} \gamma_{1+k g_0}^{j_1}, \quad [\varphi_{\sum_{l=1}^s} v_l, \varphi_{\sum_{l=1}^s} \gamma_l^j] = 0$$

となる。

$\mathrm{char} K \mid \mathrm{ord} \nu$ のとき、 ν は対角化可能であるとは限らない。実際、 $\mathrm{char} K = 2$, $\Lambda = \Gamma_s/J^N$ について $s = 2, N = 4$ のとき、 $\mathrm{ord} \nu = 2$ であるが ν は対角化可能ではない。そこで、コホモロジー $\mathrm{HH}^*(A)^{\nu\uparrow}$ および $\mathrm{HH}^*(A)^{\nu\uparrow}$ 上の BV algebra 構造を決定する。

複体 $\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\mathbf{P}, \Lambda)$ のある部分複体のコホモロジーを計算することによって $\mathrm{HH}^n(A)^{\nu\uparrow}$ が決定される。

命題 12. $\mathrm{char} K \mid \mathrm{ord} \nu$ とする。このとき、 $i \geq 1$ に対して、 $\mathrm{HH}^{2i-2}(\Lambda)^{\nu\uparrow}$ の K -basis は

$$\left\{ \varphi_{\sum_{l=1}^s} \gamma_l^j \mid 0 \leq j \leq N-2 \text{ and } j \equiv Ni \pmod{s} \right\}$$

で与えられ、 $\mathrm{HH}^{2i-1}(\Lambda)^{\nu\uparrow}$ の K -basis は

$$\left\{ \varphi_{\sum_{k=0}^{\frac{s}{g_0}-1}} \gamma_{k(N-1)}^j \mid 0 \leq j \leq N-2 \text{ and } j \equiv N(i-1) \pmod{s} \right\}$$

で与えられる。

命題 13. $\mathrm{char} K \mid \mathrm{ord} \nu$ とする。このとき、次数付き可換代数として $\mathrm{HH}^*(\Lambda)^{\nu\uparrow} \cong \mathrm{HH}^*(\Lambda)$ である。

定理 14. $\text{char } K \mid \text{ord } \nu$ とする。このとき、次数 -1 の BV differential $\Delta : \text{HH}^*(\Lambda)^{\nu\uparrow} \rightarrow \text{HH}^*(\Lambda)^{\nu\uparrow}$ は次で与えられる：

$i \geq 0$ とする。 $\Delta(\text{HH}^{2i}(\Lambda)^{\nu\uparrow}) = 0$ であり、 $\varphi_{\sum_{k=0}^s g_0^{s-1} \gamma_{k(N-1)}^j} \in \text{HH}^{2i+1}(\Lambda)$ に対して、

$$\Delta\left(\varphi_{\sum_{k=0}^s g_0^{s-1} \gamma_{k(N-1)}^j}\right) = \frac{N-1}{g_0} \varphi_{\sum_{i=1}^s \gamma_i^j}$$

となる。特に、 $[\ , \] = 0$ である。

例 15. $\text{char } K = 2$, $\Lambda = K\Gamma_s/J^4$ とする。このとき、中山自己同型 ν は対角化可能ではなく、

$$\text{HH}^*(\Lambda)^{\nu\uparrow} = K[x, y, z]/(x^2, y^2)$$

である。ここで、

$$\deg x = 0, \deg y = 1, \deg z = 2.$$

である。また、BV-differential Δ は

$$\begin{aligned} \Delta(1) = \Delta(x) = \Delta(z_0) = \Delta(xz) = \Delta(z^2) &= 0, \\ \Delta(y) = 1, \Delta(yx) = x, \Delta(yz) &= z. \end{aligned}$$

で与えられ、 $[\ , \] = 0$ である。

一方、ホッホシルトコホモロジー $\text{HH}^*(\Lambda)$ 上の Gerstenhaber bracket $[\ , \]$ は

$$[x, x] = [y, y] = [x, z] = [z, z] = 0, [x, y] = x, [y, z] = z$$

で与えられ、 $\text{HH}^*(\Lambda)$ と $\text{HH}^*(\Lambda)^{\nu\uparrow}$ は Gerstenhaber algebra として同型ではない。

謝辞

今回の講演の機会を与えていただきました中岡宏行先生ならびに関係者の方々に心より感謝いたします。

参考文献

- [1] M.J. Bardzell, The alternating syzygy behavior of monomial algebras, J. Algebra 188 (1997), no. 1, 69–89.
- [2] M.J. Bardzell, A.C. Locateli and E.N. Marcos, On the Hochschild cohomology of truncated cycle algebras, Comm. Alg. 28 (2000), 1615–1639.
- [3] M. Gerstenhaber, The cohomology structure of an associative ring, Ann. of Math. 78(2) (1963), 267–288.
- [4] E. Getzler, Batalin-Vilkovisky algebras and two-dimensional topological field theories, Comm. Math. Phys. 159 (1994), 265–285.
- [5] G. Hochschild, On the cohomology groups of an associative algebra, Ann. of Math. 46(2) (1945) 58–67.
- [6] T. Lambre, G. Zhou and A. Zimmermann, The Hochschild cohomology ring of a Frobenius algebra with semisimple Nakayama automorphism is a Batalin-Vilkovisky algebra, J. Algebra 446 (2016), 103–131.
- [7] T. Tradler, The Batalin-Vilkovisky algebra on Hochschild cohomology induced by infinity inner products, Ann. Inst. Fourier 58 (7) (2008), 2351–2379.
- [8] Yu.V. Volkov, BV differential on Hochschild cohomology of Frobenius algebras, J. Pure. Appl. Algebra 200 (2016), 3384–3402.

三角圏のスペクトラムとその可換環論への応用
(CONSTRUCTION OF SPECTRA OF TRIANGULATED
CATEGORIES AND ITS APPLICATIONS TO COMMUTATIVE
ALGEBRA)

松井紘樹 (HIROKI MATSUI)

三角圏 \mathcal{T} の thick 部分圏の分類とは、 \mathcal{T} の thick 部分圏の集合 \mathbb{T} と、ある位相空間 X の部分集合の集合 \mathbb{S} との間の全単射

$$\mathbb{T} \simeq \mathbb{S}$$

を見つけることである。Devinatz-Hopkins-Smith [8, 11] による有限スペクトラムの thick 部分圏の分類以降、三角圏の thick 部分圏の分類問題は可換環論、代数幾何学、モジュラー表現論、作用素環論等分野を問わず重要な問題の一つとなっている [4, 5, 7, 10, 15, 18]。これらの分類において本質的に重要な役割を果たすのは三角圏上のテンソル構造である。近年 Balmer [1] はテンソル三角幾何学と呼ばれる分野を創始し、これらの分類に統一的な視点を与えた。

与えられたテンソル三角圏 \mathcal{T} (よい対称モノイダル構造を持つ三角圏) に対して、Balmer は今日 Balmer スペクトラムと呼ばれる位相空間 $\text{Spec}_{\otimes} \mathcal{T}$ を構成し、 \mathcal{T} のテンソルイデアル (テンソル積についてイデアルとなっているような thick 部分圏) の分類問題が $\text{Spec}_{\otimes} \mathcal{T}$ の構造解析に帰着されることを示した。この結果は上に上げた thick 分類圏の分類問題に一般的な回答を与え、上にあげた分類の統一的な説明を与えた。さらに、 $\text{Spec}_{\otimes} \mathcal{T}$ の構造解析を通してテンソル三角圏の幾何学的/代数的な研究が可能となった。2010 年の ICM (国際数学会議) のにおいて Balmer [3] がテンソル三角幾何学について招待講演を行ったように、テンソル三角幾何学は成功を収め、非常に広い分野において注目を集めている。

一方で、必ずしもすべての三角圏が良いテンソル構造を持つとは限らず、テンソル三角幾何学はそのような三角圏にすぐに適用できるものではない。さらに、そのような三角圏にも重要なものは沢山あり、例えば可換ネーター環 R に対して、その有界導来圏 $D^b(\text{mod } R)$ や特異圏 $D_{\text{sg}}(R) := D^b(\text{mod } R)/K^b(\text{proj } R)$ などがその典型例である。本報告集においては、第 64 回代数学シンポジウムにおいて行った講演をもとに、テンソル積を持たない三角圏に対する、いわゆる “tensor-free” な三角幾何学について解説する。具体的には与えられた三角圏に対して、元の代数的対象の幾何的な性質をよく反映するような適切な位相空間 (以下スペクトラム) を構成する事で Balmer のテンソル三角幾何学の類似の類似の理論を展開する事を目指す。

以降、集合論的な問題を避けるため圏といえば常に本質的に小さいもの、つまり同型類が集合をなすものとする。

1. テンソル三角幾何学

ここでは、本研究のモチベーションとなるテンソル三角幾何学について簡単に解説する。以下に定義するテンソル三角圏がテンソル三角幾何学における主役を担う。

Definition 1.1. テンソル三角圏とは、三角圏 \mathcal{T} 、テンソル積と呼ばれる \mathcal{T} 上の exact bifunctor $\otimes : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ 、単位対象と呼ばれる対象 $\mathbf{1} \in \mathcal{T}$ からなる三組 $(\mathcal{T}, \otimes, \mathbf{1})$ で、三角圏構造と整合性を持つ対称モノイダル圏となっているものである。詳しくは [12,

Appendix A] を参照のこと．特に，テンソル積 \otimes 及び単位対象 $\mathbf{1}$ は以下の自然同型をみたす：

- (結合性) $(L \otimes M) \otimes N \cong L \otimes (M \otimes N)$,
- (可換性) $M \otimes N \cong N \otimes M$,
- (単位性) $M \otimes \mathbf{1} \cong M$.

以下は典型的なテンソル三角圏の例である．

- Example 1.2.** (1) 有限スペクトラムのなす安定ホモトピー圏 $\mathrm{SH}^{\mathrm{fin}}$ はスマッシュ積 \wedge によりテンソル三角圏 $(\mathrm{SH}^{\mathrm{fin}}, \wedge, \mathbb{S})$ をなす．ここで， \mathbb{S} は球面スペクトラム．
- (2) X をネータースキームとする．このとき， X 上の完全複体のなす導来圏 $\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ は導来テンソル積 $\otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbf{L}}$ によりテンソル三角圏 $(\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X), \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbf{L}}, \mathcal{O}_X)$ をなす．特に，可換ネーター環 R について $X = \mathrm{Spec} R$ を考えることでテンソル三角圏 $(\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj} R), \otimes_R, R)$ を得る．
- (3) k を体， G を有限群とする．このとき，有限生成 kG 加群の安定加群圏 $\underline{\mathrm{mod}} kG$ および有界導来圏 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod} kG)$ は k 上のテンソル積によりテンソル三角圏 $(\underline{\mathrm{mod}} kG, \otimes_k, k)$, $(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod} kG), \otimes_k, k)$ をなす．
- (4) R を可換ネーター環とする．このとき，右有界導来圏 $\mathrm{D}^-(\mathrm{mod} R)$ は導来テンソル積 $\otimes_R^{\mathbf{L}}$ によりテンソル三角圏 $(\mathrm{D}^-(\mathrm{mod} R), \otimes_R^{\mathbf{L}}, R)$ をなす．

Balmer のアイデアは，テンソル三角圏を可換環の類似とみなして Zariski スペクトラムと同様の構成を行うことである．実際，可換環とはアーベル群 R ，双線形写像 $\cdot : R \times R \rightarrow R$ ，そして単位元 1 の三組 $(R, \cdot, 1)$ であり結合性，可換性，そして 1 の単位性を満たすものであった．

Definition 1.3. [1, Definitions 1.2 and 2.1] $(\mathcal{T}, \otimes, \mathbf{1})$ をテンソル三角圏とする．

- (1) \mathcal{T} の充満加法部分圏 \mathcal{X} が **thick** であるとは以下の条件を満たす時に言う．
- \mathcal{T} の完全三角 $L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow L[1]$ について， L, M, N の内2つが \mathcal{X} に入らば，残り1つも \mathcal{X} に入る．
 - \mathcal{T} の対象 M, N について， $M \oplus N \in \mathcal{X}$ ならば， $M, N \in \mathcal{X}$ ．
- (2) \mathcal{T} の (**thick**) テンソルイデアルとは， \mathcal{T} の thick 部分圏 \mathcal{I} で

$$M \in \mathcal{T}, N \in \mathcal{I} \Rightarrow M \otimes N \in \mathcal{I}$$

を満たすものである．

- (3) \mathcal{T} のテンソルイデアル \mathcal{P} が**素**テンソルイデアルであるとは， $\mathcal{P} \neq \mathcal{T}$ かつ

$$M \otimes N \in \mathcal{P} \Rightarrow M \in \mathcal{P} \text{ or } N \in \mathcal{P}$$

を満たすものである． \mathcal{T} の素テンソルイデアルの集合を $\mathrm{Spec}_{\otimes} \mathcal{T}$ と表すことにする．

可換環の素テンソルイデアルの集合に Zariski 位相と呼ばれる位相が入っていたように， $\mathrm{Spec}_{\otimes} \mathcal{T}$ にも位相を導入することができる．

Definition 1.4. [1, Definition 2.1] \mathcal{T} の対象 M に対して，その **Balmer support** を

$$\mathrm{Supp}_{\otimes}(M) := \{\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}_{\otimes} \mathcal{T} \mid M \notin \mathcal{P}\}$$

で定める．容易に分かるように $\mathrm{Supp}_{\otimes}(M) \cup \mathrm{Supp}_{\otimes}(N) = \mathrm{Supp}_{\otimes}(M \oplus N)$ が成立するので， $\mathrm{Spec}_{\otimes} \mathcal{T}$ 上には $\{\mathrm{Supp}_{\otimes}(M) \mid M \in \mathcal{T}\}$ を閉集合の基底とするような位相が入る．つまり，この位相に関する閉集合は

$$\mathcal{Z}(\mathcal{E}) := \bigcap_{M \in \mathcal{E}} \mathrm{Supp}_{\otimes}(M) = \{\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}_{\otimes} \mathcal{T} \mid \mathcal{E} \cap \mathcal{P} = \emptyset\} \quad (\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T})$$

なる形の集合である．このようにして定まる位相空間 $\text{Spec}_\otimes \mathcal{T}$ を \mathcal{T} の **Balmer スペクトラム** と呼ぶ．

Remark 1.5. $\text{Spec } R$ 上の Zariski 位相において，

$$V(f) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R \mid f \in \mathfrak{p}\} \quad (f \in R)$$

なる形の集合が閉集合の基底を成していた事を思い出すと，Balmer support $\text{Supp}_\otimes(M)$ の定義は

$$\text{Supp}_\otimes(M) = \{\mathcal{P} \in \text{Spec}_\otimes \mathcal{T} \mid M \text{ “}\in\text{” } \mathcal{P}\}$$

とすべきでなはいかと思うかもしれない．実際上のように Balmer support を定義してもそれらは閉集合の基底を成し，位相を定める事が分かる．実はこのように定義される2つの位相空間は互いに Hochster 双対と呼ばれる関係を成しており，一方から他方が完全に復元される．したがってどちらで位相を定義しても本質的な問題は現れない．例えば Hochster 双対により，位相空間の開集合と後に定義する Thomason 部分集合が入れ替わる．

テンソル三角圏の Balmer support は以下の性質を満たす．

Lemma 1.6. [1, Lemma 2.6]

- (1) $\text{Supp}_\otimes(0) = \emptyset$.
- (2) 任意の $M \in \mathcal{T}$ と整数 n について $\text{Supp}_\otimes(M[n]) = \text{Supp}_\otimes(M)$.
- (3) \mathcal{T} における完全三角 $L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow L[1]$ に対して $\text{Supp}_\otimes(M) \subseteq \text{Supp}_\otimes(L) \cup \text{Supp}_\otimes(N)$ が成り立つ．
- (4) 任意の $M, N \in \mathcal{T}$ について $\text{Supp}_\otimes(M \oplus N) = \text{Supp}_\otimes(M) \cup \text{Supp}_\otimes(N)$.
- (5) 任意の $M, N \in \mathcal{T}$ について $\text{Supp}_\otimes(M \otimes N) = \text{Supp}_\otimes(M) \cap \text{Supp}_\otimes(N)$.

これらの性質は非常に基本的であり，様々な分野において現れる種々の support 達も同様の性質を満たす．また，既知の三角圏の thick 部分圏の分類の結果をみると，種々の support 達が重要な役割を果たしていることも分かる．そこで，三角圏の “support” を以下のように定義する．

Definition 1.7. [1, Definition 3.1] \mathcal{T} を三角圏とする． \mathcal{T} の **support data** とは，位相空間 X と対応

$$\sigma : \mathcal{T} \ni M \mapsto \sigma(M) \subseteq X : \text{closed}$$

の組 (X, σ) で Lemma 1.6(1)-(4) と同様の性質を満たすものをいう．さらに， \mathcal{T} がテンソル三角圏のとき， \mathcal{T} の support data (X, σ) が **tensorial** であるとは，Lemma 1.6(1)-(4) に加えて (5) も満たすときにいう．

Example 1.8. (1) \mathcal{T} をテンソル三角圏とする．すでに見たように Balmer support は \mathcal{T} 上の tensorial support data $(\text{Spec}_\otimes \mathcal{T}, \text{Supp}_\otimes)$ を定める．

(2) X をネータースキームとする．このとき， X 上の完全複体 M の **homological support**

$$\text{Supp}_h(M) := \{x \in X \mid M_x \not\cong 0 \text{ in } D^{\text{perf}}(\mathcal{O}_{X,x})\} \subseteq X$$

は $D^{\text{perf}}(X)$ 上の tensorial support data (X, Supp_h) を定める．

(3) k を体， G を有限群とする．このとき，有限生成 kG 加群複体 M の **support variety**

$$V_G(M) := V_+(\text{ann}_{H^*(G;k)} \text{Ext}^*(M, M)) \subseteq \text{Spec}^h H^*(G; k)$$

は $D^b(\text{mod } R)$ の tensorial support data $(\text{Spec}^h H^*(G; k), V_G)$ およびこの制限により $\text{mod } kG$ の tensorial support data $(\text{Proj } H^*(G; k), V_G)$ を定める．

(4) R を可換ネーター環とする. このとき, 特異圏 $D_{\text{sg}}(R)$ の対象 M の **singular support**

$$\text{Supp}_{\text{sg}}(M) := \{\mathfrak{p} \in \text{Sing } R \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \text{ in } D_{\text{sg}}(R_{\mathfrak{p}})\}$$

は $D_{\text{sg}}(R)$ の support data $(\text{Sing } R, \text{Supp}_{\text{sg}})$ を定める.

(X, σ) を三角圏 \mathcal{T} の support data とする. このとき, 容易にわかるように,

- $\mathcal{X} \in \text{Th}(\mathcal{T})$ に対して $\sigma(\mathcal{X}) := \bigcup_{M \in \mathcal{X}} \sigma(M) \in \text{Spcl}(X)$,
- $W \in \text{Spcl}(X)$ に対して $\sigma^{-1}(W) := \{M \in \mathcal{T} \mid \sigma(M) \subseteq W\} \in \text{Th}(\mathcal{T})$.

ここで, $\text{Th}(\mathcal{T})$, $\text{Spcl}(X)$ はそれぞれ \mathcal{T} , X の thick 部分圏, 特殊化閉集合の集合を表す. したがって, これらの対応で写像の組

$$\sigma : \text{Th}(\mathcal{T}) \rightleftarrows \text{Spcl}(X) : \sigma^{-1}$$

を得る. さらに, \mathcal{T} がテンソル三角圏で (X, σ) が \mathfrak{s} tensorial のとき,

$$M^{\otimes n} \in \sigma^{-1}(W) \Leftrightarrow \sigma(M) = \sigma(M^{\otimes n}) \subseteq W \Leftrightarrow M \in \sigma^{-1}(W).$$

そこで, 以下の概念を定義する.

Definition 1.9. [1, Definition 4.1] $(\mathcal{T}, \otimes, \mathbf{1})$ をテンソル三角圏とする.

(1) \mathcal{T} の根基テンソルイデアルとは, \mathcal{T} のイデアル \mathcal{I} で

$$\sqrt{\mathcal{I}} := \{M \in \mathcal{T} \mid M^{\otimes n} \in \mathcal{I} \text{ for some } n \geq 1\}$$

を満たすもの. $\text{Rad}_{\otimes}(\mathcal{T})$ で根基テンソルイデアルの集合を表す.

(2) 位相空間 X の部分集合 W が **Thomason 部分集合** であるとは,

$$W = \bigcup_{i \in I} Z_i \quad (Z_i^{\circ} \text{ は準コンパクト開集合})$$

と書けるときに言う. $\text{Thom}(X)$ で X の Thomason 部分集合の集合を表す. 特に, Thomason 部分集合は特殊化閉集合である: $\text{Thom}(X) \subseteq \text{Spcl}(X) := \{W : X \text{ の特殊化閉集合}\}$.

これらの概念について, 一つ補題を用意する.

Lemma 1.10. (1) [1, Lemma 4.2] \mathcal{T} のイデアル \mathcal{I} に対して,

$$\sqrt{\mathcal{I}} = \bigcap_{\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \in \text{Spec } \mathcal{T}} \mathcal{P}$$

が成立する.

(2) [1, Proposition 2.14] $\text{Spec}_{\otimes} \mathcal{T}$ の Thomason 部分集合は

$$W = \bigcup_{i \in I} \text{Supp}_{\otimes}(M_i)$$

なる集合.

この補題により, 対応 $\mathcal{I} \mapsto \sigma(\mathcal{I})$, $W \mapsto \sigma^{-1}(W)$ は

$$\sigma : \text{Rad}_{\otimes}(\mathcal{T}) \rightleftarrows \text{Thom}(X) : \sigma^{-1}$$

に制限されることが分かる. 実は Balmer support とはこの対応を全単射にするような tensorial support data で universal なものである. つまり, 以下のテンソル三角幾何学における基本定理が成り立つ.

Theorem 1.11. [1, Theorems 4.10 and 5.2] $(\mathcal{T}, \otimes, \mathbf{1})$ をテンソル三角圏とする.

- (1) 対応 $\mathcal{I} \mapsto \text{Supp}_{\otimes}(\mathcal{I}) := \bigcup_{M \in \mathcal{I}} \text{Supp}_{\otimes}(M)$, $W \mapsto \text{Supp}_{\otimes}^{-1}(W)$ により全単射

$$\text{Supp}_{\otimes} : \text{Rad}_{\otimes}(\mathcal{T}) \rightleftarrows \text{Thom}(\text{Spec}_{\otimes} \mathcal{T}) : \text{Supp}_{\otimes}^{-1}$$

を得る.

- (2) (X, σ) を \mathcal{T} の *tensorial support data* で以下の 2 条件を満たすとする.
- X はネーター *sober* 位相空間である.
 - 対応

$$\sigma : \text{Rad}_{\otimes}(\mathcal{T}) \rightleftarrows \text{Spcl}(X) : \sigma^{-1}$$

は全単射.

このとき, 同相 $X \cong \text{Spec}_{\otimes} \mathcal{T}$ が存在する.

この定理により, テンソル三角圏の構造解析は完全に $\text{Spec}_{\otimes} \mathcal{T}$ の位相構造の解析に帰着されることが分かる.

Balmer は上記定理を既知の部分圏の分類 [5, 6, 18] に応用して以下の結果を得た.

Theorem 1.12. [1, 2]

- (1) X をネータースキームとする. このとき, 同相

$$\text{Spec}_{\otimes} \text{D}^{\text{perf}}(X) \cong X$$

が存在する.

- (2) k を体, G を有限群とする. このとき, 同相

$$\text{Spec}_{\otimes} \text{D}^{\text{b}}(\text{mod } kG) \cong \text{Spec}^{\text{h}} \text{H}^*(G; k)$$

$$\text{Spec}_{\otimes}(\underline{\text{mod}} kG) \cong \text{Proj} \text{H}^*(G; k)$$

が存在する.

Remark 1.13. 一般に, テンソル三角圏の Balmer スペクトラム上に可換環の層が定義され, 局所環付き空間となる. 実は上の同型は位相空間としてのみならず, 局所環付き空間としての同型である.

2. “TENSOR-FREE” な三角幾何学

前節で Balmer のテンソル三角幾何学について簡単に解説した. 本節においてはテンソル構造を持たない三角圏におけるテンソル三角幾何学の類似を考え, そのスペクトラムの構成の一つの試みを与える. テンソル三角圏において素テンソルイデアルが重要な役割を果たしていたが, 一般の三角圏においては以下の概念を考える.

- Definition 2.1.** (1) 三角圏 \mathcal{T} が局所三角圏であるとは, ただ一つの $\mathbf{0}$ でない thick 部分圏を持つときにいう.
(2) 三角圏 \mathcal{T} の thick 部分圏 \mathcal{P} が素 thick 部分圏であるとは, Verdier 商 \mathcal{T}/\mathcal{P} が局所三角圏であるときにいう. \mathcal{T} の素 thick 部分圏の集合を $\text{Spec } \mathcal{T}$ と表すことにする.

Example 2.2. (1) X をネータースキームとする. X の点 x に対して,

$$\mathcal{S}(x) := \{M \in \text{D}^{\text{perf}}(X) \mid M_x \cong 0 \text{ in } \text{D}^{\text{perf}}(\mathcal{O}_{X,x})\}$$

は $\text{D}^{\text{perf}}(X)$ の素 thick 部分圏である. 実際, 三角同値

$$\text{D}^{\text{perf}}(X)/\mathcal{S}(x) \cong \text{D}^{\text{perf}}(\mathcal{O}_{X,x}) \cong \text{K}^{\text{b}}(\text{proj } \mathcal{O}_{X,x})$$

が存在するが, [15, Theorem 1.4] によると $K^b(\text{proj } \mathcal{O}_{X,x})$ はただ一つの $\mathbf{0}$ でない thick 部分圏 $\text{thick}(K(\mathfrak{m}_{X,x}))$ を持つ. ここで, $K(\mathfrak{m}_{X,x})$ は $\mathcal{O}_{X,x}$ の極大イデアル $\mathfrak{m}_{X,x}$ の生成系の Koszul 複体, $\text{thick}(K(\mathfrak{m}_{X,x}))$ は $K(\mathfrak{m}_{X,x})$ を含む最小の thick 部分圏を表す.

- (2) R を超曲面局所環 (つまり $\hat{R} \cong S/(f)$, S は正則局所環) とする. このとき R の特異軌跡 $\text{Sing } R$ の元 \mathfrak{p} に対して,

$$\mathcal{S}(\mathfrak{p}) := \{M \in D_{\text{sg}}(R) \mid M_{\mathfrak{p}} \cong 0 \text{ in } D_{\text{sg}}(R_{\mathfrak{p}})\}$$

は $D_{\text{sg}}(R)$ の素 thick 部分圏である. 実際, 三角同値

$$D_{\text{sg}}(R)/\mathcal{S}(\mathfrak{p}) \cong D_{\text{sg}}(R_{\mathfrak{p}})$$

が存在し, [17, Theorem 5.10] により $D_{\text{sg}}(R_{\mathfrak{p}})$ はただ一つの $\mathbf{0}$ でない thick 部分圏 $\text{thick}(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$ をもつ.

次に, Balmer スペクトラムの構成に倣って $\text{Spec } \mathcal{T}$ 上に位相を導入する. この位相のうち少し一般的な理論は [14] において与えられている.

Definition 2.3. [14, Definition 2.1] \mathcal{T} の対象 M に対して, その **triangulated support** を

$$\text{Supp}(M) := \{\mathcal{P} \in \text{Spec } \mathcal{T} \mid M \notin \mathcal{P}\}$$

で定める. 容易に分かるように $\text{Supp}(M) \cup \text{Supp}(N) = \text{Supp}(M \oplus N)$ が成立するので, $\text{Spec } \mathcal{T}$ 上には $\{\text{Supp}(M) \mid M \in \mathcal{T}\}$ を閉集合の基底とするような位相が入る. つまり, この位相に関する閉集合は

$$Z(\mathcal{E}) := \bigcap_{M \in \mathcal{E}} \text{Supp}(M) = \{\mathcal{P} \in \text{Spec } \mathcal{T} \mid \mathcal{E} \cap \mathcal{P} = \emptyset\} \quad (\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T})$$

なる形の集合である. このようにして定まる位相空間 $\text{Spec } \mathcal{T}$ を \mathcal{T} のスペクトラムと呼ぶ.

この位相空間は例えば以下の性質を満たす.

Proposition 2.4. [14, Proposition 2.3] \mathcal{T} の素 thick 部分圏 \mathcal{P} に対して,

$$\overline{\{\mathcal{P}\}} := \{\mathcal{Q} \in \text{Spec } \mathcal{T} \mid \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}\}.$$

特に, $\text{Spec } \mathcal{T}$ は T_0 空間である.

次に, Balmer の結果 Theorem 1.11 の類似が我々のスペクトラム $\text{Spec } \mathcal{T}$ に対しても成立することを見る. そのために以下の概念を導入する.

Definition 2.5. (1) \mathcal{T} の thick 部分圏 \mathcal{X} が **根基 thick 部分圏** であるとは,

$$\mathcal{X} = \sqrt{\mathcal{X}} := \bigcap_{\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P} \in \text{Spec } \mathcal{T}} \mathcal{P}$$

が成り立つときに言う. $\text{Rad}(\mathcal{T})$ で \mathcal{T} の根基 thick 部分圏の集合を表す.

- (2) \mathcal{T} の **parameter set** $\text{Param } \mathcal{T} \subseteq 2^{\text{Spec } \mathcal{T}}$ を

$$\text{Supp}(\mathcal{X}) = \bigcup_{M \in \mathcal{X}} \text{Supp}(M) \quad (\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T} : \text{thick})$$

なる $\text{Spec } \mathcal{T}$ の部分集合からなる集合とする.

以下が本報告集における第一の主定理である.

Theorem 2.6. (cf. [14, Theorem 2.9] and [13, Theorem 2.3])

(1) 対応 $\mathcal{X} \mapsto \text{Supp}(\mathcal{X})$, $W \mapsto \text{Supp}^{-1}(W)$ は全単射

$$\text{Supp} : \text{Rad}(\mathcal{T}) \rightleftarrows \text{Param}(\mathcal{T}) : \text{Supp}^{-1}$$

を導く.

(2) (X, σ) を \mathcal{T} の *support data* で以下の 2 条件を満たすとする.

- X はネーター *sober* 位相空間である.
- 対応

$$\sigma : \text{Th}(\mathcal{T}) \rightleftarrows \text{Spcl}(X) : \sigma^{-1}$$

は全単射.

このとき, 位相同型 $X \cong \text{Spec } \mathcal{T}$ が存在する.

Remark 2.7. [13] において上の定理 (2) と同様の主張が示されているが, そこで用いられている位相空間は一般に $\text{Spec } \mathcal{T}$ とは異なるものである.

Theorem 1.12 と同様にして以下のテンソル積を用いない復元定理を得る.

Corollary 2.8. (1) X を準アフィンスキームとする. このとき, 同相

$$\text{Spec } \mathcal{T} \cong X$$

が存在する.

(2) k を標数 p の体, G を有限 p 群とする. このとき, 同相

$$\begin{aligned} \text{Spec}_{\otimes} D^b(\text{mod } kG) &\cong \text{Spec}^h H^*(G; k) \\ \text{Spec}_{\otimes}(\underline{\text{mod}} kG) &\cong \text{Proj } H^*(G; k) \end{aligned}$$

が存在する.

(3) R を超曲面局所環とする. このとき, 同相

$$\text{Spec } D_{\text{sg}}(R) \cong \text{Sing } R$$

が存在する.

3. APPLICATIONS TO COMMUTATIVE ALGEBRA

この節では可換ネーター環 R に付随して自然に現れる三角圏である有限生成加群の有界導来圏 $D^b(\text{mod } R)$ 及び特異圏 $D_{\text{sg}}(R)$ のスペクトラムについて考察する.

以降, $R = S/(x_1, \dots, x_c)$ を完全交差局所環, S を正則局所環, x_1, \dots, x_c を S 正則列とする. 次数付き超曲面

$$A := S[t_1, \dots, t_c] / \left(\sum_{i=1}^c x_i t_i \right) \quad (\deg t_i = 1, \deg a = 0 \text{ for } a \in S)$$

を考える. このとき全射準同型

$$S[t_1, \dots, t_c] \twoheadrightarrow A \twoheadrightarrow A/(\underline{x}) = R[t_1, \dots, t_c],$$

よりスキームの可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_R^{c-1} & \xrightarrow{i} & Y := \text{Proj } A \xrightarrow{u} \mathbb{P}_S^{c-1} \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ \text{Spec } R & \xrightarrow{j} & \text{Spec } S. \end{array}$$

を得る. この可換図式について, Stevenson [16] による以下の観察に注目する.

Lemma 3.1. (1) $\text{Sing } Y \subseteq i(\text{Sing } \mathbb{P}_R^{c-1})$.
(2) $\text{Sing } \mathbb{P}_R^{c-1} = p^{-1}(\text{Sing } R)$.

この補題により、連続写像

$$\varphi : \text{Sing } Y \hookrightarrow i(\text{Sing } \mathbb{P}_R^{c-1}) \xrightarrow{i^{-1}} \text{Sing } \mathbb{P}_R^{c-1} \xrightarrow{p} \text{Sing } R$$

を得る。構成から $P \in \text{Sing } Y$ に対して、

$$\varphi(P) = (P/(x))_0$$

特に、

$$P \subseteq Q \Rightarrow \varphi(P) \subseteq \varphi(Q).$$

一方、Theorem 2.6 と [16, Corollary 10.5] により同相 $\text{Spec } D_{\text{sg}}(R) \cong \text{Sing } Y$ が存在する。この同相と写像 $\varphi : \text{Sing } Y \rightarrow \text{Sing } R$ を用いることで以下の補題を得る。

Lemma 3.2. \mathcal{P} を $D_{\text{sg}}(R)$ の素 *thick* 部分圏とする。このとき \mathcal{P} は [14] の意味での *prime* となる。つまり $\{\mathfrak{p} \in \text{Sing } R \mid R/\mathfrak{p} \notin \mathcal{P}\}$ はただ一つの極大元を持つ。

Lemma 3.3. $K^b(\text{proj } R) \not\subseteq \mathcal{P} \subseteq D^b(\text{mod } R)$ を *thick* 部分圏とする。このとき、 $\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R \mid K(\mathfrak{p}) \notin \mathcal{P}\}$ がただ一つの極大元を持つことと \mathcal{P} が $D^b(\text{mod } R)$ の素 *thick* 部分圏であることは同値。

上の 2 つの補題は本報告書における素 *thick* 部分圏と論文 [14] において定義された異なる意味での素 *thick* 部分圏の間の関係を与えるものである。特に、[14] の主定理に対応する以下の結果を得る。

Theorem 3.4. (cf. [14, Theorems 3.17 and 4.21]) R を正則局所環の商であるような完全交差局所環とする。

- (1) 常に $\dim \text{Spec } D_{\text{sg}}(R) \geq \dim \text{Sing } R$ が成立し、次は同値。
 - (a) $\text{Spec } D_{\text{sg}}(R) \cong \text{Sing } R$.
 - (b) $\dim \text{Spec } D_{\text{sg}}(R) = \dim \text{Sing } R$.
 - (c) R は超曲面。
- (2) 常に $\dim \text{Spec } D^b(\text{mod } R) \geq \dim R$ が成立し、次は同値。
 - (a) $\text{Spec } D^b(\text{mod } R) \cong \text{Spec } R$.
 - (b) $\dim \text{Spec } D^b(\text{mod } R) = \dim R$.
 - (c) R は正則。

4. 終わりに

最後に、三角圏のスペクトラムに関する問題をいくつか述べて終わりにする。

テンソル三角圏 \mathcal{T} のスペクトラム $\text{Spec } \mathcal{T}$ と可換環 R の Zariski スペクトラムに共通する性質として以下の物がある：

- 準コンパクトかつ T_0 である。
- 準コンパクト開集合の全体が開集合の基底をなす。
- 有限個の準コンパクト開集合の共通部分は再び準コンパクト。
- sober 空間である。

この条件を満たすような位相空間はスペクトラル空間と呼ばれる。

Question 4.1. 三角圏 \mathcal{T} に対して、 $\text{Spec } \mathcal{T}$ はスペクトラル空間か？

その定義から、特殊化閉部分集合や Thomason 部分集合と異なり、 $\text{Param } \mathcal{T}$ の元のトポロジカルな特徴づけは与えられていない。Lemma 1.10(2) と比べると、以下な自然な問題が現れる。

Question 4.2. 三角圏 \mathcal{T} に対して、 $\text{Param}(\mathcal{T}) = \text{Thom}(\mathcal{T})$ か？

REFERENCES

- [1] P. BALMER, The spectrum of prime ideals in tensor triangulated categories, *J. Reine Angew. Math.* **588** (2005), 149–168.
- [2] P. BALMER, Spectra, spectra, spectra–tensor triangular spectra versus Zariski spectra of endomorphism rings, *Algebr. Geom. Topol.* **10** (2010), no. 3, 1521–1563.
- [3] P. BALMER, Tensor triangular geometry, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Volume II*, 85–112, *Hindustan Book Agency, New Delhi*, 2010.
- [4] D. J. BENSON; J. F. CARLSON; J. RICKARD, Thick subcategories of the stable module category, *Fund. Math.* **153** (1997), no. 1, 59–80.
- [5] D. J. BENSON; S. B. IYENGAR; H. KRAUSE, Stratifying modular representations of finite groups, *Ann. of Math. (2)* **174** (2011), no. 3, 1643–1684.
- [6] J. F. CARLSON; S. B. IYENGAR, Thick subcategories of the bounded derived category of a finite group, *Trans. Amer. Math. Soc.* **367** (2015), no. 4, 2703–2717.
- [7] IVO DELL’AMBROGIO, Tensor triangular geometry and KK-theory, *J. Homotopy Relat. Struct.* **5** (2010), no. 1, 319–358.
- [8] E. S. DEVINATZ; M. J. HOPKINS; J. H. SMITH, Nilpotence and stable homotopy theory, I, *Ann. of Math. (2)* **128** (1988), no. 2, 207–241.
- [9] W. DWYER; P. C. GREENLEES; S. IYENGER, Finiteness in derived categories of local rings *Comment. Math. Helv.* **81** (2006), 383–432.
- [10] M. J. HOPKINS, Global methods in homotopy theory, *Homotopy theory (Durham, 1985)*, 73–96, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 117, *Cambridge Univ. Press, Cambridge*, 1987.
- [11] M. J. HOPKINS; J. H. SMITH, Nilpotence and stable homotopy theory, II, *Ann. of Math. (2)* **148** (1998), no. 1, 1–49.
- [12] M. HOVEY; J. H. PALMIERI; N. P. STRICKLAND, Axiomatic stable homotopy theory, *Mem. Amer. Math. Soc.* **128** (1997), no. 610.
- [13] H. MATSUI; Singular equivalences of commutative noetherian rings and reconstruction of singular loci, *J. Alg.* **522** (2019), no.15, 170–194.
- [14] H. MATSUI AND R. TAKAHASHI; Construction of spectra of triangulated categories and applications to commutative rings, to appear in *J. Math. Soc. Japan*, [arXiv:1811.06312](https://arxiv.org/abs/1811.06312).
- [15] A. NEEMAN, The chromatic tower for $D(R)$, With an appendix by Marcel Bökstedt, *Topology* **31** (1992), no. 3, 519–532.
- [16] G. STEVENSON, Subcategories of singularity categories via tensor actions, *Compos. Math.* **150** (2014), no. 2, 229–272.
- [17] R. TAKAHASHI, Classifying thick subcategories of the stable category of Cohen–Macaulay modules, *Adv. Math.* **225** (2010), no. 4, 2076–2116.
- [18] R. W. THOMASON, The classification of triangulated subcategories, *Compositio Math.*, **105** (1):1–27, 1997.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1 KOMABA, MEGURO-KU, TOKYO 153-8914, JAPAN

Email address: mhiroki@ms.u-tokyo.ac.jp

TILTING THEORY OF PREPROJECTIVE ALGEBRAS

YUYA MIZUNO

ABSTRACT. In this report, we explain recent developments about the representation theory of preprojective algebras, and its connection to path algebras and the Coxeter groups. In particular, we discuss our recent results based on joint work with Hugh Thomas [MT].

1. INTRODUCTION

Let Δ be a simply laced Dynkin diagram and Q a quiver whose underlying graph is Δ . In [G], Gabriel gave a close relationship between the representation theory of Q and the root system of Δ . More precisely, he proved a bijection between indecomposable representations of Q and positive roots of Δ . This result is one of the most fundamental connections between the quiver representation theory and the root system. Recently, it has turned out that preprojective algebras (Definition 2.3) allow us to give a stronger and more direct connection. Indeed, the preprojective algebra, which unifies all the path algebras of quivers whose underlying graph is Δ , gives a representation-theoretical interpretation of the Weyl group W of Δ (Theorem 2.7). This fact leads to the extensive study of connections between representation theory of algebras and combinatorics of W (for example [AM, AIRT, BIRS, GLS, IR1, IRRT, IRTT, L, ORT]). We also remark that the preprojective algebra naturally appears in many branch of mathematics such as simple singularities, quantum groups, quiver varieties and cluster algebras.

In this report, we explain some relationships between the representation theory of preprojective algebras, path algebras and the Coxeter groups. One of the key ingredients is the notion of *c-sortable elements* (Definition 2.16), which are some elements of W . *c-sortable elements* were originally defined in [R2] from the viewpoint of *Cambrian lattices* [R1]. In particular, an explicit map $\pi^c : W \rightarrow \{c\text{-sortable elements of } W\}$, where c denotes the Coxeter element, plays a quite important role to relate *c-sortable elements* with generalized associahedra and cluster algebras [FR, R3, RS1].

On the other hand, it is also shown that *c-sortable elements* are quite natural from the viewpoint of quiver representations [IT, AIRT] (Theorem 2.21, Corollary 2.23). One of the aims is to give a *categorical* interpretation of the above map π^c in terms of the representation theory of preprojective algebras and path algebras. Another aim is, using this map, to give answers to questions proposed by Oppermann–Reiten–Thomas [ORT] (Question 3.1). In [ORT], they gave a very fundamental bijection between the elements of W and quotient-closed subcategories of the path algebra of Q (Theorem 2.14). Then it is natural to ask a characterization of quotient-closed subcategories being extension-closed (that is, *torsion classes*) and indeed they proposed conjectures about the problems [ORT, Conjecture 11.1, 11.2].

In this report, we will explain the background about these problems including necessary definitions, examples and results, and we discuss methods of our proofs of conjectures.

Acknowledgement. The author would like to thank the organizers for giving me an opportunity to give a talk.

2. PRELIMINARY

Notation. Throughout the report, let K be an algebraically closed field. For a K -algebra Λ , we denote by $\text{mod}\Lambda$ the category of finite dimensional right Λ -modules.

In this section, we collect some basic definitions and results.

2.1. Path algebras and preprojective algebras.

Definition 2.1. A *quiver* $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ is a quadruple consisting of two sets : Q_0 (whose elements are called vertices) and Q_1 (whose elements are called arrows), and two maps $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ which associate to each arrow $a \in Q_1$ its source $s(a) \in Q_0$ and its target $t(a) \in Q_0$, respectively. Thus, a quiver is nothing but an oriented graph without any restriction as to the number of arrows. A *path* of Q is a sequence

$$a_\ell \dots a_2 a_1,$$

where $a_k \in Q_1$ for all $1 \leq k \leq \ell$ and $t(a_k) = s(a_{k+1})$ for each $1 \leq k < \ell$. Moreover, we define e_i the path of length 0 which corresponds to each vertex $i \in Q_0$.

Let Q be a quiver. The *path algebra* KQ of Q is the K -algebra whose underlying K -vector space has as its basis the set of all paths of Q , and define the product for two paths $a_m \dots a_1$ and $b_n \dots b_1$ of KQ by

$$a_m \dots a_1 \cdot b_n \dots b_1 := \begin{cases} a_m \dots a_1 b_n \dots b_1 & (s(a_1) = t(b_n)) \\ 0 & (s(a_1) \neq t(b_n)). \end{cases}$$

In particular, we have $e_i^2 = e_i$ for any $i \in Q_0$, that is, it is an idempotent and we have $1 = \sum_{i \in Q_0} e_i$.

We give some examples of path algebras.

Example 2.2. (a) Let Q be the following quiver

$$Q = \begin{array}{c} \circ \\ \searrow \\ \circ \end{array}.$$

Then we have $KQ \simeq K[x]$.

(b) Let Q be the following quiver

$$Q = (1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3).$$

Then we have

$$KQ \simeq \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & K & K \end{pmatrix}.$$

Moreover, we have

$$KQ/\langle ba \rangle \simeq \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ 0 & K & K \end{pmatrix},$$

where $\langle ba \rangle$ denotes the ideal of KQ generated by ba .

Next we give a definition of preprojective algebras.

Definition 2.3. Let Q be an acyclic quiver. The preprojective algebra of Q is the algebra

$$\Lambda = K\overline{Q}/\langle \sum_{a \in Q_1} (aa^* - a^*a) \rangle$$

where \overline{Q} is the double quiver of Q , which is obtained from Q by adding for each arrow $a : i \rightarrow j$ in Q_1 an arrow $a^* : i \leftarrow j$ pointing in the opposite direction.

The following lemma is well-known (see [Ri] for example).

Lemma 2.4. Let Q be an acyclic quiver and Λ the preprojective algebra of Q .

- (a) Λ does not depend on the orientation of Q (namely it is determined by the underlying graph of Q).
- (b) Λ is finite dimensional if and only if Q is a Dynkin (A, D, E) quiver.

Notation. Fix a vertex $i \in Q_0$. Then we can define 1-dimensional simple module S_i by

$$S_i \cdot e_j = \begin{cases} K & (i = j) \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

Example 2.5. Let Q be the following quiver

$$Q = (1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3).$$

Then we have

$$\overline{Q} = (1 \xrightleftharpoons[a^*]{a} 2 \xrightleftharpoons[b^*]{b} 3).$$

In this case, $e_1\Lambda$ has K -basis $\{e_1, a^*, a^*b^*\}$ and, as a Λ -module, $e_1\Lambda$ has the following composition series

$$0 \subset M_3 \subset M_2 \subset M_1 = e_1\Lambda,$$

where $M_3 = S_3$, $M_2/M_3 \simeq S_2$ and $M_1/M_2 \simeq S_1$. Therefore we denote $e_1\Lambda$ by $\begin{smallmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{smallmatrix}$

For simplicity, we denote S_i by i . Then we can write $e_1\Lambda$ as $\frac{1}{3}$. In this notation, we have

$$e_1\Lambda \oplus e_2\Lambda \oplus e_3\Lambda = \frac{1}{3} \oplus \frac{2}{3} \oplus \frac{3}{3}.$$

2.2. A connection between preprojective algebras and the Coxeter groups. Let Q be a finite connected acyclic quiver with vertices $Q_0 = \{1, \dots, n\}$. We always assume for simplicity that we have an arrow $j \rightarrow i$, then $j < i$. Next we discuss an important relationship between preprojective algebras and the Coxeter groups.

Definition 2.6. The Coxeter group W associated to Q is defined by the generators $S := \{s_1, \dots, s_n\}$ and relations

- $s_i^2 = 1$,
- $s_i s_j = s_j s_i$ if there is no arrow between i and j in Q ,
- $s_i s_j s_i = s_j s_i s_j$ if there is precisely one arrow between i and j in Q .

We denote by \mathbf{w} a word, that is, an expression in the free monoid generated by s_i for $i \in Q_0$ and w its equivalence class in the Coxeter group W . We regard W as a poset defined by the (right) weak order. An element $c = s_1 \dots s_n$ is called a Coxeter element (Note that we require that the order of the product of simple generators of c is compatible with the orientation of the quiver).

Let Λ the preprojective algebra of Q . We denote by I_i the two-sided ideal of Λ generated by $1 - e_i$, where e_i ($i \in Q_0$) is the path of length 0 (= a primitive idempotent) of Λ . We denote by $\langle I_1, \dots, I_n \rangle$ the set of ideals of Λ which can be written as $I_{u_1} \cdots I_{u_l}$ for some $l \geq 0$ and $u_1, \dots, u_l \in Q_0$. Then we have the following result (see also [Mi, Theorem 2.14] in the case of Dynkin).

Theorem 2.7. [BIRS, Theorem III.1.9] *There exists a bijection $W \rightarrow \langle I_1, \dots, I_n \rangle$. It is given by $w \mapsto I_w = I_{u_l} \cdots I_{u_1}$ for any reduced expression $w = s_{u_1} \cdots s_{u_l}$.*

Note that the product of ideals is taken in the opposite order to the product of expression of w . This is just because we follow the convention of [ORT, AIRT].

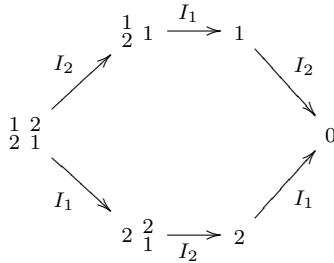
The following result shows that the object I_w is quite natural and important from the viewpoint of tilting theory (we refer to [IR2] and its literature for tilting and support τ -tilting theory).

Theorem 2.8. [BIRS, Theorem III.1.6][Mi, Theorem 2.2].

- (a) *Let Λ be the preprojective algebra of a non-Dynkin quiver Q and $\text{tilt } \Lambda$ the set of isoclasses of basic tilting Λ -modules. Then the map $w \mapsto I_w$ gives an order-reversing injection from W to $\text{tilt } \Lambda$.*
- (b) *Let Λ be the preprojective algebra of a Dynkin quiver Q and $s\tau\text{-tilt } \Lambda$ the set of isoclasses of basic support τ -tilting Λ -modules. Then the map $w \mapsto I_w$ gives an order-reversing bijection from W to $s\tau\text{-tilt } \Lambda$.*

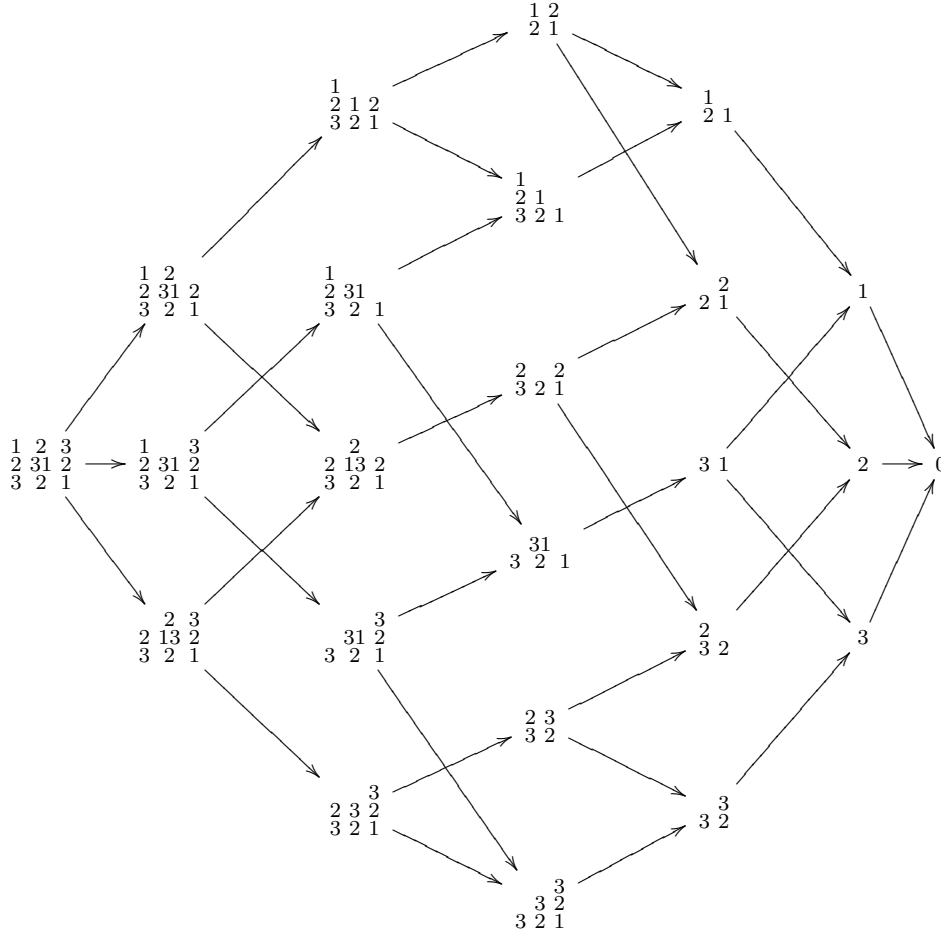
Example 2.9. Take $i \in Q_0$. Then, for $X \in \text{mod } \Lambda$, XI_i is the minimum amongst submodule Y of X such that any composition factor of X/Y has the form S_i (that is, the action of I_i delete i -top of X). Note that the Hasse quiver of $s\tau\text{-tilt } \Lambda$ coincides with the mutation quiver of $s\tau\text{-tilt } \Lambda$ [AIR, Corollary 2.34].

- (a) Let Λ be the preprojective algebra of type A_2 . In this case, the Hasse quiver of $s\tau\text{-tilt } \Lambda$ is given as follows.



Here we write a direct sum $X \oplus Y$ by $X \ Y$. Note that I_i denotes a left multiplication (not right multiplication).

- (b) Let Λ be the preprojective algebra of type A_3 . In this case, the Hasse quiver of $s\tau\text{-tilt } \Lambda$ is given as follows



Remark 2.10. There is some generalization of Theorem 2.8 to non-simply laced Dynkin cases by Fu-Geng [FG] and Murakami [Mu].

Remark 2.11. A relationship with the construction of quiver varieties are explained in [ST].

2.3. Results by Oppermann–Reiten–Thomas. Next we briefly explain a main result of [ORT], which gives a fundamental connection between path algebras, preprojective algebras and the Coxeter groups.

Definition 2.12. Let Λ be the preprojective algebra of Q . For a Λ -module X , we denote by X_{KQ} the KQ -module by the restriction, that is, we forget the action of the arrows $a^* \in \overline{Q}$. We denote by $\text{add}X_{KQ}$ the full subcategories of $\text{mod}KQ$ whose objects are direct summands of finite direct sums of copies of X_{KQ} . Moreover we associate the subcategory

$$\text{res}X = \text{add}X_{KQ} \bigcap \text{mod}KQ.$$

In the case of non-Dynkin quiver, we denote by $\overline{\text{res}X}$ the additive category generated by $\text{res}X$ together with all non-preprojective indecomposable KQ -modules (Note that in the case of Dynkin quiver, all modules are preprojective modules. We refer to [ASS, VIII] for the notion of *preprojective modules*).

Example 2.13. Let Q be the following quiver

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3.$$

Then $KQ = \begin{smallmatrix} & & 3 \\ & & \oplus \\ & 2 & \\ \oplus & & \\ 1 & & \oplus \\ & & 1 \end{smallmatrix}$ (Note that our convention is different from [ASS] but the same as [ORT, AIRT]) and the preprojective algebra $\Lambda = \begin{smallmatrix} & & 3 \\ & & \oplus \\ & 2 & \\ \oplus & & \\ 1 & & \oplus \\ & & 1 \end{smallmatrix}$. Then $\text{res}(\Lambda) = \text{add}\{1, 2, 3, \begin{smallmatrix} 2 \\ \oplus \\ 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 3 \\ \oplus \\ 2 \\ \oplus \\ 1 \end{smallmatrix}\}$ (in this way, we always obtain all preprojective KQ -modules as $\text{res}(\Lambda)$: this is why we call Λ *preprojective* algebras).

For example, $I_1 I_3 = \begin{smallmatrix} 2 \\ \oplus \\ 3 \\ \oplus \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ \oplus \\ 1 \end{smallmatrix}$ and $\text{res}(I_1 I_3) = \text{add}\{2, 3, \begin{smallmatrix} 2 \\ \oplus \\ 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 3 \\ \oplus \\ 2 \\ \oplus \\ 1 \end{smallmatrix}\}$.

Consider the infinite word $\underline{c}^\infty = \underline{c} \underline{c} \underline{c} \dots$, where $\underline{c} = s_1 \dots s_n$. For w , we take the lexicographically first reduced expression for w in \underline{c}^∞ (or equivalently, among all the reduced expressions $s_{u_1} \dots s_{u_l}$ for w in \underline{c}^∞ , we choose the one such that s_{u_1} is as far to the left as possible in \underline{c}^∞ , and, among such expressions, s_{u_2} is as far to the left as possible, and so on for each s_{u_j}). It is uniquely determined and we denote it by \underline{w} . Then we can identify \underline{c}^∞ with indecomposable preprojective KQ -modules $P_1, \dots, P_n, \tau^- P_1, \dots, \tau^- P_n, \tau^{-2} P_1, \dots$, dropping any $\tau^i P_j$ if it is zero, where $P_i := e_i KQ$.

We call a subcategory \mathcal{A} in $\text{mod}KQ$ *cofinite* if there are only finitely many indecomposable KQ -modules which are not in \mathcal{A} (in the case of Dynkin quiver, cofinite is automatic). Note that any cofinite quotient closed subcategory contains all the non-preprojective KQ -modules [ORT, Proposition 2.2]. Then we have the following result.

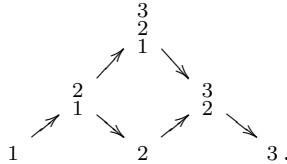
Theorem 2.14. [ORT] *Let Q be an acyclic quiver and W the Coxeter group of Q . There is a bijection*

$$W \longrightarrow \{\text{cofinite quotient-closed subcategories of } \text{mod}KQ\}.$$

- (a) *This bijection is obtained by removing from indecomposable preprojective KQ -modules corresponding to \underline{w} (via the above identification)*
- (b) *This bijection is also obtained by the map $w \mapsto \text{res}I_w$.*

Thus we have two maps : (a) uses combinatorics of the Auslander-Reiten quiver and (b) uses the representation theory of preprojective algebras.

Example 2.15. (a) Let $Q = (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)$. Then the AR quiver of $\text{mod}KQ$ is given by



For example, take $w = s_1 s_3 = s_3 s_1$. Then $\underline{w} = s_1 s_3$ and hence the corresponding indecomposable modules are $\{1, \begin{smallmatrix} 2 \\ \oplus \\ 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 3 \\ \oplus \\ 2 \\ \oplus \\ 1 \end{smallmatrix}\}$. Thus the subcategory $\text{add}\{2, 3, \begin{smallmatrix} 2 \\ \oplus \\ 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 3 \\ \oplus \\ 2 \\ \oplus \\ 1 \end{smallmatrix}\}$, which was obtained by removing $\{1, \begin{smallmatrix} 3 \\ \oplus \\ 2 \\ \oplus \\ 1 \end{smallmatrix}\}$ from all KQ -modules, is quotient-closed (Theorem 2.14 (a)). On the other hand, one can obtain the same category as $\text{res}I_w$ (Theorem 2.14 (b) and Example 2.13). For example, if $w = s_2 s_3 s_1 s_2$, then $\text{res}I_w = \text{add}\{1, 3\}$ is quotient-closed.

(b) Let Q be the following quiver

$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ \nearrow & & \searrow \\ 1 & \longrightarrow & 3. \end{array}$$

We identify the infinite word $\underline{c}^\infty = s_1 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 \dots$ with infinitely many preprojective modules $P_1, P_2, P_3, \tau^{-1}P_1, \tau^{-1}P_2, \tau^{-1}P_3, \tau^{-2}P_1, \tau^{-2}P_2, \tau^{-2}P_3, \dots$.

For example, take $w = s_1 s_3 s_2 s_3 s_1$. Then the left most word \underline{w} is $s_1 s_2 s_3 s_2 s_1$. Hence the corresponding indecomposable modules are $\{P_1, P_2, P_3, \tau^{-1}P_2, \tau^{-2}P_1\}$ and hence the subcategory consists of modules of $\text{mod}KQ$ by removing these modules is quotient-closed, which is also obtained as $\overline{\text{res}I_w}$.

2.4. c -sortable elements.

Definition 2.16. Let c be a Coxeter element. Fix a reduced expression of c and regard c as a reduced word. For $w \in W$, we denote the support of w by $\text{supp}(w)$, that is, the set of generators occurring in a reduced expression of w .

We call an element $w \in W$ *c-sortable* if there exists a reduced expression of w of the form $\mathbf{w} = c^{(0)}c^{(1)} \dots c^{(m)}$, where all $c^{(t)}$ are subwords of c whose supports satisfy

$$\text{supp}(c^{(m)}) \subseteq \text{supp}(c^{(m-1)}) \subseteq \dots \subseteq \text{supp}(c^{(1)}) \subseteq \text{supp}(c^{(0)}) \subseteq Q_0.$$

For the generators $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, we let $\langle s \rangle := S \setminus \{s\}$ and denote $W_{\langle s \rangle}$ by the subgroup of W generated by $\langle s \rangle$. For any $w \in W$, there is a unique factorization $w = w_{\langle s \rangle} \cdot w^{(s)}$ maximizing $\ell(w_{\langle s \rangle})$ for $w_{\langle s \rangle} \in W_{\langle s \rangle}$ and $\ell(w_{\langle s \rangle}) + \ell(w^{(s)}) = \ell(w)$.

Then we give the following map introduced by Reading [R2].

Definition 2.17. Let c be a Coxeter element and let s be initial in c . Then, define $\pi^c(\text{id}) = \text{id}$ and, for each $w \in W$, we define

$$\pi^c(w) := \begin{cases} s\pi^{scs}(sw) & \text{if } \ell(sw) < \ell(w) \\ \pi^{sc}(w_{\langle s \rangle}) & \text{if } \ell(sw) > \ell(w). \end{cases}$$

Then we have the following property.

Theorem 2.18. [R3, Proposition 3.2][RS2, Corollary 6.2] *For any $w \in W$, $\pi^c(w)$ is the unique maximal c -sortable element below w in the weak order.*

Example 2.19. Let Q be the following quiver

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3.$$

Then $c = s_1 s_2 s_3$. For example $s_1 s_2 s_3 s_2$ is a c -sortable element, and $s_1 s_2 s_3 s_2 s_1$ is not.

Let $w = s_1 s_2 s_3 s_2 s_1$. Then one can check that $\pi^c(w) = s_1 s_2 s_3 s_2$ and it is a unique maximal c -sortable element below w .

2.5. c -sortable elements and finite torsion-free classes. Next we discuss a relationship between sortable elements and the notion of torsion(-free) classes.

Definition 2.20. (a) We call a subcategory of $\text{mod}KQ$ *torsion class* (respectively, *torsion-free class*) if it is closed under factor modules (respectively, submodules) and extension-closed.

(b) We call a torsion class (or torsion-free class) *finite* if it has finitely many indecomposable modules.

For a given torsion class \mathcal{T} , we have the corresponding torsion-free class \mathcal{F} as $\mathcal{T}^\perp := \{X \in \text{mod}KQ \mid \text{Hom}_{KQ}(\mathcal{T}, X) = 0\}$, and dually for a given torsion-free class \mathcal{F} , we have the corresponding torsion class ${}^\perp\mathcal{F}$. We call such a pair of torsion class and torsion-free class a *torsion pair*.

Next we recall layers following [AIRT]. For any reduced word $\mathbf{w} = s_{u_1} \dots s_{u_l}$, we have the chain of ideals

$$\Lambda \supset I_{u_1} \supset I_{u_2} I_{u_1} \supset \dots \supset I_{u_l} \dots I_{u_2} I_{u_1} = I_{\mathbf{w}}.$$

For $j = 1, \dots, l$, we define the *layer*

$$L_{\mathbf{w}}^j = e_{u_j} L_{\mathbf{w}}^j := \frac{I_{u_{j-1}} \dots I_{u_1}}{I_{u_j} \dots I_{u_1}}.$$

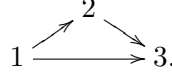
Note that the layer $L_{\mathbf{w}}^j$ is an indecomposable Λ -module for any $j = 1, \dots, l$ [AIRT].

Then, for a c -sortable word, we can give a torsion-free class, which is explicitly described by layers, as follows.

Theorem 2.21. [AIRT, Theorems 3.3, 3.11 and Corollary 3.10] *Let c be a Coxeter element of Q and $\mathbf{w} = c^{(0)}c^{(1)} \dots c^{(m)} = s_{u_1} \dots s_{u_l}$ a c -sortable word.*

- (a) $L_{\mathbf{w}}^j$ is a non-zero indecomposable KQ -module for all $j = 1, \dots, l$.
- (b) We have $\text{add}\{L_{\mathbf{w}}^1, \dots, L_{\mathbf{w}}^l\} = \text{res}(\Lambda/I_{\mathbf{w}})$ and it is finite torsion-free class.

Example 2.22. Let Q be the following quiver



Then $s_1 s_2 s_3$ is a Coxeter element of Q . Let $\mathbf{w} = s_1 s_2 s_3 s_1 s_2 s_1$. Then we have

$$L_{\mathbf{w}}^1 = 1, L_{\mathbf{w}}^2 = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, L_{\mathbf{w}}^3 = \begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}, L_{\mathbf{w}}^4 = \begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}, L_{\mathbf{w}}^5 = \begin{smallmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}, L_{\mathbf{w}}^6 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}.$$

Hence we have

$$\text{add}\{L_{\mathbf{w}}^1, \dots, L_{\mathbf{w}}^l\} = \text{res}(\Lambda/I_{\mathbf{w}}).$$

Therefore, Theorem 2.21 implies that a c -sortable element gives a finite torsion-free class. Conversely, any finite torsion-free classes of $\text{mod}KQ$ is given by a c -sortable element [AIRT, Theorem 3.16].

Thus, we provide the following correspondence, which is also shown in [T].

Corollary 2.23. *The map $w \mapsto \text{res}(\Lambda/I_w)$ gives a bijection*

$$\{c\text{-sortable elements}\} \longrightarrow \{\text{finite torsion-free classes of } \text{mod}KQ\}.$$

Remark 2.24. Many other interesting relationship with sortable elements are discussed in [IT, AIRT].

3. OUR RESULTS

Let Q be a finite acyclic quiver, Λ the preprojective algebra of Q , W the Coxeter group of Q and c the Coxeter element of W (which depends on the orientation of Q).

In this section, we explain our main results of [MT]. Our investigation has one of its primary origins in the following natural questions and the related conjectures posed in [ORT, Conjecture 11.1, 11.2].

Question 3.1. (a) *When is $\overline{\text{res}I_w}$ a torsion class of $\text{mod}KQ$ for $w \in W$?*

- (b) When $\overline{\text{res}I_w}$ is a torsion class, how can we relate w to a c -sortable element x which provides the corresponding finite torsion-free class $\text{res}(\Lambda/I_x)$?

With regard to this question, we note that, for a given finite torsion-free class, the corresponding torsion class is not necessary cofinite in the case of non-Dynkin quivers, and hence it is not necessary the form $\overline{\text{res}I_w}$ in general. It is easy check that a finite torsion-free class consists of preprojective modules if and only if the corresponding torsion class is cofinite. Therefore, it is natural to give a characterization of a c -sortable element x when $\text{res}(\Lambda/I_x)$ consists of preprojective modules. For this purpose, we give the following definition.

Definition 3.2. Let Q is a non-Dynkin quiver. A c -sortable element x is called *bounded* if there exists a positive integer N such that $x \leq c^N$. If Q is a Dynkin quiver, then we regard any c -sortable element as bounded. We denote by $\text{bc-sort}W$ the set of bounded c -sortable elements.

Example 3.3. (a) Let Q be the following quiver

$$1 \longrightarrow 2 \rightrightarrows 3.$$

Because

$$\begin{aligned} c^3 &= s_1 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 \\ &= s_1 s_2 s_3 s_1 s_2 s_1 s_3 s_2 s_3 \\ &= s_1 s_2 s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3, \end{aligned}$$

we have $s_1 s_2 s_3 s_2 \leq c^3$ and hence $s_1 s_2 s_3 s_2$ is bounded c -sortable.

- (b) Let Q be the following quiver

$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ \nearrow & & \searrow \\ 1 & \longrightarrow & 3. \end{array}$$

Then one can check that $s_1 s_2 s_3 s_2$ is not bounded c -sortable.

Then we give the following lemma.

Lemma 3.4. Let x be a c -sortable element. Then the following are equivalent.

- (a) x is bounded c -sortable.
- (b) Any module of $\text{res}(\Lambda/I_x)$ is a preprojective module.
- (c) The corresponding torsion class $(\text{res}(\Lambda/I_x))^\perp$ is cofinite.

Thus, bounded c -sortable elements are essential objects from the viewpoint of Question 3.1. To give a complete answer to the question, we also introduce the following terminology.

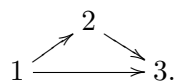
Definition 3.5. Let x be a c -sortable element. If there exists a maximum element amongst $\{w \in W \mid \pi^c(w) = x\}$, then we denote it by $\widehat{x}^c = \widehat{x}$ and call it *c -antisortable*, following the definition from [RS1]. We denote by $c\text{-antisort}W$ the set of c -antisortable elements of W .

Example 3.6. (a) Let Q be the following quiver

$$1 \longrightarrow 2 \rightrightarrows 3.$$

Take a c -sortable element $x = s_1 s_2 s_3 s_2$. Then one can check that $\widehat{x} = s_1 s_2 s_3 s_2 s_1$.

(b) Let Q be the following quiver



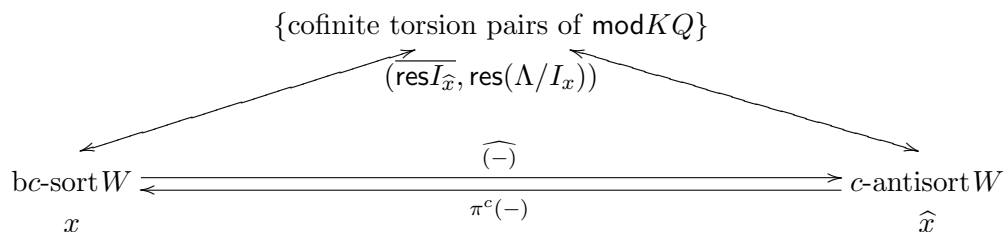
Take a c -sortable element $x = s_1 s_2 s_3 s_2$. Consider the following infinite word

$$s_1 s_2 s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 \cdots .$$

Then from the word, we can take an arbitrary large element w such that $\pi^c(w) = x$. Thus, \widehat{x} does not exist.

Using the above terminology, we obtain the following consequences and give an answer to Question 3.1.

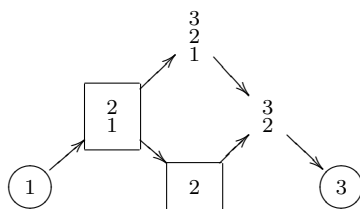
Theorem 3.7. *We have the following commutative diagram of bijections:*



In particular, a c -sortable element x is bounded if and only if it admits a maximum element in $\{w \in W \mid \pi^c(w) = x\}$.

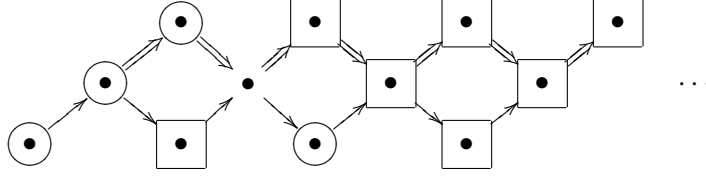
Thus, the answer of Question 3.1 is given by the notion of c -antisortable elements and the map $\pi^c(-)$ and $\widehat{(-)}$. Note that each category of $(\overline{\text{res}I_{\widehat{x}}}, \text{res}(\Lambda/I_x))$ can be explicitly described in terms of the Coxeter group (Theorem 2.14 and 2.21). As a consequence of the above results, we establish a proof of [ORT, Conjecture 11.1, 11.2].

Example 3.8. (a) Let $Q = (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)$. Then the AR quiver of $\text{mod}KQ$ is given by



For example, we take a c -sortable element $x = s_1 s_3$. Then we have the torsion-free class $\text{res}(\Lambda/I_x) = \text{add}\{1, 3\}$ whose modules are circled above. Then one can check that the corresponding torsion class is $\text{add}\{\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, 2\}$ whose modules are squared above. By Theorem 2.14, the torsion class is given as $\text{res}I_w$ for $w = s_1 s_3 s_2 s_1$ and the theorem implies that this element is \widehat{x} .

(b) Let $Q = (1 \rightarrow 2 \rightrightarrows 3)$. Then the preprojective component of the AR quiver of $\text{mod}KQ$ is given as the translation quiver. Thus it is given as the form



For example, we take a c -sortable element $x = s_1 s_2 s_3 s_2$, which is bounded c -sortable. Then $\text{res}(\Lambda/I_x)$ consists of the modules which are circled above. The corresponding torsion class consists of the modules which are squared above and all the rest. It is given as $\overline{\text{res}I_w}$ for $w = s_1 s_2 s_3 s_2 s_1$ and our theorem implies that we have $\widehat{x} = s_1 s_2 s_3 s_2 s_1$.

Finally we explain our strategy for a proof of the theorem. The first step is a parametrization of torsion pairs of $\text{mod}\Lambda$.

Proposition 3.9. *For any $w \in W$,*

$$(\text{Fac}(I_w), \text{Sub}(\Lambda/I_w))$$

is a torsion pair of $\text{mod}\Lambda$. In particular, $(\text{Fac}(I_w) \cap \text{mod}KQ, \text{Sub}(\Lambda/I_w) \cap \text{mod}KQ)$ is a torsion pair of $\text{mod}KQ$.

We denote by $\text{torf}\Lambda$ (respectively, $\text{torf}KQ$) the set of torsion-free classes of $\text{mod}\Lambda$ (respectively, $\text{mod}KQ$). Then, there is a natural map from $\text{torf}\Lambda$ to $\text{torf}KQ$, by taking the intersection to $\text{mod}KQ$. The following result recognizes a categorical map of $\pi^c : W \rightarrow c\text{-sort}W$, where $c\text{-sort}W$ denotes c -sortable elements.

Theorem 3.10. *We have the following commutative diagram :*

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\pi^c(-)} & c\text{-sort}W \\ \text{Sub}(\Lambda/I_-) \downarrow & & \downarrow \text{res}(\Lambda/I_-) \\ \text{torf}\Lambda & \xrightarrow{-\cap \text{mod}KQ} & \text{torf}KQ \end{array}$$

Then Question 3.1 can be explained in this way: Assume that $\overline{\text{res}I_w}$ is a torsion class. Then we can show that it is given as $\text{Fac}(I_w) \cap \text{mod}KQ$. Therefore the corresponding torsion-free class is $\text{Sub}(\Lambda/I_w) \cap \text{mod}KQ$ by Proposition 3.9. Thus Theorem 3.10 shows that it is $\text{res}(\Lambda/I_{\pi^c(w)})$, that is, we can relate w by π^c to the c -sortable element which provides the corresponding torsion-free class. Moreover, assume that there exists $u \in W$ with $u > w$ and $\pi^c(u) = \pi^c(w)$. Then by Theorem 2.14 and the above argument, we have

$$\overline{\text{res}(I_u)} \supset \text{Fac}I_u \cap \text{mod}KQ = {}^\perp(\text{res}\Lambda_{\pi^c(w)}) = \overline{\text{res}I_w}.$$

Because $\overline{\text{res}(I_u)}$ (respectively, $\overline{\text{res}I_w}$) consists of the category which is obtained by removing $\ell(u)$ (respectively, $\ell(w)$) indecomposable KQ -modules from the preprojective modules by Theorem 2.14, this is impossible. In this way, we can show that w is of maximal length in $\{w \in W \mid \pi^c(w) = x\}$, and indeed maximum element (but it is non-trivial). Thus we conclude $w = \widehat{\pi^c(w)}$, that is, w is a c -antisortable element.

REFERENCES

- [AIR] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, τ -tilting theory, *Compos. Math.* 150 (2014), no. 3, 415–452.
- [AM] T. Aihara, Y. Mizuno, *Classifying tilting complexes over preprojective algebras of Dynkin type*, *Algebra Number Theory* 11 (2017), No. 6, 1287–1315.
- [AIRT] C. Amiot, O. Iyama, I. Reiten, G. Todorov, *Preprojective algebras and c-sortable words*, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) 104 (2012), no. 3, 513–539.
- [ASS] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Vol. 1*, London Mathematical Society Student Texts 65, Cambridge University Press (2006).
- [BIRS] A. B. Buan, O. Iyama, I. Reiten, J. Scott, *Cluster structures for 2-Calabi-Yau categories and unipotent groups*, *Compos. Math.* 145 (2009), 1035–1079.
- [FG] C. Fu, S. Geng, *Tilting modules and support τ -tilting modules over preprojective algebras associated with symmetrizable Cartan matrices*, *Algebras and Representation Theory* (22), 12391260 (2019).
- [FR] S. Fomin, N. Reading, *Root systems and generalized associahedra*, *Geometric combinatorics*, 63–131, IAS/Park City Math. Ser., 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [G] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I*, *Manu. Math.* 6 (1972), 71–103.
- [GLS] C. Geiss, B. Leclerc, J. Schröer, *Kac-Moody groups and cluster algebras*, *Adv. Math.* 228 (2011), no. 1, 329–433.
- [IT] C. Ingalls, H. Thomas, *Noncrossing partitions and representations of quivers*, *Compos. Math.* 145 (2009), no. 6, 1533–1562.
- [IR1] O. Iyama, I. Reiten, *Fomin-Zelevinsky mutation and tilting modules over Calabi-Yau algebras*, *Amer. J. Math.* 130 (2008), no. 4, 1087–1149.
- [IR2] O. Iyama, I. Reiten, *Introduction to τ -tilting theory*, *Proc Natl Acad Sci U S A.* 2014 Jul 8; 111(27): 97049711.
- [IRRT] O. Iyama, N. Reading, I. Reiten, H. Thomas, *Lattice structure of Weyl groups via representation theory of preprojective algebras*, arXiv:1604.08401.
- [IRTT] O. Iyama, I. Reiten, H. Thomas, G. Todorov, *Lattice structure of torsion classes for path algebras*, *Bull. Lond. Math. Soc.* 47 (2015), no. 4, 639–650.
- [L] B. Leclerc, *Cluster structures on strata of flag varieties*, *Adv. Math.* 300 (2016) 190–228.
- [Mi] Y. Mizuno, *Classifying τ -tilting modules over preprojective algebras of Dynkin type*, 277 (2014) 3, 665–690.
- [MT] Y. Mizuno, H. Thomas, *Torsion pairs for quivers and the Weyl groups*, arXiv:1804.02148.
- [Mu] K. Murakami, *On the module category of generalized preprojective algebras of Dynkin types*, arXiv:1906.08739.
- [ORT] S. Oppermann, I. Reiten, H. Thomas, *Quotient closed subcategories of quiver representations*, *Compos. Math.* 151 (2015), no. 3, 568–602.
- [R1] N. Reading, *Cambrian Lattices*, *Adv. Math.* 205 (2006), no. 2, 313–353.
- [R2] N. Reading, *Clusters, Coxeter-sortable elements and noncrossing partitions*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359 (2007), no. 12, 5931–5958.
- [R3] N. Reading, *Sortable elements and Cambrian lattices*, *Algebra Universalis* 56 (2007), no. 3-4, 411–437.
- [RS1] N. Reading, D. Speyer, *Cambrian Fans*, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 11 (2009), no. 2, 407–447.
- [RS2] N. Reading, D. Speyer, *Sortable elements in infinite Coxeter groups*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 363 (2011), no. 2, 699–761.
- [Ri] C. M. Ringel, *The preprojective algebra of a quiver*, *Algebras and modules, II* (Geiranger, 1996), 467–480, CMS Conf. Proc., 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [ST] A. Savage, P. Tingley, *Quiver grassmannians, quiver varieties and the preprojective algebra*, Vol. 251 (2011), No. 2, 393–429.
- [T] H. Thomas, *Coxeter groups and quiver representations*, arXiv:1803.04044.
- E-mail address:* yuya.mizuno@las.osakafu-u.ac.jp