ULRICH MODULE と正標数の不変量

吉田健一

1. 導入

本研究は, 渡辺敬一氏（日本大学文理学部/明治大学）, 中嶋祐介氏（東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構）及び Ilya Smirnov 氏 (ストックホルム大学）との共同研究の成果をベースにした内容である.

この講演を通して, 特に断らない限り, A を可換ネーター局所環で, 素数標数 $p > 0$ の完全体を含むと仮定する. A のただ 1 つの極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とし, その剰余体を $k = A/\mathfrak{m}$ とおく.

A から自分自身への環準同型 $F\colon A \to A$ $(a \mapsto a^p)$ を **Frobenius 射**と呼ぶ. 自然数 e と A-加群 M に対して, F^e を通して M を A-加群とみなしたものを $F_*^e(M)$ と書き, M の **Frobenius 押し出し (pushforward)** と呼ぶ. 特に,

(1) 任意の自然数 $e \geq 1$ に対して, $F^e\colon A \to F_*^e(A)$ は A-線型射とみなすことができる.
(2) 任意の自然数 $e \geq 1$ に対して, $F_*^e(A)$ は有限生成 A-加群 (i.e. A は F-有限) である.
(3) A は優秀 (excellent) で, Gorenstein 局所環の準同型像である. 特に, 標準加群 ω_A が存在する.

正標数の可換環論において, $F_*^e(A) \cong A^{1/p^e}$ の A-加群としての構造を知ることは重要な課題であるが, その問を定量的に捉えて, 次の 2 つの不変量を調べることが多くの研究者によってなされてきた ([AE08, AE13, BE04, ES05, GM10, HM93, Han03, HL02, HY02, Mon83, Sin05, Tuc12, Von12, WY00, WY01, WY04, WY05, Yao05a, Yao05b] など).

定義 1.1 (Hilbert-Kunz 重複度, F-記号). A-加群 M に対して, $\mu_A(M)$ により M の極小生成系の個数, $\mathrm{frank}_A(M)$ を M に含まれる自由加群 A の直和因子の個数を表すものとする. このとき,

(1) $\mathrm{e_{HK}}(A) = \lim\limits_{q\to\infty} \dfrac{\mu_A(F_*^e(A))}{p^{ed}}$

を A の **Hilbert-Kunz 重複度 (Hilbert-Kunz multiplicity)** と言う.

(2) $s(A) = \lim\limits_{q\to\infty} \dfrac{\mathrm{frank}_A(F_*^e(A))}{p^{ed}}$ を A の **F-記号 (F-signature)** と言う.

本研究は、科研費基盤研究 (C)19K034030 の支援を受けている.

Hilbert-Kunz 重複度は, Kunz [Ku69] の研究に端を発し, [Mon83] により定義と存在証明が与えられた概念である. 後に, [HH90] が密着閉包 (tight closure) の判定法として重複度との類似性に注目して, 環論的研究が始まった.

一方, F-記号は [SmVa97] に現れているが, 公式には, [HL02] により定義された. 一方, [WY04] は Hilbert-Kunz 重複度の差の「最小値」として, 極小相対的 Hilbert-Kunz 重複度 (minimal relative Hilbert-Kunz multiplicity) の概念を導入した. 後に, [Tuc12] が F-記号の存在証明を与え, これらの概念の関係を明確にした. F-記号 が「1 組の」イデアルの Hilbert-Kunz 重複度の差として表現できるかどうかという問は, 未解決問題「弱 F 正則＝強 F 正則」の肯定的な解決を導く重要な問であることが知られている.

本講演で用いられる可換環論の基本的な概念を思い出しておこう.

定義 1.2. ネーター局所環 A の完備化 $\widehat{A}$ が $k[[x_1, \ldots, x_d]]$ に同型であるとき, A は**正則局所環 (regular local ring)** であると言う.

一般に, $\mu_A(\mathfrak{m}) \geq \dim A$ であるが, A が正則局所環であることと, 等号が成立することとは同値である. さらに, 正標数の場合の著しい結果として, 次の Kunz の定理が知られている.

定理 1.3 ([Ku69])**.** *A が正則局所環であることと, 任意の $e \geq 1$ (または, ある $e \geq 1$) に対して $F^e_*(A)$ が自由 A-加群であることとは同値である.*

Kunz の定理は Hilbert-Kunz 関数 $\mathrm{HK}(e) = \ell_A(A/\mathfrak{m}^{[q]})$ を用いて, 述べ直すことができる.

定理 1.4 ([Ku69])**.** *任意の $q = p^e$ に対して, $\mathfrak{m}^{[q]} = (a^q \mid a \in \mathfrak{m})$ とおく.*
1. *$\ell_A(A/\mathfrak{m}^{[q]}) \geq q^d$ である. 特に, $\mathrm{e_{HK}}(A) \geq 1$ が成り立つ.*
2. *A が正則局所環であることと, $\ell_A(A/\mathfrak{m}^{[q]}) = q^d$ $(\exists q = p^e, e \geq 1)$ が成り立つこととは同値である. また, このとき, 任意の $e \geq 1$ に対して, $\ell_A(A/\mathfrak{m}^{[q]}) = q^d$ が成り立つ.*

系 1.5. *A が正則局所環ならば, $\mathrm{e_{HK}}(A) = 1$ である.*

以下, この節の残りでは, $(A, \mathfrak{m})$ を任意標数のネーター局所環 $(d = \dim A)$ とし, M を有限生成 A-加群とする.

定義 1.6. $e(A) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ell_A(A/\mathfrak{m}^{n+1})}{n^d} \times d!$ を A の**重複度**という.

(注) $e(A)$ は非負整数である.

事実 1.7 (永田)**.** A が正則局所環であることと, A が清純 (unmixed) で, $e(A) = 1$ であることとは同値である. ただし, $\mathrm{Ass}(\widehat{A}) = \mathrm{Assh}(\widehat{A})$ が成り立つとき, A は清純であるという.

定義 1.8. $\operatorname{depth} M = \inf\{i \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{Ext}^i_A(k, M) = 0\}$ を M の **深さ (depth)** という.

一般に, $\operatorname{depth} M \leq \dim M$ である.

定義 1.9. $\operatorname{depth} M = \dim M = \dim A$ が成り立つとき, M は **MCM A-加群**であると言う. 特に, A 自身が MCM A-加群のとき, A を **Cohen-Macaulay** 局所環という.

定義 1.10. A を Cohen-Macaulay 局所環とし, ω_A をその**標準加群**とする. $\mathrm{type}(A) = \mu_A(\omega_A)$ を A の **CM 型**という. $\mathrm{type}(A) = 1$ の Cohen-Macaulay 局所環を **Gorenstein** 局所環という.

一般に, A が Cohen-Macaulay 局所環のとき, $\mu_A(\mathfrak{m}) \leq e(A) + \dim A - 1$ が成り立つ (**Sally の不等式**). 等号が成立するとき, A は**極小重複度を持つ** と言う. さらに, このとき, A が正則でなければ, $\mu_A(\omega_A) = e(A) - 1$ が成り立つ.

2. Lower bound of Hilbert-Kunz multiplicities

以下, この節では, $(A, \mathfrak{m})$ をネーター局所環 ($d = \dim A \geq 1$) とし, I を $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする.

定義 2.1. $e(I) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ell_A(A/I^{n+1})}{n^d} \times d!$ を I の**重複度**という. (注意) $e(A) = e(\mathfrak{m})$ である.

さらに, A を標数 $p > 0$ とし, $q = p^e$ に対して, $I^{[q]} = (a^q \mid a \in I)$ とおく.

定義 2.2 ([Mon83])**.** $\mathrm{e_{HK}}(I) = \displaystyle\lim_{q\to\infty} \frac{\ell_A(A/I^{[q]})}{q^d}$ を I の **Hilbert-Kunz 重複度**という.

次の不等式について, 高次元の場合に精密化を与えたい.

命題 2.3 (cf. [Hun96B, Han03])**.** 次の不等式が成り立つ:

$$\frac{e(I)}{d!} \leq \mathrm{e_{HK}}(I) \leq e(I).$$

さらに, $d > 2$ ならば, $\dfrac{e(I)}{d!} < \mathrm{e_{HK}}(I)$ が成り立つ.

命題 2.4. I がパラメーターイデアルならば, $\mathrm{e_{HK}}(I) = e(I)$ である.

次の定理は正標数の正則局所環の特徴づけを与える (Kunz の定理, 永田の定理参照).

定理 2.5 ([WY00])**.** *A が正則局所環であることと, A が清純で, $\mathrm{e_{HK}}(A) = 1$ であることとは同値である.*

定理 2.6 ([WY01])**.** *$(A, \mathfrak{m})$ を 2 次元の Cohen-Macaulay 局所環とし, $e = e(A)$ とおく. I を $\mathfrak{m}$-準素イデアルとするとき,*

(1) $\mathrm{e_{HK}}(A) \geq \dfrac{e+1}{2}$ が成り立つ. 同様に, $\mathrm{e_{HK}}(I) \geq \dfrac{e(I)+1}{2}$.

(2) $\mathrm{e_{HK}}(A) = \dfrac{e+1}{2}$ が成り立つことと, $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A) \cong K[X,Y]^{(e)}$ とは同値である. ここで, $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ は $\mathfrak{m}$ に付随する次数付き環を表す.

特に, A が正則でなければ, $\mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(A) \geq \dfrac{3}{2}$ が成立する.

次の定理はこの節の主結果である.

定理 2.7. $(A, \mathfrak{m})$ を **Cohen-Macaulay** 局所環とし, $d = \dim A \geq 3$ と仮定する.
このとき, 任意の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して,

$$\mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(I) > \frac{e(I) + d}{d!}$$

が成り立つ.

以下, この定理を証明しよう.

• 任意の実数 $s \geq 0$ に対して, $\{(x_1, \ldots, x_d) \in [0,1]^d \mid \sum_{i=1}^d x_i \leq s\}$
の体積は次の式で与えられる ([CL91, (16), p.233]):

$$v_s = \sum_{n=0}^{\lfloor s \rfloor} (-1)^n \frac{(s-n)^d}{(d-n)!\, n!}.$$

• イデアル J の **密着閉包 (tight closure)** J^* は次で与えられる (cf. [HH90]):

$$z \in J^* \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists c \in A \setminus \cup_{P \in \mathrm{Min}(A)} P \text{ s.t. } cz^q \in J^{[q]} \ (q = p^e, e \gg 0)$$

• $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に含まれるパラメータイデアル J が十分大きな整数 n に対して $I^{n+1} = JI^n$ をみたすとき, J を I の**極小還元 (minimal reduction)** と呼ぶ.

補題 2.8. A が *Cohen-Macaulay* ならば, $e(I) = e(J) = \ell_A(A/J)$ が成り立つ.

命題 2.9 ([AE13] (cf. [WY05])). A は清純かつ $\widehat{A}$ は被約 (*reduced*) と仮定する. J を $I = I^*$ の極小還元とするとき, $r \geq \mu_A(I/J^*)$ とすれば, 任意の $s \geq 0$ に対して,

$$\mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(I) \geq e(I)(v_s - r \cdot v_{s-1})$$

が成り立つ.

例えば, $\lfloor s \rfloor = 1$ ならば,

$$v_s = \frac{s^d}{d!} - \frac{(s-1)^d}{(d-1)!}, \qquad v_{s-1} = \frac{(s-1)^d}{d!}.$$

• $\mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(I) = \mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(I^*)$ 及び $e(I) = e(I^*)$ なので, I を I^* と置き換えることにより, $I = I^*$ としてよい. また, $e(I) = 1$ ならば, $I = \mathfrak{m}$, A は正則となることが容易にわかるので, $e = e(I) \geq 2$ としてよい.

Case 1. $I^2 \not\subset J$ (特に, $\mathfrak{m}I \not\subset J$) の場合.

$\mu_A(I/J^*) \leq \mu_A(I/J) = \ell_A(I/J + \mathfrak{m}I) \leq \ell_A(I/J) - 1 \leq e(I) - 2 = e - 2$ だから, $r = e - 2$ かつ $s = 1 + \dfrac{1}{e}$ として, 上の命題を適用できる. このとき, $\lfloor s \rfloor = 1$ なので,

$$d! \cdot e^d(v_s - r \cdot v_{s-1}) = (e+1)^d - d - (e-2) > e^{d-1}(e+d).$$

ゆえに, $\mathrm{e_{HK}}(I) \geq e(v_s - r \cdot v_{s-1}) > \dfrac{e+d}{d!}$.

Case 2. $I^2 \subset J$ の場合.

次の命題を利用する.

命題 2.10 (cf. [AE08]). *A は Cohen-Macaulay と仮定する. I の極小還元 J で $I^2 \subset J$ なるものがあれば,*

$$\mathrm{e_{HK}}(I) \geq \frac{e(I)}{2}$$

が成り立つ.

$d \geq 3$ で $e(I) \geq 2$ ならば, 容易に $\mathrm{e_{HK}}(I) \geq \dfrac{e(I)}{2} > \dfrac{e(I)+d}{d!}$ を得る. (証明終)

$d = 3$ の場合, より sharp な不等式を得る.

定理 2.11. *$(A, \mathfrak{m})$ が 3 次元 Cohen-Macaulay 被約な局所環ならば,*

$$\mathrm{e_{HK}}(A) \geq \frac{e(A)}{6} + 1.$$

さらに, $A/\mathfrak{m}$ が代数的閉体で, p が奇素数のとき, 等号が成立するのは, 次の場合に限る : $\widehat{A} \cong K[[X, Y, Z, W]]/(XW - YZ)$. このとき,

$$\mathrm{e_{HK}}(A) = \frac{4}{3}.$$

事実 2.12 ([WY05]). *$d = 3$, $A/\mathfrak{m}$ が代数的閉体で, p が奇素数のとき,*

$$\mathrm{e_{HK}}(A) = \frac{4}{3} \iff \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A) \cong K[X, Y, Z, W]/(XW - YZ).$$

以下では, $(A, \mathfrak{m})$ を標数 p のネーター局所環 ($d = \dim A$) とし, $A/\mathfrak{m}$ は代数的閉体と仮定する.

問 2.13. A が非正則局所環のとき, $\mathrm{e_{HK}}(A)$ の下限は?

(1) $\dim A = 0, 1$ のとき, $\mathrm{e_{HK}}(A) \geq 2$.

(2) $\dim A = 2$ のとき, $\mathrm{e_{HK}}(A) \geq \dfrac{3}{2}$.

(3) $\dim A = 3$ のとき, $\mathrm{e_{HK}}(A) \geq \dfrac{4}{3}$.

(4) $\dim A = 4$ のとき, $\mathrm{e_{HK}}(A) \geq \dfrac{29}{24}$.

実際, $\mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(A_{p,4}) = \dfrac{29p^2+15}{24p^2+12}$.

予想 2.14 ([WY05]). $(A,\mathfrak{m})$ を清純な完備な非正則局所環とし, $p = \mathrm{char}A \geq 3$, $d = \dim A \geq 1$ と仮定する. このとき,

(1) $\mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(A) \geq 1 + \dfrac{c_d}{d!}$.

(2) $\mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(A) < 1 + \dfrac{c_d+1}{d!} \iff A \cong A_{p,d} \quad (d \geq 4)$

ここで,

$$\sec x + \tan x = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{c_d}{d!} x^d \ \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right),$$

及び, $A_{p,d} = k[[x_0, x_1, \ldots, x_d]]/(x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_d^2)$.

渡辺・吉田予想は次の場合には肯定的に解かれている：

(1) $\dim A = 2$ の場合 [WY01]
(2) $\dim A = 3, 4$ の場合 [WY05]
(3) $\dim A = 5, 6$ の場合 [AE13]
(4) A が完全交叉の場合 [ES05]

定理 2.15 ([GM10]).

$$\lim_{p\to\infty} \mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(A_{p,d}) = 1 + \frac{c_d}{d!}.$$

さらに, 標数 2 の場合の値を考慮して, 次の予想を新たに提出する.

予想 2.16. $(A,\mathfrak{m})$ を清純な完備非正則局所環で, $p = \mathrm{char}A \geq 2$, $d = \dim A \geq 1$ とする. さらに, A は $A_{p,d}$ に同型でないと仮定すると,

(1) $d = 2m-1$ のとき, $\mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(A) \geq \dfrac{2^m}{2^m-1}$.

(2) $d = 2m$ のとき, $\qquad \mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(A) \geq \dfrac{2^m+1}{2^m}$.

$d = 1$ のとき, 右辺 $= 2$, $\qquad d = 2$ のとき, 右辺 $= \dfrac{3}{2}$.

$d = 3$ のとき, 右辺 $= \dfrac{4}{3}$, $\qquad d = 4$ のとき, 右辺 $= \dfrac{5}{4} = \dfrac{30}{24} > \dfrac{29}{24}$.

$d = 5$ のとき, 右辺 $= \dfrac{8}{7} > \dfrac{17}{15} = 1 + \dfrac{c_5}{5!}$.

3. Maximal F-signature

以下, A を正標数の F 有限な Cohen-Macaulay 局所整域とする.

定義 3.1 ([HH94])**.** 任意の $c \neq 0$ に対して, $q = p^e$, $e \geq 1$ が存在して, $A \hookrightarrow A^{1/q}$ $(1 \mapsto c^{1/q})$ が A-線型射として分裂するとき, A は**強 F 正則 (strongly F-regular)** であるという.

- 強 F 正則環は 整閉整域である.
- $\mathbb{Q}$-Gorenstein な強 F 正則性は, 対数的端末 (log-terminal) 特異点に対応する概念である.
- Toric 特異点, 商特異点などは強 F 正則性を持つ.

定義 3.2 ([HL02])**.** 各 $q = p^e$ に対して,

$$F_*^e(A) = A^{1/q} \cong A^{a_q} \oplus M_q$$

となる $a_q \in \mathbb{Z}$ と $\mathrm{frank}_A M_q = 0$ の MCM A-加群 M_q がとれる. このとき,

$$s(A) = \lim_{q \to \infty} \frac{a_q}{q^d}$$

を A の **F-記号 (F-signature)** という.

強 F 正則性は, F-記号 $s(A)$ のふるまいにより特徴づけられる.

定理 3.3 ([AE05])**.** (1) $0 \leq s(A) \leq 1$.
(2) A が強 F-正則であることと, $s(A) > 0$ であることとは同値である.
(3) A が正則であることと, $s(A) = 1$ であることとは同値である.

F 有理性を特徴づける概念として, Dual F-signature という概念が定義されている (三内 [San15]).

例 3.4 ([WY05])**.** $A = k[[x_1, \ldots, x_d]]^G$, ただし, G は有限群で, $(|G|, p) = 1$ をみたすとき, A は**商特異点**であるという. このとき, $s(A) = \dfrac{1}{|G|}$ が成りたつ.

2 次元の F-正則局所環は本質的に商特異点であるので, <u>A が正則でなければ</u>,

$$s(A) = \frac{1}{|G|} \leq \frac{1}{2}$$

である. このような考察から, 次の問いを考えたい.

問 3.5. A が d-次元の非正則な強 F 正則局所環のとき, $s(A)$ の上限は何か?

この問いを考える前に, Ulrich 加群の概念を思い出しておこう.

定義 3.6. M を MCM A-加群とするとき, $\mu_A(M) \leq e_A(M) = e(A) \cdot \mathrm{rank}_A M$ が成立する. さらに, 等号が成立するとき, M は **Ulrich A-加群**であるという.

一般の Cohen-Macaulay 局所環上に Ulrich A-加群が存在するかどうか（Ulrich の予想）は未解決問題である. 下の命題からもわかるように, 特定の MCM 加群が Ulrich 加群になるのは環に強い制限を与える.

命題 3.7 (cf. [BHU87]). $(A, \mathfrak{m})$ を *Cohen-Macaulay* 局所整域とする.

(1) 次の 3 条件は同値である :
  (a) A は *Ulrich* A-加群である.
  (b) ω_A は *Ulrich* A-加群である.
  (c) A は正則局所環である.

(2) $k = A/\mathfrak{m}$ の *dth* シジジー加群 $\mathrm{Syz}_A^d(A/\mathfrak{m})$ が *Ulrich* A-加群になるための必要十分条件は, A が極小重複度を持つことである.

また, 重複度が 2 の場合には, $s(A)$ と $\mathrm{e_{HK}}(A)$ が強い関係にある.

命題 3.8. A を重複度 2 の *Cohen-Macaulay* 局所整域とする. このとき,

(1) A は超曲面である.
(2) A は *Gorenstein,* かつ, 極小重複度を持つ.
(3) $s(A) = 2 - \mathrm{e_{HK}}(A)$.
(4) $F_*^e(A)$ は A と *Ulrich* A-加群のいくつかの直和で表される.

この講演では, 次の問についても考えたい.

問 3.9. (1) $F_*^e(A)$ が単純な構造をもつとき, $s(A)$ と $\mathrm{e_{HK}}(A)$ の関係を求めよ.
(2) $s(A)$ の上限 (上界) を求めよ.

予想 3.10. A を正則でない d 次元の Cohen-Macaulay 局所整域とするとき,

(1) 「$s(A)$ が上限を取る」 $\Longleftrightarrow$ 「$\mathrm{e_{HK}}(A)$ が下限を取る」
(2) m を自然数として,

$$d = 2m-1 \implies s(A) \le \frac{2^m-2}{2^m-1},$$
$$d = 2m \implies s(A) \le \frac{2^m-1}{2^m}.$$

次の命題は, Gorenstein でない Cohen-Macaulay 局所整域の F-記号の上限を与える.

命題 3.11. A は完全体を含む (F 有限な) *Cohen-Macaulay* 局所整域とする. もし, A が *Gorenstein* でないならば, 次の不等式を得る.

(1) $s(A) \le 1/2$.
(2) $\mathrm{e_{HK}}(A) \le s(A)(\mathrm{type}(A)+1) + 2\cdot e(A)\{1/2 - s(A)\}$.

(証明). 各 $e \ge 1$ に対して, $F_*^e A = A^{\oplus a_e} \oplus \omega_A^{\oplus b_e} \oplus M_e$ と書ける. このとき,

$$F_*^e \omega_A \cong \mathrm{Hom}_A(F_*^e(A), \omega_A) \cong \omega_A^{\oplus a_e} \oplus A^{\oplus b_e} \oplus \mathrm{Hom}_A(M_e, \omega_A)$$

ただし, $\mathrm{frank}\, M_e = \mathrm{frank}\, \mathrm{Hom}_A(M_e, \omega_A) = 0$ と書ける.

$$
\begin{aligned}
\ell_A(A/\mathfrak{m}^{[q]}) &= \mu_A(F^e_*(A)) = a_e + b_e \cdot \mathrm{type}(A) + \mu_A(M_e) \\
&\leq a_e + b_e \cdot \mathrm{type}(A) + e_A(M_e) \\
&= a_e + b_e \cdot \mathrm{type}(A) + e(A) \cdot (q^d - a_e - b_e).
\end{aligned}
$$

さらに, [San15] の考察によれば, $s(A) = \lim_{e\to\infty} \dfrac{a_e}{p^{ed}} = \lim_{e\to\infty} \dfrac{b_e}{p^{ed}}$ だから,

両辺を q^d で割って, limit を取れば求める不等式を得る. また, $\mathrm{rank}_A M_e \geq 0$ だから, $1 - 2 \cdot s(A) \geq 0$ である. □

定義 3.12. A を F-有限な完備局所環とする. ある有限個の加群 $\{M_0, M_1, \ldots, M_n\}$ が存在して, 任意の $e \geq 1$ に対して,

$$F^e_*(A) \cong M_0^{c_{0,e}} \oplus M_1^{c_{1,e}} \oplus \cdots \oplus M_n^{c_{n,e}}$$

が成立するとき, A は **FFRT (finite F-representation type)** であるという. 特に, M_i がある分解に実際に現れるとき, $\{M_0, M_1, \ldots, M_n\}$ は A の FFRT system であるという.

例えば, Cohen-Macaulay 有限表現型は FFRT である. また, 任意のアフィン toric 特異点も FFRT である.

さて, 先の上限の等号成立を $F^e_*(A)$ の言葉で特徴づけよう.

定理 3.13. A を **Gorenstein** でない *Cohen-Macaulay* 整閉整域とする. このとき, 次は同値である :

(1) $s(A) = 1/2$.
(2) A は強 F 正則で, $\{A, \omega_A\}$ を *FFRT system* に持つ *FFRT* である.
すなわち, $s(A) > 0$ で, 任意の $e \geq 1$ に対して, $F^e_*(A)$ は A と ω_A のみの有限直和である.

また, このとき, $\mathrm{e_{HK}}(A) = \dfrac{\mathrm{type}(A) + 1}{2}$ が成り立つ.

前の結果の類似として, $F^e_*(A)$ が「3 種類」の加群を system に持つ場合も特徴づけできる. $s(A) = 1/2$ もこの場合に含まれる.

定理 3.14. A を *Gorenstein* でない *Cohen-Macaulay* 整閉整域とする.
このとき, 次は同値である :

(1) $\mathrm{e_{HK}}(A) = s(A)(\mathrm{type}(A) + 1) + 2 \cdot e(A) \left\{\frac{1}{2} - s(A)\right\}$ が成りたつ.
(2) A は強 F 正則で, 任意の $e \geq 1$ に対して, $F^e_*(A)$ は A, ω_A, 及び直既約 *Ulrich* A-加群の有限直和で書ける.

例 3.15. $A = k[[x^3, x^2y, xy^2, y^3]] = k[[x,y]]^{(3)}$ は上の条件をみたす. 実際, $type(A) = 2$, $s(A) = 1/3$, $e(A) = 3$, 及び $\mathrm{e_{HK}}(A) = 2$ である.

A が非正則で, 極小重複度を持つとき, $\mathrm{type}(A) = e(A) - 1$ である.

系 3.16. A が極小重複度を持つ *Cohen-Macaulay* 局所環で, $e(A) \geq 3$ ならば,

$$\frac{e(A)}{2} \leq \mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(A) \leq (1 - s(A))e(A).$$

特に, $s(A) = 1/2$ のとき, $\mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(A) = \dfrac{e(A)}{2}$.

例 3.17. $A = K[[X, Y, Z]]^{(2)}$ を $K[X, Y, Z]$ の 2 次の Veronese 部分環の完備化とするとき, これは $\mathrm{type}(A) = 3$ の極小重複度をもつ CM 局所環である. また, $\mathrm{e}_{\mathrm{HK}}(A) = \dfrac{e(A)}{2} = 2$ である.

$A = k[\sigma^\vee \cap M]$ を (アフィン) toric 環とする. さらに, A の class group $Cl(A)$ にトーション元で, その位数が p と互いに素なるものが存在すると仮定する. このとき, $s(A) = 1/2$ はさらなる特徴づけをもつ.

定理 3.18. A を上記のような *toric* 環とし, *Gorenstein* でないと仮定する. このとき, 次は同値である :

(1) $s(A) = 1/2$.
(2) ある A-加群 $M \ncong A$ が存在して, A は $\{A, M\}$ を *sytem* に持つ *FFRT* である.
(3) $A \cong k[[x_1, \ldots, x_d]]^{(2)}$.
(4) A は $\{A, \omega_A\}$ を *FFRT system* にもつ.

A を **$\mathbb{Q}$-Gorenstein** 局所整閉整域 とし, ω_A を標準加群とする. このとき, $\omega_A^{(r)}$ が単項イデアルになるような正の整数の最小値を $\mathrm{index}(A)$ と定める.

$$B = A \oplus \omega_A \oplus \omega_A^{(2)} \cdots \oplus \omega_A^{(r-1)}$$

に適当な環構造を入れたものを A の **標準被覆 (canonical cover)** と呼ぶ.

事実 3.19 (cf. [Von12])**.** A を強 F 正則な $\mathbb{Q}$-Gorenstein 局所整域とし, Gorenstein でないと仮定する. $r = \mathrm{index}(A)$ s.t. $(r, p) = 1$ とし, B をその標準被覆とすると, $A \hookrightarrow B$ は etale in codimension 1 であり,

$$s(A) = \frac{s(B)}{r} = \frac{s(B)}{[Q(B) \colon Q(A)]}$$

が成り立つ.

定理 3.20. A を F 有限な $\mathbb{Q}$-*Gorenstein* 局所整域とし, $r = \mathrm{index}(A)$ とおくとき, $(r, p) = 1$ と仮定する. このとき, 次は同値である:

(1) $s(A) = 1/2$.
(2) A の標準被覆 B は正則で, $r = 2$ である.

3 次元の場合は, Matlis duality などを用いて, より精密な評価が得られる.

定理 3.21. A を 3 次元の *Gorenstein* 局所整域とし, $e \geq 3$ と仮定すると,

$$s(A) \leq \frac{e(A)}{24}$$

が成り立つ.

これはベストポッシブルである.

例 3.22. $A = K[[X,Y,Z,W]]/(X^3+Y^3+Z^3+W^3)$ とすると, $s(A) = \frac{1}{8} = \frac{e(A)}{24}$.

例 3.23. A を $R = K[X,Y,Z,W]/(XW - YZ)$ の 2 次の Veronese 部分環の自然な完備化とすれば, A は 3 次元 Gorenstein 局所環で,

$$e(A) = \mu(\mathfrak{m}) - d + 2 = 9 - 3 + 2 = 8$$

だから,

$$s(A) = \frac{s(R)}{2} = \frac{1}{3} = \frac{e(A)}{24}.$$

注意 3.24. A が 3 次元 Gorenstein F 正則ならば, $e(A) = 2$ の超曲面であるか, $\mu(\mathfrak{m}) = e(A) + 3 - 2 = e(A) + 1$ をみたす.

Gorenstein case も次のような不等式が成り立つ.

命題 3.25. A を完備な *Gorenstein* 局所整域とする. このとき,

(1) $\mathrm{e_{HK}}(A) \leq s(A) + (1 - s(A))e(A)$.
(2) $s(A) > 0$ と仮定する. このとき, (1) で等号が成立 $\Longleftrightarrow$ $F^e_*(A)$ は A と *Ulrich* A 加群の直和で書ける.

$e(A) = 2$ の場合もこの条件をみたす.

命題 3.26. A が 3 次元 *CM* 局所環ならば, $s(A) < \frac{5}{6}$ (予想は $s(A) \leq \frac{2}{3}$ である).

Proof. A は F 正則, Gorenstein としてよい. このとき, $\mathrm{e_{HK}}(A) \geq \dfrac{e(A)}{6} + 1$.

また, $\mathrm{e_{HK}}(A) \leq s(A) + e(A)(1 - s(A))$.

合わせると,

$$\frac{e(A)}{6} + 1 \leq \mathrm{e_{HK}}(A) \leq s(A) + e(A)(1 - s(A)).$$

ゆえに,

$$e(A)\left(s(A) - \frac{5}{6}\right) \leq s(A) - 1 \leq 0$$

となり, $s(A) < \dfrac{5}{6}$ を得る. □

問 3.27 (Schwede)**.** $s(A) = \frac{2}{3}$ ならば, **terminal 特異点**であるか?

References

[AE05] Ian M. Aberbach and Florian Enescu, *The structure of F-pure rings*, Math. Z. **250** (2005), 791-806.

[AE08] Ian M. Aberbach and Florian Enescu, *Lower bounds for Hilbert-Kunz multiplicities in local rings of fixed dimension*, Michigan Math. J. **57** (2008), 1–16.

[AE13] Ian M. Aberbach and Florian Enescu, *New estimates of Hilbert-Kunz multiplicities for local rings of fixed dimension*, Nagoya Math. J. **212** (2013), 59–85.

[AL03] Ian M. Aberbach and Graham Leuschke, *The F-signature and strongly F-regularity*, Math. Res. Lett. **10** (2003), 51–56.

[BE04] Manuel Blickle and Frorian Enescu, *On rings with small Hilbert-Kunz multiplicity*, Prco. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 2505–2509.

[BHU87] Joseph P. Brennan, Jürgen Herzog, and Bernd Ulrich, *Maximally generated Cohen-Macaulay modules*, Math. Scand. **61** (1987), 181–203.

[CL91] D. Chakerian and D. Logothetti, *Cube slices, pictorial triangles, and probability*, Math. Mag. 64 (1991), 219-241. MR 1131009.

[ES05] Frorian Enescu and Kazuma Shimomoto, *On the upper semi-continuity of the Hilbert-Kunz multiplicity*, J. Algebra **285** (2005), 222–237.

[Gab04] O. Gabber, *Notes on somet-structures*, Geometric Aspects of Dwork Theory. Vol. II, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG (2004),711–734.

[GM10] Ira M. Gessel and Paul Monsky, *The limit as $p \to \infty$ of the Hilbert-Kunz multiplicity of* $\sum_{i=1}^{d} x_i^{d_i}$, arXiv:1007.2004.

[HM93] C. Han and Paul Monsky, *Some surprising Hilbert-Kunz functions*, Math. Z. **214**, 119–135.

[Han03] Douglas Hanes, *Notes on the Hilbert-Kunz function*, J. Algebra **265** (2003), 619–630.

[HH90] Melvin Hochster and Craig Huneke, *Tight closure, invariant theory, and the Briancon-Skoda theorem*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 31–116.

[HH94] Melvin Hochster and Craig Huneke, *F-regularity, test elements, and smooth base change*, Trans. Amer. Math. Soc. **346** (1994), 1–62.

[Hun96B] Tight Closure and Its Applications, CBMS Regional Conf. Ser. Math. **88**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[HL02] Craig Huneke and Graham Leuschke, *Two theorems about maximal Cohen-Macaulay modules*, Math. Ann. **324** (2002), no. 2, 391–404.

[HY02] Craing Huneke and Yongyei Yao, *Unmixed local rings with minimal Hilbert-Kunz multiplicity are regular*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 661–665.

[Ku69] Ernst Kunz, *Characterizations of regular local rings of characteristic p*, Amer. J. Math. **41** (1969), 772–784.

[MPST19] Linquan Ma, Thomas Polstra, Karl Schwede, Kevin Tucker, *F-signature under birational morphisms*, Forum Math. Sigma **7** (2019), e11, 20 pp.

[Mon83] Paul Monsky, *The Hilbert-Kunz function*, Math. Ann. **263** (1983), 43–49.

[PS] Thomas Polstra, Ilya Smirnov, *Equimultiplicity theory of strongly F-regular rings*, Mich. Math. J. to appear.

[RST18] Javier Carvajal-Rojas, Karl Schwede, Kevin Tucker, *Fundamental groups of F-regular singularities via F-signature*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **51** (2018), no. 4, 993–1016.

[San15] Akiyoshi Sannai, *On Dual F-Signature*, Int. Math. Res. Not. IMRN, Vol. 2015, no.1, pp. 197–211.

[Sin05] Anurag K. Singh, *The F-signature of an affine semigroup ring*, J. Pure Appl. Algebra **196** (2005), no. 2-3, 313–321.

[SmVa97] Karen E. Smith, Michel Van den Bergh, *Simplicity of Rings of Differential Operators in Prime Characteristic*, Proc. London Math. Soc. (3) **75** (1997), 32–62.

[Tuc12] Kevin Tucker, *F-signature exists*, Invent. Math. **190** (2012), 743–765.

[Von12] Michael R. Von Korff, *The F-signature of Toric Varieties*, the dissertation in the University of Michigan, 2012.

[WY00] Kei-ichi Watanabe and Ken-ichi Yoshida, *Hilbert-Kunz multiplicity and an inequality between multiplicity and colength*, J. Algebra **230**, (2000), 295–317.

[WY01] Kei-ichi Watanabe and Ken-ichi Yoshida, *Hilbert-Kunz multiplicity of two-dimensional local rings*, Nagoya Math. J. **162** (2001), 87–110.

[WY04] Kei-ichi Watanabe and Ken-ichi Yoshida, *Minimal relative Hilbert-Kunz multiplicity*, Illinois J. Math. J. **48** (2004), 273–294.

[WY05] Kei-ichi Watanabe and Ken-ichi Yoshida, *Hilbert-Kunz multiplicity of three-dimensional local rings*, Nagoya Math. J. **177** (2005), 47–75.

[Yao05a] Yongwei Yao, *Modules with Finite F-Representation Type*, J. London Math. Soc. **72** (2005), no. 2, 53–72.

[Yao05b] Yongwei Yao, *Observations on the F-signature of local rings of characteristic p*, J. Algebra **299** (2006) no. 1, 198–218.

吉田健一 (Ken-ichi Yoshida) 〒 156-8550 東京都世田谷区桜上水 3-25-40 日本大学文理学部数学科

K. Yoshida: Department of Mathematics, College of Humanities and Sciences, Nihon University, 3-25-40 Sakurajosui, Setagaya-Ku, Tokyo 156-8550, Japan

E-mail address: `yoshida@math.chs.nihon-u.ac.jp`