

自明拡大環の岩永-Gorenstein 性と三角圏

山浦 浩太

1 はじめに

環の表現論の目標の 1 つは環上の加群や準同型写像を分類し、加群圏を始めとする様々な圏の構造を明らかにすることである。圏を調べるときに重要となる道具が圏同値を扱う理論である。代表的なものとして、加群圏の間の圏同値を扱った森田理論 [1, 第 5 章] が挙げられる。2 つの環 Λ と Γ に対して $\text{Mod } \Lambda \simeq \text{Mod } \Gamma$ となるとき、 Λ と Γ は森田同値であるという。このとき Λ と Γ は非常に多くの性質を共有し、特に加群に関する議論は両者の間で全く等価になる。従って Λ 加群に関する様々な問題を Γ 加群に関する問題に書き換えて考察することが可能となる。

環 Λ と森田同値になる環は、有限生成射影 Λ 加群の準同型環として特徴付けられている。これを用いると、例えば体 K 上の n 次全行列環 $M_n(K)$ は K と森田同値となることが直ちにわかる。つまり圏同値 $\text{Mod } M_n(K) \simeq \text{Mod } K$ が存在する。これにより $M_n(K)$ 加群とその準同型写像の分類は K 上のベクトル空間と線形写像の分類に帰着される。

環の表現論において力を発揮している圏同値をもう 1 つ挙げる。 K を代数的閉体とし、 Λ を K 上の有限次元多元環とする。このとき Λ はあるクイバー Q の道多元環 KQ の剰余環 KQ/I と森田同値となる (Gabriel の定理)。 KQ/I 加群の圏は Q の K 線形表現のなす圏 $\text{Rep}_K(Q, I)$ と圏同値となるため、 $\text{Mod } \Lambda \simeq \text{Mod } KQ/I \simeq \text{Rep}_K(Q, I)$ が成り立つ。この圏同値から K 上の線形代数を利用した Λ 加群の種々の計算・研究が可能となる ([3] 参照)。

他にも加群圏の部分圏の間の圏同値や、加群の導来圏の間の圏同値を扱う傾斜理論が 1980 年頃に生み出されてから大きく発展を遂げ、現在の環の表現論における主要な道具となっている ([3, 2, 13, 27])。また、傾斜理論は代数的三角圏と環上の加群の導来圏との間の圏同値を扱う理論 [18] に拡張され、適用範囲を拡大しており、代数幾何学やミラー対称性等の研究と環の表現論を結びつける大事な役割を果たしている。

このように環の表現論では重要な圏同値が数多く存在する。本報告書では 1980 年後半に Happel によって発見された圏同値に焦点をあてる。それは異なる三角圏である導来圏と安定圏を繋げる興味深い圏同値であり、両者の間に見られる類似性や関係性を俯瞰で理解することを可能とする ([13])。本稿では Happel の圏同値と応用例を紹介した後、源氏との共同研究 [23] で得られた Happel の圏同値の拡張に関する最近の研究結果を概説する。

記号など。 本稿で多元環というときは、体 K 上の有限次元多元環を意味するものとする。また環上の加群はすべて右加群を考えているものとする。

- Λ を環とする。このとき $\text{Mod } \Lambda$ を Λ 加群の圏とする。また $\text{mod } \Lambda$ を有限生成 Λ 加群の圏、 $\text{proj } \Lambda$ を有限生成射影 Λ 加群の圏、 $\text{Inj } \Lambda$ を入射 Λ 加群の圏とする。
- Λ を環とする。 Λ 加群 M の射影次元を $\text{pd } M_\Lambda$ 、入射次元を $\text{id } M_\Lambda$ で表す。また Λ の大域次元を $\text{gl.dim } \Lambda$ で表す。
- 環 Λ の反転環を Λ^{op} で表す。
- K 双対を $D := \text{Hom}_K(-, K)$ と表す。
- 加法圏 \mathcal{A} に対して、 \mathcal{A} 上の有界複体のなすホモトピー圏を $\mathbb{K}^b(\mathcal{A})$ と表す。アーベル圏 \mathcal{B} に対して、 \mathcal{B} の導来圏を $D(\mathcal{B})$ 、有界導来圏を $D^b(\mathcal{B})$ と表す。ホモトピー圏や導来圏については [19, 32] などを参照されたい。
- 本稿では次数付き環が登場する。次数付き環というときは正次数付き環を意味するものとする。

次数付き環 $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ に対して、次数付き A 加群の圏 $\text{Mod}^{\mathbb{Z}} A$ を次で定める。

– 対象は次数付き A 加群 $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ 。

– 次数付き A 加群 M, N に対して, M から N への射の集合は次で定める.

$$\mathrm{Hom}_A^{\mathbb{Z}}(M, N) = \{f \in \mathrm{Hom}_A(M, N) \mid \forall i \in \mathbb{Z}, f(M_i) \subset N_i\}$$

通常の加群圏と同様に, $\mathrm{mod}^{\mathbb{Z}} A$, $\mathrm{proj}^{\mathbb{Z}} A$, $\mathrm{Inj}^{\mathbb{Z}} A$ を定める. 次数付き Artin 多元環の表現論の基本事項について, 例えば [11, 12] を参照されたい.

- A を次数付き環とし, k を整数とする. 次数付き A 加群 $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ に対して, 次数付き A 加群 $M(k)$ を次で定める.

$$M(k) := M, \quad M(k)_i = M_{i+k} \quad (i \in \mathbb{Z})$$

これにより次数 shift 関手 $(k) : \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}} A \rightarrow \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}} A$ が定まる.

- \mathcal{A} を加法圏とする. \mathcal{A} の任意の対象 M に対して, $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M_i)$ が局所環である \mathcal{A} の対象 M_1, \dots, M_n が存在し

$$M \simeq M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$$

となるとき, \mathcal{A} を Krull-Schmidt 圏という. $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M_i)$ は局所環なので M_i は直既約対象であり, 上記の直和分解は M の唯一つの直既約分解となる. Krull-Schmidt 圏 \mathcal{A} に対して, その直既約対象の同型類全体の集合を $\mathrm{ind}(\mathcal{A})$ と表す.

例えば Λ を有限次元多元環とすると $\mathrm{mod} \Lambda$ や $\mathrm{D}^b(\mathrm{mod} \Lambda)$ は Krull-Schmidt 圏であり, $\mathrm{ind}(\mathrm{mod} \Lambda)$ は直既約 Λ 加群の同型類全体の集合を意味する.

- \mathcal{D} を三角圏とする. \mathcal{D} の直和因子で閉じた三角部分圏を \mathcal{D} の thick 部分圏という. $M \in \mathcal{D}$ に対して, M を含む最小の thick 部分圏を thick M と表す.

2 Happel による三角圏同値

環の表現論で扱われる主要な三角圏として導来圏と安定圏が挙げられる.

アーベル圏 \mathcal{A} の導来圏 $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ は Grothendieck と Verdier によって導入され, 三角圏の構造をもつことが示されている. この導来圏の中では \mathcal{A} のホモロジー代数を快適に行うことができる. そのため環上の加群圏の導来圏 $\mathrm{D}(\mathrm{Mod} \Lambda)$ は環のホモロジー代数的研究において強力な道具となっている.

一方で 1980 年後半, Happel は Frobenius 圏の安定圏に自然な三角圏構造が入ることを示した. Frobenius 圏の典型的な例が自己入射多元環 A の加群圏 $\mathrm{mod} A$ であり, その安定圏 $\underline{\mathrm{mod}} A$ は三角圏となる. これにより自己入射多元環を三角圏の一般論を用いて研究することが可能となった.

同時期に Happel は導来圏と安定圏の間に深い関係があることを示した. 多元環 Λ に対して, 自明拡大環をとる操作により次数付き自己入射多元環 $T(\Lambda)$ が構成される. このとき次数付き $T(\Lambda)$ 加群の安定圏 $\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)$ は三角圏となる. Happel は導来圏から安定圏への三角関手 $\mathcal{F} : \mathrm{D}^b(\mathrm{mod} \Lambda) \rightarrow \underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)$ を具体的に構成し, ある条件下では \mathcal{F} が三角圏同値になることを証明した.

本章では, この三角圏同値を与えた Happel の定理を紹介し, 関連する話題をほんの少しお話する. 2.1 節で自明拡大環の定義を復習し, $T(\Lambda)$ を定義する. そして Λ と $T(\Lambda)$ の間の興味深い表現論的対応を紹介する. 2.2 節では Happel の定理を述べ, 2.1 節で紹介する Λ と $T(\Lambda)$ の表現論的対応が Happel の圏同値から俯瞰的に観察できることを説明する. 2.3 節では Happel の圏同値の拡張に向けて, 少しの準備を行う.

2.1 自明拡大環

本節では自明拡大環の定義を復習し, その表現論に関する定理を紹介する.

定義 2.1. 環 Λ と Λ -両側加群 C に対して, 加法群 $A = \Lambda \oplus C$ を考える. A の元 $(\lambda_1, c_1), (\lambda_2, c_2)$ の積を

$$(\lambda_1, c_1) \cdot (\lambda_2, c_2) := (\lambda_1 \lambda_2, \lambda_1 c_2 + c_1 \lambda_2)$$

と定める. これにより A は環となる. この環 A を Λ の C による自明拡大環という. 明らかに Λ は A の部分環である. また C は A の両側イデアルであり $\Lambda \simeq A/C$ であるから, Λ は A の剰余環とみなすことができる.

自明拡大環を取る操作は自己入射多元環を豊富に構成する方法を提供する.

命題 2.1. Λ を多元環とする. Λ の $D\Lambda$ による自明拡大環 $T(\Lambda) := \Lambda \oplus D\Lambda$ は自己入射多元環である.

この構成を利用した自己入射多元環の研究が数多く行われている ([29]). その中で Λ と $T(\Lambda)$ の表現論的対応を調べるといった研究がなされている ([13, Chapter III, V], [30, X. 7]). 例えば次の定理が知られている.

定理 2.2. [31, Proposition 1.3, Theorem 1.4] Λ を大域次元 1 以下の多元環とする.

(1) 射影的でない直既約 $T(\Lambda)$ 加群の同型類の完全系は次で与えられる.

$$\text{ind}(\text{mod } \Lambda) \cup \{ \Omega_A^{-1}(M) \mid M \in \text{ind}(\text{mod } \Lambda) - \text{ind}(\text{inj } \Lambda) \}$$

(2) (1) より次の式が成立する.

$$\# \text{ind}(\text{mod } T(\Lambda)) = 2 \times \# \text{ind}(\text{mod } \Lambda)$$

特に

$$\Lambda \text{ が有限表現型} \Leftrightarrow T(\Lambda) \text{ が有限表現型}$$

である.

定理 2.2 (1) を例で確認してみよう.

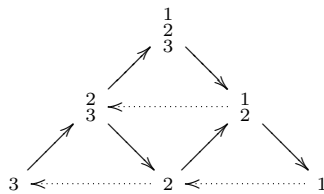
例 2.1. Λ を次のクイバー Q により定まる道多元環 $\Lambda = KQ$ とする.

$$Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

Q の各頂点に対応して 3 つの単純 Λ 加群が存在し, それぞれ次の Q の K 線形表現で表される.

$$(K \rightarrow 0 \rightarrow 0), \quad (0 \rightarrow K \rightarrow 0), \quad (0 \rightarrow 0 \rightarrow K)$$

これらを順に 1, 2, 3 と表し, 一般の Λ 加群を Loewy 列によって表す. このとき $\text{mod } \Lambda$ の Auslander-Reiten クイバーは次のようになる.

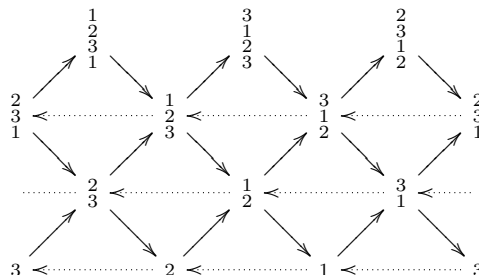


次に $T(\Lambda)$ は次のクイバーと関係式で定まる多元環となる.

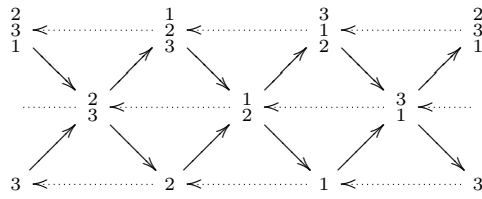
$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \quad \alpha\beta\gamma = \beta\gamma\alpha = \gamma\alpha\beta = 0$$

γ (curved arrow from 3 to 1)

$\text{mod } A$ の Auslander-Reiten クイバーは次である.

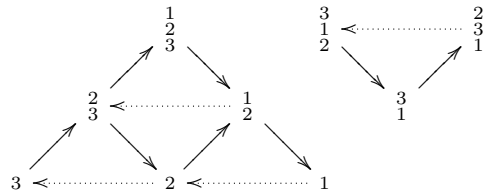


直既約射影 A 加群は一番上の行にある加群であり, それを除外すると



となる. これを見ると定理 2.2 (1) の通りになっていることを観察できる.

$$\{\Omega_A^{-1}(M) \mid M \in \text{mod } \Lambda - \text{inj } \Lambda\}$$



mod Λ

定理 2.2 (1) は $T(\Lambda)$ 加群の標準表現を詳細に調べることにより証明されている. 標準表現とは, 与えられた $T(\Lambda)$ 加群の構造を Λ 加群の準同型写像を用いて表示する方法のことである. 他方, 定理 2.2 (1) は Happel による圏同値の帰結として理解できる. このことを次節で説明する.

2.2 Happel の圏同値

本節では Happel の圏同値を述べる. それを用いて定理 2.2 (1) の説明を与える.

定義 2.2. Λ を環とし, C を Λ -両側加群とする. 自明拡大環 $A = \Lambda \oplus C$ について

$$A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i, \quad A_i = \begin{cases} \Lambda & (i = 0) \\ C & (i = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とする. このとき A は次数付き環となる.

Λ は A の次数付き剰余環であるから, Λ 加群は次数付き A 加群とみなすことができる. これにより忠実充満な関手

$$\text{mod } \Lambda \hookrightarrow \text{mod}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)$$

が定まる.

定義 2.3. A を多元環とする. このとき $\text{mod } A$ の安定圏 $\underline{\text{mod}} A$ を次で定める.

- 対象は有限生成 A 加群とする.
- 次数付き A 加群 M, N に対して

$$\underline{\text{Hom}}_A(M, N) = \text{Hom}_A(M, N) / \{ \text{射影加群を通過する射} \}$$

と定める.

安定圏 $\underline{\text{mod}} A$ は Krull-Schmidt 圏であり

$$\text{ind}(\underline{\text{mod}} A) = \text{ind}(\text{mod } A) - \text{ind}(\text{proj } A) \tag{2.1}$$

が成り立つ.

今 A が自己入射多元環であるとする. このとき $\text{mod } A$ は Frobenius 圏となり, 安定圏 $\underline{\text{mod}} A$ には三角圏構造が入る [13, Chapter I.2.]. 三角圏 $\underline{\text{mod}} A$ の shift 関手 $[1]$ は cosyzygy 関手 Ω_A^{-1} である.

$$[1] = \Omega_A^{-1} : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A$$

A が次数付き多元環のとき, 上と同様に $\text{mod}^{\mathbb{Z}} A$ の安定圏 $\underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} A$ が定義される. また A が次数付き自己入射多元環のとき, $\underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} A$ には三角圏の構造が入る.

特に多元環 Λ に対して $T(\Lambda)$ は次数付き自己入射多元環であり, 安定圏 $\underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)$ は三角圏となる. このとき元の多元環 Λ の導来圏 $D^b(\text{mod } \Lambda)$ と $\underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)$ との関係が次の定理によって与えられた.

定理 2.3 (Happel [13]). Λ を多元環とする. 以下の主張が成立する.

(1) ある忠実充満な三角関手 $\mathcal{F} : D^b(\text{mod } \Lambda) \rightarrow \underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)$ で, 次の図式を可換にするものが存在する.

$$\begin{array}{ccc} \text{mod } \Lambda \subset & \longrightarrow & \text{mod}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda) \\ \text{inc.} \downarrow & & \downarrow \text{nat.} \\ D^b(\text{mod } \Lambda) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda) \end{array}$$

また次の可換図式が存在する.

$$\begin{array}{ccc} D^b(\text{mod } \Lambda) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda) \\ -\frac{1}{\otimes_{\Lambda}} D\Lambda[1] \downarrow & & \downarrow (1) \\ D^b(\text{mod } \Lambda) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda) \end{array}$$

(2) \mathcal{F} が圏同値となる必要十分条件は $\text{gl.dim } \Lambda < \infty$ である.

注意 2.1. 三角関手 \mathcal{F} の構成は具体的に与えられているが, やや複雑であるため, ここでは省略する. 後に別の形で \mathcal{F} を与える (定義 3.1).

定理 2.3 を用いて定理 2.2 (1) を説明する. Λ を大域次元 1 以下の多元環とし, $G = -\frac{\mathbb{L}}{\otimes_{\Lambda}} D\Lambda[1]$ とおく. (2.1) より定理 2.2 (1) の主張は

$$\text{ind}(\underline{\text{mod}} T(\Lambda)) = \text{ind}(\text{mod } \Lambda) \cup \{ \Omega_A^{-1}(M) \mid M \in \text{ind}(\text{mod } \Lambda) - \text{ind}(\text{inj } \Lambda) \}$$

と言い換えることができる. この式を導いてみよう.

まず [31] の中で, すべての $T(\Lambda)$ 加群は次数付き $T(\Lambda)$ 加群であることが示されている. 従って $\underline{\text{mod}} T(\Lambda) \simeq \underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)/(1)$ である. これと定理 2.3 より次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} D^b(\text{mod } \Lambda) & \xrightarrow[\simeq]{\mathcal{F}} & \underline{\text{mod}}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda) \\ \text{nat.} \downarrow & & \downarrow \text{forget} \\ D^b(\text{mod } \Lambda)/G & \xrightarrow[\simeq]{} & \underline{\text{mod}} T(\Lambda) \end{array}$$

よって $\text{ind}(\underline{\text{mod}} T(\Lambda))$ を調べることは $\text{ind}(D^b(\text{mod } \Lambda)/G)$ を調べることに置き換わる. $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の構造は良く調べられており, $D^b(\text{mod } \Lambda)$ は $\text{mod } \Lambda$ の shift の “張り合わせ” になっていることが知られている ([13, Chapter I] 参照). 特に

$$\text{ind}(D^b(\text{mod } \Lambda)) = \{ M[n] \mid M \in \text{ind}(\text{mod } \Lambda), n \in \mathbb{Z} \}$$

であり, この G 軌道の代表系は

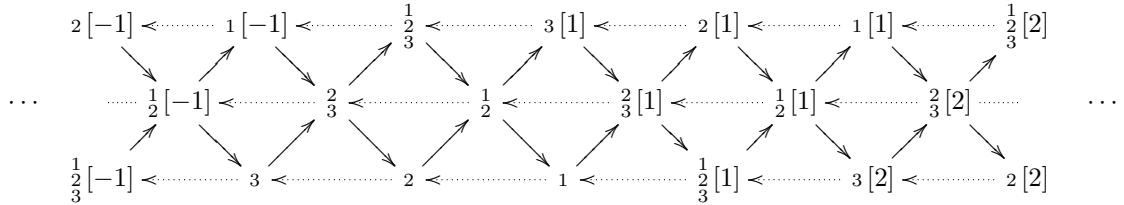
$$\text{ind}(D^b(\text{mod } \Lambda)/G) = \text{ind}(\text{mod } \Lambda) \cup \{ M[1] \mid M \in \text{ind}(\text{mod } \Lambda) - \text{ind}(\text{inj } \Lambda) \}$$

により与えられる. この式を \mathcal{F} を通して $\text{mod } T(\Lambda)$ の情報に書き換えると

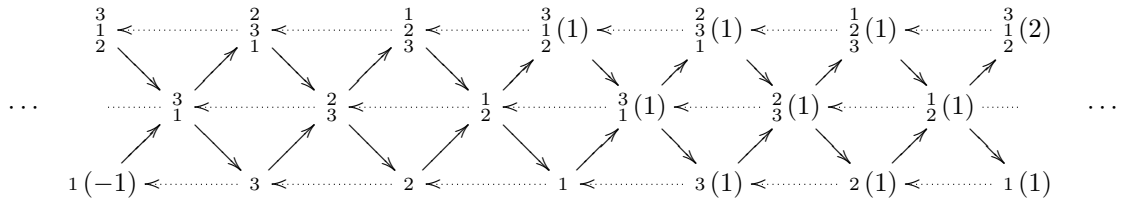
$$\text{ind}(\text{mod } T(\Lambda)) = \text{ind}(\text{mod}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)/(1)) = \text{ind}(\text{mod } \Lambda) \cup \{\Omega_A^{-1}(M) \mid M \in \text{ind}(\text{mod } \Lambda) - \text{ind}(\text{inj } \Lambda)\}$$

であることがわかる. ここで $\text{mod}^{\mathbb{Z}} A$ の shift 関手は $[1] = \Omega_A^{-1}$ であることを用いた. 以上で定理 2.2 (1) が得られた.

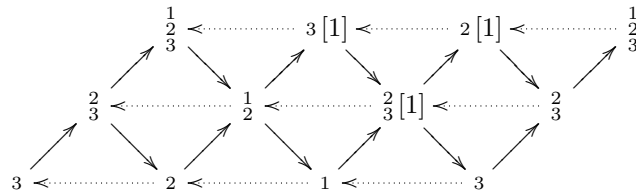
例 2.2. 例 2.1 を Happel の圏同値から見てみよう. $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の Auslander-Reiten クイバーは次のようになる.



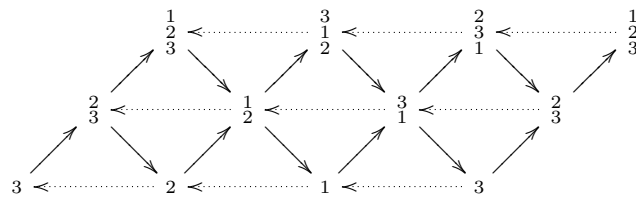
$T(\Lambda)$ の次数付けはクイバーと関係式による表示において $\deg \alpha = \deg \alpha\beta = 0, \deg \gamma = 1$ として定まる次数付けと一致する. $\text{mod}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)$ の Auslander-Reiten クイバーは次のようになる.



$D^b(\text{mod } \Lambda)$ と $\text{mod}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)$ の Auslander-Reiten クイバーは一致しており, 定理 2.3 の圏同値 $D^b(\text{mod } \Lambda) \simeq \text{mod}^{\mathbb{Z}} T(\Lambda)$ が視覚的に確認できる. $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の Auslander-Reiten クイバーの G 軌道の代表系をとると次のようになる.



これは $\text{mod } A \simeq \text{mod}^{\mathbb{Z}} A/(1)$ の Auslander-Reiten クイバーと一致する.



以上より, Happel の圏同値を通して例 2.1 と同じ観察が得られた.

このように定理 2.3 の三角圏同値や既知である導来圏の構造を用いて, 定理 2.2 を見通し良く理解することができる. 安定圏と導来圏の比較研究を行い, 定理 2.3 と類似の圏同値を構成することができれば, 環の表現論において有用な道具となる. この理由から定理 2.3 の拡張となる理論の構築が重要な課題であると思われる. 次節では岩永-Gorenstein 環と Cohen-Macaulay 加群の定義を復習し, 定理 2.3 の拡張に関する問題を述べる.

2.3 岩永-Gorenstein 環, Cohen-Macaulay 加群

この節では自己入射多元環の一般化である岩永-Gorenstein 環の定義と, 岩永-Gorenstein 環の表現論において主要な研究対象である Cohen-Macaulay 加群の定義を述べる.

定義 2.4. [16] 両側 Noether 環 A が

$$\text{id } A_A < \infty \quad \text{かつ} \quad \text{id } {}_A A < \infty$$

を満たすとき, A を岩永-Gorenstein 環という.

例 2.3. (1) 自己入射多元環 A は $\text{id } A_A = \text{id } {}_A A = 0$ の岩永-Gorenstein 多元環である.

(2) 可換 Gorenstein 環は岩永-Gorenstein 環である.

(3) 大域次元が有限である両側 Noether 環は岩永-Gorenstein 環である.

例 2.3 (1) (2) からわかるように, 岩永-Gorenstein 環は自己入射多元環と可換 Gorenstein 環の共通の一般化である. 次に Cohen-Macaulay 加群の定義を述べる.

定義 2.5. A を岩永-Gorenstein 環とする. $M \in \text{mod } A$ が $\text{Ext}_A^i(M, A) = 0$ ($i > 0$) を満たすとき, M を Cohen-Macaulay 加群という. Cohen-Macaulay 加群のなす $\text{mod } A$ の充満部分圏を

$$\text{CM } A := \{M \in \text{mod } A \mid \forall i > 0, \text{Ext}_A^i(M, A) = 0\}$$

と表す. また A が次数付き岩永-Gorenstein 環のとき, 次数付き Cohen-Macaulay 加群のなす $\text{mod}^{\mathbb{Z}} A$ の充満部分圏を

$$\text{CM}^{\mathbb{Z}} A := \{M \in \text{mod}^{\mathbb{Z}} A \mid \forall i > 0, \text{Ext}_A^i(M, A) = 0\}$$

と表す. これらの圏は Frobenius 圏であり, 安定圏 $\underline{\text{CM}} A, \underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ には三角圏の構造が入る [13, Chapter I.2.].

注意 2.2. A が自己入射多元環のとき, $\text{CM } A = \text{mod } A$ である.

安定圏 $\underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ は次に定義する安定導来圏と三角圏同値になる.

定義 2.6. [7, 25] A を次数付き両側 Noether 環とする. $D^b(\text{mod}^{\mathbb{Z}} A)$ は $K^b(\text{proj}^{\mathbb{Z}} A)$ を thick 部分圏として含む. $D^b(\text{mod}^{\mathbb{Z}} A)$ の $K^b(\text{proj}^{\mathbb{Z}} A)$ による Verdier 商

$$\text{Sing}^{\mathbb{Z}}(A) := D^b(\text{mod}^{\mathbb{Z}} A) / K^b(\text{proj}^{\mathbb{Z}} A)$$

を安定導来圏 (または特異導来圏) という. 自然な商関手を

$$\mathcal{Q} : D^b(\text{mod}^{\mathbb{Z}} A) \rightarrow \text{Sing}^{\mathbb{Z}}(A)$$

と表す.

定理 2.4. [7, 14, 28] A を次数付き岩永-Gorenstein 環とする. このとき次の図式を可換にする自然な三角圏同値 β が存在する.

$$\begin{array}{ccccc} \text{CM}^{\mathbb{Z}} A & \xrightarrow{\text{inc.}} & \text{mod}^{\mathbb{Z}} A & \xrightarrow{\text{inc.}} & D^b(\text{mod}^{\mathbb{Z}} A) \\ \text{nat.} \downarrow & & & & \downarrow \mathcal{Q} \\ \underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A & \xrightarrow[\beta]{\simeq} & & & \text{Sing}^{\mathbb{Z}}(A) \end{array}$$

定理 2.3 の拡張について次の問題が挙げられる.

問題 2.1. 定理 2.3 は多元環 Λ に対して, Λ -両側加群 $D\Lambda$ による自明拡大環を考えている. この $D\Lambda$ を別の Λ -両側加群に取り替えたとき, 類似の主張が成り立つだろうか. すなわち自明拡大環 $A = \Lambda \oplus C$ が岩永-Gorenstein 多元環となるように, Λ -両側加群 C を取る. このとき適当な仮定の下で, $D^b(\text{mod } \Lambda)$ と $\underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ の間に圏同値が成り立つなどの関係があるだろうか.

問題 2.2. 定理 2.3 は多元環 Λ からスタートして, 次数付き自己入射多元環 $T(\Lambda)$ を構成し, 三角圏同値 $D^b(\text{mod } \Lambda) \simeq \underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ を示している. これと順序を逆にして次数付き岩永-Gorenstien 環 A からスタートし, 三角圏同値

$$\underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A \simeq D^b(\text{mod } \Gamma)$$

が成り立つような環 Γ を構成することができるだろうか. この問いに対して答えが YES である (または NO である) 次数付き岩永-Gorenstein 環のクラスとして, どんなものがあるだろうか.

次章では問題 2.1 に関する研究結果を説明する. 問題 2.2 は環の表現論に限らず代数幾何学やミラー対称性などの多様な動機から研究が行われており, 非常に多くの結果が報告されている. これについては [17] を参照されたい.

3 岩永-Gorenstein 性と三角圏

本章では源氏との一連の共同研究 [21, 22, 23] によって得られた, 定理 2.3 の拡張について概説する. この章では断らない限り Λ を有限次元多元環とし, C を有限次元 Λ -両側加群とする. また Λ の C による自明拡大環を $A = \Lambda \oplus C$ で表す. A も有限次元多元環である.

A が岩永-Gorenstein 多元環のとき, 導来圏 $D^b(\text{mod } \Lambda)$ から安定圏 $\underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ への三角関手 \mathcal{H} が常に構成できる.

定義 3.1. Λ は A の次数付き剰余環であり, 忠実充満な三角関手

$$D^b(\text{mod } \Lambda) \hookrightarrow D^b(\text{mod }^{\mathbb{Z}} A)$$

が存在した. これと Q の合成により三角関手

$$\varpi : D^b(\text{mod } \Lambda) \hookrightarrow D^b(\text{mod }^{\mathbb{Z}} A) \xrightarrow{Q} \text{Sing}^{\mathbb{Z}}(A)$$

を得る. A が岩永-Gorenstient 環のとき, 定理 2.4 により三角関手

$$\mathcal{H} : D^b(\text{mod } \Lambda) \hookrightarrow D^b(\text{mod }^{\mathbb{Z}} A) \xrightarrow{Q} \text{Sing}^{\mathbb{Z}}(A) \xrightarrow{\simeq} \underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$$

が得られる. ここで $A = T(\Lambda)$ のとき \mathcal{H} は定理 2.3 の \mathcal{F} と同型であるので, \mathcal{H} は \mathcal{F} の一般化と捉えられる. そこで \mathcal{H} を Happel 関手と呼ぶことにする.

\mathcal{H} を通して $D^b(\text{mod } \Lambda)$ と $\underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ の関係を明らかにすることが本章の目標である. そのために以下の節では次の問題を順に考える.

問題 3.1.

(A) そもそも $\text{id } A_A < \infty$ かつ $\text{id } {}_A A < \infty$ となるための必要十分条件は何だろうか.

(B) A が岩永-Gorenstein 多元環であるとき, 適当な仮定の下で \mathcal{H} が圏同値になるだろうか. あるいは $\underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ と $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の三角部分圏や Verdier 商との圏同値を \mathcal{H} が誘導しないだろうか.

後でわかることだが, 問題 3.1 (A) で与えた解答が問題 3.1 (B) の解決に深く関係してくる.

記号. 整数 $n \geq 0$ に対して, 次の記号を定める.

$$\mathbb{R}\text{Hom}_{\Lambda}(C^n, -) := \begin{cases} \mathbb{R}\text{Hom}_{\Lambda}(C, -) \circ \cdots \circ \mathbb{R}\text{Hom}_{\Lambda}(C, -) & (n\text{-times}) \quad (n \geq 1) \\ \mathbb{R}\text{Hom}_{\Lambda}(\Lambda, -) & (n = 0) \end{cases}$$

$$C^n := \begin{cases} C \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} \cdots \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C & (n\text{-times}) \quad (n \geq 1) \\ \Lambda & (n = 0) \end{cases}$$

3.1 問題 (A)

本節に限り Λ を一般の環とし, C を一般の Λ -両側加群とする. また $A = \Lambda \oplus C$ は自明拡大環とする. この設定の下, 問題 3.1 (A) について述べる. 最初に $\text{id } A_A < \infty$ となる C に名前を付けておく.

定義 3.2. $\text{id } A_A < \infty$ であるとき, C を右 asid 加群^{*1}という. 同様に $\text{id } {}_A A < \infty$ であるとき, C を左 asid 加群という. また C が右 asid 加群かつ左 asid 加群であるとき, C は asid 加群であるという.

注意 3.1. A の次数付き構造を用いると, $\text{id } A_A < \infty$ ならば $\text{id } C_\Lambda < \infty$ であることが証明できる. 従って $\text{id } C_\Lambda$ の有限性は C が右 asid 加群であるための必要条件である.

asid 加群の例を挙げる.

例 3.1.

- (1) Λ が岩永-Gorenstein 環のとき, Λ は asid 加群である.
- (2) (R, \mathfrak{m}) を可換局所環とする. このとき $E(R/\mathfrak{m})$ は asid 加群である [26, (5) Proposition].
- (3) R を可換 Cohen-Macaulay 局所環とする. このとき標準加群は asid 加群である [10, 26].
- (4) Λ の大域次元が有限であるとする. このとき次が成り立つ [9, Theorem 4.14].

$$\text{gl.dim } A < \infty \iff \exists n \geq 0; \quad C^n = 0.$$

特にこのとき C は asid 加群である.

上で紹介した例 (1) (2) (3) は次の命題に含まれる.

定理 3.1. [9, Theorem 4.34] Λ を環とし, C を次の条件を満たす Λ -両側加群とする.

(FGR1) $\text{Ext}_\Lambda^i(C, C) = 0$ ($i > 0$).

(FGR2) Λ 加群の準同型 $\tilde{\lambda}_r : \Lambda \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(C, C)$, $\tilde{\lambda}_r(a)(c) = ac$ は同型である.

このとき $\text{id } A_A = \text{id } C_\Lambda$ が成り立つ. 特に $\text{id } C_\Lambda < \infty$ のとき, C は右 asid 加群である.

証明の概略. (FGR1), (FGR2) を仮定すると, C の入射分解から A の入射分解を構成できる. C の入射分解

$$0 \rightarrow C_\Lambda \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \cdots \rightarrow E^n \rightarrow \cdots$$

に対して $\text{Hom}_\Lambda(A, -)$ を適用すると, A 加群の複体

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(A, C)_A \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(A, E^0) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(A, E^1) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(A, E^n) \rightarrow \cdots \quad (3.1)$$

が得られる. ここで各 $\text{Hom}_\Lambda(A, E^i)$ は入射 A 加群となる. (FGR1) から (3.1) は完全列であることが従う. また (FGR2) から A 加群の準同型写像

$$\tilde{\varphi}_r : A_A \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(A, C)_A, \quad \tilde{\varphi}_r(a)(c) = ac$$

が同型であることがわかる. よって (3.1) は A の入射分解である. この構成から $\text{id } A_A = \text{id } C_\Lambda$ である. □

以下では Λ と C に何も仮定せず, $\text{id } A_A$ の有限性を調べる. $\text{id } A_A$ の有限性を調べるときは導来圏で考えると都合が良い. A を $\text{D}(\text{Mod } A)$ の対象とみなすと

$$\text{id } A_A < \infty \iff A \in \mathcal{K}^b(\text{Inj } A)$$

である.

^{*1} asid は attaching self-injective dimension の略である

考察の指針を見つけるために定理 3.1 証明中の C_Λ の入射分解から A_A の入射分解を構成する部分を見直し、それを導来圏の言葉に翻訳してみる。まず関手 $\text{Hom}_\Lambda(A, -) : \text{Mod } \Lambda \rightarrow \text{Mod } A$ の制限として $\text{Hom}_\Lambda(A, -) : \text{Inj } \Lambda \rightarrow \text{Inj } A$ を得る。よって導来関手 $\mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(A, -) : \text{D}(\text{Mod } \Lambda) \rightarrow \text{D}(\text{Mod } A)$ の制限として $\text{Hom}_\Lambda(A, -) : \mathbb{K}^{-\cdot, \text{b}}(\text{Inj } \Lambda) \rightarrow \mathbb{K}^{-\cdot, \text{b}}(\text{Inj } A)$ が得られる。次に仮定 (FGR1) と (FGR2) の下では複体の射

$$\varphi_r : A \xrightarrow{\tilde{\varphi}_r} \text{Hom}_\Lambda(A, C) \xrightarrow{\text{nat.}} \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(A, C) (\simeq \text{Hom}_\Lambda(A, E^\bullet))$$

が導来圏 $\text{D}(\text{Mod } A)$ において同型となり、 $\mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(A, C)$ が A の入射分解を与える。このように翻訳される。特に $\text{id } C_\Lambda < \infty$ のとき $A \simeq \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(A, C) \in \mathbb{K}^{\text{b}}(\text{Inj } A)$ となる。

もちろん一般の場合に φ_r は同型ではなく、 A と $\mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(A, C)$ の間にズレが生じる。そのズレを見るために φ_r の写像錐 $\text{cn}(\varphi_r)$ に注目する。今 $\text{D}(\text{Mod } A)$ の三角

$$A \xrightarrow{\varphi_r} \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(A, C) \rightarrow \text{cn}(\varphi_r) \rightarrow A[1]$$

を取る。 λ_r を次で定まる $\text{D}(\text{Mod } \Lambda)$ の射とする。

$$\lambda_r : \Lambda \xrightarrow{\tilde{\lambda}_r} \text{Hom}_\Lambda(C, C) \xrightarrow{\text{nat.}} \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(C, C)$$

このとき可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} C & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(\Lambda, C) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\varphi_r} & \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(A, C) & \longrightarrow & \text{cn}(\varphi_r) & \longrightarrow & A[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \\ \Lambda & \xrightarrow{\lambda_r} & \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(C, C) & \longrightarrow & \text{cn}(\lambda_r) & \longrightarrow & \Lambda[1] \end{array}$$

が存在する。ただし、図式の各行は $\text{D}(\text{Mod } A)$ の三角、各列は自然な分裂完全列である。従って $\text{cn}(\varphi_r) \simeq \text{cn}(\lambda_r)$ であり、 $\text{D}(\text{Mod } A)$ の三角

$$A \xrightarrow{\varphi_r} \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(A, C) \rightarrow \text{cn}(\lambda_r) \rightarrow A[1]$$

が存在する。この三角と注意 3.1 より

$$\text{id } A_A < \infty \Leftrightarrow A \in \mathbb{K}^{\text{b}}(\text{Inj } A) \Leftrightarrow \text{id } C_\Lambda < \infty \text{ かつ } \text{cn}(\lambda_r) \in \mathbb{K}^{\text{b}}(\text{Inj } A)$$

が成立する。よって $\text{cn}(\lambda_r) \in \text{D}(\text{Mod } \Lambda)$ が $\text{cn}(\lambda_r) \in \mathbb{K}^{\text{b}}(\text{Inj } A)$ となる必要十分条件が分かれば良い。ここで $M \in \text{D}(\text{Mod } \Lambda)$ が $M \in \mathbb{K}^{\text{b}}(\text{Inj } A)$ となる必要十分条件を Λ 加群の言葉で書き下すと

- (1) $\forall m \geq 0, \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(C^m, X) \in \mathbb{K}^{\text{b}}(\text{Inj } \Lambda)$.
- (2) $\exists n \geq 0; \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(C^n, X) = 0$.

となる (証明には A の次数付き入射加群の複体の構造 [21] を用いる)。

以上の話をまとめると、問題 3.1 (A) の解答となる次の定理を得る。

定理 3.2. [21] Λ を環とし、 C を Λ -両側加群とする。

- (1) C が右 asid 加群である必要十分条件は C が次の 3 つの条件を満たすことである。

(右 ASID1) $\text{id } C_\Lambda < \infty$.

(右 ASID2) $\forall m \geq 0, \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(C^m, \text{cn}(\lambda_r)) \in \mathbb{K}^{\text{b}}(\text{proj } \Lambda)$.

(右 ASID3) $\exists n \geq 0; \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(C^n, \text{cn}(\lambda_r)) = 0$.

- (2) Λ^{op} 加群の準同型 $\tilde{\lambda}_\ell : \Lambda \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda^{\text{op}}}(C, C)$, $\tilde{\lambda}_\ell(a)(c) = ca$ を用いて $\text{D}^{\text{b}}(\text{mod } \Lambda^{\text{op}})$ の射 λ_ℓ を次のように定める。

$$\lambda_\ell : \Lambda \xrightarrow{\tilde{\lambda}_\ell} \text{Hom}_{\Lambda^{\text{op}}}(C, C) \xrightarrow{\text{nat.}} \mathbb{R}\text{Hom}_{\Lambda^{\text{op}}}(C, C)$$

このとき C が右 asid 加群である必要十分条件は C が次の 3 つの条件を満たすことである。

(左 ASID1) $\text{id}_\Lambda C < \infty$.

(左 ASID2) $\forall m \geq 0, \mathbb{R}\text{Hom}_{\Lambda^{\text{op}}}(C^m, \text{cn}(\lambda_\ell)) \in \mathbb{K}^b(\text{proj } \Lambda^{\text{op}})$.

(左 ASID3) $\exists n \geq 0; \mathbb{R}\text{Hom}_{\Lambda^{\text{op}}}(C^n, \text{cn}(\lambda_\ell)) = 0$.

(3) Λ が有限次元多元環であり, C が有限次元 Λ -両側加群であるとする. このとき A が岩永-Gorenstein 多元環である必要十分条件は, C が (左右 ASID 1) (左右 ASID 2) (左右 ASID 3) を満たすことである.

定義 3.3. C が右 asid 加群であるとき

$$\alpha_r := \min\{n \geq 0 \mid \mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(C^n, \text{cn}(\lambda_r)) = 0\}$$

を C の右 asid 数という. $\alpha_r = 0$ ということは, C が (FGR1), (FGR2) を満たすということである.

同様に左 asid 加群に対して左 asid 数 α_ℓ を定義する.

3.2 問題 (B)

本節では Happel 関手 \mathcal{H} の性質に触れながら, 問題 3.1 (B) の解答を与える. この節では簡単のために, 多くの定理において Λ の大域次元が有限であることを仮定する*2. この仮定の下では次のことが成立する.

- $\mathbb{D}^b(\text{mod } \Lambda) = \mathbb{K}^b(\text{proj } \Lambda)$ である.
- C の導来テンソル関手は $\mathbb{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ の自己関手を導く.

$$- \otimes_\Lambda^{\mathbb{L}} C : \mathbb{D}^b(\text{mod } \Lambda) \rightarrow \mathbb{D}^b(\text{mod } \Lambda)$$

- C は (左右 ASID1) と (左右 ASID2) を満たす. よって C は asid 加群である必要十分条件は, C が (左右 ASID3) を満たすことである.

まず最初に \mathcal{H} が忠実充満, または圏同値となる必要十分条件を述べる.

定理 3.3. [22] Λ を多元環とし, C を有限次元 Λ -両側加群とする. 以下の条件は同値である.

- \mathcal{H} は忠実充満である.
- $\text{Ker } \mathcal{H} = 0$ である.
- C は $\alpha_r = \alpha_\ell = 0$ を満たす asid 加群である. すなわち C は次の条件を満たす.
 - $\text{id } C_\Lambda < \infty$ かつ $\text{id } {}_\Lambda C < \infty$.
 - λ_r と λ_ℓ は同型である.

この同値条件が成り立つとき, \mathcal{H} が圏同値になる必要十分条件は $\text{gl.dim } \Lambda < \infty$ である.

上記の定理が示すように $\text{Ker } \mathcal{H} = 0$ のときは良い状況になっている. このことから $\text{Ker } \mathcal{H}$ が重要ではないかと思われる. ところで $\text{Ker } \mathcal{H}$ は一体どんな対象で構成されているのだろうか. $\text{Ker } \mathcal{Q} = \mathbb{K}^b(\text{proj}^{\mathbb{Z}} A)$ であるから

$$\text{Ker } \mathcal{H} = \mathbb{D}^b(\text{mod } \Lambda) \cap \mathbb{K}^b(\text{proj}^{\mathbb{Z}} A)$$

である. ここで $M \in \mathbb{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ が $M \in \mathbb{K}^b(\text{proj}^{\mathbb{Z}} A)$ である必要十分条件を Λ 加群の言葉で書き下すと

$$M \in \mathbb{K}^b(\text{proj}^{\mathbb{Z}} A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \geq 0, & M \otimes_\Lambda^{\mathbb{L}} C^m \in \mathbb{K}^b(\text{proj } \Lambda) \\ \exists n \geq 0; & M \otimes_\Lambda^{\mathbb{L}} C^n = 0 \end{cases}$$

となる (証明には A の次数付き射影加群の複体の構造 [21] を用いる). これより次の定理を得る.

*2 Λ の大域次元が有限であるという仮定を, Λ が岩永-Gorenstein 多元環であるという仮定に置き換えても, この節で述べる定理と同様の結果が得られる. ただし, 定理の主張に適切な修正が必要となる. 詳細は [23] を参照されたい.

定理 3.4. [21] Λ を大域次元有限な多元環とし, C を有限次元 Λ -両側加群とする. このとき次の等式が成り立つ.

$$\text{Ker } \mathcal{H} = \bigcup_{n \geq 0} \text{Ker} \left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C^n \right).$$

定理 3.4 で得た $\text{Ker } \mathcal{H}$ の記述では $\text{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ の三角部分圏の上昇列

$$\text{Ker} \left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C \right) \subset \text{Ker} \left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C^2 \right) \subset \cdots \subset \text{Ker} \left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C^n \right) \subset \cdots \quad (3.2)$$

の合併が現れている. この対として $\text{D}^b(\text{mod } \Lambda^{\text{op}})$ の部分圏の下降列

$$\text{thick}_{\Lambda} C \supset \text{thick}_{\Lambda}(C^2) \supset \cdots \supset \text{thick}_{\Lambda}(C^n) \supset \cdots \quad (3.3)$$

も考えられる. ある条件の下で, これらの上昇および下降が止まる.

補題 3.5. [23] Λ を大域次元有限な多元環とし, C を有限次元 Λ -両側加群とする.

(1) C が (右 ASID3) を満たすとき, $n \geq \alpha_r$ に対して次が成り立つ.

- (i) $\text{thick}_{\Lambda}(C^n) = \text{thick}_{\Lambda}(C^{n+1})$.
- (ii) $\text{Ker} \left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C^n \right) = \text{Ker} \left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C^{n+1} \right)$.
- (iii) $\text{Ker } \mathcal{H} = \text{Ker} \left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C^n \right)$.

(2) C が (左 ASID3) を満たすとき, $n \geq \alpha_\ell$ に対して次が成り立つ.

- (i) $\text{thick}(C^n)_{\Lambda} = \text{thick}(C^{n+1})_{\Lambda}$.
- (ii) $\text{Ker} \left(C^n \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} - \right) = \text{Ker} \left(C^{n+1} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} - \right)$.

この補題より, C に (左右 ASID3) を課して $\alpha := \max\{\alpha_\ell, \alpha_r\}$ とおくと, (3.2) が $\text{Ker} \left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C^\alpha \right)$ で止まり, (3.3) の右作用版が $\text{thick}(C^\alpha)_{\Lambda}$ で止まる. この 2 対の圏 $\text{Ker } \mathcal{H} = \text{Ker} \left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C^\alpha \right)$ と $\text{thick}(C^\alpha)_{\Lambda}$ は $\text{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ の半直交分解をなす.

定義 3.4. [5] \mathcal{D} を三角圏とする.

- \mathcal{D} の三角部分圏 \mathcal{T} に対して, その右直交圏 \mathcal{T}^\perp を

$$\mathcal{T}^\perp := \{M \in \mathcal{D} \mid \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{T}, M) = 0\}$$

と定める.

- \mathcal{D} の三角部分圏 \mathcal{T}, \mathcal{U} について次の条件が成り立つとき, \mathcal{D} は半直交分解 $\mathcal{D} = \mathcal{T} \perp \mathcal{U}$ をもつという.

- (1) $\mathcal{T}^\perp = \mathcal{U}$.
- (2) $\forall M \in \mathcal{D}, \exists$ 三角 $T \rightarrow M \rightarrow U \rightarrow T[1]; T \in \mathcal{T}$ かつ $U \in \mathcal{U}$.

このとき \mathcal{T} を \mathcal{D} の右許容部分圏, \mathcal{U} を \mathcal{D} の左許容部分圏という.

- \mathcal{D} の三角部分圏 \mathcal{T} が右許容部分圏かつ左許容部分圏であるとき, \mathcal{T} を \mathcal{D} の許容部分圏という.

定理 3.6. [23] Λ を大域次元有限な多元環とし, C を有限次元 asid 加群とする. また $\alpha = \max\{\alpha_\ell, \alpha_r\}$ とおき, $\text{T} := \text{thick } C^\alpha$ とする. このとき T は $\text{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ の許容部分圏であり, 特に半直交分解

$$\text{D}^b(\text{mod } \Lambda) = \text{T} \perp \text{Ker } \mathcal{H}$$

が存在する. ここで $\text{T}^\perp = \text{Ker } \mathcal{H}$ である. さらに半直交分解は次の性質を満たす.

(1) $- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C$ は T に圏同値として作用する. つまり $- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C$ の T への制限は圏同値

$$\left(- \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda} C \right) \Big|_{\text{T}} : \text{T} \xrightarrow{\simeq} \text{T}$$

を引き起こす.

(2) $-\otimes_{\Lambda}^{\mathbb{L}} C$ は T^{\perp} に冪零に作用する. つまり $-\otimes_{\Lambda}^{\mathbb{L}} C$ の T^{\perp} への制限は自己関手

$$(-\otimes_{\Lambda}^{\mathbb{L}} C)|_{T^{\perp}} : T^{\perp} \rightarrow T^{\perp}$$

を引き起こし, また $(T^{\perp}) \otimes_{\Lambda}^{\mathbb{L}} C^{\alpha} = 0$ が成り立つ.

この定理の半直交分解から想像されるように次の定理が成り立つ.

定理 3.7. [23] Λ を大域次元有限な多元環とし, C を有限次元 asid 加群とする. また $\alpha = \max\{\alpha_{\ell}, \alpha_r\}$ とおき, $T := \text{thick } C^{\alpha}$ とする. このとき $\mathcal{H} : D^b(\text{mod } \Lambda) \rightarrow \underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ の制限により次の三角圏同値を得る.

$$\mathcal{H}|_T : T \xrightarrow{\simeq} \underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$$

従って安定圏 $\underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A$ は導来圏 $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の許容部分圏として実現される. また次の可換図式が存在する.

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\mathcal{H}|_T} & \underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A \\ -\otimes_{\Lambda}^{\mathbb{L}} C[1] \downarrow & & \downarrow (1) \\ T & \xrightarrow{\mathcal{H}|_T} & \underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A \end{array}$$

以上で問題 3.1 (B) の解答が与えられた.

3.3 岩永-Gorenstein 性と三角圏構造 (再び問題 (A))

定理 3.6 の中で A の岩永-Gorenstein 性が $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の半直交分解を導くことを述べた. 逆に $D^b(\text{mod } \Lambda)$ のある半直交分解の存在が A の岩永-Gorenstein 性を導く.

定理 3.8. [23] Λ を大域次元有限な多元環とする. 有限次元 Λ -両側加群 C に対して, 次の条件は同値である.

- (a) C は asid 加群である.
- (b) $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の許容部分圏 T で, 以下を満たすものが存在する.
 - (1) $-\otimes_{\Lambda}^{\mathbb{L}} C$ は T に同型に作用する.
 - (2) $-\otimes_{\Lambda}^{\mathbb{L}} C$ は T^{\perp} に冪零に作用する.

これらの条件が成立するとき, $T = \text{thick}(C^{\alpha})_{\Lambda}$ が成り立つ.

この定理を応用すると, ある岩永-Gorenstein 環のクラスのカテゴリが可能となる.

例 3.2. 次のクイバー Q の道代数を $\Lambda = KQ$ とおく.

$$Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$$

このとき $\text{gl.dim } \Lambda = 1$ である. 以下では Λ の asid 加群を分類し, Λ の自明拡大環として構成される岩永-Gorenstein 環の分類を与えよう. asid 加群の分類は 2 つの段階からなる.

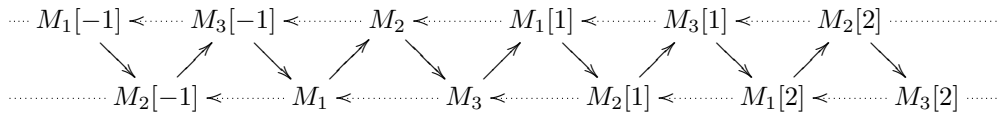
Step 1. $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の許容部分圏 T を分類する. Q の頂点 1, 2 に対応する Λ の原始冪等元をそれぞれ e_1, e_2 とし, Λ 加群 M を次のクイバー表現で表す.

$$Me_1 \xrightarrow{\alpha} Me_2$$

直既約 Λ 加群の同型類の完全代表系は

$$M_1 = (0 \rightarrow K), \quad M_2 = (K \xrightarrow{1} K), \quad M_3 = (K \rightarrow 0)$$

である. $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の Auslander-Reiten クイバーは次で与えられる.



$D^b(\text{mod } \Lambda)$ の thick 部分圏は分類されており ([6, Theorem 5.1], [15, Theorem 1.1]), それを用いると許容部分圏 \mathcal{T} は次の5つであることがわかる.

	\mathcal{T}	\mathcal{T}^\perp
(i)	$D^b(\text{mod } \Lambda)$	0
(ii)	thick M_1	thick M_3
(iii)	thick M_2	thick M_1
(iv)	thick M_3	thick M_2
(v)	0	$D^b(\text{mod } \Lambda)$

Step 2. $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の許容部分圏 \mathcal{T} に対して, 定理 3.8 (b) の (1)(2) を満たす Λ -両側加群 C を分類する. Λ -両側加群 C を次のクイバー表現で表す.

$$\begin{array}{ccc}
 e_1 C e_1 & \xrightarrow{\alpha} & e_1 C e_2 \\
 \alpha \uparrow & & \uparrow \alpha \\
 e_2 C e_1 & \xrightarrow{\alpha} & e_2 C e_2
 \end{array}$$

(i) から (v) の許容部分圏に対して, C の分類は以下で与えられる. 詳細な計算方法は [23] を参照されたい.

(i)	(1) $\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & K \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & K \end{array}$	(2) $\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ K & \longrightarrow & K \end{array}$	
(ii)	(1) $\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & K \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & K \end{array}$		
(iii)	(1) $\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & K \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$		
(iv)	(1) $\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ K & \longrightarrow & 0 \end{array}$		
(v)	(1) $\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & K^n \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$	(2) $\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ K^n & \longrightarrow & K^n \end{array}$	(3) $\begin{array}{ccc} K^n & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ K^n & \longrightarrow & 0 \end{array}$

上に挙げた Λ -両側加群のリストが asid 加群 C のリストである. これを元に Λ の C による自明拡大環として構成される岩永-Gorenstein 多元環 $A = \Lambda \oplus C$ のリストが得られる.

(i) A のクイバーと関係式は以下である. このとき $\underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} A \simeq D^b(\text{mod } \Lambda)$ である.

$$(1) \quad \beta \begin{array}{c} \curvearrowright \\ 1 \end{array} \xrightarrow{\alpha} 2 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \gamma \end{array} \quad \beta\alpha = \alpha\gamma, \beta^2 = 0, \gamma^2 = 0. \quad (2) \quad 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \quad \alpha\beta\alpha = 0, \beta\alpha\beta = 0.$$

(ii) A のクイバーと関係式は以下である. このとき $\underline{\mathbf{CM}}^{\mathbb{Z}} A \simeq \text{thick } M_1 \simeq \mathbf{D}^b(\text{mod } K)$ である.

$$(1) \quad 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \begin{array}{c} \curvearrowright \beta \\ \curvearrowleft \end{array} \quad \beta^2 = 0.$$

(iii) A のクイバーと関係式は以下である. このとき $\underline{\mathbf{CM}}^{\mathbb{Z}} A \simeq \text{thick } M_2 \simeq \mathbf{D}^b(\text{mod } K)$ である.

$$(1) \quad \beta \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \quad \beta^2 = 0.$$

(iv) A のクイバーと関係式は以下である. このとき $\underline{\mathbf{CM}}^{\mathbb{Z}} A \simeq \text{thick } M_3 \simeq \mathbf{D}^b(\text{mod } K)$ である.

$$(1) \quad \beta \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \quad \beta^2 = 0, \beta\alpha = 0.$$

(v) A のクイバーと関係式は以下である. このとき $\text{gl.dim } A < \infty$ であり, $\underline{\mathbf{CM}}^{\mathbb{Z}} A \simeq 0$ である.

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 \\ & \searrow \beta_1 & \nearrow \\ & \vdots & \\ & \searrow \beta_n & \nearrow \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 \\ & \searrow \beta_1 & \nearrow \\ & \vdots & \\ & \searrow \beta_n & \nearrow \end{array} \quad \alpha\beta_i = 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 \\ & \searrow \beta_1 & \nearrow \\ & \vdots & \\ & \searrow \beta_n & \nearrow \end{array} \quad \beta_i\alpha = 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

謝辞. 第 64 回代数学シンポジウムにて, 講演の機会を頂きましたことに感謝いたします.

参考文献

- [1] 岩永恭雄, 佐藤 眞久, 環と加群のホモロジー代数的理論, 日本評論社, 2002.
- [2] L. Angeleri Hügel, D. Happel and H. Krause, *Handbook of tilting theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 332. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [3] I. Assem, D. Simson, A Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, Techniques of representation theory. London Mathematical Society Student Texts, 65. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [4] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 36. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [5] A. I. Bondal and M. M. Kapranov, *Representable functors, Serre functors, and mutations* *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 53 (1989), no. 6, 1183–1205, 1337; translation in *Math. USSR-Izv.* 35 (1990), no. 3, 519–541.
- [6] K. Brüning, *Thick subcategories of the derived category of a hereditary algebra*, *Homology Homotopy Appl.* 9 (2007), no. 2, 165–176.
- [7] R-O. Buchweitz, *Maximal Cohen-Macaulay Modules and Tate-Cohomology Over Gorenstein Rings*, unpublished manuscript available at <https://tspace.library.utoronto.ca/handle/1807/16682>
- [8] X-W. Chen, *Graded self-injective algebras "are" trivial extensions*, *J. Algebra* 322 (2009), no. 7, 2601–2606.
- [9] R. M. Fossum, P. A. Griffith, I. Reiten, *Trivial extensions of abelian categories*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 456. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.
- [10] H. B. Foxby, *Gorenstein modules and related modules*, *Math. Scand.* 31 (1972), 267–284 (1973).
- [11] R. Gordon and E. L. Green, *Graded Artin algebras*, *J. Algebra* 76 (1982), no. 1, 111–137.
- [12] R. Gordon and E. L. Green, *Representation theory of graded Artin algebras*, *J. Algebra* 76 (1982), no. 1,

138–152.

- [13] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 119. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [14] D. Happel, *On Gorenstein algebras*, Representation theory of finite groups and finite-dimensional algebras (Bielefeld, 1991), 389–404, Progr. Math., 95, Birkhäuser, Basel, 1991.
- [15] C. Ingalls and H. Thomas, *Noncrossing partitions and representations of quivers*, Compos. Math. 145 (2009), no. 6, 1533–1562.
- [16] Y. Iwanaga, *On rings with finite self-injective dimension*, Comm. Algebra 7 (1979), no. 4, 393–414.
- [17] O. Iyama, *Tilting Cohen-Macaulay representations*, to appear in the ICM 2018 proceedings.
- [18] B. Keller, *Deriving DG categories*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 27 (1994), no. 1, 63–102.
- [19] H. Krause, *Derived categories, resolutions, and Brown representability*, Interactions between homotopy theory and algebra, 101–139, Contemp. Math., 436, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [20] M. Lu and B. Zhu, *Singularity categories of Gorenstein monomial algebras*, arXiv:1708.00311.
- [21] H. Minamoto and K. Yamaura, *Happel’s functor and homologically well-graded Iwanaga-Gorenstein algebras*, arXiv:1811.08036.
- [22] H. Minamoto and K. Yamaura, *Homological dimension formulas for trivial extension algebras*, arXiv:1710.01469.
- [23] H. Minamoto and K. Yamaura, *On finitely graded Iwanaga-Gorenstein algebras and the stable categories of their (graded) Cohen-Macaulay modules*, arXiv:1812.03746.
- [24] D. Orlov, *Triangulated categories of singularities and D-branes in Landau-Ginzburg models*, Tr. Mat. Inst. Steklova 246 (2004), Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh., 240–262
- [25] D. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities* Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. II, 503–531, Progr. Math., 270, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009.
- [26] I. Reiten, *The converse to a theorem of Sharp on Gorenstein modules*, Proc. Amer. Math. Soc. 32 (1972), 417–420.
- [27] J. Rickard, *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc. (2) 39 (1989), no. 3, 436–456.
- [28] J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence*, J. Pure Appl. Algebra 61 (1989), no. 3, 303–317.
- [29] A. Skowroński, *Selfinjective algebras: finite and tame type*, Trends in representation theory of algebras and related topics, 169–238
- [30] A. Skowroński and K. Yamagata, *Frobenius algebras. II. Tilted and Hochschild extension algebras*, EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2017.
- [31] H. Tachikawa, *Representations of trivial extensions of hereditary algebras*, Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979), pp. 579–599, Lecture Notes in Math., 832, Springer, Berlin, 1980.
- [32] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [33] K. Yamaura, *Realizing stable categories as derived categories*, Adv. Math. 248 (2013), 784–819.

山梨大学大学院総合研究部

〒400-8510 山梨県甲府市武田 4-3-11

E-mail address : kyamaura@yamanashi.ac.jp