指数型不定方程式 $a^x + b^y = c^z$ と $x^2 + b^m = c^n$ の最近の進展について

寺井 伸浩 (大分大学 理工学部)

概 要

本稿は，2019 年 9 月に東北大学に於て開催された第 64 回代数学シンポジウムにおける筆者の講演の発表資料に加筆，修正を行ったものです．指数型不定方程式 $a^x + b^y = c^z$ と $x^2 + b^m = c^n$ の最近の進展について紹介する．講演の機会を与えてくださった日本大学の安福悠さんをはじめシンポジウムの関係者皆様に深く感謝致します.

1 序論

整数係数の代数方程式の整数解や有理数解を求めることを, 不定方程式またはディオファンタス方程式を解くという．不定方程式・素数分布等を主に研究する分野である整数論は数学の中では幾何学と同様古代ギリシャ時代以来の長い歴史を持つ．$a^2 + b^2 = c^2$ を満たす正の整数 (a, b, c) はピタゴラス数と呼ばれるが, 無数に存在しパラメータ表示を持つことはよく知られている．Fermat はバシェ版のディオファントス著作集の余白に,「n が 3 以上の正の整数のとき, 不定方程式 $x^n + y^n = z^n$ は正の整数解 x, y, z を持たない」の「真に驚くべき証明を発見したが，その証明を書くにはこの余白は狭すぎる (Cujes rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet)」ということを記した (1637 年頃)．1994 年, Wiles はついにこの Fermat 予想を証明した.

一方, ポーランドの有名な数学者 Sierpiński はピタゴラス数 $(3, 4, 5)$ に対し不定方程式 $3^x + 4^y = 5^z$ の正の整数解は $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ だけであることを示した．その弟子 Jeśmanowicz はピタゴラス数 $(5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61)$ に対し同様の不定方程式を考え同じことを示し，一般にピタゴラス数 (a, b, c) に対し不定方程式 $a^x + b^y = c^z$ の正の整数解は $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ だけであることを予想した.

本稿では, Fermat 予想や Jeśmanowicz 予想と関係する,

(i) 指数型不定方程式 $a^x + b^y = c^z$
(ii) 一般化された Ramanujan-Nagell 方程式 $x^2 + b^m = c^n$
(iii) 一般化された Fermat 方程式 $x^p + y^q = z^r$

について最近の結果を報告する．特に, 不定方程式 (i),(ii) に関する筆者のいくつかの予想を述べ, いろいろな場合に予想が正しいことを確かめる.

2　ピタゴラス数から拡がる指数型不定方程式の予想

2.1　ピタゴラス数から拡がる指数型不定方程式の予想

ピタゴラス数から拡がる次の指数型不定方程式に関する 3 つの予想を紹介する.

(1) **Fermat 予想**
$a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow x^n + y^n = z^n$　　ここで $n \geq 3$

17 世紀に Fermat により予想され, 1995 年に A.Wiles[W] により解決される.

(2) **Jeśmanowicz 予想**
$a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow a^x + b^y = c^z$

ポーランドの数学者 Jeśmanowicz[J] により 1956 年に予想されたが未解決である.

(3) **私の予想**
$a^x + b^y = c^z$　　ここで $a^p + b^q = c^r$
$x^2 + b^m = c^n$　　ここで $a^2 + b^2 = c^2$

これら 2 つの予想は Jeśmanowicz 予想の類似として 1993 年, 1994 年にそれぞれ著者 [Te1], [Te2], [Te3], により提起されたが未解決である.

2.2　Jeśmanowicz 予想

予想 1. (Jeśmanowicz[J], 1956) a, b, c を $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす固定された互いに素な正の整数とする. このとき, 指数型不定方程式

$$a^x + b^y = c^z$$

は, ただ一つの正の整数解 $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ をもつ.

ピタゴラス数のパラメーター表示により, 指数型不定方程式

$$(m^2 - n^2)^x + (2mn)^y = (m^2 + n^2)^z$$

を考えればよい. ここで, m, n は $m > n$, $m \not\equiv n \pmod 2$ である互いに素な正の整数とする. 次の場合に予想 1 が成り立つことが示されている.

- $n = 1$ (Lu[Lu], 1959), $m - n = 1$ (Demjanenko[De], 1965)
- $a \equiv \pm 1 \pmod b$, $c \equiv 1 \pmod b$ (Miyazaki[Mi3], 2013)
- $n = 2$ (Terai[Te5], 2014), $n \equiv 2 \pmod 4$ and $n < 100$ (Miyazaki-Terai[MT2], 2015)

最小のピタゴラス数である $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ に対し予想 1 が成り立つことを示した, 次の Sierpiński の結果の証明を与える. 証明はとても初等的であるが, まず x, z が偶数であることを示し, よく知られた指数型不定方程式に帰着させる点は, 一般の場合にも応用できる.

定理 1. (Sierpiński[S],1956) 指数型不定方程式

$$3^x + 4^y = 5^z$$

は, ただ一つの正の整数解 $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ をもつ.

Proof. 方程式を modulo 4 で考えると $(-1)^x \equiv 1 \pmod 4$ である．よって x は偶数である．また, 方程式を modulo 3 で考えると $1 \equiv (-1)^z \pmod 3$ である．よって z は偶数である．

いま, $x = 2X,\ z = 2Z$ とおくと, 方程式は

$$2^{2y} = (5^Z + 3^X)(5^Z - 3^X)$$

となる．右辺の 2 つの因数の最大公約数は 2 であるので,

$$\begin{cases} 5^Z + 3^X &= 2^{2y-1} \\ 5^Z - 3^X &= 2 \end{cases}$$

を得る．これら 2 式を加えると $2^{2y-2} - 1 = 3^X$ となる．$y \geq 3$ のとき modulo 8 で考えると $-1 \equiv 3^x \pmod 8$ であるが, これは不可能！したがって, $y = 2$, $x = 2$, $z = 2$ を得る． □

次に, $n = 2$ の場合に対する Jeśmanowicz 予想の証明を与える.

定理 2. (Terai[Te5], 2014) m を 2 より大きい奇数とする．このとき, 指数型不定方程式

$$(m^2 - 4)^x + (4m)^y = (m^2 + 4)^z$$

は, ただ一つの正の整数解 $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ をもつ.

Proof. 証明は $y = 1$ と $y > 1$ の 2 つの場合に分かれる.

Case 1: $y = 1$.

Baker 理論 (2 つの対数の 1 次形式 $\Lambda = b_2 \log \alpha_2 - b_1 \log \alpha_1$ の下からの評価) を用いて示す.

方程式は次の Pillai 方程式に帰着される:

$$c^z - a^x = b \qquad \text{(P)}$$

ここで $a = m^2 - 4,\ \ b = 4m,\ \ c = m^2 + 4$ である.

補題 1. (x の上界と下界)

(1) $x < 2521 \log c$

(2) $x > \dfrac{m^2 - 4}{8} \log c$

Proof. 2 つの linear forms (1 次形式) を考える:

$$\Lambda = z \log c - x \log a \quad (> 0), \qquad \Lambda_0 = \log c - \log a \quad (> 0)$$

(1) 不等式 $\log(1 + t) < t\ (t > 0)$ を用いると,

$$0 < \Lambda = \log\left(\frac{c^z}{a^x}\right) = \log\left(1 + \frac{b}{a^x}\right) < \frac{b}{a^x},$$

よって

$$\log \Lambda < \log b - x \log a$$

が成り立つ. Λ の下からの評価に Baker 理論を用い, 上と下からの 2 つの評価を組み合わせることにより $x < 2521 \log c$ を得る.

(2) $x\Lambda_0 - \Lambda = (x-z)\log c \geq \log c$ より,

$$x \geq \frac{\log c}{\Lambda_0} + \frac{\Lambda}{\Lambda_0} > \frac{\log c}{\Lambda_0} > \frac{m^2-4}{8}\log c$$

を得る. □

補題 1 の (1),(2) より $m^2 - 4 < 2521 \cdot 8$ が成り立つので, $m \leq 141$ を得る. 最後に, $3 \leq m \leq 141$ の範囲で不定方程式 (P) が $z < x < 2521 \log(m^2+4)$ を満たす正の整数解 x, z を持たないことを計算機 (Magma) により確かめればよい.

Case 2: $y > 1$. 平方剰余の相互法則を用いて, 次を証明できる.

補題 2. (x, y, z の偶奇性)

(1) x, z は偶数である.

(2) $m \not\equiv 1 \pmod 8$ ならば y は偶数である.

x, z は偶数なので, $x = 2X$, $z = 2Z$ とおく. このとき, 方程式は次に帰着される:

$$m_1^y + 2^{2y-2} m_2^y = (m^2+4)^Z. \qquad \text{(F)}$$

ここで m_1, m_2 は $m = m_1 m_2$ を満たす奇数である. 一般化された Fermat 方程式に関するよく知られた次の結果を用いる.

補題 3. (Bennett-Skinner[BS], 2005)
n を 7 以上の素数とする. このとき,

$$X^n + 2^\alpha Y^n = Z^2$$

は 2 つづ互いに素な 0 でない整数解 X, Y, Z を持たない. ただし, $XY \neq 1$, $\alpha \geq 2$ とする.

$y = 2$ ならば, 容易に $x = 2$, $z = 2$ を得る. $y \geq 3$ ならば, 補題 3 より Z は偶数を示せば十分である. ($y \equiv 0 \pmod 3$, $y \equiv 0 \pmod 5$ の場合は個別に扱う.) (F) より $m_1^y \equiv 5^Z \pmod 8$ である. $m_1 \not\equiv 5 \pmod 8$ ならば Z は偶数となる. また, 補題 2 より $m \not\equiv 1 \pmod 8$ ならば y は偶数なので, Z は偶数である. したがって,

$$m_1 \equiv 5 \pmod 8 \text{ かつ } m \equiv 1 \pmod 8$$

としてよい.

$m_1 \equiv 5 \pmod 8$ のとき, (F) より $y \equiv Z \pmod 2$ を得る. $m \equiv 1 \pmod 8$, $m_1 \equiv 5 \pmod 8$, $m_1 | m$ なので平方剰余相互法則を用いると,

$$\left(\frac{m^2+4}{m+2}\right) = \left(\frac{2}{m+2}\right) = -1, \quad \left(\frac{m_1}{m+2}\right) = -1,$$

となる. このとき, (F) より $(m^2+4)^Z \equiv 2m_1^y \pmod{m+2}$ となる. よって $(-1)^Z = (-1)^{y+1}$ となり $y \not\equiv Z \pmod 2$ を示す. しかし, これは $y \equiv Z \pmod 2$ に矛盾する. □

2.3 一般化された Jeśmanowicz 予想

予想 2. (一般化された Jeśmanowicz 予想; 寺井予想 [Te2],[Te3], 1994)
a, b, c を $a^p + b^q = c^r$ (ここで $p, q, r \geq 2$) を満たす固定された互いに素な正の整数とする. このとき, 下記の 3 つの場合を除けば, 不定方程式

$$a^x + b^y = c^z$$

は, ただ一つの正の整数解 $(x, y, z) = (p, q, r)$ をもつ. これら 3 つの場合 $(a < b)$ は, 次の解だけをもつ.

(i) $(a, b, c) = (2, 7, 3)$; $(x, y, z) = (1, 1, 2), (5, 2, 4)$,

(ii) $(a, b, c) = (2, 2^k - 1, 2^k + 1)$; $(x, y, z) = (1, 1, 1), (k + 2, 2, 2)$,

(iii) $(a, b, c) = (1, 2, 3)$; $(x, y, z) = (m, 1, 1), (n, 3, 2)$.

ここで, $m,\ n,\ k \geq 2$ は正の整数である.

"寺井予想"は (ある条件の下で) いろいろな場合に正しいことが確かめられたが, 未解決である. (cf. Terai[Te2], [Te3], Cao[Ca], Miyazaki[Mi1], [Mi2], Le[Le4].) 主に $(p, q, r) = (2, 2, r)$, $(p, 2, 2)$ の場合の研究が多い.

2.4 一般化された Fermat 方程式

$p,\ q,\ r$ を 2 以上の正の整数とし,

$$S = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$$

とおく.

このとき, 一般化された Fermat 方程式

$$x^p + y^q = z^r, \quad \gcd(x, y, z) = 1 \qquad \text{(GF)}$$

の正の整数解 x, y, z を考える.

$S = 1 \Longleftrightarrow (p, q, r) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$ のとき,(GF) は解なし.
$S > 1 \Longleftrightarrow (p, q, r) = (2, 2, r),\ (2, 3, 3),\ (2, 3, 4),\ (2, 3, 5)$ のとき, (GF) は無数の解をもつ.
(パラメータ表示の解をもつ.)

一方, $S < 1$ の場合は次の予想が知られている.

予想 3. (一般化された Fermat 予想)

(1) $S < 1$ ならば, 次の解を除けば, (GF) は正の整数解 x, y, z をもたない:

$1^n + 2^3 = 3^2\ (n > 6)$, $2^5 + 7^2 = 3^4$, $7^3 + 13^2 = 2^9$,

$2^7 + 17^3 = 71^2$, $3^5 + 11^4 = 122^2$, $17^7 + 76271^3 = 21063928^2$,

$1414^3 + 2213459^2 = 65^7$, $9262^3 + 15312283^2 = 113^7$,

$43^8 + 96222^3 = 30042907^2$, $33^8 + 1549034^2 = 15613^3$.

(2) (Beal 予想) $p,\ q,\ r$ を 3 以上の正の整数とする．このとき, (GF) は正の整数解 x, y, z をもたない．

Andrew Beal は米国の銀行家 (Beal 銀行の創業者), アマチュア数学者である．Beal 銀行のホームページで Beal 予想が紹介されている．懸賞金は 1 million(ドル) である．$\gcd(x, y, z) > 1$ の場合は, 不定方程式 (GF) は解をもつことがある．

$$\begin{aligned}
&2^n + 2^n = 2^{n+1}, \quad 3^3 + 6^3 = 3^5, \quad 7^3 + 7^4 = 14^3 \\
&\left((1+k^n)^{n-2}\right)^n + \left(k(1+k^n)^{n-2}\right)^n = \left((1+k^n)^{n-1}\right)^{n-1} \\
&(1+k^n)^n + (k(1+k^n))^n = (1+k^n)^{n+1}
\end{aligned}$$

予想 3 について, 次の結果が知られている．

定理 3. (一般化された Fermat 方程式)
一般化された Fermat 方程式 (GF) は互いに素な正の整数解 x, y, z をもたない．

- (Wiles[W],1995) $x^n + y^n = z^n$ $(n \geq 3)$
- (Darmon-Merel[DM]) $x^n + y^n = z^2$ $(n \geq 4)$, $x^n + y^n = z^3$ $(n \geq 3)$
- (Bennett[Be]) $x^{2n} + y^{2n} = z^5$ $(n \geq 2)$
- (Bennett-Chen-Dahmen-Yazdan[BCDY]) $x^3 + y^3 = z^{2n}$ $(n \geq 2)$
- (Ellenberg[E]) $x^2 + y^4 = z^n$ $(n \geq 4)$

3 指数型不定方程式 $a^x + b^y = c^z$

3.1 指数型不定方程式 $a^x + b^y = c^z$ に関する一般的結果

定理 4. (Gelfond-Mahler) a, b, c を 1 より大きい固定された互いに素な正の整数とする．このとき, 指数型不定方程式

$$a^x + b^y = c^z \tag{3.1}$$

は, 高々有限個の正の整数解 x, y, z をもつ．

a, b, c の多くの場合は, 指数型不定方程式 (3.1) は解 x, y, z をもたない．

- $5^x + 9^y = 4^z$: 解なし
- $2^x + 5^y = 7^z$: $(x, y, z) = (1, 1, 1)$
- $2^x + 5^y = 3^z$: $(x, y, z) = (1, 2, 3), (2, 1, 2)$
- $3^x + 5^y = 2^z$: $(x, y, z) = (1, 1, 3), (1, 3, 7), (3, 1, 5)$ $\longleftarrow$ 知られている最大の個数は 3 個

指数型不定方程式 (3.1) の解の個数と大きさについては, 次がよく知られている．(1) は 2 次体の理論, (2) は Baker 理論を用いてそれぞれ示される．

定理 5. (解の個数と大きさ) $a,\ b,\ c$ を 1 より大きい互いに素な固定された正の整数とする．このとき, 指数型不定方程式 (3.1) の正の整数解 (x, y, z) を考える．

(1) (Scott-Styer[SS], 2016) c が奇数ならば, 高々2 つの解をもつ．

(2) (Le[Le5], 2015) $\max\{x,y,z\} < 155000(\log m)^3$, ここで $m = \max\{a,b,c\}$.

指数型不定方程式

$$2^x + (2^k-1)^y = (2^k+1)^z$$

はちょうど 2 つの解 $(x,y,z) = (1,1,1),(k+2,2,2)$ をもつ.

3.2 指数型不定方程式 $a^x + (a+b)^y = b^z$

予想 4. (Miyazaki-Terai[MT3], 2019) a, b を互いに素な 1 より大きい正の整数とする. そのとき, 指数型不定方程式

$$a^x + (a+b)^y = b^z$$

は, 次の 7 つの場合を除けば, 正の整数解 x,y,z をもたない.

$$(x,y,z) = \begin{cases} (2,1,2) & \text{if } b = a+1 \text{ with } a > 2, \\ (1,2,3),(2,1,2) & \text{if } (a,b) = (2,3), \\ (1,1,j+1) & \text{if } (a,b) = (2^j-1,2) \text{ with } j > 2, \\ (1,1,3),(1,3,7),(3,1,5) & \text{if } (a,b) = (3,2), \\ (5,2,3) & \text{if } (a,b) = (3,7), \\ (2,1,5) & \text{if } (a,b) = (5,2), \\ (2,1,7) & \text{if } (a,b) = (279,5). \end{cases}$$

Magma により, 上の予想 4 が $\max\{a,b\} \leqslant 10000$, $\max\{x,y\} \leqslant 20$ の範囲で成り立つことを確かめた.

定理 6. (Miyazaki-Terai[MT3], 2019) 予想 4 は次の各場合に正しい.

(i) 7 つの exceptional cases

(ii) $a = 2$ または $a = 4^k$

(iii) $b = 2^k$

(iv) $a + b = 2^k$

ただし k は正の整数とする.

Proof. (ii) の場合だけを示す. 証明には次の 2 つの補題を用いる.

補題 4. (Cohn[Co], Le[Le3]) 不定方程式

$$x^2 + 2^m = y^n, \quad \gcd(x,y) = 1,\ n \geq 3$$

のすべての正の整数解は $(x,y,m,n) = (5,3,1,3),(7,3,5,4),(11,5,2,3)$ で与えられる.

補題 5. (Ivorra[I]) 不定方程式

$$x^2 - 2^m = y^n, \quad x > 0,\ |y| > 1,\ \gcd(x, y) = 1,\ m \geq 2,\ n \geq 3$$

のすべての整数解は $(x, y, m, n) = (13, -7, 9, 3), (71, 17, 7, 3)$ で与えられる.

Case 1: $a = 2$. そのとき, 次を考える.

$$2^x + (2 + b)^y = b^z. \tag{3.2}$$

(x, y, z) を (3.2) の解とする. b は奇数なので, y, z がともに奇数ならば, (3.2) を modulo 8 で考えることにより $2^x + 2 \equiv 0 \pmod 8$ を得る. しかし, この合同式は成り立たない. よって, y または z は偶数である.

まず, y を偶数とする. $b^z > (2 + b)^y \geq (2 + b)^2 > b^2$ なので $z > 2$ である. 補題 4 より, $(b, x, y, z) = (3, 1, 2, 3)$ を得る.

次に, z を偶数とする. 補題 5 より, $y = 1$ を得る. 一方, (3.2) を modulo $(b + 1)$ で考えると, $(b + 1)$ が 2^x を割り切ることが分かる. これより, $b = 2^t - 1$ とおける. ここで, t は $2 \leq t \leq x$ となる正の整数である.

再び, (3.2) を modulo 2^{t+1} で考えると, $2^x + 2^t + 1 \equiv 1 \pmod{2^{t+1}}$, つまり, $2^x \equiv 2^t \pmod{2^{t+1}}$ が従う. よって $x = t$ を得る. このとき, (3.2) は $2^{x+1} + 1 = (2^x - 1)^z$ となる. これより, 簡単に, $z = 2$, $x = 2$ が導かれる.

Case 2: $a = 4^k$. そのとき, 次を考える.

$$4^{kx} + (4^k + b)^y = b^z. \tag{3.3}$$

$b \equiv 0, 1 \pmod 3$ とする. このとき, (3.3) を modulo 3 で考えると, $2 \equiv 0 \pmod 3$ または $2^y \equiv 0 \pmod 3$ となる. しかし, どちらも成り立たない. よって, $b \equiv 2 \pmod 3$ としてよい. 再び, (3.3) を modulo 3 で考えると, $2^z \equiv 1 \pmod 3$ となり, z は偶数である. $z = 2Z$ とおく. 補題 5 より, $y = 1$ が従う. これより, (3.3) は

$$4^k + b = (b^Z + 2^{kx})(b^Z - 2^{kx}).$$

と表せる. 特に, $b + 2^{2k} \geq b^Z + 2^{kx}$, よって $x = 1$ または $(x, Z) = (2, 1)$ を得る. $x = 1$ ならば, (3.3) は $2 \cdot 4^k + b = b^{2Z}$ となるが, これは $b(> 1)$ が奇数ということに矛盾する. $(x, Z) = (2, 1)$ ならば, $b - 2^{2k} = 1$ となり, $b = a + 1$ を得る. □

3.3 指数型不定方程式 $(pm^2 + 1)^x + (qm^2 - 1)^y = (rm)^z$ ここで $p + q = r^2$

Jeśmanowicz 予想は指数型不定方程式

$$a^x + b^y = c^z, \quad a^2 + b^2 = c^2$$

の正の整数解 x, y, z を考えるものだが, 類似として指数型不定方程式

$$a^x + b^y = c^z, \quad a + b = c^2$$

を考えることができる. ここでは, これの特別な場合として, 次の指数型不定方程式を扱う：

$$(pm^2 + 1)^x + (qm^2 - 1)^y = (rm)^z, \quad p + q = r^2 \tag{3.4}$$

p, q, r, m に関するいくつかの例外を除けば, (3.4) は高々一つの正の整数解 x, y, z をもつことが予想されるが, (ある条件の下で) すでに解かれている方程式は次の通りである:

- (Terai[Te4], 2012; Bertók[Ber], Su-Li[SL]) $(4m^2+1)^x + (5m^2-1)^y = (3m)^z$
- (Miyazaki-Terai[MT1], 2014) $(m^2+1)^x + (qm^2-1)^y = (rm)^z,\ 1+q=r^2$
- (Terai-Hibino[TH1], 2015) $(12m^2+1)^x + (13m^2-1)^y = (5m)^z,$
- (Terai-Hibino[TH2], 2017) $(3pm^2-1)^x + (p(p-3)m^2+1)^y = (pm)^z$
- (Fu-Yang[FY], 2017) $(pm^2+1)^x + (qm^2-1)^y = (rm)^z, \quad r|m,$
- (Pan[P], 2017) $(pm^2+1)^x + (qm^2-1)^y = (rm)^z, \quad m \equiv \pm 1 \pmod r,$
- (Murat[Mu], 2018) $(18m^2+1)^x + (7m^2-1)^y = (5m)^z,$
- (Kizildere et al.[KMS], 2018) $((q+1)m^2+1)^x + (qm^2-1)^y = (rm)^z,\ 2q+1=r^2.$

上の指数型不定方程式は, 初等的方法 (合同式・平方剰余の相互法則・2 次体) や Baker 理論 (Laurent[La] による, 2 つの対数の 1 次形式 $\Lambda = b_2 \log \alpha_2 - b_1 \log \alpha_1$ の絶対値に対する下からの評価) を組み合わせて解くことができる. これらに関して, Jeśmanowicz 予想と類似の予想が成り立つ:

予想 5. ($a+b=c^2$ の場合の $a^x+b^y=c^z$ に関する予想)
a, b, c を 1 より大きい $a+b=c^2$ を満たす固定された互いに素な正の整数とする. そのとき, 不定方程式

$$a^x + b^y = c^z$$

は, 下記 2 つの場合を除けば, 正の整数解 $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ だけをもつ. これら 2 つの場合 $(a < b)$ は, 次の解だけをもつ.

$$\begin{aligned} 2^x + 7^y = 3^z; &\qquad (x, y, z) = (1, 1, 2),\ (5, 2, 4) \\ 3^x + 13^y = 4^z; &\qquad (x, y, z) = (1, 1, 2),\ (5, 1, 4). \end{aligned}$$

4 一般化された Ramanujan–Nagell 方程式 $x^2 + b^m = c^n$

4.1 Ramanujan–Nagell 方程式 $x^2 + 7 = 2^n$

次の定理はインドの天才数学者 Ramanujan[R] が 1913 年に予想し, Nagell[N] が 1961 年に証明した. 証明は虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ の性質を用いる.

定理 7. (Ramanujan–Nagell) 不定方程式

$$x^2 + 7 = 2^n$$

は正の整数解 $(x, n) = (1, 3),\ (3, 4),\ (5, 5),\ (11, 7),\ (181, 15)$ だけをもつ.

上の不定方程式 $x^2+7=2^n$ を Ramanujan と Nagell に因み **Ramanujan–Nagell 方程式** と呼ぶ. この不定方程式に関する結果は様々な形で一般化・拡張され, 不定方程式論における重要な研究分野の一つである.

上の Nagell の結果は, 日本人数学者 2 名により独立に次のように一般化された. 証明は,2 次線形数列と 2 次体の性質を用いる初等的方法による.

定理 8. (Tanahashi[Ta], Toyoizumi[To]) 不定方程式

$$x^2 + 7^m = 2^n$$

は正の整数解 $(x,m,n) = (1,1,3),\ (3,1,4),\ (5,1,5),\ (11,1,7),\ (181,1,15),\ (13,3,9)$ だけをもつ.

定理 7 の別の一般化は, Bugeaud-Mignotte-Siksek によりなされた.

定理 9. (Bugeaud-Mignotte-Siksek[BMS]) 不定方程式

$$x^2 + 7 = y^n, \quad n \geq 3$$

は正の整数解 $(x,y,n) = (1,2,3),\ (3,2,4),\ (5,2,5),\ (11,2,7),\ (181,2,15)$ だけをもつ.

定理 9 の証明は楕円曲線や modular form の理論を用いる. 一般に, 固定された整数 $D \neq 0$ に対し, 不定方程式

$$x^2 + D = y^n, \quad n \geq 3 \tag{4.1}$$

は高々有限個の正の整数解 x, y, n をもつ. Lebesgue[Leb] は 1850 年に $x^2 + 1 = y^n$ は正の整数解 x, y, n をもたないことを示した. これに因み, 不定方程式 4.1 を **Lebesgue–Nagell 方程式**と呼ぶ. Bugeaud-Mignotte-Siksek[BMS] では, 不定方程式 (4.1) を $1 \leq D \leq 100$ の範囲で完全に解いている.

Ramanujan–Nagell 方程式の拡張である不定方程式 $x^2 + D = 2^n$ に関する結果は, 次がよく知られている.

定理 10. (不定方程式 $x^2 + D = 2^n$)

(1) (Apéry[A],1960) D を正の整数とする. $D \neq 7$ ならば, 不定方程式

$$x^2 + D = 2^n \tag{4.2}$$

は, 高々2 個の正の整数解 x, n をもつ.

(2) (Beukers[Beu1],1980) $D \neq 7, 23, 2^k - 1 (k \geq 4)$ ならば, (4.2) は高々1 個の正の整数解 x, n をもつ.

- $D = 23$; $(x,n) = (3,5),\ (45,11)$
- $D = 2^k - 1 (k \geq 4)$; $(x,n) = (1,k),\ (2^{k-1} - 1, 2k - 2)$

4.2 一般化された Ramanujan-Nagell 方程式 $x^2 + D^m = p^n$

次の Bugeaud の定理は, Lucas numbers の Primitive divisors に対する BHV の深い定理 [BHV] を用いて証明される.

定理 11. (Bugeaud[Bu],2001) D を正の奇数とする. このとき, $D = 7, 15$ の場合を除けば, 不定方程式

$$x^2 + D^m = 2^n$$

は, 高々1 個の正の整数解 x, m, n をもつ. $D = 7, 15$ ならば, それぞれちょうど 6 個, 2 個の正の整数解 x, m, n をもつ.

$$x^2 + 7^m = 2^n; \qquad (x,m,n) = (1,1,3),\ (3,1,4),\ (5,1,5),\ (11,1,7),\ (181,1,15),\ (13,3,9)$$
$$x^2 + 15^m = 2^n; \qquad (x,m,n) = (1,1,4),\ (7,1,6)$$

次の Yuan-Hu の定理は, BHV の深い定理 [BHV] だけでなく, Jacobi 記号の巧妙な計算や初等的な方法を組みわせることにより得られる.

定理 12. (Yuan-Hu[YHu],2005) p を奇素数, $D > 2$ を正の整数とする. このとき, $(D, p) = (4, 5)$ の場合を除けば, 不定方程式

$$x^2 + D^m = p^n$$

は, 高々2 個の正の整数解 x, m, n をもつ. $(D, p) = (4, 5)$ ならば, ちょうど 3 個の正の整数解 $(x, m, n) = (1, 1, 1),\ (3, 2, 2),\ (11, 1, 3)$ をもつ.

4.3 ピタゴラス数に関する一般化された Ramanujan-Nagell 方程式

a, b, c をピタゴラス数, つまり $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす互いに素な正の整数とする. 1993 年, 著者は b が奇数のとき, 一般化された Ramanujan-Nagell 方程式 $x^2 + b^m = c^n$ に関する次の予想を提起した:

予想 6. (Terai[Te1], 1993) a, b, c を $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす固定された互いに素な正の整数とする. ただし, b は奇数とする. このとき, 不定方程式

$$x^2 + b^m = c^n$$

は, ただ一つの正の整数解 $(x, m, n) = (a, 2, 2)$ をもつ.

予想 6 は多くの場合に証明されているが未解決である. (cf. Terai[Te1], Le[Le1], [Le2],[Le3], Yuan-Wang[YW], Cao-Dong[CD])

一方, b が偶数のときの, 一般化された Ramanujan-Nagell 方程式 $x^2 + b^m = c^n$ に関する次の予想はとても興味深い:

予想 7. (Fujita-Terai,2019) u, v を互いに素な $u \not\equiv v \pmod 2$, $u > v$ である正の整数とする.

(1) $3u^2 - 8uv + 3v^2 \neq -1$ ならば, 不定方程式

$$x^2 + (2uv)^m = (u^2 + v^2)^n \qquad \text{(R)}$$

は正の整数解

$$(x, m, n) = (u - v, 1, 1),\ (u^2 - v^2, 2, 2)$$

だけをもつ. ただし, $(u, v) = (244, 231)$ の場合を除く:

$$x^2 + 112728^m = 112897^n; \quad (x, m, n) = (13, 1, 1),\ (6175, 2, 2), (2540161, 3, 3).$$

(2) $3u^2 - 8uv + 3v^2 = -1$ ならば, 不定方程式 (R) は正の整数解

$$(x, m, n) = (u - v, 1, 1),\ (u^2 - v^2, 2, 2),\ ((u - v)(2u^2 + 2v^2 + 1), 1, 3)$$

だけをもつ.

Magma により, 上の予想が $1 \leq v < u \leq 10^5, \quad m \leq 11, \quad n \leq 11$ の範囲で成り立つことを確かめた.

定理 13. (Fujita-Terai,2019) 次の条件の少なくとも一つが成り立つとする:

(i) u^2+v^2 は素数幂.

(ii) $u^2+v^2=w^2+1$ (w は正の整数); u,v は下のどれかを満たす ;

- $uv=2k^2$ (k は奇数);
- $uv=2p^t$ (p は $p\not\equiv 5 \pmod 8$ なる奇素数);
- $uv\equiv 10 \pmod{12}$.

(iii) $u\in\{p,p^2\}$, $v=2$ (p は奇素数).

(iv) $u=\max\{|k^4-6k^2l^2+l^4|, 4kl(k^2-l^2)\}$, $v=\min\{|k^4-6k^2l^2+l^4|, 4kl(k^2-l^2)\}$
(k, l は $k>l$, $\gcd(k,l)=1$, $k\not\equiv l \pmod 2$ を満たす正の整数)

(v) $u=244$, $v=231$.

そのとき予想 6 は正しい.

定理 13 は次の 4 つに関する深い結果を用いて証明できる:

(i) Generalized Ramanujan-Nagell equations

$$x^2+D^m=p^n,\quad x^2-2^m=y^n$$

(ii) Generalized Fermat's equations

$$X^n+2^\alpha Y^n=Z^2,\quad X^2+Y^m=Z^4,\quad X^2+Y^3=Z^n\ (n=6,8,10)$$

(iii) Primitive divisors of Lucas numbers
Lucas 数 $U_n(\alpha,\beta)=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ の primitive divisor に関する
Bilu-Hanrot-Voutier[BHV] の定理

(iv) Linear forms in two logarithms
Laurent[La] による 2 つの対数の 1 次形式の下からの評価

参考文献

[A] R. Apéry, *Sur une équation diophantienne*, C. R. Acad. Sci. Paris. **251**(1960), 1263-1264.

[Be] M. Bennett, *The equation* $x^{2n}+y^{2n}=z^5$, J. Théor. Nombres Bordeaux **18**(2006), 315–321.

[BS] M.A. Bennett and C. Skinner, *Ternary Diophantine equations via Galois representations and modular forms*, Canad. J. Math. **56**(2004), 23–54.

[BCDY] M. A. Bennett, I. Chen, S. R. Dahmen, and S. Yazdani, *Generalized Fermat equations: a miscellany*, Int. J. Number Theory, **11**2015, 1–28.

[Ber] Cs. Bertók, *The complete solution of the Diophantine equation* $(4m^2+1)^x+(5m^2-1)^y=(3m)^z$, Period. Math. Hung. **72**(2016). 37–42.

[Beu1] F. Beukers, *On the generalized Ramanujan-Nagell equation. I.*, Acta Arith. **38**(1980), 389–410.

[Beu2] F. Beukers, *On the generalized Ramanujan-Nagell equation. II.*, Acta Arith. **39**(1981), 113–123.

[BH] Cs. Bertók and L. Hajdu, *A Hasse-type principle for exponential Diophantine equations and its applications*, Math. Comp. **85**(2016), 849–860.

[BC] W. Bosma and J. Cannon, Handbook of magma functions, Department of Math., University of Sydney, available at `http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/`.

[BHV] Yu. Bilu, G. Hanrot, and P. M. Voutier, *Existence of primitive divisors of Lucas and Lehmer numbers*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **539**(2001), 75–122.

[Bu] Y. Bugeaud, *On some exponential diophantine equations*, Monatsh. Math. **132**(2001), 93–97.

[BMS] Y. Bugeaud, M. Mignotte, S. Siksek, *Classical and modular approaches to exponential Diophantine equations II. The Lebesgue-Nagell equation*, Compos. Math. **142**(2006), 31–62.

[Ca] Z. Cao, *A note on the Diophantine equation* $a^x+b^y=c^z$, Acta Arith. **91**(1999), 85–93.

[Co] J. H. E. Cohn, *The Diophantine equation* $x^2+2^k=y^n$, Arch. Math.(Basel) **59**(1992), 341–344.

[CD] Z. Cao and X. Dong, *On Terai's conjecture*, Proc. Japan Acad. **74A**(1998), 127–129.

[De] V. A. Dem'janenko, *On Jeśmanowicz' problem for Pythagorean numbers*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. **48** (1965), 52–56 (in Russian).

[DM] H. Darmon and L. Merel, *Winding quotients and some variants of Fermat's last Theorem*, J. Reine. Angew. Math. **490**(1997), 81–100.

[E] J. S. Ellenberg, Galois representations attached to $\mathbb{Q}$-curves and the generalized Fermat equation $A^4+B^2=C^p$, *Amer. J. Math.* **126** (2004), 763-787.

[FY] R. Fu, H. Yang, *On the exponential Diophantine equation* $(am^2+1)^x+(bm^2-1)^y=(cm)^z$ *with* $c|m$, Period. Math. Hung. **75**(2017), 143–149.

[I] W. Ivorra, *Sur les équations* $x^p+2^\beta y^p=z^2$ *et* $x^p+2^\beta y^p=2z^2$, Acta Arith. **108**(2003) 327–338.

[KMS] E. Kizildere, T. Miyazaki and G. Soydan, *On the Diophantine equation* $((c+1)m^2+1)^x+(cm^2-1)^y=(am)^z$, Turk. J. Math. **42**(2018), 2690–2698.

[J] L. Jeśmanowicz, *Some remarks on Pythagorean numbers* (in Polish), Wiadom. Mat. 1(1955/1956), 196-202.

[La] M. Laurent, *Linear forms in two logarithms and interpolation determinants II*, Acta Arith. **133**(2008), 325–348.

[Le1] M. Le, *A note on the diophantine equation* $x^2 + b^y = c^z$, Acta Arith. **71**(1995), 253–257.

[Le2] M. Le, *On Terai's conjecture concerning Pythagorean numbers*, Acta Arith. **100**(2001), 41–45.

[Le3] M. Le, *On Cohn's conjecture concerning the Diophantine equation* $x^2 + 2^m = y^n$, Arch. Math.(Basel) **78**(2002), 26–35.

[Le4] M. Le, *A conjecture concerning the exponential diophantine equation* $a^x + b^y = c^z$, Acta Arith. **106**(2003), 345–353.

[Le5] M. Le, *A note on ternary purely exponential Diophantine equations*, Acta Arith. **171**(2015), 173–182.

[Leb] M. Lebesgue, *Sur l'impossibilité, en nombres entiers, de l'équation* $x^m = y^2 + 1$, Nouv. Ann. Math. Ser.1 **9**(1850), 178–181.

[Lu] Lu Wen-Twan, *On Pythagorean numbers* $4n^2 - 1, 4n, 4n^2 + 1$, Acta Sc. Nat. Univ. Szechuan 1959, 39–42 (Chinese).

[Mi1] T. Miyazaki, *Exceptional cases of Terai's conjecture on Diophantine equations*, Arch. Math. (Basel) **95** (2010), 519–527.

[Mi2] T. Miyazaki, *Terai's conjecture on exponential Diophantine equations*, Int. J. Number Theory **7**(2011), 981–999.

[Mi3] T. Miyazaki, *Generalizations of classical results on Jeśmanowicz' conjecture concerning primitive Pythagorean triples*, J. Number Theory **133** (2013), 583–595.

[MT1] T. Miyazaki and N. Terai, *On the exponential Diophantine equation* $(m^2 + 1)^x + (cm^2 - 1)^y = (am)^z$, Bull. Australian Math. Soc. **90**(2014), 9–19.

[MT2] T. Miyazaki and N. Terai, *On Jeśmanowicz' conjecture concerning primitive Pythagorean triples II*, Acta Math. Hungar. **147**(2015), 286–293.

[MT3] T. Miyazaki and N. Terai, *A study on the exponential Diophantine equation* $a^x + (a + b)^y = b^z$, Publ. Math. Debrecen **95**(2019), 19–37.

[MYW] T. Miyazaki, P. Yuan and D. Wu, *Generalizations of classical results on Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean triples II*, J. Number Theory **141** (2014), 184–201.

[Mu] A. Murat, *On the exponential Diophantine equation* $(18m^2+1)^x+(7m^2-1)^y = (5m)^z$, Turk. J. Math. **42**(2018), 1990–1999.

[N] T. Nagell, The Diophantine equation $x^2 + 7 = 2^n$, *Ark. Math.* **4** (1961), 185-187.

[P] X. Pan, *A note on the exponential Diophantine equation* $(am^2+1)^x + (bm^2-1)^y = (cm)^z$, Colloq. Math. **149**(2017), 265–273.

[R] S. Ramanujan, Question 446. J. Indian Math. Soc. **5** (1913), 120; Collected papers, Cambridge University Press (1927), 327.

[S] W. Sierpiński, *On the equation* $3^x+4^y = 5^z$ (in Polish), Wiadom. Mat., 1(1955/1956), 194-195.

[SL] J. Su and X. Li, *The exponential Diophantine equation* $(4m^2+1)^x + (5m^2-1)^y = (3m)^z$, Abstract and Applied Analysis **2014**(2014), 1–5.

[SS] R.Scott and R.Styer, *Number of Solutions to* $a^x + b^y = c^z$, Publ. Math. Debrecen, **88**(2016), 131–138.

[Ta] K. Tanahashi, *On the Diophantine equations* $x^2 + 7^m = 2^n$ *and* $x^2 + 11^m = 3^n$, J. Predent Fac., Gifu Coll. Dent. **3** (1977), 77-79.

[Te1] N. Terai, *The Diophantine equation* $x^2 + q^m = p^n$, Acta Arith. **63**(1993), 351–358.

[Te2] N. Terai, *The Diophantine equation* $a^x + b^y = c^z$, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **70** (1994), 22–26.

[Te3] N. Terai, *Applications of a lower bound for linear forms in two logarithms to exponential Diophantine equations*, Acta Arith. **90** (1999), 17–35.

[Te4] N. Terai, *On the exponential Diophantine equation* $(4m^2+1)^x+(5m^2-1)^y = (3m)^z$, Int. J. Algebra, **6**(2012), 1135–1146.

[Te5] N. Terai, *On Jeśmanowicz' conjecture concerning primitive Pythagorean triples*, J. Number Theory **141** (2014), 316–323.

[TH1] N. Terai and T. Hibino, *On the exponential Diophantine equation* $(12m^2 + 1)^x + (13m^2 - 1)^y = (5m)^z$, Int. J. Algebra **9**(2015), 261–272.

[TH2] N. Terai and T. Hibino, *On the exponential Diophantine equation* $(3pm^2 - 1)^x + (p(p-3)m^2 + 1)^y = (pm)^z$, Period. Math. Hung. **74**(2017), 227–234.

[To] M. Toyoizumi, *On the diophantine equation* $y^2+D^m = 2^n$, Commentarii mathematici Universitatis Sancti Pauli **27** (1979), 105–111.

[W] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Annals of Math. **141**(1995), 443–551.

[YW] P. Yuan and J.B. Wang, *On the diophantine equation* $x^2 + b^y = c^z$, Acta Arith. **84**(1998), 145–147.

[YHu] P. Yuan and Y. Hu, *On the diophantine equation* $x^2 + D^m = p^n$, J. Number Theory **111**(2005), 144–153.

Nobuhiro Terai
Division of Mathematical Sciences
Department of Integrated Science and Technology
Faculty of Science and Technology, Oita University
700 Dannoharu, Oita 870–1192, Japan
E-mail: terai-nobuhiro@oita-u.ac.jp