GL(2) の跡公式の一般化と L 関数の特殊値への応用について

杉山　真吾　(日本大学 理工学部)

Abstract. 本記事は, 2019 年 9 月 2 日 (月)〜5 日 (木) に東北大学で開催された代数学シンポジウム (第６４回) の筆者の講演内容を纏めたものである. 本記事では, 楕円モジュラー形式・Maass 波動形式の Hecke 固有値や L 関数に関する成果を紹介する. 具体的には, うまく取ってきたテスト関数 $f : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}$ の積分核の対角成分への制限 $K_f(g,g)$ と保型形式 $\varphi(g)$ に対して, 跡公式の一般化に相当する積分

$$\int_{\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})} K_f(g,g)\varphi(g)dg$$

から生じる公式を紹介する. この公式は φ がカスプ形式と Eisenstein 級数の場合にそれぞれ明示的に記述可能であり, 保型 L 関数の特殊値への応用についても触れる. またこの成果は, 基礎体 $\mathbb{Q}$ を広いクラスの有限次総実代数体に置き換えても, Hilbert モジュラー形式の意味で成立する. 本研究は都築正男氏 (上智大学) との共同研究に基づく.

1. 序文

F を有限次総実代数体とし, F のアデール環を $\mathbb{A}_F$ とする. テスト関数 $f = \otimes_v f_v \in C^\infty(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F))$ を "うまく" 取っておく.

$$K_f(g,h) = \sum_{\gamma \in \mathrm{PGL}_2(F)} f(g^{-1}\gamma h), \qquad (g,h) \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F) \times \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F)$$

とおく. さて, $\varphi : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F) \to \mathbb{C}$ を Hilbert-Maass 波動形式のアデリックリフトであるような保型形式とする. F や f の細かい条件はここでは説明しないが, 主結果は以下の通り ([16]).

Theorem 1. 積分

$$\int_{\mathrm{PGL}_2(F)\backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F)} K_f(g,g)\varphi(g)dg$$

のスペクトル展開と幾何的展開を実行することで "明示公式" が得られる.

なぜこれが跡公式の一般化なのかを簡単に説明する. 跡公式を考察する上では f のサポートのコンパクト性だとか積分の収束性の問題だとか細かい事は色々あるが, 今は無視して heuristic な説明をつける. R を $L^2(\mathrm{PGL}_2(F)\backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F))$ 上の $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F)$ の右正則表現とする. この表現により, f が $L^2(\mathrm{PGL}_2(F)\backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F))$ に作用する.

$$R(f) \;''=''\; \int_{\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F)} f(g)R(g)dg.$$

この作用素の積分核が $K_f(g,h)$ である. この作用素の跡 (トレース) は

$$\mathrm{tr}R(f) \;''=''\; \int_{\mathrm{PGL}_2(F)\backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F)} K_f(g,g)dg$$

と書ける. $\mathrm{tr}R(f)$ を 2 通りに表示することによって得られる等式のことを**跡公式**と呼ぶ. まず第一の方法として, $K_f(g,g)$ のスペクトル分解の項別積分という計算方法がある. 第二に, $K_f(g,g)$ の定義に基づいて, γ に関して和をとる時に, 添え字集合 $\mathrm{PGL}_2(F)$ を共役類毎に分解し, その各部分和の積分を計算するという方法もある. 前者の積分計算で得られるものを**スペクトルサイド**と呼び, 後者の積分計算で得られるものを**幾何サイド**と呼ぶ.

さて, rough に述べた Theorem 1 において, 跡公式を与える積分の被積分関数に φ が組み込まれている. だから跡公式の一般化とみなせるのである.

2. 関数論的な言い換え

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の表現論の観点で跡公式について説明したが, これは保型形式という複素関数のなす空間上の Hecke 作用素の跡に関する公式と同等である. 簡単のため $F=\mathbb{Q}$ で保型形式のレベルが 1 の時にの場合に Theorem 1 を記述する. その際に位相群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の表現論の言葉ではなく, 関数論の言葉で記述する.

さて, 複素関数としての保型形式を定義しよう. まず $\mathfrak{H}=\{\tau=x+iy \mid x\in\mathbb{R}, y>0\}$ とおく ($i=\sqrt{-1}$ は虚数単位). これは Poincaré 上半平面と呼ばれる. この空間には $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ が一次分数変換で推移的に作用する:

$$([\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}],\ \tau)\mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d},\qquad \forall\tau\in\mathfrak{H},\quad \forall[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}]\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

特に, 一次分数変換により $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ も $\mathfrak{H}$ に作用している. $N\in\mathbb{N}$ に対して,

$$\Gamma_0(N):=\{[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}]\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\mid c\equiv 0 \pmod N\}$$

とおく ($\mathbb{N}$ は正の整数全体からなる集合). $\Gamma_0(N)$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の指数有限部分群であり, これも $\mathfrak{H}$ に作用している. 保型形式とは, この作用に関するある種の不変性と微分方程式を満たす関数のことである. ここでは保型形式として, 楕円モジュラー形式と Maass 波動形式を定義する. 楕円モジュラー形式は誤解のない限りしばしばモジュラー形式と呼ばれる. Maass 波動形式も単に Maass 形式と呼ばれる.

さて, 普段の研究集会では楕円モジュラー形式と Maass 波動形式は定義されることがほとんどないので, この機会に定義をしてみる.

まずは楕円モジュラー形式から始めよう.

Definition 2. $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $N\in\mathbb{N}$ とする. この時 $f:\mathfrak{H}\to\mathbb{C}$ が重さ k, レベル N の楕円モジュラー形式であるとは以下の 3 つを満たす時にいう.

(1) f は正則.
(2) $f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})=(c\tau+d)^k f(\tau),\qquad \forall[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}]\in\Gamma_0(N),\ \ \forall\tau\in\mathfrak{H}.$
(3) $\forall\gamma=[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}]\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\exists a(\gamma;f)\in\mathbb{C}$,

$$\lim_{\mathrm{Im}(\tau)\to\infty}(c\tau+d)^{-k}f(\tfrac{a\tau+b}{c\tau+d})=a(\gamma;f).$$

特に, 重さ k, レベル N の楕円モジュラー形式 f が $a(\gamma;f)=0,\ \ \forall\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を満たす時, f は重さ k, レベル N の楕円カスプ形式と呼ばれる.

次に Maass 波動形式を定義しよう.

Definition 3. $N\in\mathbb{N}$, $\nu_\infty\in\mathbb{C}$ とする. $f:\mathfrak{H}\to\mathbb{C}$ がタイプ ν_∞, レベル N の *Maass* 波動形式であるとは, 以下の 3 つを満たす時にいう.

(1) $(x,y)\mapsto f(x+iy)$ は $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}$ 上の関数として C^∞ であり, f は双曲ラプラシアンの固有関数になっていてその固有値は $\frac{1}{4}(1-\nu_\infty^2)f$ である:

$$-y^2(\partial_x^2+\partial_y^2)f=\frac{1}{4}(1-\nu_\infty^2)f.$$

(2) $f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})=f(\tau),\qquad \forall[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}]\in\Gamma_0(N),\ \ \forall\tau\in\mathfrak{H}.$
(3) $\forall\gamma=[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}]\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\exists\alpha>0$,

$$f(\tfrac{a\tau+b}{c\tau+d})=O(\mathrm{Im}(\tau)^\alpha), \tau\in\mathfrak{H}.$$

特にタイプ ν_∞, レベル N の *Maass* 波動形式 f が $\int_0^1 f(\gamma(x+iy))dx=0\ \ \mathit{for}\ \forall\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を満たす時, タイプ ν_∞, レベル N の *Maass* カスプ形式と呼ぶ.

Monstrous Moonshine に出てくる j 関数 $j(\tau)=\frac{1}{q}+744+196884q+\cdots\quad(q=e^{2\pi i\tau})$ は正則で $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 不変である. j 関数は楕円モジュラー関数と呼ばれ, Monstrous Moonshine に現れるだけでなく, 整数論でも活躍する興味深い関数であるが, 本講演で扱う保型形式には含まれていない. 実際, $\frac{1}{q}$ の項の存在のため, $\mathrm{Im}(\tau)\to\infty$ とした時に指数関数的に増大するので

j 関数は楕円モジュラー形式でも Maass 形式でもない．もっと詳しく述べると, j 関数は楕円モジュラー形式の定義の (1), (2) を $k=0, N=1$ の場合に満たすが, (3) を満たさない．また, Maass 波動形式の定義の (1), (2) を $\nu_\infty = 1, N=1$ の場合に満たすが, (3) を満たさない．

重さ k, レベル N の楕円カスプ形式全体の集合を $S_k(N)$ とおくと, これは自然に $\mathbb{C}$ ベクトル空間となる．しかも有限次元である．簡単のため $N=1$ とすると, Hecke 作用素とは自然数でラベル付けされる $\mathrm{End}(S_k(1))$ の元の族 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のことである．

Definition 4 (Hecke 作用素)**.** $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(T_n f)(\tau) := n^{k-1} \sum_{\substack{a\in\mathbb{N}, d\in\mathbb{N} \\ ad=n}} \frac{1}{d^k} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{a\tau+b}{d}\right), \qquad \tau \in \mathfrak{H}$$

とおく．

基本的な性質として,

(1) $T_n \in \mathrm{End}(S_k(1))$,
(2) $T_m T_n = T_n T_m$,
(3) $T_1 = \mathrm{id}$

が知られている．N が 1 と限らぬ一般の自然数の場合は N と互いに素な n について T_n が定義される．また, T_n は Maass 形式の場合も同様に定義できる (上の定義で $k=0$ とすればよい)[1].

実は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の言葉で述べられた跡公式を T_n のトレースに関して記述することができて, 以下のように記述される．

Theorem 5 (Eichler-Selberg 跡公式)**.** 簡単のため, レベルは $N=1$ とし, 重さは偶数 $k \geqslant 4$ とする．この時, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Eigen}(T_n)} \lambda = \mathrm{tr}(T_n) = J_\mathrm{i} + J_\mathrm{u} + J_\mathrm{h} + J_\mathrm{e}$$

という等式が成り立つ．ここで左辺の $\mathrm{Eigen}(T_n)$ は T_n の固有値の多重集合である．条件 P に対して P が成り立つ時に $\delta(P)=1$, P が成り立たない時に $\delta(P)=0$ として *generalized Kronecker* デルタ δ を定義しておくと, 右辺の 4 つの項は以下で定義される:

$$J_\mathrm{i} = \delta(\sqrt{n}\in\mathbb{N})\frac{k-1}{12}n^{(k-1)/2}, \qquad J_\mathrm{u} = -\delta(\sqrt{n}\in\mathbb{N})\frac{n^{(k-1)/2}}{2}$$

$$J_\mathrm{h} = -\frac{1}{2}\sum_{d,d'>0,\ n=dd',\ d\neq d'} \min(d,d')^{k-1}$$

$$J_\mathrm{e} = \sum_{\substack{t\in\mathbb{Z}, \\ t^2-4n=f^2D_E<0}} \frac{-h(E)}{\#\mathfrak{o}_E^\times} \sum_{0<d|f} d \prod_{p|d} (1-p^{-1}\chi_{D_E}(p))\, n^{(k-2)/2} U_{k-2}(\tfrac{t}{2\sqrt{n}})$$

ここで, $t^2-4n<0$ となる整数 t に対して $E=\mathbb{Q}(\sqrt{t^2-4n})$ とおいた．これは虚 2 次体であることに注意．$h(E)$ は E の類数であり, $\mathfrak{o}_E$ は E の整数環である．また, D_E は E の判別式である．χ_{D_E} は大域類体論により E に対応する 2 次 *Dirichlet* 指標である．U_{k-2} は $k-2$ 番目の第 2 種 *Chebyshev* 多項式である．

関数論的な線型写像 T_n の跡が, 初等的な数や数論的なデータで書けるというのがこの跡公式の意味するところである．なぜ $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の跡公式と Eichler-Selberg 跡公式が同等なのかは割愛するが, 正確には, Eichler-Selberg 跡公式は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の跡公式の特別な場合である．

レベル 1 の保型形式 ϕ として, Hecke 作用素の族 $\{T_p\}_{p<\infty}$ の同時固有関数となるものを今後扱う．($p<\infty$ は素数全体を走る.)

[1] $k=0$ の時の Hecke 作用素の定義に出てくる因子 n^{-1} は, しばしば $n^{-1/2}$ になっていると思われるが, 今回は楕円モジュラー形式の Hecke 作用素の因子を $n^{(k-1)/2}$ ではなく n^{k-1} にしたので, 後者に合わせた．

[例 1] 無限遠点 $i\infty$ の固定部分群を $\Gamma_\infty \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ とする．$\Gamma_\infty = \{\pm[\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}] \mid x \in \mathbb{Z}\}$ である．$z \in \mathbb{C}$ が $\mathrm{Re}(z) > 1$ を満たす時,

$$E(z,\tau) := \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \mathrm{Im}(\gamma\tau)^{(z+1)/2}$$

は τ に関して広義一様絶対収束し, レベル 1 の Maass 波動形式となる．ただし Maass カスプ形式ではない． $E(z)$ は実解析的 Eisenstein 級数と呼ばれる． ここでは完備 Riemann ゼータ関数 $\hat{\zeta}(s)$ を掛けた $E^*(z) := \hat{\zeta}(z+1)E(z)$ を扱う．

[例 2] ϕ をレベル 1 の Maass カスプ形式とする．ϕ は Hecke 作用素の同時固有関数であるとする．この時, 複素数の族 $\nu = (\nu_\infty, (\nu_p)_{p<\infty}) \in \prod_v \mathbb{C}$ を用いて, 双曲的ラプラシアンと Hecke 作用素の固有値を,

$$-y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)\phi = \frac{1-\nu_\infty^2}{4}\phi,$$

$$T_p\phi(\tau) := p^{-1/2}(p^{-\nu_p/2} + p^{\nu_p/2})\phi(\tau).$$

のように表示することができる．さらに ϕ は even であるとする．ここで ϕ が even とは $\phi(-\bar{z}) = \varepsilon\phi(z)$, $\varepsilon = +1$ の時にいう．(ちなみに $\varepsilon = -1$ の時には odd と呼ぶ.) 上述のレベル 1 の even Hecke-Maass カスプ形式 ϕ に対して, $\nu_\phi = (\nu_\infty, (\nu_p)_p)$ を ϕ のスペクトルパラメーターと呼ぶことにする．

Remark 6. ここで, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 上の保型形式が $\mathfrak{H}$ 上の楕円モジュラー形式や *Maass* 形式と関連していることを説明しておく．[例 1], [例 2] で説明がなされた *Maass* 波動形式を ϕ とする．SL_2 の強近似定理「$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},\mathrm{fin}})$ の中で稠密」により,

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = Z(\mathbb{A}_\mathbb{Q})\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$$

という分解が成り立つので, この分解を用いて

$$\tilde{\phi}(z\gamma g_\infty k) := \phi\left(\frac{a\sqrt{-1}+b}{c\sqrt{-1}+d}\right), \quad z \in Z(\mathbb{A}_\mathbb{Q}),\ \gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}),\ g_\infty = [\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}] \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+,\ k \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$$

により $\tilde{\phi} : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}$ を定める (これは *well-defined* である)．$\varphi := \tilde{\phi} : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}$ とおくと, φ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 上の関数として保型形式になっている．φ の右移動たちが生成する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現を π_φ とする:

$$\pi_\varphi := \langle R(g)\varphi \mid g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})\rangle.$$

これは [例 1], [例 2] のいずれの場合であっても, 既約ユニタリー化可能表現になり, 中心指標は自明である．また π_φ は *local* な群の球的主系列表現の制限テンソル積に分解可能である:

$$\pi_\varphi \cong \bigotimes_v{}' \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_v)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_v)}(|\cdot|_v^{\nu_v/2} \boxtimes |\cdot|_v^{-\nu_v/2}).$$

3. 主定理

$F = \mathbb{Q}$ の場合に相当する主定理を述べる．k は 4 以上の偶数とし, ϕ を [例 1] か [例 2] の Maass 形式とする．ϕ のスペクトルパラメーターを $\nu = (\nu_\infty, (\nu_p)_{p<\infty})$ とする．$\nu_{\mathrm{fin}} = (\nu_p)_{p<\infty}$ とおく．$a \in \mathbb{R}$ に対して, a を変数とする関数を 2 種類用意する．

$$\mathcal{O}_k^{+,(\nu_\infty)}(a) := \frac{2\pi}{\Gamma(k)} \frac{\Gamma(k + \frac{\nu_\infty - 1}{2})\Gamma(k + \frac{-\nu_\infty - 1}{2})}{\Gamma_\mathbb{R}(\frac{1+\nu_\infty}{2})\Gamma_\mathbb{R}(\frac{1-\nu_\infty}{2})} \mathrm{ch}_{\{|x|>1\}}(a)\sqrt{a^2-1}\mathfrak{P}^{1-k}_{\frac{\nu_\infty-1}{2}}(|a|),$$

$$\mathcal{O}_k^{-,(\nu_\infty)}(a) := \frac{\pi i}{\Gamma(k)}\Gamma(k + \tfrac{\nu_\infty - 1}{2})\Gamma(k + \tfrac{-\nu_\infty - 1}{2})\mathrm{sgn}(a)\sqrt{a^2+1}\{\mathfrak{P}^{1-k}_{\frac{\nu_\infty-1}{2}}(ia) - \mathfrak{P}^{1-k}_{\frac{\nu_\infty-1}{2}}(-ia)\}$$

とおく．ここで, $\Gamma_\mathbb{R}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ とおいた．また, 集合 X とその部分集合 $A \subset X$ に対して ch_A を X 上の A の特性関数とする．上の場合 $X = \mathbb{R}$ である．また, $\mathfrak{P}^\nu_\mu$ は第 1 種 Legendre 陪関数である．第 1 種 Legendre 陪関数の定義域 $\mathbb{C} - (-\infty, 1]$ に $a = 0$ が含まれていないため,

$a=0$ の時は見かけ上定義されていない．しかし $a\to 0$ の時の値は定まるのでそれを $a=0$ での値とする．この関数は跡公式の幾何サイドの archimedean factors を記述するために後で用いる．

判別式 $\Delta = Df^2$ (D は基本判別式で, $f\in\mathbb{N}$) に対して,

$$\mathbf{B}(\nu_{\mathrm{fin}};\Delta) := \prod_{p|f}\left(\frac{\zeta_p(-\nu_p)}{L_p(\frac{-\nu_p+1}{2},\chi_D)}|f|_p^{\frac{\nu_p-1}{2}} + \frac{\zeta_p(\nu_p)}{L_p(\frac{\nu_p+1}{2},\chi_D)}|f|_p^{\frac{-\nu_p-1}{2}}\right)$$

とおく． 幾何サイドの non-archimedean factors を記述するために後で用いる． ζ_p, L_p は Riemann ゼータ関数や Dirichlet L 関数の p-th Euler 因子とする．χ_D は類体論により $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ に対応する 2 次 Dirichlet 指標である．

ϕ の周期 $\mathbb{P}_D(\phi)$ を以下のように定める．基本判別式 D に対して

$$\mathcal{F}(D) := \{Q(x,y)\in\mathbb{Z}[x,y] \mid \text{primitive, not negative-definite, } \mathrm{disc}(Q)=D\}$$

とおく．$\mathrm{disc}(Q)$ は Q の判別式である．この 2 次形式の集合には右から $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ が作用している:

$$(Q[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}])(x,y) := Q(ax+by, cx+dy), \qquad Q\in\mathcal{F}(D), [\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}]\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

すると $\mathcal{F}(D)/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ は有限集合であることが知られている．しかも濃度は $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の狭義類数 h と一致する． この事の詳細は例えば Zagier の本『Zetafunktionen und quadratische Körper』(1981) の日本語訳 [22] の第 II 部を参照されたし．実際に [22, p.99] の定理で狭義のイデアル類と 2 次形式の同値類の 1 対 1 対応が述べられている．以降では $\mathcal{F}(D)/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ の完全代表系 $\{Q_j\}_{j=1}^h$ をひとつ固定しておく．

$D<0$ の時は $z_{Q_j}\in\mathfrak{H}$ で $Q_j(z_{Q_j},1)=0$. なるものが唯一つ存在する．この時

$$\mathbb{P}_D(\phi) := \sum_{j=1}^h \frac{1}{\#\mathrm{Stab}(Q_j)}\phi(z_{Q_j})$$

とおく．ここで $\mathrm{Stab}(Q_j)$ は $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 内の Q_j の固定部分群である．

$D>0$ の時は, $z_{Q_j,1}, z_{Q_j,2}\in\mathbb{R}$ を $Q_j(z,1)=0$ の相異なる実数解とする．$\Omega_j\subset\mathfrak{H}$ を $z_{Q_j,1}$ と $z_{Q_j,2}$ を直径の両端とする半円の上半分 ($\mathfrak{H}$ に含まれるほう) とする．要するに, $z_{Q_j,1}$ と $z_{Q_j,2}$ を $\mathfrak{H}$ 内の測地線で結んでいる．ちなみにこの半円 Ω_j の方程式

$$\left|z-\frac{z_{Q_j,1}+z_{Q_j,2}}{2}\right| = \left|\frac{z_{Q_j,1}-z_{Q_j,2}}{2}\right|, (\mathrm{Im}(z)>0)$$

は, $Q_j(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ なる $a,b,c\in\mathbb{Z}$ を用いて $a|z|^2+b\,\mathrm{Re}(z)+c=0$, $(\mathrm{Im}(z)>0)$ と書ける．さて, この時 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\Omega_j$ は Riemann 面 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}$ 上の閉測地線になる．以下のようなサイクル積分によって $\mathbb{P}_D(\phi)$ を定義する．

$$\mathbb{P}_D(\phi) := \sum_{j=1}^h \int_{\mathrm{Stab}(Q_j)\backslash\Omega_j}\phi(z)\frac{\sqrt{D}\,dz}{Q_j(z,1)}.$$

ここで Ω_j の向きは, $Q_j(z,1)$ の z^2 の係数が正の時に反時計回りとし, 負の時に時計回りとする．

Remark 7. ここで 2 次形式と狭義類数との関連について注意を述べておく．2 次形式の集合において, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と同様に $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ の作用も考えることができる．まず $\mathcal{F}(D)$ の条件の *“not negative-definite”* を外すことで定義される 2 次形式の集合を $\mathcal{F}'(D)$ とする．すなわち, 原始的な整数係数 2 元 2 次形式で判別式が D のもの全体を $\mathcal{F}'(D)$ とする．この時, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ が $\mathcal{F}'(D)$ に右から作用する:

$$(Q[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}])(x,y) := (ad-bc)Q(ax+by, cx+dy), \qquad Q\in\mathcal{F}'(D), [\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}]\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}).$$

この作用は $ad-bc\in\{\pm1\}$ の因子があるので, 正定値と負定値の 2 次形式が同一視される．したがって, $D<0$ の時には最初に導入した $\mathcal{F}(D)$ には $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ が上のルールでは作用していないことに注意せよ．この作用から得られる事実として, D の正負に関わらず, $\mathcal{F}'(D)/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$

も有限集合で，この濃度は $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の類数と一致する．*Zagier* の本では 2 次形式の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ における同値類の個数として $h(D)$ を導入し，$h(D)$ は「類数」と呼ばれているが，[22, p.64–65] を見ると分かるように $h(D)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の狭義類数であり，この本の p.65 に出てくる $h_0(D)$ のほうが $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の類数である．これは [22, p.99] の定理を見ても分かる．類数公式 [22, p.75] に出てくる $h(D)$ も $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の狭義類数であるし，2 次形式の世界で定義された基本単数 ε_0(*cf.* [22, p.68]) も $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の基本単数とは限らない (2 乗のズレが生じうる)．代数体の世界と 2 次形式の世界で類数などの専門用語が錯綜しているので，注意が必要である．

さて，以上の準備のもとに，定理を述べよう．k を正の偶数とし，$k \geqslant 4$ とする．重さ k，レベル 1 の楕円カスプ形式全体を $S_k(1)$ とし，Petersson 内積に関する正規直交基底 H_k をとる．任意の $f \in H_k$ が Hecke 作用素 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の同時固有関数になるように H_k をとることができる．$n^{(1-k)/2}T_n$ の f に対する固有値を $\lambda_f(n)$ とする:

$$T_n f = n^{(k-1)/2}\lambda_f(n) f$$

$f \in H_k$ に対して

$$\mu_f(\phi) := \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}} \phi(\tau)|f(\tau)|^2 y^k \frac{dxdy}{y^2}$$

とおく．これはモジュラー曲線 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}$ 上の確率測度である．主定理 ([16] で $F=\mathbb{Q}$ かつレベル 1 にしたもの．[例 2] の場合は [17]) は以下のように述べられる．

Theorem 8. [*Generalized Trace Formula* ($F=\mathbb{Q}$, $N=1$)] $k \geqslant 4$ を偶数とする．ϕ を [例 1] または [例 2] のものとし，ϕ が実解析的 *Eisenstein* 級数の時は $|\operatorname{Re}(z)| < k-3$ を仮定する．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\frac{4\pi}{k-1} n^{1/2} \sum_{f\in H_k} \mu_f(\phi)\lambda_f(n) = \ J_{\mathrm{id}} + J_{\mathrm{unip}} + J_{\mathrm{hyp}} + J_{\mathrm{ell}}$$

が成立する．

上の定理は ϕ が実解析的 Eisenstein 級数の場合は [16]，カスプ形式の場合は [16]，[17] で与えられている．ちなみに公式の右辺に現れる項は以下のように記述される:

- $J_{\mathrm{id}} = 0$.
- ϕ がカスピダルの時は $J_{\mathrm{unip}} = 0$．$\phi = E^*(z)$ の時は，

  $$J_{\mathrm{unip}} = \delta(n^{1/2} \in \mathbb{N})\hat{\zeta}((z+1)/2) n^{1/2}\{G(z) + G(-z)\},$$

  ここで，

  $$G(z) := \hat{\zeta}(-z) 2^{1-z} \pi^{(3-z)/4} \frac{\Gamma(k+(z-1)/2)}{\Gamma(k)\Gamma((z+1)/4)} n^{(-z-1)/4}.$$

- $$J_{\mathrm{hyp}} = \frac{1}{2^{1+\delta(\phi\,:\,\mathrm{cusp})}} \hat{L}(1/2,\phi) \sum_{\substack{(d_1,d_2)\in\mathbb{N}^2 \\ n=d_1d_2, d_1\neq d_2}} \mathbf{B}(\nu_{\mathrm{fin}}; (d_1-d_2)^2)\mathcal{O}_k^{+,(\nu_\infty)}(\tfrac{d_1+d_2}{d_1-d_2}),$$

  ここで，$\delta(\phi : \mathrm{cusp})$ は ϕ がカスプ形式の時に 1，ϕ が実解析的 Eisenstein 級数の時に 0 とする．$\hat{L}(s,\phi)$ は ϕ の完備スタンダード L 関数とする．すなわち

  $$\hat{L}(s,\phi) = \Gamma_{\mathbb{R}}\left(s + \frac{\nu_\infty}{2}\right)\Gamma_{\mathbb{R}}\left(s - \frac{\nu_\infty}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_\phi(n)}{n^s}, \qquad \operatorname{Re}(s) > \frac{3}{2}$$

  を $\mathbb{C}$ 上の解析関数に解析接続したもの．

- $$J_{\mathrm{ell}} = \frac{1}{2}\sum_{D\in\mathcal{D}} 2^{\delta(D<0)}\mathbb{P}_D(\phi) \sum_{t\in\mathcal{T}(n,D)} \mathbf{B}(\nu_{\mathrm{fin}}; t^2-4n)\mathcal{O}_k^{\mathrm{sgn}(t^2-4n),(\nu_\infty)}(\tfrac{t}{\sqrt{|t^2-4n|}}),$$

ここで $\mathcal{D}$ は基本判別式全体の集合であり, $\delta(D<0)$ は $D<0$ の時に 1, $D>0$ の時に 0 とする. また,

$$\mathcal{T}(n,D) := \{t \in \mathbb{Z} \mid \exists f \in \mathbb{N},\ t^2-4n = Df^2\}$$

とおく.

Remark 9.

- $\phi = E^*(z)$ の公式は *Zagier* (1977) の公式 [21] と同値である.
- 主定理の公式の $z=1$ における留数 $\mathrm{Res}_{z=1}\sum_{f\in H_k}\mu_f(E^*(z))\lambda_f(n) = \cdots$ を計算することで *Eichler-Selberg* 跡公式: $\mathrm{tr}(T_n) = \cdots$ を復元することができる. 復元計算の際には, $\mathrm{Res}_{z=1} E^*(z) = 1$ に注意[2].
- ϕ がカスプ形式の時は新しい公式である. 我々の公式は $S_k(N)$(ただし N は *odd square-free*) の場合でも成立する.

Remark 10. $F/\mathbb{Q}$ を有限次総実代数体とする. 素数 2 は F の中で完全分解するとする. $k=(k_v)_{v|\infty}$, $k_v \geqslant 4$ は偶数の組とする. $\mathfrak{n}$ は F の整数環 $\mathfrak{o}_F$ の非ゼロ *square-free* イデアルで $(\mathfrak{n}, 2\mathfrak{o}_F) = \mathfrak{o}_F$ を満たすとする. 非ゼロイデアル $\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{p}_v|\mathfrak{m}}\mathfrak{p}_v^{n_v} \subset \mathfrak{o}_F$ は $(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) = \mathfrak{o}_F$ を満たすとする. F の狭義類数 h_F^+ には何も課さない. この設定で, 我々の公式は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ 上の保型形式に一般化できる. つまり *Hilbert* モジュラー形式の場合に拡張できる. 実際, 公式の記述は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現論を用いておこなっている. [16] を参照されたし.

Remark 11. *Hilbert* モジュラー形式の場合の拡張については, $\phi = E^*(z)$ の場合に対応するもののみ先行研究がある[3].

水本 (1984) [9] は有限次総実代数体 F が狭義類数 1 の時に *parallel* 重さ k, レベル $\mathfrak{o}_F$ の *Hilbert* カスプ形式の場合に *Zagier* の公式を一般化した. 高瀬 (1986) [18] は後に総実代数体 F が狭義類数 1 で, 一般の重さ $(k_v)_{v\in\Sigma_\infty}$, 一般のレベル $\mathfrak{n}$ *nebentypus* ω が *primitive* の場合に *Zagier* の公式を与えた. 我々の公式は *nebentypus* ω が自明指標でレベル $\mathfrak{n}$ を考慮しているので, $\mathfrak{n} = \mathfrak{o}_F$ の場合に限り, 高瀬の公式との間に *overlap* がある.

水本氏, 高瀬氏の設定だと, 例えば 2 次体だと $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ が含まれる. これらの中では 2 が完全分解しないので我々の設定には含まれていない. 一方, 狭義類数が 1 という仮定を満たす代数体 F が無限個あるかどうかは未解決である (これが解ければ類数 1 の実 2 次体の無限性が分かり, いわゆる *Gauss* 予想も解決できる). 我々の公式では $F = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, ($D \in \mathbb{Z}_{>0}$, $D \equiv 1 \pmod 8$) なる 2 次体であれば狭義類数の値は何でも良いので, F として無限個の例を扱うことができる $\mathbb{Q}(\sqrt{33})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{57})$ は狭義類数が 2 であるので我々の設定で扱える 2 次体である[4].

Remark 12. *Jacquet, Zagier* (1987) [6] は $f \in C_c^\infty(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_k))$ に対して以下の積分の幾何的展開を実行した.

$$\int_{\mathrm{PGL}_2(k)\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_k)} K_{f,\mathrm{cusp}}(g,g)E(z,g)dg = \cdots$$

ここで $E(z,g)$ は *Eisenstein* 級数である. 彼らの手法では明示的な計算はなされなかった. 特に, 我々の公式のように固定された重さをもつ楕円モジュラー形式の項のみを *Jacquet, Zagier* の公式の場合に抽出可能かもいまだ不明である. したがって, $z=1$ での留数を計算することによって *Selberg* 跡公式が復元可能かどうかさえ最近まで不明であった. *Selberg* 跡公式が復元できることに関しては *Wu* [20] によって最近になって証明されたが, 以下の問題はいまだ残っている.

Jacquet-Zagier 公式から *Zagier* の公式を復元できるだろうか ?

4. 応用

保型 L 関数の特殊値の非ゼロ性への応用をいくつか紹介する.

---

[2] $s = \frac{z+1}{2}$ の変数変換のもとで $s=1$ での留数を考えると $\frac{1}{2}$ である.

[3] $\phi = E^*(z)$ の場合の先行研究については拙著 [13] に詳細あり.

[4] 実 2 次体の狭義類数と類数の関係については拙著 [15] に詳細あり.

4.1. GL_2 **の対称 2 次** L **関数の特殊値.** まず [例 1] の場合の結果の応用を紹介しよう.

$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) e^{2\pi i n\tau} \in S_k(1) - \{0\}$ に対して, 対称 2 次 L 関数を

$$\hat{L}(s, \mathrm{Sym}^2(f)) := \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1) 2(2\pi)^{-s-k+1} \Gamma(s+k-1) \times \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f(n^2)}{n^{s+k-1}}$$

$(\mathrm{Re}(s) > 1)$ で定義する. ここで, $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ とおいた. $\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s+k-1)$ の因子を排除したものは $L(s, \mathrm{Sym}^2(f))$ とおく. Rankin (1939), Selberg (1940) が独立にこの L 関数の解析性を与えたことは有名である.

Theorem 13.
- $\hat{L}(s, \mathrm{Sym}^2(f))$ は $\mathbb{C}$ 上有理型関数に解析接続される.
- 関数等式 $\hat{L}(s, \mathrm{Sym}^2(f)) = \hat{L}(1-s, \mathrm{Sym}^2(f))$ が成立する.
- $\hat{L}(1, \mathrm{Sym}^2(f)) = 2^k (f, f) > 0$ が成立する.

f のレベルが $N > 1$ より大きい場合も $L(s, \mathrm{Sym}^2(f))$ を導入することができて, 同様の解析接続や関数等式などが成立する. [2] によって, $L(s, \mathrm{Sym}^2(f))$ は $\mathrm{GL}_3(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ 上のある Hecke 固有カスプ形式のスタンダード L 関数に一致することが知られている. その Hecke 固有カスプ形式を $\mathrm{Sym}^2(f)$ と書くことで, Sym^2 という記号は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の保型形式から $\mathrm{GL}_3(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ へのリフティングとみなせる. このリフティング (Gelbart-Jacquet リフティング) の詳細も [2] にある.

Rankin-Selberg theory によって,

$$\mu_f(E^*(z)) \fallingdotseq \frac{\zeta(\frac{z+1}{2}) L(\frac{z+1}{2}, \mathrm{Sym}^2(f))}{L(1, \mathrm{Sym}^2(f))}$$

が成り立つので, 我々の公式は $L(\frac{z+1}{2}, \mathrm{Sym}^2(f))$ に関する和の $N \to \infty$ とした時の挙動を調べることができる.

重さ $k \geqslant 4$ を固定する. n を自然数とする. $H_k(N)$ を $S_k(N)$ の正規直交基底で, Hecke 固有形式からなるものとする. 以下の仮定を考える.

$$\mathbf{(P)} : L(s, \mathrm{Sym}^2(f)) \geqslant 0, \qquad (1/2 \leqslant \forall s < 1,\ \forall f \in H_k(N),\ \forall N).$$

上の **(P)** 内のレベル N は $(N, 2n) = 1$ を満たす自然数を走るとする. この仮定は一般 Riemann 予想を仮定すると中間値の定理から得られることに注意.

Corollary 14. ([16, Theorem 1.3] の特別な場合) $k \geqslant 6$ とする. また **(P)** を仮定する. 部分区間 $J_p = [t_p, t'_p] \subset [-2, 2]$ $(t_p < t'_p)$ を各素因子 $p|n$ 毎に任意にとって固定する. この時, $M > 0$ があって, $N > M$ なる任意の素数 N と $1/2 \leqslant \forall s \leqslant 1$ に対して, *Hecke* 固有新形式 $f \in S_k(N)^{\mathrm{new}}$ が存在して, 次を満たす:

(1) (非ゼロ性) $\quad L(s, \mathrm{Sym}^2(f)) \neq 0$,

(2) (*Hecke* 固有値の分布) $\quad (\ \lambda_f(p)\ )_{p|n} \in \prod_{p|n} J_p$.

特に, $\prod_{p|n} J_p = \prod_{p|n}[-2, 2]$ の時は **(P)** を仮定しなくて良い.

4.2. $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ **の** L **関数の中心値.** 次に [例 2] の場合の結果の応用を紹介しよう. ϕ の T_p における固有値を $\lambda_\phi(p) = p^{\nu_p/2} + p^{-\nu_p/2}$ $(\nu_p \in \mathbb{C})$, $f \in H_k = H_k(1)$ の T_p における固有値を $\lambda_f(p) = \alpha_p + \alpha_p^{-1}$ $(\alpha_p \in \mathbb{C}^\times)$ と表せることに注意しておく. ϕ と f の対称 2 次リフト $\mathrm{Sym}^2(f)$ の Rankin-Selberg L 関数を以下のように定める.

$$L(s, \phi \times \mathrm{Sym}^2(f)) := \prod_{p<\infty} \det(1_6 - p^{-s} \begin{bmatrix} p^{\nu_p/2} & \\ & p^{-\nu_p/2} \end{bmatrix} \otimes \mathrm{Sym}^2 \begin{pmatrix} \alpha_p & \\ & \alpha_p^{-1} \end{pmatrix})$$

これは整関数として解析接続できて, $L(s, \phi \times \mathrm{Sym}^2(f)) \fallingdotseq L(1-s, \phi \times \mathrm{Sym}^2(f))$ の形の関数等式を持つ ([5]).

$\mu_f(\phi)$ は f, $\bar{f}$, ϕ の 3 つのカスプ形式の積の積分である. これは三重線型周期と呼ばれていて, Watson (2002) の学位論文 [19] と, その一般化である市野 (2008) の結果 [4] により, 三重積 L 関数の 1/2 における特殊値を使った公式が知られている. いまは三重積 L 関数の代わりに上で導入した L 関数を用いて $|\mu_f(\phi)|^2$ を以下のように記述することができる.

Theorem 15.

$$\frac{|\mu_f(\phi)|^2}{\|\phi\|^2} \doteqdot \frac{L(1/2,\phi)L(1/2,\phi\times \mathrm{Sym}^2(f))}{L(1,\mathrm{Sym}^2(\phi))L(1,\mathrm{Sym}^2(f))^2}.$$

$k \geqslant 4$ を偶数とする．H_k は $S_k(1)$ の正規直交基底であったことを思い出しておく．$f \in H_k$ を固定する毎に, $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ に対して

$$\mu_f(\phi) := \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}} \phi(\tau)|f(\tau)|^2 y^k \frac{dxdy}{y^2}$$

とおく．f が Maass 形式だったならラプラシアンの固有値を ∞ に飛ばした時の確率測度 μ_f の振る舞いに関する量子一意エルゴード性 (Quantum Unique Ergodicity, 略して QUE) の予想があるが[5], f が正則の場合にも $k \to \infty$ とすることで QUE の正則類似を考えることができる．この QUE の正則類似は (レベルが 1 の場合に)Holowinsky, Soundararajan によって解かれた．

Theorem 16. (*Holowinsky, Soundararajan* (2010) [3]) k ごとに $f \in H_k$ を任意にとって固定する．この時, 弱収束の意味で以下が成り立つ．

$$\lim_{k\to\infty} \mu_f = \frac{3}{\pi}\frac{dxdy}{y^2}.$$

上の QUE の正則類似が証明される前に, QUE の正則類似の平均版が先に証明された．

Theorem 17. (*Luo* (2003) [7]) $A \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}$ を可測集合とする時,

$$\frac{1}{\dim S_k(1)} \sum_{f\in H_k} \mu_f(A) = \int_A \frac{3}{\pi}\frac{dxdy}{y^2} + O(k^{-1/2+\epsilon}).$$

また, μ_f の 2 次モーメントの f に関する和の重さに関する平均 (Quantum variance の和で $2 \leqslant k \leqslant K$ を $K \leqslant k < 2K$ に置き換えたもの) の漸近公式も知られている．

Theorem 18. (*Luo, Sarnak* (2004) [8] + *Sarnak, Zhao* (2018) [11])
ϕ をレベル *1* の *even Hecke-Maass* カスプ形式とする．この時,

$$\lim_{K\to\infty} \frac{1}{2^{-1}K} \sum_{k\in[K,2K)} \sum_{f\in H_k} |\mu_f(\phi)|^2 \to C(\phi)\pi L(1/2,\phi)\|\phi\|^2.$$

ただし,

$$C(\phi) = \frac{1}{\zeta(2)} \prod_p \left(1 - \frac{p^{-1}\lambda_\phi(p)}{p^{1/2}+p^{-1/2}}\right)$$

とおく．この無限積は *Kim-Sarnak bound* $|\lambda_\phi(p)| \leqslant p^{7/64} + p^{-7/64} < 2p^{7/64}$) を使うことで収束することが示せる．

Luo, Sarnak の μ_f の 2 次モーメントの漸近公式の類似として, 我々の公式から μ_f の 1 次モーメントの漸近公式を与えることができる．

Theorem 19. (*Average of 1st moments* [17])

$$\frac{1}{2^{-1}K} \sum_{k\in[K,2K)} (-1)^{k/2} \sum_{f\in H_k} \mu_f(\phi)\lambda_f(n) \xrightarrow{K\to\infty} \frac{\mathbb{P}_{-4n}(\phi)B(\nu_{\mathrm{fin}};-4n)}{\sqrt{4n}}.$$

ここで, $-4n = Df^2$ *(*D は基本判別式で f は自然数*)* の時に $\mathbb{P}_{-4n}(\phi) := \mathbb{P}_D(\phi)$ とおいた．

ϕ に対して,

$$X_\phi := \{n \in \mathbb{N} \mid -4n : \text{ fundamental discriminant } \& \ L(1/2,\phi\otimes\chi_{-4n}) \neq 0\}$$

[5] 保型形式に関連する QUE については, 拙著 [14, §1] にも詳細あり．

とおく．[1] により, $\#X_\phi = \infty$ となることが知られている．我々の 1 次モーメントの漸近公式と Luo-Sarnak の 2 次モーメントの漸近公式を組み合わせることで,

$$N_{\phi,n}(K) := \#\{f \in \bigcup_{k\in[K,2K)} H_k \mid L(1/2, \phi \times \mathrm{Sym}^2(f))\lambda_f(n) \neq 0\}$$

の下界を定量的に与えることができる．

Theorem 20. (*Quantitative non-vanishing of L-values* [17]) $L(1/2,\phi) \neq 0$ を仮定する．この時, $\forall n \in X_\phi$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists K_{\phi,n,\epsilon} > 0$, $\forall K \geqslant K_{\phi,n,\epsilon}$,

$$\frac{N_{\phi,n}(K)}{K} \geqslant \frac{1-\epsilon}{16\pi}\,\frac{1}{\sqrt{n}\,d(n)^2}\,\frac{L(1/2,\phi\otimes\chi_{-4n})}{C(\phi)L(1,\mathrm{Sym}^2(\phi))}\ (>0).$$

ここで次元公式により

$$\#(\bigcup_{K\leqslant k<2K} H_k) \asymp K^2$$

なので, 上の定理の左辺は割合にはなっていないことに注意．

Luo, Sarnak の公式から, $\lim_{K\to\infty} N_{\phi,1}(K) = \infty$ が分かるが, 上記の結果は $n \geqslant 2$ に対する $\lambda_f(n)$ の非ゼロ性も考慮しているし, 無限大に発散するスピードの下界を L 関数などの数論的データで与えているところが興味深い．

Remark 21. 本橋 (1992) [10] の $L(1/2,\phi)$ の 2 次モーメントの漸近公式により, $L(1/2,\phi) \neq 0$ を満たす *even Hecke-Maass* カスプ形式 ϕ は無数に存在する．

5. 証明

簡単のため, $F = \mathbb{Q}$, $N = 1$ としておく．証明を厳密に紹介すると, 様々な記号が乱舞し, 積分の発散もたくさん生じるので, 計算のアイディアを軸とする rough sketch を書くに留める．

証明のポイントは跡公式で用いるテスト関数 $f = \prod_v f_v \in C^\infty(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$ における局所成分 $f_v \in C^\infty(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_v))$ は,

- f_∞ は重さ k の $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ の離散系列表現の行列係数,
- local な Hecke 作用素 T_p のレゾルベント核関数 (但し素数 p は $p|n$ となるもの),
- $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_p)$ の特性関数 (p は n を割らない素数).

f は $n \in \mathbb{N}$ に依存して定まる関数である．重要なこととして, $\mathrm{Supp}(f)$ がコンパクトでないことが挙げられる．f_∞, f_p $(p|n)$ はサポートがコンパクトではない．なので, 積分や無限和の収束性や順序交換は慎重に行わなければならない．このような欠点がある一方で, コンパクト性を捨てて f_∞ として行列係数を採用した恩恵として,

$$K_f(g,h) = \sum_{\gamma\in\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})} f(g^{-1}\gamma h)$$

が各変数 g, h に対して, 重さ k のカスプ形式となる．この和が絶対収束するためには, $k \geqslant 4$ が必要である．ここで $k = 2$ が除外される．

通常の跡公式は

$$\int_{\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})} K_f(g,g)dg.$$

を 2 通りに計算することで得られたのだが, ここでは

$$\int_{\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})} K_f(g,g)\varphi(g)dg.$$

なる積分を考える．ここで, $\varphi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}$ は [例 1] または [例 2] でみた保型形式である．この積分のスペクトルサイドは,

$$K_f(g,g) = C\sum_{\psi\in H_k} c_\psi\,\overline{\tilde{\psi}(g)}\tilde{\psi}(g) \qquad (C, c_\psi \in \mathbb{C})$$

という核関数のスペクトル展開を用いて計算すれば良い．各 ψ はカスプ形式なので急減少であるから, この有限和に φ を書けて積分したものは収束する．

次に幾何的展開について述べよう．$K_f(g,h)$ の定義式を出発点とし, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ を共役類で分解することによって,

$$K_f(g,g) = \Phi_{\mathrm{id}}(g) + \Phi_{\mathrm{unip}}(g) + \Phi_{\mathrm{hyp}}(g) + \Phi_{\mathrm{ell}}(g)$$

という表示が得られる．ここで,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathrm{id}}(g) &= f([\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}]),\\
\Phi_{\mathrm{unip}}(g) &= \sum_{\xi\in Z(\mathbb{Q})\{[\begin{smallmatrix}1&*\\0&1\end{smallmatrix}]\}\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})} f(g^{-1}\xi^{-1}[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}]\xi g),\\
\Phi_{\mathrm{hyp}}(g) &= \frac{1}{2}\sum_{\xi\in\{[\begin{smallmatrix}*&0\\0&*\end{smallmatrix}]\}\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})}\ \sum_{a\in\mathbb{Q}^\times-\{1\}} f(g^{-1}\xi^{-1}[\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}]\xi g),\\
\Phi_{\mathrm{ell}}(g) &= \frac{1}{2}\sum_{E=\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})}\ \sum_{\xi\in E^\times\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})}\ \sum_{\gamma\in\mathbb{Q}^\times\backslash(E^\times-\mathbb{Q}^\times)} f(g^{-1}\xi^{-1}\gamma\xi g).
\end{aligned}$$

この時, 各 Φ_* に φ を書けて積分を実行すれば幾何的展開が得られる．

本研究において, この幾何的展開が先行研究にはない new insight を提示している．$\gamma\in\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ に対して γ の $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ 内の中心化群を G_γ とする．すると幾何的展開における γ に対応する項の積分計算は形式的に以下のようにできる．

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}\Big\{\sum_{\xi\in G_\gamma(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})} f(g^{-1}\xi^{-1}\gamma\xi g)\Big\}\ \varphi(g)dg\\
&=\int_{G_\gamma(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})} f(g^{-1}\gamma g)\ \varphi(g)dg\\
&=\int_{G_\gamma(\mathbb{A}_\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})} f(g^{-1}\gamma g)\Big\{\int_{G_\gamma(\mathbb{Q})\backslash G_\gamma(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}\varphi(tg)dt\Big\}dg
\end{aligned}$$

よって φ の G_γ に沿った周期積分の荷重つきの軌道積分が生じる．あとは球関数の重複度 1 定理を用いて素点ごとの積分に分解し, 各素点ごとに local な重み付き軌道積分を計算すれば良い．

Remark 22. 水本, 高瀬, *Jacquet, Zagier* の手法は幾何サイドの計算で *unfolding* が本質的に用いられた．しかし我々の手法では幾何サイドで *unfolding* を必要としない．そこが従来の計算方法と大きく異なる点である．*unfolding* を必要としない手法を開拓したことにより, *Eisenstein* 級数をカスプ形式に置き換えることが可能となったのである．

φ がカスプ形式の時は周期積分はいつでも収束する．しかし, もし φ が *Eisenstein* 級数なら軌道積分は発散してしまう．*unfolding* を用いない代わりに, 積分が収束しないという問題が生じたのである．例えば $J_{\mathrm{id}}=\infty$ となってしまう．しかし, *Eisenstein* 級数を *smoothed Eisenstein* 級数に変形することで, 発散の問題を解消することができる．実際, *smoothed Eisenstein* 級数は急減少関数になる[6] ので, 積分の発散問題をうまく正当化することができる．

Zagier の公式の一般化を目的として φ が *Eisenstein* 級数の場合の計算を実行していた際に, 表現論を用いて素点ごとの積分に帰着できることに気づき, φ がカスプ形式の場合の公式が後から得られた．しかし積分の収束性の観点から見れば, 数学的には φ がカスプ形式の場合のほうが幾何サイドの計算が容易である．

---

[6] 概均質ベクトル空間のゼータ関数の解析接続に用いられたオリジナルの smoothed Eisenstein 級数 (cf. [12, Lemma 2.9]) は smoothed Eisenstein 級数の定義において, 極付きの関数を使用している．そのため, オリジナルの smoothed Eisenstein 級数は急減少ではない．しかし今回はこの smoothed 化を参考に Eisenstein 級数を急減少関数に変形することを考えたので, 我々が構成したものも smoothed Eisenstein 級数と呼んでいる．数学的な性質はどちらかというと pseudo Eisenstein 級数に近い．

謝辞

第64回代数学シンポジウム (於 東北大学) での講演, 執筆の機会を与えて下さった世話人の皆様にこの場を借りて感謝致します.

なお, 本研究はJSPS科研費18H05835 (研究活動スタート支援) の助成を受けたものであります. (2019年度からの基金化に伴い, 執筆時の課題番号は19K21025に変わっております.)

References

[1] Friedberg, S., Hoffstein, J., *Nonvanishing theorems for automorphic L-functions on* GL(2), Ann. of Math. (2) **142** No.2 (1995), 385–423.

[2] Gelbart, S., Jacquet, H., *A relation between automorphic representations of* GL(2) *and* GL(3), Ann. Sci. Ecole Normale Sup. 4 série, **11** (1978), 471–552.

[3] Holowinsky, R., Soundararajan, K., *Mass equidistribution for Hecke eigenforms*, Ann. Math., **172** (2010), 1517–1528.

[4] Ichino, A., *Trilinear forms and the central values of triple product L-functions*, Duke Math. J. **145** No.2 (2008), 281–307.

[5] Jacquet, H., Piatetskii-Shapiro, I. I., Shalika, J. A., *Rankin-Selberg convolutions*, Amer. J. Math., **105**, No. 2, 367–464, 1983.

[6] Jacquet, H., Zagier, D., *Eisenstein series and the Selberg trace formula II*, Trans. Amer. Math. Soc. **300** No.1 (1987), 1–48.

[7] Luo, W., *Equidistribution of Hecke eigenforms on the modular surface*, Proc. Amer. Math. Soc. vol. **131** (2003), no. 1, 21–27.

[8] Luo, W., Sarnak, P., *Quantum variance for Hecke eigenforms*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **37** (2004), no. 5, 769–799.

[9] Mizumoto, S., *On the second L-functions attached to Hilbert modular forms*, Math. Ann. **269**, 191–216, 1984.

[10] Motohashi, Y., *Spectral mean values of Maass wave form L-functions*, J. Number Theory **42** (1992), no.3, 258–284.

[11] Sarnak, P., Zhao, P., *The quantum variance of the modular surface*, with Appendix by Michael Woodbury, preprint (2018). https://arxiv.org/abs/1303.6972

[12] Shintani, T., *On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms*, J. Math. Soc. Japan **24** (1972), 132–188.

[13] 杉山真吾, Hilbert モジュラー形式に対する Jacquet-Zagier 型の跡公式, 第11回福岡数論研究集会報告集, 2018, 57–69.

[14] 杉山真吾, モジュラー形式の三重積に関係する変形された跡公式, to appear in 「保型形式, 保型表現とその周辺」RIMS 講究録.

[15] 杉山真吾, On generalized trace formulas for GL(2), to appear in 「2019 早稲田整数論研究集会」報告集.

[16] Sugiyama, S., Tsuzuki, M., *An explicit trace formula of Jacquet-Zagier type for Hilbert modular forms*, J. Funct. Anal., **275** (2018), no. 11, 2978–3064.

[17] Sugiyama, S., Tsuzuki, M., *Quantitative non-vanishing of central values of certain L -functions on* $\mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(3)$, preprint. https://arxiv.org/abs/1805.00209

[18] Takase, K., *On the trace formula of the Hecke operators and the special values of the second L-functions attached to the Hilbert modular forms*, manuscripta math. **55**, 137–170, (1986).

[19] Watson, T., *Rankin triple products and quantum chaos*, Ph.D Thesis (Princeton, 2002). https://arxiv.org/abs/0810.0425

[20] Wu, H., *Deducing Selberg trace formula via Rankin-Selberg method for* GL_2, Trans. Amer. Math. Soc. **372**, Number 12, (2019), 8507–8551.

[21] Zagier, D., *Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields*, Lecture Notes in Math., **627**, 105–169, Springer, 1977.

[22] Zagier, Don 著, 片山孝次 訳, 数論入門 - ゼータ関数と 2 次体 - , 岩波書店, 1990.

Shingo Sugiyama
Department of Mathematics, College of Science and Technology, Nihon University, Suruga-Dai, Kanda, Chiyoda, Tokyo 101-8308, Japan
E-mail : s-sugiyama@math.cst.nihon-u.ac.jp