Calculation of the q-characters of simple modules over quantum loop algebras of non-symmetric type

大矢 浩徳 (OYA Hironori)*†

概要

本稿では, 非対称型量子ループ代数の有限次元既約表現の q-指標を求める方法の確立に向けての試みについて解説を行う[*1]. 本研究は David Hernandez 氏との共同研究である.

1 導入

1.1 問題設定

複素単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対し, 対応するループ Lie 環 $\mathcal{L}\mathfrak{g}$ は $\mathcal{L}\mathfrak{g} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ に

$$[X \otimes t^m + aK, Y \otimes t^n + bK] = [X, Y] \otimes t^{m+n} \quad X, Y \in \mathfrak{g}, m, n \in \mathbb{Z}$$

で定まる Lie 括弧積を考えた Lie 環である.

量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ とは, ループ Lie 環 $\mathcal{L}\mathfrak{g}$ の普遍展開環 $\mathcal{U}(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ にパラメータ q を入れて変形 (q-変形) した代数であり, Drinfeld, Jimbo によって'80 年代の中頃に導入された. $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の有限次元表現論は量子 Yang-Baxter 方程式のスペクトルパラメータ付きの解を与える代数的枠組みであることに動機付けられて組織的な研究が'90 年代前半から ([CP91]) なされているが, 今もなお難しい点が多く残されている. 例えば, 以下の基本的な問題も一般には未解決である:

(Q) $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の既約表現の次元, および "指標"(q-指標と呼ばれる) を一般的に求める方法はあるか?

この問 (Q) についてその背景 (現状) を説明しよう. 以下では, $\mathfrak{g}$ の Dynkin 型が X_n のとき, $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ を $\mathrm{X}_n^{(1)}$ 型量子ループ代数といい, さらに X が ADE のいずれかであるとき, $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ を**対称型**, それ以外のとき**非対称型**と呼ぶ.

既約表現の q-指標の計算について, $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ が対称型の場合に, Nakajima は既約表現の q-指標を求めるアルゴリズムを与えた [N04]. つまり, この場合には (Q) には一つの解答が与えられている. これは q-指標の t-変形 (**(q,t)-指標**) を考え, Kazhdan-Lusztig アルゴリズムの結果として既約表現の q-指標を得るというものであった. Nakajima の t-変形の構成は次数付き箙多様体を用いた幾何的考察に基づいており, この構成が Kazhdan-Lusztig アルゴリズムの結果が正当な既約表現の q-指標の t-変形である ($= t = 1$ で正しく q-指標に特殊化される) ことを保証していた.

非対称型の場合への拡張の試みとして, Hernandez は Frenkel-Reshetikhin のオリジナルの q-指標の構成を基に**代数的に**標準表現の q-指標の t-変形を構成した [H04]. これを用いて, 形式的に Kazhdan-Lusztig アルゴリズムを働かせることで, やはり "既約表現の (q,t)-指標" が得られる. しかし, この代数的な構成からは $t = 1$ でこれが実際の q-指標に特殊化されるという事実は保証されない. つまりこの場合は以下は一般には未だ予想である.

* 〒337-8570 埼玉県さいたま市見沼区深作 307 芝浦工業大学 システム理工学部 数理科学科
† E-mail : hoya@shibaura-it.ac.jp　Webpage : http://www.sic.shibaura-it.ac.jp/ hoya

*1 日本数学会 2019 年度年会においてこのテーマに関連する内容で講演を行ったため, 本稿はそのアブストラクト [Oya] に加筆修正を加えた内容となっております.

予想 1.1. 非対称型の場合も, 既約表現の (q,t)-指標は $t=1$ で q-指標に特殊化される. つまり, 既約表現の q-指標は *Kazhdan-Lusztig* アルゴリズムによって求めることができる.

この予想の解決が, 非対称型 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の既約表現の一般的な q-指標の計算方法を確立することに対応する.

1.2 予想 1.1 へのアプローチ

予想 1.1 に向けての我々のアプローチは,

対称型と非対称型の量子ループ代数の表現論の類似性

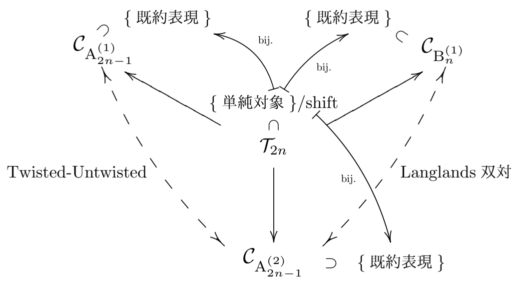
に着目することである. $\mathrm{Z}_n^{(1)}$ 型の量子ループ代数の有限次元表現の圏を $\mathcal{C}_{\mathrm{Z}_n^{(1)}}$ とする. 近年になって, Dynkin 型の組

$$(\mathrm{X}_N, \mathrm{Y}_n) = (\mathrm{A}_{2n-1}, \mathrm{B}_n),\ (\mathrm{D}_{n+1}, \mathrm{C}_n),\ (\mathrm{E}_6, \mathrm{F}_4),\ (\mathrm{D}_4, \mathrm{G}_2)$$

に対し, $\mathcal{C}_{\mathrm{X}_N^{(1)}}$ と $\mathcal{C}_{\mathrm{Y}_n^{(1)}}$ の間に強い類似性が見られることが認識されてきている [FH11, KOh19, KKOh19, OhSc19, HO19, KKOhP19]. これらの組は以下の性質を持っている：

- X_N は対称型, Y_n は非対称型である.
- $\mathrm{Y}_n^{(1)}$ の Langlands 双対 ${}^L\mathrm{Y}_n^{(1)}$ はアフィン Dynkin 型 $\mathrm{X}_N^{(2) \text{ or } (3)}$ に等しい ([Kac, Chapter 4] 参照).

2 つめの性質に現れているように, $\mathcal{C}_{\mathrm{X}_N^{(1)}}, \mathcal{C}_{{}^L\mathrm{Y}_n^{(1)}}, \mathcal{C}_{\mathrm{Y}_n^{(1)}}$ が三つ組となって, 関連していると考えられている. 実際に, Kashiwara らの研究グループ [K^{3}18, KKKOh15, KKOh19] によって, $(\mathrm{X}_N, \mathrm{Y}_n) = (\mathrm{A}_{2n-1}, \mathrm{B}_n)$ の時に以下の状況の成立が確かめられている (他の Dynkin 型の組についても部分的に以下の状況は成立している [KOh19, OhSc19])：



中心に存在する $\mathcal{T}_{2n}$ が A_∞ 型箙 Hecke 代数の次数付き有限次元表現のなす圏からある局所化を通じて得られる圏であり, そこから, $\mathcal{C}_{\mathrm{A}_{2n-1}^{(1)}}, \mathcal{C}_{\mathrm{A}_{2n-1}^{(2)}}, \mathcal{C}_{\mathrm{B}_n^{(1)}}$ へと**一般化量子** *Schur-Weyl* **双対関手**と呼ばれる完全テンソル関手が出ている. $\mathcal{T}_{2n}$ は次数付きの圏であるが, その単純対象の同型類は次数付けを無視すると, 一般化量子 Schur-Weyl 双対関手によってそれぞれの圏の既約表現の同型類と全単射に対応している. 特に, それぞれの圏の Grothendieck 環を考えることで以下が言える：

定理 1.2 ([KKOh19, Theorem 3.1.1])**.** *$r=1$ or 2 としたとき, 以下のような Grothendieck 環の同型が存在する :*

$$K(\mathcal{C}_{\mathrm{A}_{2n-1}^{(r)}}) \simeq K(\mathcal{C}_{\mathrm{B}_n^{(1)}}), \quad \{[\text{既約表現}]\} \leftrightarrow \{[\text{既約表現}]\}.$$

1.1 節で説明を行ったように対称型の理解は非対称型に比べて進んでいるため, 上の類似性の考え方を介して対称型の結果を非対称型に移すことで非対称型の予想に取り組もうというのが主な戦略である.

1.3 主結果の概要

我々の主結果は, 定理 1.2 の t-変形版を得たことである. $\mathcal{C}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ に対応する量子 Grothendieck 環 (=$\mathcal{C}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ の既約表現の [H04] の意味での (q,t)-指標のなす代数) を $K_t(\mathcal{C}_{\mathrm{X}_n^{(1)}})$ と書く：

定理 1.3 (Hernandez-O. (定理 4.2))**.** $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数としての同型

$$K_t(\mathcal{C}_{\mathrm{A}^{(1)}_{2n-1}}) \simeq K_t(\mathcal{C}_{\mathrm{B}^{(1)}_n}), \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{既約表現の} \\ (q,t)\text{-指標} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{既約表現の} \\ (q,t)\text{-指標} \end{array} \right\}.$$

が存在する．さらに，この同型写像を $t=1$ に特殊化すると，*Kashiwara-Kim-Oh* による定理 *1.2* の同型写像に一致する．

これを用いて以下を得る:

系 1.4 (系 4.8)**.** $\mathrm{B}^{(1)}_n$ 型において予想 *1.1* は正しい．

また定理 1.3 の他の系として, $\mathrm{B}^{(1)}_n$ 型の場合には知られていなかった様々な正値性に関する結果が得られる (系 4.4, 4.5).

$(\mathrm{X}_N, \mathrm{Y}_n) = (\mathrm{A}_{2n-1}, \mathrm{B}_n)$ 以外の場合についても同様の量子 Grothendieck 環の同型の存在は期待される*2．一方, 現在のところ通常の Grothendieck 環の同型である定理 1.2 型の定理が証明されているのは $(\mathrm{X}_N, \mathrm{Y}_n) = (\mathrm{A}_{2n-1}, \mathrm{B}_n)$ の場合のみであり, 予想 1.1 の証明のためにはこれに対応する主張が必須であるため, 非対称型で予想 1.1 が完全に解決しているのが $\mathrm{B}^{(1)}_n$ 型のみとなっている (系 4.8 の直前の解説参照).

2 量子ループ代数の有限次元表現論

量子ループ代数の有限次元表現論について簡単に復習する．以下は一般的な記号である：

- $\mathfrak{g}$ を X_n 型複素単純 Lie 環 ($\mathrm{X}_n = \mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \ldots, \mathrm{G}_2$) とし, $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ (resp. $\{h_i \mid i \in I\}$) をその単純ルート (resp. 余ルート) の集合とする．
- $C = (c_{ij})_{i,j \in I} = (\langle h_i, \alpha_j \rangle)_{i,j\in I}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 行列とし, $(r_i)_{i \in I} \in \mathbb{Z}^I_{>0}$ を,

  $$\text{(i)}\ r_i c_{ij} = r_j c_{ji},\ \forall i,j \in I \qquad \text{(ii)}\ \min\{r_i \mid i \in I\} = 1$$

  を満たす唯一の正の整数の組とする．(X = ADE の場合, 全ての $i \in I$ に対して $r_i = 1$.)
- x を 1 の冪根でない 0 以外の複素数, あるいは不定元とする．このとき, 各 $i \in I, n \in \mathbb{Z}$ に対し,

  $$x_i := x^{r_i}, \qquad [n]_x := \frac{x^n - x^{-n}}{x - x^{-1}},$$

  とする．

以下では, q を 1 の冪根でない 0 以外の複素数とする．

定義 2.1 ([D88, B94])**.** $\mathrm{X}^{(1)}_n$ **型量子ループ代数** $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})(=\mathcal{U}_q(\mathrm{X}^{(1)}_n))$ とは,

$$k_i^{\pm 1}\ (i \in I),\ x^{\pm}_{i,r}\ ((i,r) \in I \times \mathbb{Z}),\ h_{i,r}\ ((i,r) \in I \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))$$

という生成元と, 以下の定義関係式によって定まる $\mathbb{C}$-代数である (特に指定のない限り添え字は動きうる範囲全てを動くとする)：

(I) $k_i k_i^{-1} = 1 = k_i^{-1} k_i$, $k_i k_j = k_j k_i$,
(II) $k_i x^{\pm}_{j,r} = q_i^{\pm c_{ij}} x^{\pm}_{j,r} k_i$,
(III) $[k_i, h_{j,r}] = 0$,
(IV) $[x^+_{i,r}, x^-_{j,s}] = \delta_{ij} \dfrac{\phi^+_{i,r+s} - \phi^-_{i,r+s}}{q_i - q_i^{-1}}$,
(V) $[h_{i,r}, x^{\pm}_{j,s}] = \pm \dfrac{[rc_{ij}]_{q_i}}{r} x^{\pm}_{j,r+s}$,
(VI) $[h_{i,r}, h_{j,s}] = 0$,
(VII) $x^{\pm}_{i,r+1} x^{\pm}_{j,s} - q_i^{\pm c_{ij}} x^{\pm}_{i,r} x^{\pm}_{j,s+1} = q_i^{\pm c_{ij}} x^{\pm}_{j,s} x^{\pm}_{i,r+1} - x^{\pm}_{j,s+1} x^{\pm}_{i,r}$,

*2 本稿では説明を行わないが, 筆者は団代数構造の類似性から同様の同型の存在を期待している．

(VIII) $\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{1-c_{ij}}}\sum_{k=0}^{1-c_{ij}}(-1)^k\begin{bmatrix}1-c_{ij}\\ k\end{bmatrix}_{q_i} x^{\pm}_{i,r_{\sigma(1)}}\cdots x^{\pm}_{i,r_{\sigma(k)}}x^{\pm}_{j,s}x^{\pm}_{i,r_{\sigma(k+1)}}\cdots x^{\pm}_{i,r_{\sigma(1-c_{ij})}}=0.$
ただし, $i,j\in I$, $i\neq j$, $r_1,\ldots,r_{1-c_{ij}},s\in\mathbb{Z}$.

ここで,

$$\phi_i^{\pm}(z):=\sum_{r=0}^{\infty}\phi^{\pm}_{i,\pm r}z^{\pm r}=k_i^{\pm 1}\exp\left(\pm(q_i-q_i^{-1})\sum_{r>0}h_{i,\pm r}z^{\pm r}\right).$$

さらに, $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ は Hopf 代数の構造を持つことが知られている (例えば [CP] 参照)*3.

$\mathcal{C}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ を量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の有限次元表現のなす圏とする*4. これはモノイダルアーベル圏である. いま, $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の生成元の一部 $\{k_i,h_{i,r}\mid i\in I,r\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$ は互いに可換なので, 任意の $\mathcal{C}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ の対象 V はこれらの作用に関する同時広義固有空間分解 $V=\bigoplus_m V_m$ を持つ. ここで [CP, FR99] において, この同時固有値 m は $\mathbb{Z}$-係数無限変数 Laurent 多項式環

$$\mathcal{Y}_{\mathbb{C}^\times,\mathrm{X}_n^{(1)}}:=\mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}\mid i\in I,a\in\mathbb{C}^\times]$$

内の Laurent 単項式として指定されることが示された. 具体的な対応は, 各 $\phi^{\pm}_{i,\pm r}$ の V_m における広義固有値を $\gamma^{\pm}_{i,\pm r}$ と書き, m を

$$m=\prod_{i\in I,a\in\mathbb{C}^\times}Y_{i,a}^{u_{i,a}},$$

と表示したとき, 各 $i\in I$ に対して,

$$\sum_{r=0}^{\infty}\gamma^{\pm}_{i,\pm r}z^{\pm r}=\prod_{a\in\mathbb{C}^\times}\left(q_i\frac{1-zq_i^{-1}a}{1-zq_ia}\right)^{u_{i,a}}$$

として与えられる. ここで, これらはそれぞれ $\mathbb{C}[\![z]\!]$, $\mathbb{C}[\![z^{-1}]\!]$ での等式である. なお, $\phi^{\pm}_{i,0}=k_i^{\pm 1}$ であったことに注意すると, $Y_{i,a}$ は有限次元単純 Lie 環の表現論における $i\in I$ に対応する基本ウェイト e^{ϖ_i} の類似であることがわかる. 同時広義固有空間 V_m を V の l-ウェイト m の **l-ウェイト空間**という. いま,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}^\times,\mathrm{X}_n^{(1)}}:=\left\{\prod\nolimits_{i\in I,a\in\mathbb{C}^\times}Y_{i,a}^{m_{i,a}}\mid m_{i,a}\geq 0\right\}\subset\mathcal{Y}_{\mathbb{C}^\times,\mathrm{X}_n^{(1)}}$$

とし, この元を**支配的単項式**とよぶ. これは, 有限次元単純 Lie 環の表現論における支配的整ウェイトの類似であり, 実際に最高ウェイト理論の類似で以下が成立する:

定理 2.2 ([CP95, CP])**.** *$\mathcal{B}_{\mathbb{C}^\times,\mathrm{X}_n^{(1)}}$ と $\mathcal{C}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ の単純対象の同型類の間に 1 対 1 対応が存在する.*

この定理で $m\in\mathcal{B}_{\mathbb{C}^\times,\mathrm{X}_n^{(1)}}$ に対応する $\mathcal{C}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ の単純対象を $L(m)$ と書く. ここでは,

$$\dim L(m)_m=1\qquad\qquad x^{+}_{i,r}.L(m)_m=0,\forall i\in I,\ r\in\mathbb{Z}$$

となるように対応させている. 特に $L(Y_{i,a})$ の形の表現は**基本表現**と呼ばれる. さらに q-**指標準同型**と呼ばれる以下の射 χ_q が定義される:

定理 2.3 ([FR99])**.** *モノイダルアーベル圏 $\mathcal{C}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ の Grothendieck 環を $K(\mathcal{C}_{\mathrm{X}_n^{(1)}})$ とする. このとき, 対応*

$$[V]\mapsto\sum_m\dim(V_m)m$$

は単射環準同型 $\chi_q\colon K(\mathcal{C}_{\mathrm{X}_n^{(1)}})\to\mathcal{Y}_{\mathbb{C}^\times,\mathrm{X}_n^{(1)}}$ を与える.

*3 これは Chevalley 型の別の $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の表示を用いて定義される構造で, 定義 2.1 に示した生成元で余積を記述するのは難しい.

*4 厳密には $\mathcal{C}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ は量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の 1 型有限次元表現のなす圏とする. 有限次元表現が 1 型であるとは $\{k_i\mid i\in I\}$ の固有値が全て q^m, $m\in\mathbb{Z}$ の形であることを言う. 量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の有限次元表現においては 1 型の表現のみを考えても一般性を失わない.

注意 2.4. 特に $K(\mathcal{C}_{\mathrm{X}_n^{(1)}})$ は可換であることに注意する．一般に $\mathcal{C}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ の対象 V, W に対し, $V \otimes W \simeq W \otimes V$ は成立しない．

各 $i \in I, a \in \mathbb{C}^\times$ に対し,

$$A_{i,a} := Y_{i,aq_i^{-1}} Y_{i,aq_i} \left(\prod_{j:\ c_{ji}=-1} Y_{j,a}^{-1} \right) \left(\prod_{j:\ c_{ji}=-2} Y_{j,aq^{-1}}^{-1} Y_{j,aq}^{-1} \right) \left(\prod_{j:\ c_{ji}=-3} Y_{j,aq^{-2}}^{-1} Y_{j,a}^{-1} Y_{j,aq^2}^{-1} \right).$$

とする．ここで, $\mathcal{Y}_{\mathbb{C}^\times, \mathrm{X}_n^{(1)}}$ 内の Laurent 単項式に対し, 半順序を

$$m \leq m' \Leftrightarrow \text{ある非負整数の組 } (v_{i,a})_{i \in I, a \in \mathbb{C}^\times} \text{ に対し, } m(m')^{-1} = \prod_{i \in I, a \in \mathbb{C}^\times} A_{i,a}^{-v_{i,a}}$$

と定義する．この半順序によって, m が $\chi_q(L(m))$ の**最高単項式**であることが以下のように述べられる：

定理 2.5 ([FM01])**.** 支配的単項式 $m \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^\times, \mathrm{X}_n^{(1)}}$ に対し, $\mathcal{Y}_{\mathbb{C}^\times, \mathrm{X}_n^{(1)}}$ の元 $\chi_q(L(m)) - m$ に現れる単項式は全て m よりも半順序 $\leq$ に関して真に小さい．

今 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, \mathrm{X}_n^{(1)}}$ を,

$$\chi_q(V) \in \mathbb{Z}[Y_{i,q^r}^{\pm 1} \mid i \in I, r \in \mathbb{Z}] =: \mathcal{Y}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$$

を満たす対象 V のなす $\mathcal{C}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ の充満部分圏とおく．このとき, $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, \mathrm{X}_n^{(1)}}$ は $\mathcal{C}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ の部分モノイダルアーベル圏である．圏 $\mathcal{C}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ の単純対象の構造およびモノイダル圏としての非自明な構造の研究は, $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, \mathrm{X}_n^{(1)}}$ に帰着される [HL10, §3.7]. 以降は常に圏 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, \mathrm{X}_n^{(1)}}$ 内の対象を考えるので, 以下の記法を用いる：

$$Y_{i,r} := Y_{i,q^r} \qquad A_{i,r} := A_{i,q^r} \qquad \mathcal{B}_{\mathrm{X}_n^{(1)}} := \mathcal{B}_{\mathbb{C}^\times, \mathrm{X}_n^{(1)}} \cap \mathcal{Y}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}.$$

例 2.6. $\mathcal{L}\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2[t^{\pm 1}]$ ($\mathrm{A}_1^{(1)}$ 型) のとき, $I = \{1\}$ であり,

$$\chi_q(L(Y_{1,r})) = Y_{1,r} + Y_{1,r+2}^{-1} = Y_{1,r}(1 + A_{1,r+1}^{-1}).$$

$\mathcal{L}\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_5[t^{\pm 1}]$ ($\mathrm{B}_2^{(1)}$ 型) のとき, $I = \{1, 2\}$ であり,

$$\begin{aligned} \chi_q(L(Y_{1,r})) &= Y_{1,r} + Y_{2,r+1} Y_{2,r+3} Y_{1,r+4}^{-1} + Y_{2,r+1} Y_{2,r+5}^{-1} + Y_{1,r+2} Y_{2,r+3}^{-1} Y_{2,r+5}^{-1} + Y_{1,r+6}^{-1} \\ &= Y_{1,r}(1 + A_{1,r+2}^{-1} + A_{1,r+2}^{-1} A_{2,r+4}^{-1} + A_{1,r+2}^{-1} A_{2,r+2}^{-1} A_{2,r+4}^{-1} + A_{1,r+2}^{-1} A_{1,r+4}^{-1} A_{2,r+2}^{-1} A_{2,r+4}^{-1}). \end{aligned}$$

各 $m = \prod_{i \in I, r \in \mathbb{Z}} Y_{i,r}^{u_{i,r}} \in \mathcal{B}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ に対し, **標準表現** $M(m)$ を,

$$M(m) := \overrightarrow{\bigotimes_{r \in \mathbb{Z}}} \left(\bigotimes_{i \in I} L(Y_{i,r})^{\otimes u_{i,r}} \right)$$

と定義する．

注意 2.7. $\overrightarrow{\bigotimes}_{r \in \mathbb{Z}}$ は左から右へ数の増える順にテンソル積を取るという意味である．実は $\bigotimes_{i \in I} L(Y_{i,r})^{\otimes u_{i,r}}$ の部分の同型類はテンソル積の順序によらない．

命題 2.8. $\{[L(m)] \mid m \in \mathcal{B}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}\}$ と $\{[M(m)] \mid m \in \mathcal{B}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}\}$ はともに $K(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, \mathrm{X}_n^{(1)}})$ の $\mathbb{Z}$-基底である．

いま, $\chi_q(M(m))$ は $L(Y_{i,0}), i \in I$ の q-指標がわかれば容易に計算可能なものである．これより, $\{[L(m)] \mid m \in \mathcal{B}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}\}$ と $\{[M(m)] \mid m \in \mathcal{B}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}\}$ の基底の変換行列を求めることができれば既約表現の q-指標が求められることになる．

3 量子 Grothendieck 環

ここでは, Hernandez[H04] による代数的な $K(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}, \mathrm{X}_n^{(1)}})$ の t-変形の構成を復習する．Hernandez の構成は ADE 型の場合には, Varagnolo-Vasserot[VV03], Nakajima[N04] によって構成されたものと同等のものになる．まず, q-指標の入る空間 $\mathcal{Y}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ を以下のデータを用いて非可換化する：

$C=(c_{ij})_{i,j\in I}$ を X_n 型の Cartan 行列として, $C(z)=(C(z)_{ij})_{i,j\in I}$, $\widetilde{C}(z)=(\widetilde{C}(z)_{ij})_{i,j\in I}$ (z: 不定元) を

$$C(z)_{ij}=\begin{cases} z^{r_i}+z^{-r_i} & i=j \text{ のとき}, \\ [c_{ij}]_z & i\neq j \text{ のとき}, \end{cases} \qquad \widetilde{C}(z)=C(z)^{-1}$$

で定義する. さらに, 各 $\widetilde{C}(z)_{ij}$ を形式的 Laurent 級数環 $\mathbb{Z}((z^{-1}))$ の元とみなし,

$$\widetilde{C}(z)_{ji}=\sum_{r\in\mathbb{Z}}\widetilde{c}_{ji}(r)z^r\in\mathbb{Z}((z^{-1}))$$

と書く. このとき $\mathrm{X}_n^{(1)}$ 型**量子トーラス** $\mathcal{Y}_{t,\mathrm{X}_n^{(1)}}$ とは以下で定義される $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数である:

<u>生成元:</u> $\widetilde{Y}_{i,r}^{\pm 1}$ $(i\in I, r\in\mathbb{Z})$

<u>関係式:</u> (I) $\widetilde{Y}_{i,r}\widetilde{Y}_{i,r}^{-1}=1=\widetilde{Y}_{i,r}^{-1}\widetilde{Y}_{i,r}$,

(II) 各 $i,j\in I$, $r,s\in\mathbb{Z}$ に対し,

$$\widetilde{Y}_{i,r}\widetilde{Y}_{j,s}=t^{\gamma(i,r;j,s)}\widetilde{Y}_{j,s}\widetilde{Y}_{i,r}.$$

ここで, $\gamma\colon (I\times\mathbb{Z})^2\to\mathbb{Z}$ は

$$\gamma(i,r;j,s):=\widetilde{c}_{ji}(-r_j-r+s)+\widetilde{c}_{ji}(r_j+r-s)-\widetilde{c}_{ji}(r_j-r+s)-\widetilde{c}_{ji}(-r_j+r-s)$$

で与えられる.

例 3.1. B_2 型 Cartan 行列 $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ を考えると,

$$C(z)=\begin{pmatrix} z^2+z^{-2} & -1 \\ -z-z^{-1} & z+z^{-1} \end{pmatrix} \qquad \widetilde{C}(z)=\frac{1}{z^3+z^{-3}}\begin{pmatrix} z+z^{-1} & 1 \\ z+z^{-1} & z^2+z^{-2} \end{pmatrix}$$

となるので,

$$\widetilde{C}(z)_{11}=\sum_{k\geq 0}(-1)^k(z^{-6k-2}+z^{-6k-4}), \qquad \widetilde{C}(z)_{12}=\sum_{k\geq 0}(-1)^k z^{-6k-3},$$
$$\widetilde{C}(z)_{21}=\sum_{k\geq 0}(-1)^k(z^{-6k-2}+z^{-6k-4}), \qquad \widetilde{C}(z)_{22}=\sum_{k\geq 0}(-1)^k(z^{-6k-1}+z^{-6k-5}),$$

である. よって, $\widetilde{c}_{ji}(r)$ は以下のようにまとめられる (空欄は 0 の意味である):

$\widetilde{c}_{j1}(r)$ \ r	-2	-4	-6	-8	-10	-12	-14	-16	$\cdots$
j 1	1	1		-1	-1		1	1	$\cdots$
2	1	1		-1	-1		1	1	

$\widetilde{c}_{j2}(r)$ \ r	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	-15	$\cdots$
j 1		1			-1			1	$\cdots$
2	1		1	-1		-1	1		

ここで, この表が r が -6 進む毎に値が -1 倍されるような周期性を持っていることは我々の主結果の証明においても重要である. 一般の B_n 型においては, r に $-2h^\vee$($h^\vee$ は双対 Coxeter 数 $2n-1$) を加えるごとに値が -1 倍されるような周期性を持っている[*5]. 一般の B_n 型における同様の表については [HO19, Example 4.3, Appendix A] を参照のこと.

いま, $\mathbb{Z}$-代数準同型

$$\mathrm{ev}_{t=1}\colon\mathcal{Y}_{t,\mathrm{X}_n^{(1)}}\to\mathcal{Y}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}, \quad \begin{cases} t^{1/2}\mapsto 1, \\ \widetilde{Y}_{i,r}\mapsto Y_{i,r}, i\in I, r\in\mathbb{Z}, \end{cases}$$

が存在する. この射は $t=1$ **への特殊化**と呼ばれる. さらに, 以下の**バー対合**と呼ばれる $\mathbb{Z}$-反代数対合

$$\overline{\cdot}\colon\mathcal{Y}_{t,\mathrm{X}_n^{(1)}}\to\mathcal{Y}_{t,\mathrm{X}_n^{(1)}}, \quad \begin{cases} t^{1/2}\mapsto t^{-1/2}, \\ \widetilde{Y}_{i,r}\mapsto t^{-1}\widetilde{Y}_{i,r}, i\in I, r\in\mathbb{Z}, \end{cases}$$

が存在する.

[*5] 他の方でも同様の周期性が見られるのだが, ここに双対 Coxeter 数が現れることの概念的な説明を筆者は持っていない.

各 $\mathcal{Y}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ の Laurent 単項式 m に対し, ある $\mathcal{Y}_{t,\mathrm{X}_n^{(1)}}$ の $t^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ 係数 Laurent 単項式 $\underline{m}$ であって, $\overline{\underline{m}} = \underline{m}$ を満たすものがただ一つ存在する．(e.g. $\underline{Y_{i,r}} = t^{-1/2}\widetilde{Y}_{i,r}$.) この記号で, $\widetilde{A}_{i,r} := \underline{A_{i,r}}$ と定義する．また, $\mathcal{Y}_{t,\mathrm{X}_n^{(1)}}$ の ($t^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ 係数) 支配的単項式を $\mathcal{Y}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ の場合と同様に定義する．

次に $\mathcal{Y}_{t,\mathrm{X}_n^{(1)}}$ の中で量子 Grothendieck 環を定義する．各 $i \in I$ に対し,

$$K_{i,t} := \langle \widetilde{Y}_{i,r}(1 + t\widetilde{A}_{i,r+r_i}^{-1}), \widetilde{Y}_{j,r}^{\pm 1} \mid j \in I \setminus \{i\}, r \in \mathbb{Z} \rangle_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]\text{-代数}} \subset \mathcal{Y}_{t,\mathrm{X}_n^{(1)}}$$

とする．このとき, $\mathcal{C}_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_n^{(1)}}$ の**量子** *Grothendieck* **環** $K_t(\mathcal{C}_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_n^{(1)}})$ を

$$K_t(\mathcal{C}_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_n^{(1)}}) := \bigcap\nolimits_{i \in I} K_{i,t}$$

と定義する．ここで各 $i \in I$ に対し, $\overline{K_{i,t}} = K_{i,t}$ となり, $\overline{K_t(\mathcal{C}_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_n^{(1)}})} = K_t(\mathcal{C}_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_n^{(1)}})$ であることにも注意する．以下が成立する．

定理 3.2 ([N04, H04])**.** (1) 各 $i \in I$, $r \in \mathbb{Z}$ に対し, $\underline{Y_{i,r}}$ のみを支配的単項式に持つ $K_t(\mathcal{C}_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_n^{(1)}})$ の元がただ一つ存在する．この元を $L_t(Y_{i,r})$ と書く．

(2) $\mathrm{ev}_{t=1}(K_t(\mathcal{C}_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_n^{(1)}})) = K(\mathcal{C}_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_n^{(1)}})$.

注意 3.3. 本稿では扱わないが, この $K_{i,t}$ は i に付随する遮蔽演算子の t-類似の核である．これは, 通常の q-指標のなす代数 ($\simeq$Grothendieck 環) が i に付随する遮蔽演算子の核の $i \in I$ を渡る共通部分として記述されることを t-類似の設定で考えたものとなっている．詳しくは [H04] を参照のこと．

いま $L_t(Y_{i,r})$ は,

$$\mathrm{ev}_{t=1}(L_t(Y_{i,r})) = \chi_q(L(Y_{i,r}))$$

を満たし, **基本表現の** (q,t)**-指標**と呼ばれる．また $L_t(Y_{i,r})$ の特徴づけより, $\overline{L_t(Y_{i,r})} = L_t(Y_{i,r})$ である．

各 $m = \prod_{i \in I} Y_{i,r}^{u_{i,r}} \in \mathcal{B}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ に対し,

$$M_t(m) := t^{N_m} \overrightarrow{\prod_{r \in \mathbb{Z}}} \left(\prod_{i \in I} L_t(Y_{i,r})^{u_{i,r}} \right)$$

とする．ただし, $N_m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ は $M_t(m)$ における $\underline{m}$ の係数が 1 となるように定義する．(実は $\prod_{i \in I} L_t(Y_{i,r})^{u_{i,r}}$ は可換な元の積である.) このとき, 以下が成立する．

- $\{M_t(m) \mid m \in \mathcal{B}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}\}$ は $K_t(\mathcal{C}_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_n^{(1)}})$ の $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-基底.
- 各 $m \in \mathcal{B}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ に対し, $\mathrm{ev}_{t=1}(M_t(m)) = \chi_q(M(m))$.

これらの性質より, $M_t(m)$ は**標準表現** $M(m)$ **の** (q,t)**-指標**と呼ばれる．各 $M_t(m)$ は $M_t(Y_{i,0}) = L_t(Y_{i,0}), i \in I$ が一度計算されれば容易に計算可能な元であることに注意する．ここから新たな基底が得られる：

定理 3.4 ([N04, H04])**.** 以下の性質を満たす $K_t(\mathcal{C}_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_n^{(1)}})$ の $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-基底 $\{L_t(m) \mid m \in \mathcal{B}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}\}$ が唯一つ存在する：

(S1) $\overline{L_t(m)} = L_t(m)$,

(S2) $M_t(m) = L_t(m) + \sum_{m' < m} P_{m,m'}(t) L_t(m')$. ここで, $P_{m,m'}(t) \in t^{-1}\mathbb{Z}[t^{-1}]$.

この各元 $L_t(m)$ は**既約表現** $L(m)$ **の** (q,t)**-指標**と呼ばれる．それは対称型の場合の Nakajima による以下の定理による：

定理 3.5 ([N04])**.** 量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathrm{X}_n^{(1)})$ が対称型 ($\mathrm{X} = \mathrm{ADE}$) のとき,

(1) 各 $m \in \mathcal{B}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ に対し, $\mathrm{ev}_{t=1}(L_t(m)) = \chi_q(L(m))$.

(2) 各 $m, m' \in \mathcal{B}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ に対し, $P_{m,m'}(t) \in t^{-1}\mathbb{Z}_{\geq 0}[t^{-1}]$.

この定理の証明は Nakajima による次数付き箙多様体を用いた幾何的な $\mathcal{U}_q(\mathcal{L}\mathfrak{g})$ の標準表現の構成に基づいており, 対称型に限定されている. 代数的な構成からはこの点は保証されず, 以下は一般には予想である：

予想 3.6. 量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathrm{X}_n^{(1)})$ が非対称型 $(\mathrm{X}=\mathrm{BCFG})$ のとき,

(1) 各 $m \in \mathcal{B}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ に対し, $\mathrm{ev}_{t=1}(L_t(m)) = \chi_q(L(m))$.
(2) 各 $m, m' \in \mathcal{B}_{\mathrm{X}_n^{(1)}}$ に対し, $P_{m,m'}(t) \in t^{-1}\mathbb{Z}_{\geq 0}[t^{-1}]$.

定理 3.5, 予想 3.6 が重要である理由は, 各 $L_t(m)$ が標準表現の (q,t)-指標から, 量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathrm{X}_n^{(1)})$ の "表現論" を介さず, **機械的に**計算されることにある. (S1), (S2) による既約表現の (q,t)-指標の特徴づけは, *Kazhdan-Lusztig* **アルゴリズム** [L, Lemma 24.2.1] と呼ばれる既約表現と標準表現の (q,t)-指標の間の基底変換の計算アルゴリズムを与える (計算例については 5 章を参照のこと). よって, 定理 3.5 および予想 3.6(1) は, 一般の既約表現の q-指標を求める純代数的なアルゴリズムの存在を保証する非常に強い主張である.

4 主結果

本章では $\mathrm{A}_{2n-1}^{(1)}$ 型, $\mathrm{B}_n^{(1)}$ 型量子ループ代数を考える. A_{2n-1} 型, B_n 型複素単純 Lie 環の単純ルートの添え字集合をそれぞれ $I_\mathrm{A} := \{1,\dots,2n-1\}$, $I_\mathrm{B} := \{1,\dots,n\}$ とする. (添え字の付け方は [Kac, Chapter 4] に従う.) ここで,

$$\widetilde{I}_\mathrm{A} := \{(i,r) \mid i \in I_\mathrm{A}, r \in \mathbb{Z}, r \equiv i+1 \bmod 2\}$$
$$\widetilde{I}_\mathrm{B} := \{(i,2r),(n,2r+1) \mid i \in I_\mathrm{B} \setminus \{n\},\ r \in \mathbb{Z}\}$$

とおく. $\mathrm{X} = \mathrm{A}\ (N := 2n-1), \mathrm{B}\ (N := n)$ に対し, $\mathcal{C}'_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_N^{(1)}}$ を,

$$\chi_q(V) \in \mathbb{Z}[Y_{i,q^r}^{\pm 1} \mid (i,r) \in \widetilde{I}_\mathrm{X}]$$

を満たす対象 V のなす $\mathcal{C}_{\mathrm{X}_N^{(1)}}$ の充満部分圏とおく. このとき, $\mathcal{C}'_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_N^{(1)}}$ は再び $\mathcal{C}_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_N^{(1)}}$ の部分モノイダルアーベル圏となる[*6]. さらに, $\mathcal{B}'_{\mathrm{X}_N^{(1)}} := \mathcal{B}_{\mathrm{X}_N^{(1)}} \cap \mathbb{Z}[Y_{i,q^r}^{\pm 1} \mid (i,r) \in \widetilde{I}_\mathrm{X}]$ とすると, $\mathcal{C}'_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_N^{(1)}}$ の Grothendieck 環は,

$$K(\mathcal{C}'_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_N^{(1)}}) = \sum\nolimits_{m \in \mathcal{B}'_{\mathrm{X}_N^{(1)}}} \mathbb{Z}[M(m)] = \sum\nolimits_{m \in \mathcal{B}'_{\mathrm{X}_N^{(1)}}} \mathbb{Z}[L(m)]$$

となる. さらに,

$$K_t(\mathcal{C}'_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_N^{(1)}}) := \sum\nolimits_{m \in \mathcal{B}'_{\mathrm{X}_N^{(1)}}} \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}] M_t(m) = \sum\nolimits_{m \in \mathcal{B}'_{\mathrm{X}_N^{(1)}}} \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}] L_t(m)$$

とすると, $K_t(\mathcal{C}'_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_N^{(1)}})$ は $K_t(\mathcal{C}_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_N^{(1)}})$ の $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-部分代数である.

4.1 主結果とその系

補題-記号 4.1. 以下の対応で定まる $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数同型が存在する[*7]:

$$\mathbb{D}_\mathrm{A} \colon \mathcal{Y}_{t,\mathrm{A}_{2n-1}^{(1)}} \to \mathcal{Y}_{t,\mathrm{A}_{2n-1}^{(1)}},\ \widetilde{Y}_{i,r} \mapsto \widetilde{Y}_{2n-i,r-2n},$$
$$\mathbb{D}_\mathrm{B} \colon \mathcal{Y}_{t,\mathrm{B}_n^{(1)}} \to \mathcal{Y}_{t,\mathrm{B}_n^{(1)}},\ \widetilde{Y}_{i,r} \mapsto \widetilde{Y}_{i,r-2(2n-1)}.$$

以下が本稿の主結果である.

[*6] 添え字集合の取り方から大きさ的には $\mathcal{C}_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_N^{(1)}}$ の "半分" であるが, 圏 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_N^{(1)}}$ の単純対象の構造およびモノイダル圏としての非自明な構造の研究は実際には $\mathcal{C}'_{\mathbb{Z},\mathrm{X}_N^{(1)}}$ に帰着される [HL10, §3.7], [KKOhP19, Subsection 1.7].

[*7] これらは表現の双対を取ることに対応する操作である (cf. [FM01, Corollary 6.10]).

定理 4.2 (Hernandez-O.)**.** $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数としての同型

$$\Phi_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}\colon K_t(\mathcal{C}'_{\mathbb{Z},\mathrm{A}^{(1)}_{2n-1}}) \xrightarrow{\sim} K_t(\mathcal{C}'_{\mathbb{Z},\mathrm{B}^{(1)}_n})$$

が存在する．さらに，$\Phi_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ はそれぞれの圏に対する既約表現の (q,t)-指標の間の具体的な全単射を与える．また，

$$\mathbb{D}_{\mathrm{B}} \circ \Phi_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \Phi_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} \circ \mathbb{D}_{\mathrm{A}} \tag{$*$}$$

を満たす．

ここでは具体的な (q,t)-指標の間の公式を記述する代わりに例を与える．

例 4.3. 例えば，$n=3$ ($\mathrm{A}^{(1)}_5/\mathrm{B}^{(1)}_3$ 型の間の対応) の場合，$\mathrm{A}^{(1)}_5$ 型の基本表現は $\mathrm{B}^{(1)}_3$ 型の既約表現に以下のように対応する．(ここでは L_t に A,B を付けてタイプを指定する.) なお，$(*)$ により以下の対応で $\mathcal{C}'_{\mathbb{Z},\mathrm{A}^{(1)}_5}$ 内の基本表現の $\Phi_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ による像は全て計算される．

$$\begin{aligned}
L^{\mathrm{A}}_t(Y_{1,0}) &\leftrightarrow L^{\mathrm{B}}_t(Y_{3,-5}), & L^{\mathrm{A}}_t(Y_{1,-2}) &\leftrightarrow L^{\mathrm{B}}_t(Y_{3,1}), & L^{\mathrm{A}}_t(Y_{1,-4}) &\leftrightarrow L^{\mathrm{B}}_t(Y_{1,-6}),\\
L^{\mathrm{A}}_t(Y_{2,1}) &\leftrightarrow L^{\mathrm{B}}_t(Y_{3,-1}), & L^{\mathrm{A}}_t(Y_{2,-1}) &\leftrightarrow L^{\mathrm{B}}_t(Y_{3,1}Y_{3,-5}), & L^{\mathrm{A}}_t(Y_{2,-3}) &\leftrightarrow L^{\mathrm{B}}_t(Y_{3,-3}),\\
L^{\mathrm{A}}_t(Y_{2,-5}) &\leftrightarrow L^{\mathrm{B}}_t(Y_{2,-8}), & L^{\mathrm{A}}_t(Y_{3,0}) &\leftrightarrow L^{\mathrm{B}}_t(Y_{3,1}Y_{3,-1}), & L^{\mathrm{A}}_t(Y_{3,-2}) &\leftrightarrow L^{\mathrm{B}}_t(Y_{3,-3}Y_{3,-5}),\\
L^{\mathrm{A}}_t(Y_{3,-4}) &\leftrightarrow L^{\mathrm{B}}_t(Y_{3,-7}), & L^{\mathrm{A}}_t(Y_{4,-1}) &\leftrightarrow L^{\mathrm{B}}_t(Y_{2,-2}), & L^{\mathrm{A}}_t(Y_{4,-3}) &\leftrightarrow L^{\mathrm{B}}_t(Y_{2,-6}),\\
L^{\mathrm{A}}_t(Y_{5,0}) &\leftrightarrow L^{\mathrm{B}}_t(Y_{1,0}), & L^{\mathrm{A}}_t(Y_{5,-2}) &\leftrightarrow L^{\mathrm{B}}_t(Y_{1,-4}), & L^{\mathrm{A}}_t(Y_{5,-4}) &\leftrightarrow L^{\mathrm{B}}_t(Y_{1,-8}).
\end{aligned}$$

この対応からわかるように，一般には基本表現も基本表現に対応するわけではなく，対応する最高単項式の次数は保存されない．また，この対応は次元も保存しない．例えば，$L^{\mathrm{A}}(Y_{1,-4})$ は 6 次元表現であるが，$L^{\mathrm{B}}(Y_{1,-6})$ は 7 次元表現である．このような点からも $\Phi_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ は非自明な対応であると言える．

定理 4.2 により，$\mathrm{A}^{(1)}_{2n-1}$ 型の (q,t)-指標について知られている様々な正値性を $\mathrm{B}^{(1)}_n$ 型 (q,t)-指標の正値性に直ちに読み替えることができる．$\mathrm{B}^{(1)}_n$ 型の (q,t)-指標に関してはこのような正値性は新しい結果である．

系 4.4 (Kazhdan-Lusztig 型多項式の正値性)**.** 各 $m\in\mathcal{B}'_{\mathrm{B}^{(1)}_n}$ に対し，

$$M_t(m) = \sum\nolimits_{m'\in\mathcal{B}'_{\mathrm{B}^{(1)}_n}} P_{m,m'}(t) L_t(m')$$

と書くと，$P_{m,m'}(t)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}[t^{-1}]$ である．

これは $\mathrm{B}^{(1)}_n$ 型における予想 3.6(ii) の肯定的解答である．実際にはより強く以下が成立する．これも Nakajima によって $\mathrm{A}^{(1)}_{2n-1}$ 型 (より一般に対称型) の場合には証明が与えられていた性質である：

系 4.5 (構造定数の正値性)**.** 各 $m_1,m_2\in\mathcal{B}'_{\mathrm{B}^{(1)}_n}$ に対し，

$$L_t(m_1)L_t(m_2) = \sum\nolimits_{m\in\mathcal{B}'_{\mathrm{B}^{(1)}_n}} c^m_{m_1,m_2}(t) L_t(m)$$

と書くと，$c^m_{m_1,m_2}(t)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}[t^{\pm 1/2}]$ である．

ちなみに，系 4.5 が系 4.4 よりも強いことは，$M_t(m)$ が $L_t(Y_{i,r})$ らの積で定義されていたことを思い出せばすぐにわかる．

Kashiwara-Kim-Oh は，Kang, Kashiwara, Kim, Oh により確立された**一般化量子** *Schur-Weyl* **双対性**を用いて，圏論的に以下の**通常の** Grothendieck 環の間の同型を証明している：

定理 4.6 ([KKOh19, Theorem 3.1.1])**.** $\mathbb{Z}$-代数としての同型

$$\phi_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}\colon K(\mathcal{C}'_{\mathbb{Z},\mathrm{A}^{(1)}_{2n-1}}) \xrightarrow{\sim} K(\mathcal{C}'_{\mathbb{Z},\mathrm{B}^{(1)}_n})$$

であって，既約表現の類の間の全単射を与えるものが存在する．

ここで標準表現の間の対応に着目することで, 以下が確かめられる：

定理 4.7 (Hernandez-O.)**.** $\Phi_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ を $t=1$ に特殊化すると $\phi_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ に一致する.

ここで定理 4.7 は我々の同型の方が強い主張であることを意味しているのではなく, むしろ我々の同型の構成と Kashiwara-Kim-Oh による同型の構成は次の意味で全く独立であるを注意しておく：

アプリオリには,

- $\Phi_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ を $t=1$ に特殊化したものは定理 4.2 より, $\{\mathrm{ev}_{t=1}(L_t(m)) \mid m \in \mathcal{B}'_{\mathrm{A}^{(1)}_{2n-1}}\}$ を $\{\mathrm{ev}_{t=1}(L_t(m)) \mid m \in \mathcal{B}'_{\mathrm{B}^{(1)}_n}\}$ に移すが,
- $\phi_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$(を q-指標で解釈したもの) は定理 4.6 より, $\{\chi_q(L(m)) \mid m \in \mathcal{B}'_{\mathrm{A}^{(1)}_{2n-1}}\}$ を $\{\chi_q(L(m)) \mid m \in \mathcal{B}'_{\mathrm{B}^{(1)}_n}\}$ に移す.

$\mathrm{A}^{(1)}_{2n-1}$ 型の場合には $\mathrm{ev}_{t=1}(L_t(m)) = \chi_q(L(m))$ であることがわかっているが, $\mathrm{B}^{(1)}_n$ 型の場合にはこの一致は予想 3.6(i) に他ならない. 従って, 定理 4.7 は $\mathrm{B}^{(1)}_n$ 型の場合の予想 3.6(i) の肯定的解決を導く：

系 4.8. 各 $m \in \mathcal{B}'_{\mathrm{B}^{(1)}_n}$ に対し, $\mathrm{ev}_{t=1}(L_t(m)) = \chi_q(L(m))$.

5 計算例

量子ループ代数 $\mathcal{U}_q(\mathrm{B}^{(1)}_2)$ の既約表現 $L(Y_{1,0}Y_{2,5})$ の q-指標を Kazhdan-Lusztig アルゴリズムにより求めてみる. まず $r \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\begin{aligned}
M_t(Y_{1,r}) &= \underline{Y_{1,r}} + \underline{Y_{2,r+1}Y_{2,r+3}Y^{-1}_{1,r+4}} + \underline{Y_{2,r+1}Y^{-1}_{2,r+5}} + \underline{Y_{1,r+2}Y^{-1}_{2,r+3}Y^{-1}_{2,r+5}} + \underline{Y^{-1}_{1,r+6}},\\
M_t(Y_{2,r}) &= \underline{Y_{2,r}} + \underline{Y_{1,r+1}Y^{-1}_{2,r+2}} + \underline{Y_{2,r+4}Y^{-1}_{1,r+5}} + \underline{Y^{-1}_{2,r+6}}
\end{aligned}$$

より, $\mathcal{Y}_{t,\mathrm{B}^{(1)}_2}$ の関係式の関係式を用いると,

$$\begin{aligned}
M_t(Y_{1,0}Y_{2,5}) &= t^{-1/2}M_t(Y_{1,0})M_t(Y_{2,5})\\
&= \underline{Y_{1,0}Y_{2,5}} + \underline{Y_{1,0}Y_{1,6}Y^{-1}_{2,7}} + \underline{Y_{1,0}Y_{2,9}Y^{-1}_{1,10}} + \underline{Y_{1,0}Y^{-1}_{2,11}}\\
&\quad + \underline{Y_{2,1}Y_{2,3}Y^{-1}_{1,-4}Y_{2,5}} + \underline{Y_{2,1}Y_{2,3}Y^{-1}_{1,-4}Y_{1,6}Y^{-1}_{2,7}} + \underline{Y_{2,1}Y_{2,3}Y^{-1}_{1,-4}Y_{2,9}Y^{-1}_{1,10}} + \underline{Y_{2,1}Y_{2,3}Y^{-1}_{1,-4}Y^{-1}_{2,11}}\\
&\quad + t^{-1}\underline{Y_{2,1}} + \underline{Y_{2,1}Y^{-1}_{2,5}Y_{1,6}Y^{-1}_{2,7}} + \underline{Y_{2,1}Y^{-1}_{2,5}Y_{2,9}Y^{-1}_{1,10}} + \underline{Y_{2,1}Y^{-1}_{2,5}Y^{-1}_{2,11}}\\
&\quad + t^{-1}\underline{Y_{1,2}Y^{-1}_{2,3}} + \underline{Y_{1,2}Y^{-1}_{2,3}Y^{-1}_{2,5}Y_{1,6}Y^{-1}_{2,7}} + \underline{Y_{1,2}Y^{-1}_{2,3}Y^{-1}_{2,5}Y_{2,9}Y^{-1}_{1,10}} + \underline{Y_{1,2}Y^{-1}_{2,3}Y^{-1}_{2,5}Y^{-1}_{2,11}}\\
&\quad + t^{-1}\underline{Y_{2,5}Y^{-1}_{1,6}} + t^{-1}\underline{Y^{-1}_{2,7}} + \underline{Y^{-1}_{1,6}Y_{2,9}Y^{-1}_{1,10}} + \underline{Y^{-1}_{1,6}Y^{-1}_{2,11}}\\
&= \underline{Y_{1,0}Y_{2,5}} + \underline{Y_{1,0}Y_{1,6}Y^{-1}_{2,7}} + \underline{Y_{1,0}Y_{2,9}Y^{-1}_{1,10}} + \underline{Y_{1,0}Y^{-1}_{2,11}}\\
&\quad + \underline{Y_{2,1}Y_{2,3}Y^{-1}_{1,-4}Y_{2,5}} + \underline{Y_{2,1}Y_{2,3}Y^{-1}_{1,-4}Y_{1,6}Y^{-1}_{2,7}} + \underline{Y_{2,1}Y_{2,3}Y^{-1}_{1,-4}Y_{2,9}Y^{-1}_{1,10}} + \underline{Y_{2,1}Y_{2,3}Y^{-1}_{1,-4}Y^{-1}_{2,11}}\\
&\quad + \underline{Y_{2,1}Y^{-1}_{2,5}Y_{1,6}Y^{-1}_{2,7}} + \underline{Y_{2,1}Y^{-1}_{2,5}Y_{2,9}Y^{-1}_{1,10}} + \underline{Y_{2,1}Y^{-1}_{2,5}Y^{-1}_{2,11}}\\
&\quad + \underline{Y_{1,2}Y^{-1}_{2,3}Y^{-1}_{2,5}Y_{1,6}Y^{-1}_{2,7}} + \underline{Y_{1,2}Y^{-1}_{2,3}Y^{-1}_{2,5}Y_{2,9}Y^{-1}_{1,10}} + \underline{Y_{1,2}Y^{-1}_{2,3}Y^{-1}_{2,5}Y^{-1}_{2,11}}\\
&\quad + \underline{Y^{-1}_{1,6}Y_{2,9}Y^{-1}_{1,10}} + \underline{Y^{-1}_{1,6}Y^{-1}_{2,11}} + t^{-1}M_t(Y_{2,1})
\end{aligned}$$

となる. よって, $M_t(Y_{1,0}Y_{2,5}) - t^{-1}M_t(Y_{2,1})$ はバー対合で不変である. これより,

$$L_t(Y_{1,0}Y_{2,5}) := M_t(Y_{1,0}Y_{2,5}) - t^{-1}M_t(Y_{2,1})$$

とすれば良い. 実際, $M_t(Y_{2,1}) = L_t(Y_{2,1})$ であるので, $M_t(Y_{1,0}Y_{2,5}) = L_t(Y_{1,0}Y_{2,5}) + t^{-1}L_t(Y_{2,r})$ となり, 条件 (S2) も満たしている. ((S1), (S2) を満たす $L_t(Y_{1,0}Y_{2,5})$ の取り方がこれしかないことも容易に示される).

以上より, 系 4.8 から,

$$\begin{aligned}\chi_q(L(Y_{1,0}Y_{2,5})) &= \mathrm{ev}_{t=1}(L_t(Y_{1,0}Y_{2,5}))\\ &= Y_{1,0}Y_{2,5} + Y_{1,0}Y_{1,6}Y_{2,7}^{-1} + Y_{1,0}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1} + Y_{1,0}Y_{2,11}^{-1}\\ &\quad + Y_{2,1}Y_{2,3}Y_{1,-4}^{-1}Y_{2,5} + Y_{2,1}Y_{2,3}Y_{1,-4}^{-1}Y_{1,6}Y_{2,7}^{-1} + Y_{2,1}Y_{2,3}Y_{1,-4}^{-1}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1} + Y_{2,1}Y_{2,3}Y_{1,-4}^{-1}Y_{2,11}^{-1}\\ &\quad + Y_{2,1}Y_{2,5}^{-1}Y_{1,6}Y_{2,7}^{-1} + Y_{2,1}Y_{2,5}^{-1}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1} + Y_{2,1}Y_{2,5}^{-1}Y_{2,11}^{-1}\\ &\quad + Y_{1,2}Y_{2,3}^{-1}Y_{2,5}^{-1}Y_{1,6}Y_{2,7}^{-1} + Y_{1,2}Y_{2,3}^{-1}Y_{2,5}^{-1}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1} + Y_{1,2}Y_{2,3}^{-1}Y_{2,5}^{-1}Y_{2,11}^{-1}\\ &\quad + Y_{1,6}^{-1}Y_{2,9}Y_{1,10}^{-1} + Y_{1,6}^{-1}Y_{2,11}^{-1}\end{aligned}$$

である. ここでの計算が, 基本表現の (q,t)-指標 $M_t(Y_{1,r})$, $M_t(Y_{2,r})$ と量子トーラス $\mathcal{Y}_{t,\mathrm{B}_2^{(1)}}$ の関係式のみを用いた機械的な計算である (“$\mathcal{U}_q(\mathrm{B}_2^{(1)})$ の表現論” を用いていない) ということに着目してもらいたい.

謝辞

第 64 回代数学シンポジウムにおいて講演の機会を与えて下さったプログラム責任者の阿部紀行様，島倉裕樹様，シンポジウム責任者の金銅誠之様，会場責任者の山崎隆雄様にこの場をお借りして深く御礼申し上げます．また，筆者の本研究は the European Research Council under the European Union’s Framework Programme H2020 with ERC Grant Agreement number 647353 Qaffine および日本学術振興会学術研究助成基金 (若手研究)No.19K14515 の助成を受けたものです.

参考文献

[B94] J. Beck, *Braid group action and quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), no. 3, 555–568.

[CP] V. Chari and A. Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, xvi+651 pp.

[CP91] V. Chari and A. Pressley, *Quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **142** (1991), no. 2, 261–283.

[CP95] V. Chari and A. Pressley, *Quantum affine algebras and their representations*, Representations of groups (Banff, AB, 1994), 59–78, CMS Conf. Proc. **16**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[D88] V. G. Drinfel’d, *A new realization of Yangians and of quantum affine algebras*, Soviet Math. Dokl. **36** (1988), no. 2, 212–216.

[FH11] E. Frenkel and D. Hernandez, *Langlands duality for finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, Lett. Math. Phys. **96** (2011), no. 1–3, 217–261.

[FM01] E. Frenkel and E. Mukhin, *Combinatorics of q-characters of finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **216** (2001), no. 1, 23–57.

[FR99] E. Frenkel and N. Reshetikhin, *The q-characters of representations of quantum affine algebras and deformations of $\mathscr{W}$-algebras*, Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998), 163–205, Contemp. Math. **248**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[H04] D. Hernandez, *Algebraic approach to q,t-characters*, Adv. Math. **187** (2004), no. 1, 1–52.

[HL10] D. Hernandez and B. Leclerc, *Cluster algebras and quantum affine algebras*, Duke Math. J. **154** (2010), no. 2, 265–341.

[HO19] D. Hernandez and H. Oya, *Quantum Grothendieck ring isomorphisms, cluster algebras and Kazhdan-Lusztig algorithm*, Adv. Math. **347** (2019), 192–272.

[Kac] V. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras. Third edition.*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. xxii+400 pp.

[K^{3}18] S.-J. Kang, M. Kashiwara and M. Kim, *Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras*, Invent. Math. **211** (2018), no. 2, 591–685.

[KKKOh15] S.-J. Kang, M. Kashiwara, M. Kim and S.-j. Oh, *Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras III*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **111** (2015), no. 2, 420–444.

[KKOh19] M. Kashiwara, M. Kim and S.-j. Oh, *Monoidal categories of modules over quantum affine algebras of type A and B*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **118** (2019), no. 1, 43–77.

[KKOhP19] M. Kashiwara, M. Kim, S.-j. Oh and E. Park, *Cluster algebra structures on module categories over quantum affine algebras*, preprint arXiv:1904.01264.

[KOh19] M. Kashiwara and S.-j. Oh, *Categorical relations between Langlands dual quantum affine algebras: doubly laced types*, J. Algebraic Combin. *49* (2019), no. 4, 401–435.

[L] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Reprint of the 1994 edition, Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer, New York, 2010, xiv+346 pp.

[N04] H. Nakajima, *Quiver varieties and t-analogs of q-characters of quantum affine algebras*, Ann. of Math. (2) **160** (2004), no. 3, 1057–1097.

[OhSc19] S-j. Oh and T. Scrimshaw, *Categorical relations between Langlands dual quantum affine algebras: exceptional cases*, Comm. Math. Phys. **368** (2019), no. 1, 295–367.

[Oya] H. Oya, 異なる *Dynkin* 型のアフィン量子群の有限次元表現圏の間に見られる類似性について, 日本数学会 2019 年度年会・代数学分科会特別講演アブストラクト.

[VV03] M. Varagnolo and E. Vasserot, *Perverse sheaves and quantum Grothendieck rings*, Studies in memory of Issai Schur (Chevaleret/Rehovot, 2000), 345–365, Progr. Math. **210**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.