

# $p$ 進浅井 $L$ 関数とその周辺

並川健一

## 概要

$p$  進浅井  $L$  関数の構成について、得られた結果を紹介する。その結果が、Coates-Perrin-Riou による  $p$  進  $L$  関数の存在予想と整合的であることを解説する。

## 1. 序

1.1. 本稿の目的.  $L$  関数は、数論の様々な分野にまたがる研究対象の一つである。とくに類数公式、BSD 予想など、 $L$  関数の特殊値から数論的な情報が得られることが期待されており、様々な方面から研究が行われている。本稿では特に  $L$  関数の  $p$  進版の存在予想に焦点を当てて、解説を試みる。

$L$  関数は、代数多様体や、保型表現といった対象に対し定義される正則関数だが、 $\mathbf{C}$  上の位相とは全く異なる  $p$  進的な位相の情報をもつことがある。実際に、これは  $p$  進  $L$  関数の存在を示唆しており、イデアル類群の  $p$  進族などの岩澤理論的な対象を記述することが期待されている。

多くの研究から、 $p$  進  $L$  関数の存在は確かだと思われる。しかしながら実際に知られている構成でも、技巧的なものが多く、存在しても期待よりも弱い形であったり、実際どういった対象にどういった  $p$  進  $L$  関数が存在すべきかといったことについては、未知の部分が多い。

本稿では、今一度、 $p$  進  $L$  関数の存在予想について書かれた文献 [CPR89], [Co89] を振り返り、 $p$  進  $L$  関数の構成に必要な用語や性質についてまとめた。またそれに従って、著者が最近得た  $p$  進浅井  $L$  関数 ([Na]) について記述する。新しいクラスの  $p$  進  $L$  関数を構成しようというときに、与えられた状況に対し、 $p$  進  $L$  関数はどのような性質を持っているべきか、考察しなくてはならない。今回得られた結果と過去の研究との比較、今後期待される研究の方向性を考察する意味も込めて、 $p$  進  $L$  関数の存在予想について紙面を費やすこととした。

$p$  進  $L$  関数の岩澤理論における位置付け、存在意義については、[落合 15, 4 章], [落合 16, 5.3.2 章, 6.6.1 章] に多くが語られている。本稿ではこれらの文献ではあまり前面には現れていない  $p$  進  $L$  関数の構成における保型表現の役割について、強調して解説している。数論における保型表現の有用性は疑いようがないが、岩澤理論においても強力な研究手段であるということの一端を感じ取って頂ければ、幸いである。

1.2. 本稿の構成. まず  $L$  関数とはどういう対象であったか 2 節で復習する。古典的な例だが、研究動機を与えるような例でもあるので、簡単に復習することとした。またこれらの例から、 $L$  関数の研究には、より一般的な言語が必要であることを再認識したい。3 節では一般的な言語である保型表現論とモチーフについて、[Cl90] による記述を紹介する。4 節では、[CPR89], [Co89] による  $p$  進  $L$  関数の存在予想を記述し、5 節では、いくつかの場合に存在予想を書き下している。とくに今回の研究で得られた  $p$  進浅井  $L$  関数について、過去の研究と比較する形で、その具体的な表示を紹介している。 $p$  進浅井  $L$  関数の構成は、6 節で紹介する。詳細はプレプリント ([Na]) にゆずることとして、大まかな議論や、技術的に重要な部分のみを記述している。

1.3. 記号, 用語.  $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$  はそれぞれ有理整数環, 有理数体, 実数体, 複素数体を表す。代数体  $F$  に対し、 $F_{\mathbf{A}}$  で  $F$  のアデール環を表す。 $\Sigma_F$  で  $F$  の素点のなす集合を表し、 $v \in \Sigma_F$  に対し、 $F_v$  で  $F$  の  $v$  での完備化を表す。 $x \in F_{\mathbf{A}}, v \in \Sigma$  に対し、 $x_v \in F_v$  で、 $x$  の  $F_v$  成分への射影を表す。

$\psi = \otimes_{v \in \Sigma_{\mathbf{Q}}} \psi_v : \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q}_{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{C}^{\times}$  で加法指標であって、 $\psi_{\infty}(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) となるものとする。(  $\infty \in \Sigma_{\mathbf{Q}}$  は、 $\mathbf{Q}$  の無限素点を表す。) これは本稿を通して、固定する。

素数  $p$  に対し、 $\mathbf{C}_p$  で  $\mathbf{Q}_p$  の代数閉包の完備化を表す。本稿では常に体としての同型  $\mathbf{i}_p : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_p$  を固定する。また  $\mathbf{Q}$  の代数閉包  $\overline{\mathbf{Q}}$  の  $\mathbf{C}$  への埋め込みも固定し、 $\overline{\mathbf{Q}}$  を  $\mathbf{C}_p$  の部分体とみなす。  $\text{ord}_p$  で  $\mathbf{C}_p$  の  $p$  進付値で、 $\text{ord}_p(p) = 1$  であるものとする。 $x \in \overline{\mathbf{Q}}$  に対し、 $\text{ord}_p(x)$  と書くときには、固定された埋め込みを用いて、 $x \in \mathbf{C}_p$  の元とみなしている。

$L$  関数は全て完全  $L$  関数をあらわす. 例えば, 代数体  $F$  上のモチーフ  $\mathcal{M}$  に対し,

$$L(s, \mathcal{M}) = \prod_{v \in \Sigma_F} L_v(s, \mathcal{M}) = L_\infty(s, \mathcal{M}) L^{(\infty)}(s, \mathcal{M}),$$

$$L_\infty(s, \mathcal{M}) = \Gamma(s, \mathcal{M}), L^{(\infty)}(s, \mathcal{M}) = \prod_{v \in \Sigma_F, v < \infty} L_v(s, \mathcal{M})$$

などとかく. ただし,  $\Gamma(s, \mathcal{M})$  は  $\mathcal{M}$  の  $\Gamma$  因子.  $L_\infty(s, \mathcal{M})$  は, 無限素点での  $L$  因子の積だが, 慣例に従って  $\Gamma$  因子ともいう.

## 2. 古典的な例

2.1. **Dirichlet 指標, 楕円保型形式の  $L$  関数.** ここでは, 最も基本的と思われる Dirichlet 指標と, 楕円保型形式に付随する  $L$  関数について復習する.

$N \in \mathbf{Z}, N \geq 1$  とし, 指標  $\chi: (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  を  $N$  を法とした Dirichlet 指標とよぶ.  $N$  を法とした Dirichlet 指標  $\chi$  に対して, 次を満たす  $\chi$  を原始的という.

- 正整数  $M \mid N$  であって,  $\chi$  が  $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \rightarrow (\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})^\times$  を経由するとき,  $M = N$ .

以下,  $\chi: (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  は原始的とし, この  $N$  を  $\chi$  の導手という. このとき,  $\chi$  に付随する Dirichlet  $L$  関数  $L(s, \chi)$  を次で定義する:

$$(2.1) \quad L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad (s \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}(s) > 1).$$

これは有理型に解析接続され, 関数等式を持つ. さらに次の Euler 積をもつ:

$$L(s, \chi) = \prod_{p: \text{prime}, p \nmid N} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}.$$

次に楕円尖点形式の  $L$  関数を復習する.  $N \in \mathbf{Z}, N \geq 1$  とし,

$$\Gamma_0(N) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

$\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$  を上半平面とし, 正則関数  $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{C}$  が, 重さ  $k \in \mathbf{Z}$  の楕円尖点形式であるとは, 次の条件を満たすときをいう.

(M1) 任意の  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$  に対して,  $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$ .

(M2) 各 cusp で,  $f$  は零.

正則性と条件 (M1), (M2) より,  $f$  は次の Fourier 展開を持つ:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n, f) q^n, \quad (q = \exp(2\pi\sqrt{-1}z)).$$

このとき, 新形式の理論により, 次を満たす  $f$  がある:

- 正整数  $M \mid N$  が, 条件 “任意の  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(M)$  に対して,  $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$ ” を満たすならば,  $M = N$ .
- 各 Hecke 作用素  $T(p)$  ( $p$ :素数) に対し,  $f$  は  $T(p)$  の固有ベクトル.
- $a(1, f) = 1$ .

上の条件を満たす  $f$  を新形式とよぶ. また  $N$  を  $f$  の導手 (またはレベル) とよぶ. このとき,  $f$  の  $L$  関数を次で定義する:

$$(2.2) \quad L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n, f)}{n^s}, \quad (s \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1).$$

これは全平面に正則に解析接続され, 関数等式を持つ. さらに次の Euler 積をもつ:

$$L(s, f) = \prod_{p: \text{prime}, p \nmid N} \frac{1}{1 - a(p, f)p^{-s} + p^{k-1-2s}} \prod_{p: \text{prime}, p \mid N} \frac{1}{1 - a(p, f)p^{-s}}.$$

2.2. 久保田–Leopoldt の  $p$  進  $L$  関数  $\mathcal{L}_p(\chi)$ .  $p$  を素数とし,  $p$  は  $N$  を割らないとする. また  $\chi(-1) = -1$  とする. Dirichlet  $L$  関数  $L(s, \chi)$  に対して, その  $p$  進版である久保田–Leopoldt の  $p$  進  $L$  関数  $\mathcal{L}_p(\chi) \in \mathcal{O}[[\text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q})]]$  が知られている. ただしここで  $\mathcal{O}$  は  $\mathbf{Q}_p$  の十分大きな有限次拡大の整数環で,  $\mu_{p^\infty}$  は  $p$  冪乗根のなす群を表す. 連続指標  $\hat{\phi} : \text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{C}_p^\times$  に対し, 群環の元  $\mathcal{L}_p(\chi)$  から,  $\mathcal{O}$  の元  $\hat{\phi}(\mathcal{L}_p(\chi))$  が得られるので, これは  $\text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q})$  の指標の成す集合上の関数とみなせる.

値  $\hat{\phi}(\mathcal{L}_p(\chi))$  は補間公式を用いて計算できる. そのためにはまず連続指標  $\hat{\phi} : \text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{C}_p^\times$  を与える必要がある.  $\varepsilon_{\text{cyc}} : \text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}_p^\times$  を, 標準的な同型とする. これを連続指標  $\varepsilon_{\text{cyc}} : \text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{C}_p^\times$  とみなす. また有限指標  $\text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{C}_p^\times$  は, 適当な  $r > 0$  に対し,  $\text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^r})/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{C}_p^\times$  を経由するので, 自然に  $(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})^\times$  の指標とみなす. (ただし, ここで  $\mu_{p^r}$  は, 1 の  $p^r$  乗根のなす群を表す.)

$\alpha \in \mathbf{Z}, \alpha \leq 0$  とし, 有限指標  $\hat{\varphi} : \text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{C}_p^\times$  を  $\hat{\varphi}(-1) = (-1)^\alpha$  を満たすものとする.  $\hat{\phi} = \varepsilon_{\text{cyc}}^\alpha \hat{\varphi}$  とおく. このとき,  $\hat{\phi}(\mathcal{L}_p(\chi))$  は以下の補間公式で記述出来る:

$$\hat{\phi}(\mathcal{L}_p(\chi)) = (1 - \chi\varphi(p)p^{-\alpha})L^{(\infty)}(\alpha, \chi\varphi).$$

$\mathcal{L}_p(\chi)$  が, 群環  $\mathcal{O}[[\text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q})]]$  の元であることと上の補間公式から,  $L$  関数の負の値たちに非自明な合同式があることが導かれる. また  $\mathcal{L}_p(\chi)$  の情報から, イデアル類群の情報を引き出すものが岩澤理論であった. ただ岩澤理論的な側面に触れる以前に, 複素正則関数として定義される  $L(s, \chi)$  がこのような  $p$  進的な側面を持っていること自体が, 驚異的な事実であるといえる.

**注意 2.1.** (1)  $p$  進  $L$  関数の存在による帰結, およびその意義については, 古典的な場合に多くの文献がすでに見られる. ここでは, 文献 ([黒栗斎 05, 10.1 章], [落合 14, 3.2 章]) を挙げるにとどめて, これ以上は立ち入らない.

(2) 同型  $\varepsilon_{\text{cyc}} : \text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}_p^\times$  について, もう少し説明を加える.  $\phi$  を Hecke 指標  $\phi : \mathbf{Q}^\times \setminus \mathbf{Q}_\mathbf{A}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  とする. 適当な整数  $w \in \mathbf{Z}$  があって,  $\phi_\infty(r) = r^w (r \in \mathbf{R}^\times, r > 0)$  とかけたとする. このとき,  $\phi$  の  $p$  進 avatar  $\hat{\phi} : \mathbf{Q}^\times \setminus \mathbf{Q}_\mathbf{A}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  を, 固定された同型  $\mathbf{i}_p : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_p$  を用いて,

$$\hat{\psi}(x) = x_p^w \mathbf{i}_p(x_\infty^{-w} \phi(x))$$

と定義する. するとこれは well-defined な連続指標を定める. 類体論の相互写像を幾何的 Frobenius を用いて正規化しておく, ノルム指標の  $|\cdot|_\mathbf{A}$  の  $p$  進 avatar が,  $\varepsilon_{\text{cyc}}$  と一致する.  $p$  進  $L$  関数の構成で複素と  $p$  進の読み替えを行う際に, この正規化は便利であるため, 本稿ではこれを採用する.

2.3.  $\text{GL}_1(\mathbf{A}), \text{GL}_2(\mathbf{A})$  の保型表現. 2.2 節で, Dirichlet  $L$  関数  $L(s, \chi)$  には, 久保田–Leopoldt の  $p$  進  $L$  関数  $\mathcal{L}_p(\chi)$  という  $p$  進版が存在すること, およびその帰結をみた. 楕円尖点形式の  $L$  関数  $L(s, f)$  に対しても,  $k \geq 2$  で,  $a(p, f)$  が  $p$  進単数であるという仮定 (これを  $p$ -通常的という) のもと,  $p$  進  $L$  関数  $\mathcal{L}_p(f)$  が存在する.

以上のことから  $L(s, \chi)$  と  $L(s, f)$  の類似は明らかである. しかしながら, 一見するとこれらは全く見かけが異なるため, 一般化への道筋が見えにくい. そこで, これら二つの対象の共通の一般化とは何かを考察する必要がある.

保型表現論によると Dirichlet 指標  $\chi$  は, Hecke 指標  $\tilde{\chi} : \mathbf{Q}^\times \setminus \mathbf{Q}_\mathbf{A}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  を定めるので, これを  $\text{GL}_1(\mathbf{Q}_\mathbf{A})$  の保型表現とみなせる. 楕円尖点形式  $f$  は, 関数  $\tilde{f} : \text{GL}_2(\mathbf{Q}) \setminus \text{GL}_2(\mathbf{Q}_\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}$  を定める. さらに  $\tilde{f}$  の生成する  $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_\mathbf{A})$  の右正則表現を考えると, これは  $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_\mathbf{A})$  の保型表現を定める. よって,  $L$  関数やその  $p$  進版の一般化を考察する舞台の候補として,  $\text{GL}_n$  の保型表現論が挙げられる.

またモチーフ論も一般化を考察する舞台の候補に挙げられる.  $\chi, f$  それぞれに対し,  $M_\chi, M_f$  という純モチーフが構成され, 純モチーフに対しては  $L$  関数が定義出来るので, その  $p$  進版の考察もモチーフの言語で行うことが期待される.

どちらの言語も  $L$  関数の一般化や,  $p$  進  $L$  関数の存在を議論するには, 十分なほど理論的には整備されていると言える. しかし本稿の主題である  $p$  進  $L$  関数の構成という観点に立つと, 保型表現論を用いて予想を書き下すことが望ましい. 実際, 2.1 節であげたような  $L$  関数の解析的な性質や,  $p$  進版を考察するための特殊値の代数的な性質, また実際知られている構成の多くが何らかの形で保型表現論を用いる.

現状,  $p$  進  $L$  関数の存在予想には, [CPR89], [Co89] などモチーフ論を用いたものが見られる. また [Cl90] によると, 保型表現とモチーフとの対応が論じられている. そのため与えられた保型表現がどのような  $p$  進  $L$  関数をもつのか, 古典的な関わりや, 期待される性質を確かめるためにも, 保型表現に付随するモチーフを書き下すことは, 重要な研究ステップと思われる. 3 節で, 保型表現とモチーフの関係を復習し,  $p$  進  $L$  関数が, 現状どのようにその存在が期待されているかを 4 節で紹介する.

### 3. 保型表現とモチーフ

$\pi = \otimes'_{v \in \Sigma_{\mathbf{Q}}} \pi_v$  を  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_{\mathbf{A}})$  の保型表現とする. この節では,  $\pi$  に付随するモチーフ  $\mathcal{M}[\pi]$  について, Clozel ([Cl90]) の記述を簡単に復習する.  $p$  進  $L$  関数を記述するためには, モチーフの Hodge 分解の情報が必要となる.  $\mathcal{M}[\pi]$  の Hodge 分解は,  $\pi_{\infty}$  の情報を用いて記述されるため, まず  $\pi_{\infty}$  の分類方法を紹介する. (この分類については, [Kn94] に簡潔にまとめられている.)

$\pi_{\infty}$  は  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$  の許容表現というものになっている. Langlands 分類 ( $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$  の局所 Langlands 対応) により, これは  $\mathbf{R}$  の Weil 群  $W_{\mathbf{R}}$  の  $\mathbf{C}$  上の  $n$  次元半単純表現  $\phi := \phi_1 \oplus \cdots \oplus \phi_r : W_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$  (各  $\phi_i$  は既約) を用いて記述できる ([Kn94, Theorem 2]). とくに  $W_{\mathbf{R}}$  の 1 次元表現  $\phi_{\nu}^{\delta}$ , 既約 2 次元表現  $\phi_{\nu, l}$  は次の形で与えられる. (ここでは  $W_{\mathbf{R}}$  を,  $W_{\mathbf{R}} = \mathbf{C}^{\times} \sqcup \mathbf{C}^{\times} j, j^2 = -1, jzj = -\bar{z}, (z \in \mathbf{C}^{\times})$  と定義する.)

- $\phi_{\nu}^{\delta} : W_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{C}^{\times}$  を次で定める:

$$\phi_{\nu}^{\delta}(z) = (z\bar{z})^{\nu} \quad (z \in \mathbf{C}^{\times}), \quad \phi_{\nu}^{\delta}(j) = (-1)^{\delta}.$$

- $\phi_{\nu, l} : W_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$  を次で定める:

$$\phi_{\nu, l}(z) = r^{2\nu} \begin{pmatrix} e^{\sqrt{-1}l\theta} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}l\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{\nu + \frac{1}{2}} \bar{z}^{\nu - \frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & z^{\nu - \frac{1}{2}} \bar{z}^{\nu + \frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (z = re^{\sqrt{-1}\theta} \in \mathbf{C}^{\times}),$$

$$\phi_{\nu}^{\delta}(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^l & 0 \end{pmatrix}.$$

$W_{\mathbf{R}}$  の既約表現は,  $\phi_{\nu}^{\delta}, \phi_{\nu, l}$  のいずれかであるので,  $\phi : W_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$  はこれらの直和でかける. これを Langlands パラメーターとよぶ.

- 例 3.1.** (1)  $\chi$  を  $\mathrm{GL}_1(\mathbf{Q}_{\mathbf{A}})$  の保型表現, すなわち,  $\chi : \mathbf{Q}^{\times} \backslash \mathbf{Q}_{\mathbf{A}}^{\times} \rightarrow \mathbf{C}^{\times}$  を Hecke 指標とする.  $\chi_{\infty}$  に, Langlands パラメーター  $\phi_{\nu}^{\delta}$  が対応するとき,  $\chi_{\infty}(r) = \mathrm{sgn}(r)^{\delta} |r|^{\nu} (r \in \mathbf{R}^{\times})$  とかける.
- (2)  $\pi$  を  $\mathrm{GL}_1(\mathbf{Q}_{\mathbf{A}})$  の保型表現とする.  $\pi_{\infty}$  に, Langlands パラメーター  $\phi_{\nu, l}$  が対応するとき,  $\pi_{\infty}$  は重さ  $l+1$  の楕円保型形式の定める保型表現の無限成分となる.

**定義 3.2.** ([Cl90, page 90, Definition 1.8], [Cl90, page 111, Definition 3.12])  $\pi$  を  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_{\mathbf{A}})$  の等圧的保型表現とする.<sup>1</sup>  $\phi = \phi_1 \oplus \cdots \oplus \phi_r$  を  $\pi_{\infty}$  の Langlands パラメーターとする. このとき,  $\pi$  が代数的であるとは次が成り立つときをいう:<sup>2</sup>

- $\phi$  を  $\mathbf{C}^{\times} \subset W_{\mathbf{R}}$  に制限することで,  $\mathbf{C}^{\times}$  の表現  $\chi_1 \oplus \cdots \oplus \chi_n$  が定まる. (各  $\chi_t (t = 1, \dots, n)$  は  $\mathbf{C}^{\times}$  の指標.) このとき, 各  $t$  に対して,  $\chi_t(z) = z^{p_t + \frac{n-1}{2}} \bar{z}^{q_t + \frac{n-1}{2}}$  なる  $p_t, q_t \in \mathbf{Z}$  が存在する.

さらに, 上の  $p_1, \dots, p_n \in \mathbf{Z}$  が互いに異なるとき,  $\pi$  を正則という.

**補題 3.3.** ([Cl90, page 112, Lemme de pureté 4.9])  $\pi$  を  $\mathrm{GL}_n(F_{\mathbf{A}})$  の代数的尖点的保型表現とする. このとき, Definition 3.2 の  $p_t, q_t \in \mathbf{Z}$  に対し,  $p_t + q_t$  は,  $t$  に依らない. これを  $w \in \mathbf{Z}$  とかいて  $\pi$  の重さという.

<sup>1</sup> $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_{\mathbf{A}})$  の保型表現  $\pi$  に対し,  $n$  の適当な分割  $n = n_1 + \cdots + n_r$  と,  $\mathrm{GL}_{n_i}$  の尖点的保型表現  $\sigma_i (i = 1, \dots, r)$  が存在して,  $\pi$  は  $n\text{-Ind}_P^{\mathrm{GL}_n}(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_r)$  の部分商に現れる. ただし  $P = P_{n_1, \dots, n_r}$  は分割  $n = n_1 + \cdots + n_r$  に対応する  $\mathrm{GL}_n$  の標準放物型部分群を表し,  $n\text{-Ind}_P^{\mathrm{GL}_n}$  は正規化誘導を表す. このとき,  $\pi$  が等圧的 (isobaric) であるとは,  $\mathbf{Q}$  の各素点  $v$  に対し,  $\pi_v \cong n\text{-Ind}_P^{\mathrm{GL}_n}(\sigma_{1,v} \otimes \cdots \otimes \sigma_{r,v})$  となっているときをいう.

<sup>2</sup>これを  $\mathbf{C}$ -代数的と呼ぶこともある.

予想 3.4. ([Cl90, page 139, 予想 4.5, Section 4.3.3])  $\pi$  を  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_A)$  の代数的尖点的保型表現とし,  $w$  を  $\pi$  の重さとする. このとき,  $\mathbf{Q}$  上の階数  $n$  の純モチーフ  $\mathcal{M}[\pi]$  で, 重さが  $-w$  なものが存在して, 次を満たす:

$$L\left(s - \frac{n-1}{2}, \pi\right) = L(s, \mathcal{M}[\pi]).$$

さらに  $\mathcal{M}[\pi]$  は, 次の Hodge 分解をもつ:

$$H_B(\mathcal{M}[\pi]) \otimes \mathbf{C} = \bigoplus_{i+j=-w} H^{i,j}(\mathcal{M}[\pi]), \quad h(i, j) = \#\{p \in P(\mathcal{M}) \mid i = -p\}.$$

ただし  $h(i, j) = \dim_{\mathbf{C}} H^{i,j}(\mathcal{M}[\pi])$ , Definition 3.2 にある整数  $p_t, q_t$  を用いて,  $P(\mathcal{M}) = \{p_1, \dots, p_n\}$  とおいた.

予想 3.4 により, 保型表現  $\pi$  をモチーフ  $\mathcal{M}[\pi]$  として捉えることが出来,  $\pi_\infty$  による Hodge 分解の記述も出来る. いくつか実例を確認する.

例 3.5. ノルム指標  $|\cdot|_A : \mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{Q}_A^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  に対して,  $|\cdot|_{A,\infty}$  の Langlands パラメーターは,  $\phi_1^0$ . とくに Definition 3.2 の  $p := p_{\infty,1}, q := q_{\infty,1} \in \mathbf{Z}$  は,  $p = q = 1$  で与えられる. また予想 3.4 で予見される  $|\cdot|_A$  に付随する純モチーフは Tate モチーフ  $\mathbf{Z}(1)$  で, これは重さが  $-2 = -(1+1)$  の階数 1 のモチーフで,  $h(-1, -1) = 1$  である.<sup>3</sup>

例 3.6.  $\chi : \mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{Q}_A^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  を, 有限位数の Hecke 指標とする. このとき,  $\mathcal{M}[\chi]$  で, 予想 3.4 で予見されたモチーフとする.  $\chi_\infty$  の Langlands パラメーターは,  $\phi_0^\delta((-1)^\delta = \chi_\infty(-1))$  で与えられる. よって,  $\mathcal{M}[\chi]$  は階数 1, 重さ 0 のモチーフで,  $h(0, 0) = 1$  となる.

例 3.7.  $\pi$  を  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_A)$  の代数的尖点的保型表現とし,  $\pi_\infty$  の Langlands パラメーターが,  $\phi_{\nu,l}$  とする.  $\phi_{\nu,l}(z) = \mathrm{diag}(\chi_1(z), \chi_2(z)) = \mathrm{diag}\left(z^{\nu+\frac{l}{2}}z^{\nu-\frac{l}{2}}, z^{\nu-\frac{l}{2}}z^{\nu+\frac{l}{2}}\right)$  ( $z \in \mathbf{C}^\times$ ). 定義 3.2 によると, 次を満たす  $p_1, q_1, p_2, q_2$  は整数である:

$$\left(\nu + \frac{l}{2}, \nu - \frac{l}{2}\right) = \left(p_1 + \frac{1}{2}, q_1 + \frac{1}{2}\right), \quad \left(\nu - \frac{l}{2}, \nu + \frac{l}{2}\right) = \left(p_2 + \frac{1}{2}, q_2 + \frac{1}{2}\right).$$

とくに  $(p_1, p_2) = \left(\nu + \frac{l-1}{2}, \nu - \frac{l+1}{2}\right)$ . よって  $l \geq 1$  のとき,<sup>4</sup>  $\pi$  は正則.

簡単のため  $l \geq 1$  は奇数とし,  $\nu = 0$  とする.  $k = l + 1$  とおく.  $\mathcal{M}[\pi]$  を予想 3.4 で予見されたモチーフとする. これは  $\mathbf{Q}$  上のモチーフで, 階数は 2. 後の  $p$  進  $L$  関数の存在予想の記述と合わせるため,  $\mathcal{M}_\pi = \mathcal{M}[\pi](2 - \frac{k}{2})$  とおく.<sup>5</sup> するとこれは, 重さが  $k - 3$  で, 次を満たす:

$$(3.1) \quad h(-1, k-2) = h(k-2, -1) = 1.$$

以上は古典的な例だが, 今回の研究では, 次の保型表現, モチーフに付随する  $p$  進  $L$  関数を考察した.

例 3.8.  $E$  を虚二次体とし,  $c$  を複素共役とする.  $\pi$  を  $\mathrm{GL}_2(E_A)$  の正則代数的尖点的保型表現とする. 例 3.7 と同様に簡単のため  $l \geq 1$  を奇数とし,  $\pi_\infty$  の Langlands パラメーターが,  $\phi_{0,l} \oplus \phi_{0,-l}$  であるとする.<sup>6</sup> また  $n = l - 1$  とおく.  $\mathcal{M}[\pi]$  を予想 3.4 で予見されたモチーフとする.  $\mathrm{As}_M^+(\mathcal{M}[\pi])$  を, 降下データ  $v \otimes w \mapsto w \otimes v$  による  $\mathcal{M}[\pi] \otimes \mathcal{M}[\pi]^c$  の  $\mathbf{Q}$  への降下とする. このとき,  $\mathrm{As}_M^+(\pi)$  を次で定め, これを  $\pi$  の浅井モチーフとよぶ:

$$\mathrm{As}_M^+(\pi) = \mathrm{As}^+(\mathcal{M}[\pi])(2).$$

すると  $\mathrm{As}_M^+(\pi)$  は, 重さ  $-2$  で次を満たす:

$$(3.2) \quad h(-n-2, n) = h(n, -n-2) = 1, \quad h(-1, -1) = 2.$$

浅井モチーフについては, [Gh99a, Section 4] に詳しい記述がある.

<sup>3</sup>[Cl90, Conjecture 4.5] では, 重さ  $w$  となっているが, のちの整合性を考えて予想 3.4 では  $\mathcal{M}[\pi]$  の重さは  $-w$  とした.

<sup>4</sup>これは対応する楕円保型形式の重さが 2 以上という条件.

<sup>5</sup>楕円保型形式  $f$  に付随するモチーフ  $\mathcal{M}_f$  は,  $\mathcal{M}[\pi](1 - \frac{k}{2})$  で記述されることも多い.  $\mathcal{M}_f$  は重さが  $k - 1$  で,  $h(0, k-1) = h(k-1, 0) = 1$  となっている.  $\mathcal{M}_\pi$  という正規化を選択した理由は, [Co89] が  $s = 0$  が critical となるようなモチーフを考察しているので, それに合わせている.

<sup>6</sup> $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$  の既約許容表現は,  $\mathbf{C}$  の Weil 群  $W_{\mathbf{C}}$  の半単純表現を用いて記述される.  $W_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^\times$  であるので,  $W_{\mathbf{C}}$  の既約表現は,  $\phi_{\nu,l} = z^{\nu+\frac{l}{2}}z^{\nu-\frac{l}{2}}$  ( $\nu \in \mathbf{C}, l \in \mathbf{Z}$ ) の形のみ. ここでは詳しい分類の結果を復習しないが, [Kn94, Section 4] を参照する.

#### 4. $p$ 進 $L$ 関数の存在予想

この節では Coetes-Perrin-Riou による  $p$  進  $L$  関数の存在予想 ([Co89], [CPR89]) を書き下す. とくにモチーフの Hodge 分解から修正 Euler 因子と呼ばれる  $L$  関数の補正項が定義されることを紹介する.

4.1. 設定.  $\mathcal{M}$  を  $\mathbf{Q}$  上の純モチーフとし,  $d(\mathcal{M})$  で  $\mathcal{M}$  の階数,  $w(\mathcal{M})$  で  $\mathcal{M}$  の重さを表す.  $\phi : \mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{Q}_A^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  を, 有限位数の Hecke 指標とし,  $\mathcal{M}(\phi)$  で,  $\mathcal{M}$  を  $\phi$  による捻りを表す.  $\mathcal{M}$  の係数体を  $K$  とする. ただし,  $K \subset \overline{\mathbf{Q}}$  とみなし, 固定された単射  $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{C}$  を用いて,  $K$  を  $\mathbf{C}$  の部分体ともみなす.

4.2.  $\mathcal{E}_\infty(\mathcal{M})$  の定義.  $H_B(\mathcal{M})$  で,  $\mathcal{M}$  の Betti 実現とし, Hodge 分解を,

$$H_B(\mathcal{M}) \otimes \mathbf{C} = \bigoplus_{i+j=w(\mathcal{M})} H^{i,j}(\mathcal{M}) = \bigoplus_U U, \quad h(i, j) = \dim_{\mathbf{C}} H^{i,j}(\mathcal{M})$$

とかく. ただし,  $U$  は  $H^{i,j}(\mathcal{M}) \oplus H^{j,i}(\mathcal{M}) (i < j)$ , または  $H^{i,i}(\mathcal{M})$  を走る.  $\rho_B$  で複素共役から定まる  $H_B(\mathcal{M})$  の対合を表し,  $H^{i,i}(\mathcal{M})$  には, 定数倍で作用すると仮定する.

無限素点  $\infty$  での  $\mathcal{M}$  の  $\Gamma$ -因子  $L_\infty(s, \mathcal{M}) = \prod_U \Gamma(s, U)$ ,  $\epsilon$ -因子  $\epsilon_\infty(s, \mathcal{M}) = \prod_U \epsilon_\infty(s, U)$  を次で定める ([De79, Section 5.3]): <sup>7</sup>

- $U = H^{i,j}(\mathcal{M}) \oplus H^{j,i}(\mathcal{M}) (i < j)$  のとき,

$$L_\infty(s, U) = \Gamma_{\mathbf{C}}(s - i)^{h(i,j)}, \quad \epsilon_\infty(s, U) = \sqrt{-1}^{(j-i+1)h(i,j)}.$$

- $U = H^{i,i}(\mathcal{M}), \rho_B = (-1)^{i+\epsilon}, (\epsilon \in \{0, 1\})$  のとき,

$$L_\infty(s, U) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s - i + \epsilon)^{h(i,i)}, \quad \epsilon_\infty(s, U) = \sqrt{-1}^{\epsilon h(i,i)}.$$

無限素点  $\infty$  での  $\mathcal{M}$  の修正  $\Gamma$  因子  $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{M}) = \prod_U \mathcal{L}_\infty(U)$  を次で定める ([Co89, (4)(a)(b)]):

- $U = H^{i,j}(\mathcal{M}) \oplus H^{j,i}(\mathcal{M}) (i < j)$  のとき,  $\mathcal{L}_\infty(U) = \sqrt{-1}^{ih(i,j)} L_\infty(0, U)$ .
- $U = H^{i,i}(\mathcal{M}) (i \geq 0)$  のとき,  $\mathcal{L}_\infty(U(\phi)) = 1$ .

- $U = H^{i,i}(\mathcal{M}) (i < 0)$  のとき,  $\mathcal{L}_\infty(U) = \frac{L_\infty(0, U)}{\epsilon_\infty(0, U) L_\infty(1, U^\vee)}$ . (ただし,  $U^\vee$  は  $U$  の双対を表す.)

また  $\mathcal{E}_\infty(\mathcal{M})$  を  $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{M}) = \mathcal{E}_\infty(\mathcal{M}) L_\infty(0, \mathcal{M})$  となるように定め, これを無限素点  $\infty$  での  $\mathcal{M}$  の修正 Euler 因子とよぶ.

4.3.  $\mathcal{E}_p(\mathcal{M})$  の定義.  $p$  と異なる素数  $l$  をとり, 体としての同型  $\mathbf{C}_l \cong \mathbf{C}$  を固定しておく.  $H_l(\mathcal{M})$  で,  $\mathcal{M}$  の  $l$  進実現とし, 次を仮定する:

(Unr) 惰性群  $I_p$  は,  $H_l(\mathcal{M})$  に自明に作用する.

$J_l(\mathcal{M})$  で,  $H_l(\mathcal{M}) \otimes \mathbf{C}$  の  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ -加群としての半単純化を表す.  $J_l(\mathcal{M})$  を,  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ -加群としての直和

$$J_l(\mathcal{M}) = \bigoplus_\alpha U_\alpha$$

とかく. ただし, 各  $U_\alpha$  に,  $\text{Forb}_p \in \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  は,  $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}^\times$  で作用する. とくに  $\chi_\alpha : \mathbf{Q}_p^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  で,  $\chi_\alpha(p) = \alpha$  なる不分岐指標を表すと, 素点  $p$  での  $\mathcal{M}$  の局所  $L$  因子は次で書ける:

$$L_p(s, \mathcal{M}) = \prod_\alpha L_p(s, \chi_\alpha).$$

このとき, 修正  $L$  因子  $\mathcal{L}_p(\mathcal{M}) = \prod_\alpha \mathcal{L}_p(\chi_\alpha)$  を次で定める ([Co89, (18)(a)(b)]):

- $\text{ord}_p(\alpha) \geq 0$  のとき,  $\mathcal{L}_p(\chi_\alpha) = 1$ .

- $\text{ord}_p(\alpha) < 0$  のとき,  $\mathcal{L}_p(\chi_\alpha) = \frac{L_p(0, \chi_\alpha)}{\epsilon_p(0, \chi_\alpha, \psi_p) L_p(1, \chi_\alpha^{-1})} = \gamma_p(0, \chi_\alpha, \psi_p)^{-1}$ .

ただし,  $\epsilon_p(s, \chi_\alpha, \psi_p), \gamma_p(s, \chi_\alpha, \psi_p)$  は, それぞれ  $\chi_\alpha$  の加法指標  $\psi_p$  に付随する局所  $\epsilon$  因子, 局所  $\gamma$  因子. また  $\mathcal{E}_p(\mathcal{M})$  を  $\mathcal{L}_p(\mathcal{M}) = \mathcal{E}_p(\mathcal{M}) L_p(0, \mathcal{M})$  となるように定め, これを素点  $p$  での  $\mathcal{M}(\phi)$  の修正 Euler 因子とよぶ.

<sup>7</sup>素点が複素の場合も同様に定義出来る. また  $\rho_B$  が  $H^{i,i}(\mathcal{M})$  にスカラーで作用しなくても,  $\Gamma$ -因子が定義出来るが, のちに仮定する (Crit) のもとで,  $\rho_B$  はスカラーで作用する.

4.4. 存在予想. 次を仮定する:

(Crit) ([De79, Definition 1.3])  $\mathcal{M}$  は,  $s = 0$  で critical. すなわち,  $L_\infty(s, \mathcal{M}), L_\infty(1 - s, \mathcal{M}^\vee)$  はともに  $s = 0$  で極を持たない.

次の条件を考える:

(Crit,  $n, \varphi$ )  $\mathcal{M}$  は  $s = 0$  で critical とする. また  $\mathcal{M}(n)$  で,  $\mathcal{M}$  の  $n$ -Tate 捻りとし,  $\varphi: \mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{Q}_\mathbf{A}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  を有限位数の Hecke 指標とし,  $\phi = |\cdot|_\mathbf{A}^n \varphi (n \in \mathbf{Z})$  とおく.  $\varphi_\infty(-1) = (-1)^n$  で,  $\mathcal{M}(\phi)$  は  $s = 0$  で critical とする.

$c^\pm(\mathcal{M})$  を  $\mathcal{M}$  に対する Deligne の周期とする. これは  $\mathbf{C}^\times / \overline{\mathbf{Q}}^\times$  の元として, 一意的に定義される. さらに修正された周期  $\Omega(\mathcal{M})$  を次で定める ([Co89, (12), page 107]):

$$\tau(\mathcal{M}) = \sum_{i < 0} ih(i, j), \quad \Omega(\mathcal{M}) = (2\pi\sqrt{-1})^{\tau(\mathcal{M})} c^+(\mathcal{M}).$$

予想 4.1. ([De79, Conjecture 1.8], [Co89, page 107, Period Conjecture]) (Crit,  $n, \varphi$ ) を仮定する. このとき,

$$\mathcal{E}_\infty(\mathcal{M}(\phi)) \mathcal{E}_p(\mathcal{M}(\phi)) \frac{L(0, \mathcal{M}(\phi))}{\Omega(\mathcal{M})} \in \overline{\mathbf{Q}}.$$

モチーフ  $\mathcal{M}$  が  $p$ -通常的という条件が定義される ([Co89, Section 3]). ここでは一般的な定義は復習せずに, 保型表現から定まるモチーフ  $\mathcal{M}[\pi]$  に対し, この条件を書き下す:

例 4.2.  $\pi$  を  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_\mathbf{A})$  の代数的尖点的保型表現とし,  $p$  で不分岐とする.  $p_i, q_i$  は, Definition 3.2 にある整数とする.  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  を  $\pi_p$  の佐武パラメーターとする.<sup>8</sup>  $p_i, \alpha_i$  を適当に並べ替えて,  $-p_1 \geq \dots \geq -p_n, \mathrm{ord}_p(\alpha_1) \geq \dots \geq \mathrm{ord}_p(\alpha_n)$  とする. このとき,  $\pi$  が  $p$ -通常的であるとは, 次が成り立つときをいう:

- 各  $1 \leq i \leq n$  に対し,  $\mathrm{ord}_p(\alpha_i) + \frac{n-1}{2} = -p_i$ .

予想 4.3. ([Co89, page 111, Principal Conjecture])  $w(\mathcal{M}) \in 2\mathbf{Z}$  のとき,  $\mathcal{M}$  は Tate モチーフ  $\mathbf{Q}(-w(\mathcal{M})/2)$  を直和因子にもたないと仮定する. また  $\mathcal{M}$  は  $p$ -通常的とする. このとき, 適当な  $\mathbf{Q}_p$  の有限時拡大  $K_\mathcal{M}$  ( $\mathcal{O}_\mathcal{M}$  をその整数環とする) と,  $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \in K_\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{M}} \mathcal{O}_\mathcal{M}[[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q})]]$  が存在して, 任意の有限位数の Hecke 指標  $\varphi: \mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{Q}_\mathbf{A}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  で, 次の条件を満たすもの:

- (Crit,  $n, \varphi$ );
- $\varphi$  は  $p$  の外不分岐;
- 予想 4.1;

に対して, 次の補間公式が成り立つ:

$$(4.1) \quad \widehat{\phi}(\mathcal{L}(\mathcal{M})) = \mathcal{E}_\infty(\mathcal{M}(\phi)) \mathcal{E}_p(\mathcal{M}(\phi)) \frac{L(0, \mathcal{M}(\phi))}{\Omega(\mathcal{M})}.$$

(ただし,  $\phi = |\cdot|_\mathbf{A}^n \varphi$  で,  $\widehat{\phi}$  は  $\phi$  の  $p$  進 avatar とする.)

注意 4.4. 予想 4.3 は, [Co89, page 111, Principal Conjecture] より幾分か強いことを主張している. 例えば, 係数環が予想 4.3 のように取れるかなど, [Co89] では議論されていない. また [Co89] では,  $p$  進測度の言語で主張が書かれているが,  $p$  進  $L$  関数を冪級数環の元と捉える方が扱いやすいこともあり, 予想 4.3 の形で紹介をした.

## 5. $p$ 進 $L$ 関数の存在予想の具体的記述

予想 4.3 における補間公式を, 例 3.6, 例 3.7, 例 3.8 で与えたモチーフの場合に書き下す. 予想自体は, モチーフを介して記述されるが, 保型表現に付随するモチーフについては, 補間公式で現れる定数らは, 全て保型表現論の言葉で記述出来ることを紹介する.

<sup>8</sup> $\pi_p$  の佐武パラメーター  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  を用いると,  $L(s, \pi_p) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - \alpha_i p^{-s}}$  とかける.

5.1. Dirichlet  $L$  関数の場合.  $\chi : \mathbf{Q}^\times \setminus \mathbf{Q}_A^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  を, 有限位数の Hecke 指標とし, 例 3.6 の設定の通りとする.  $\mathcal{M}[\chi]$  の  $L$  関数は,  $\chi$  の  $L$  関数で記述出来る:

$$L(s, \mathcal{M}[\chi]) = L(s, \chi).$$

(critical 値)  $\mathcal{M}[\chi]$  の  $\Gamma$  因子は次で与えられる:

$$L_\infty(s, \mathcal{M}[\chi]) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s + \delta), \quad L_\infty(s, \mathcal{M}[\chi]^\vee) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s + \delta),$$

とくに  $\mathcal{M}[\chi]$  が  $s = 0$  で critical であることと,  $\chi_\infty(-1) = -1$  は同値. 以下, これを仮定する.  $\varphi : \mathbf{Q}^\times \setminus \mathbf{Q}_A^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  を  $p$  の外不分岐な指標とし,  $\phi = |\cdot|_A^\alpha \varphi(n \in \mathbf{Z})$  とおく.  $\mathcal{M}[\chi](\phi)$  の  $\Gamma$  因子は次で与えられる:

$$L_\infty(s, \mathcal{M}[\chi](\phi)) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s + \alpha + 1), \quad L_\infty(s, \mathcal{M}[\chi](\phi)^\vee) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s - \alpha + 1).$$

よって,  $\mathcal{M}[\chi](\phi)$  が  $s = 0$  で critical であることと, 次が同値:

$$\alpha \in \{n \in \mathbf{Z} | n \leq 0, \varphi_\infty(-1) = (-1)^n\} \cup \{n \in \mathbf{Z} | n > 0, \varphi_\infty(-1) = (-1)^{n+1}\}.$$

関数等式を考慮して, 以下  $\alpha \leq 0$  とする.

( $p$ -通常性)  $\chi$  は  $p$ -不分岐を仮定する. すると  $\text{ord}_p(\chi(p)) = 0$  で, 今,  $\mathcal{M}[\chi]$  に対し  $h(0, 0) = 1$  であったので,  $\mathcal{M}[\chi]$  は, 例 4.2 の意味で,  $p$ -通常的である.

(修正因子, 周期) 修正因子  $\mathcal{L}_*(\mathcal{M}[\chi](\phi))$  ( $*$  =  $p, \infty$ ) は, 次で書ける:

$$\mathcal{L}_\infty(\mathcal{M}[\chi](\phi)) = 1, \quad \mathcal{L}_p(\mathcal{M}[\chi](\phi)) = 1.$$

よってとくに,  $\mathcal{E}_\infty(\mathcal{M}[\chi](\phi)) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s + \alpha + 1)^{-1}$ ,  $\mathcal{E}_p(\mathcal{M}[\chi](\phi)) = L_p(0, \mathcal{M}[\chi](\phi))^{-1}$ . さらに  $\chi_\infty(-1) = -1$  より,  $d^+(\mathcal{M}[\chi]) = 0$  で,  $L^{(\infty)}(0, \chi) \in \mathbf{Q}$  であることから,

$$c^+(\mathcal{M}[\chi](\phi)) = c^+(\mathcal{M}[\chi]) = 1.$$

以上より, 予想 4.3 の補間公式は次のようにかける:

$$\widehat{\phi}(\mathcal{L}_p(\chi)) = (1 - \chi\varphi(p)p^{-\alpha})L^{(\infty)}(\alpha, \chi\varphi).$$

2.2 節の補間公式はこれを書き下したものである.

5.2. 楕円尖点形式の  $L$  関数の場合.  $\pi$  を  $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_A)$  の代数的尖点的保型表現とし, 例 3.7 の設定の通りとする. このとき,  $\pi$  に対応するモチーフ  $\mathcal{M}_\pi$  の  $L$  関数は,  $\pi$  の  $L$  関数を用いて, 次で記述できる:

$$L(s, \mathcal{M}_\pi) = L(s + \frac{3-k}{2}, \pi).$$

(critical 値)  $\mathcal{M}_\pi$  の  $\Gamma$  因子は次で与えられる:

$$L_\infty(s, \mathcal{M}_\pi) = \Gamma_{\mathbf{C}}(s + 1), \quad L_\infty(s, \mathcal{M}_\pi^\vee) = \Gamma_{\mathbf{C}}(s - (-k + 2)).$$

よって,  $\mathcal{M}_\pi$  は,  $s = 0$  で critical.  $\varphi : \mathbf{Q}^\times \setminus \mathbf{Q}_A^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  を  $p$  の外不分岐な指標とし,  $\phi = |\cdot|_A^\alpha \varphi(\alpha \in \mathbf{Z})$  とおく.  $\varphi(-1) = (-1)^\alpha$  とする.  $\mathcal{M}_\pi(\phi)$  の  $\Gamma$  因子は次で与えられる:

$$L_\infty(s, \mathcal{M}_\pi(\phi)) = \Gamma_{\mathbf{C}}(s + \alpha + 1), \quad L_\infty(s, \mathcal{M}_\pi(\phi)^\vee) = \Gamma_{\mathbf{C}}(s + k - 2 - \alpha).$$

よって,  $\mathcal{M}_\pi(\phi)$  が  $s = 0$  で critical であることと,  $0 \leq \alpha \leq k - 2$  が同値. 以下,  $0 \leq \alpha \leq k - 2$  とする.

( $p$ -通常性)  $\pi$  は  $p$ -不分岐,  $p$ -通常的と仮定する.  $\alpha_p, \beta_p$  を  $\pi$  の佐武パラメーターとすると,

$$L(s, \pi_p) = \frac{1}{(1 - \alpha_p p^{-s})(1 - \beta_p p^{-s})}.$$

すると予想 3.4 より,

$$L_p(s, \mathcal{M}_\pi) = L(s + \frac{3-k}{2}, \pi_p) = \frac{1}{(1 - \alpha_p p^{\frac{k-3}{2}} p^{-s})(1 - \beta_p p^{\frac{k-3}{2}} p^{-s})}.$$

この表示と (3.1), 例 4.2 より,  $\pi$  が  $p$ -通常的であることは, 次と同値:

$$\left\{ \text{ord}_p(\alpha_p p^{\frac{k-3}{2}}), \text{ord}_p(\beta_p p^{\frac{k-3}{2}}) \right\} = \{-1, k - 2\}.$$



よって,  $\text{ord}_p(\alpha_p p^{\frac{k-3}{2}}) = k-2$ ,  $\text{ord}_p(\beta_p p^{\frac{k-3}{2}}) = -1$ , すなわち  $\text{ord}_p(\alpha_p) = \frac{k-1}{2}$ ,  $\text{ord}_p(\beta_p) = -\frac{k-1}{2}$  としてよい.

(修正因子, 周期) 修正 Euler 因子, 周期  $\mathcal{E}_\infty(\mathcal{M}_\pi(\phi))$ ,  $\mathcal{E}_p(\mathcal{M}_\pi(\phi))$ ,  $\Omega(\mathcal{M}_\pi)$  は次で記述される. ただ  $\mathcal{E}_*(\mathcal{M}_\pi(\phi))$  ( $*$  =  $p, \infty$ ) を記述するより,  $\mathcal{L}_*(\mathcal{M}_\pi(\phi))$  を記述する方が簡便なので, こちらを記述する. 実際の構成においては,  $\mathcal{E}_*(\mathcal{M}_\pi(\phi))$  ではなく,  $\mathcal{L}_*(\mathcal{M}_\pi(\phi))$  が現れるため, こちらの形を確認しておきたい.

( $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{M}_\pi(\phi))$  の定義)  $\mathcal{M}_\pi(\phi)$  の Hodge 分解より, 次がわかる:

$$\mathcal{L}_\infty(\mathcal{M}_\pi(\phi)) = \sqrt{-1}^{(-1-\alpha)} L_\infty(0, \mathcal{M}_\pi(\phi)) = \sqrt{-1}^{(-1-\alpha)} \Gamma_{\mathbf{C}}(\alpha + 1).$$

( $\mathcal{L}_p(\mathcal{M}_\pi(\phi))$  の定義)

$\gamma \in \mathbf{C}_p^\times$  に対して, 不分岐指標  $\chi_\gamma: \mathbf{Q}_p^\times \rightarrow \mathbf{C}_p^\times$  を  $\chi_\gamma(p) = \gamma$  とおく. すると

- $\text{ord}_p(\alpha_p p^{\frac{k-3}{2}} \phi_p(p)) = k-2-\alpha \geq 0$ . よって,  $\mathcal{L}_p(\chi_{\alpha_p p^{\frac{k-3}{2}} \phi_p}) = 1$ .
- $\text{ord}_p(\beta_p p^{\frac{k-3}{2}} \phi_p(p)) = -1-\alpha < 0$ . よって,  $\mathcal{L}_p(\chi_{\beta_p p^{\frac{k-3}{2}} \phi_p}) = \gamma_p(0, \chi_{\beta_p p^{\frac{k-3}{2}} \phi_p}, \psi_p)^{-1}$ .

よって,

$$\mathcal{L}_p(\mathcal{M}_\pi(\phi)) = \gamma_p(0, \chi_{\beta_p p^{\frac{k-3}{2}} \phi_p}, \psi_p)^{-1}.$$

( $\Omega(\mathcal{M}_\pi)$  の定義)

$\Omega_{\pi,p}^+$  を  $\pi$  の標準周期とする. このとき, [Hi94] により,  ${}^9 c^+(\mathcal{M}_\pi) \sim_{\mathbf{Q}^\times} 2\pi\sqrt{-1}\Omega_{\pi,p}^+$  が示されている. よって,  $c^+(\mathcal{M}_\pi)$  として,  $(2\pi\sqrt{-1})\Omega_{\pi,p}^+$  を採用する. また  $\tau(\mathcal{M}_\pi) = -1$  なので,  $\Omega(\mathcal{M}_\pi) = \Omega_{\pi,p}$  が得られる.

**注意 5.1.** 古典的な楕円保型形式の用語との整合性を確かめておく.

(1) 新形式  $f$  に対し,  $L(s, f)$  の  $p$  での局所  $L$  因子  $L_p(s, f)$  を

$$L_p(s, f) = \frac{1}{1 - a(p, f)p^{-s} + p^{k-1-2s}} = (1 - \alpha_{f,p}p^{-s})^{-1}(1 - \beta_{f,p}p^{-s})^{-1}$$

とかくと,  $\alpha_{f,p}, \beta_{f,p}$  は佐武パラメータを用いて,  $\{\alpha_{f,p}, \beta_{f,p}\} = \{\alpha_p p^{\frac{k-1}{2}}, \beta_p p^{\frac{k-1}{2}}\}$  とかける. とくに,  $\alpha_{f,p} = \alpha_p p^{\frac{k-1}{2}}, \beta_{f,p} = \beta_p p^{\frac{k-1}{2}}$  とする. このとき,  $p$ -通常性より,  $\text{ord}_p(\alpha_{f,p}) = k-1$ ,  $\text{ord}_p(\beta_{f,p}) = 0$ . とくに  $a(p, f) = \alpha_{f,p} + \beta_{f,p}$  であるので, これは  $p$  進単数となる. よって, 例 4.2 における  $\pi$  が  $p$ -通常的であることの定義は, 古典的な場合に  $f$  が  $p$ -通常的であることに同値である.

(2) 上の記号を用いて,  $\mathcal{L}_p(\mathcal{M}_\pi(\phi))$  を書き換える.  $\mathcal{L}_p(\mathcal{M}_\pi(\phi))$  は明示的に次のように書ける:

$$\mathcal{L}_p(\mathcal{M}_\pi(\phi)) = \begin{cases} \frac{1 - \beta_p^{-1} p^{-\frac{k-3}{2}} \phi_p^{-1}(p) p^{-1}}{1 - \beta_p p^{\frac{k-3}{2}} \phi_p(p)}, & (\phi_p: \text{不分岐}), \\ \left(\frac{p^\alpha}{\beta_p p^{\frac{k-3}{2}}}\right)^{c(\varphi_p)} \times \tau(\varphi_p^{-1}, \psi_p)^{-1}, & (\phi_p: \text{分岐}). \end{cases}$$

ただし,  $\phi = |\cdot|_{\mathbf{A}}^\alpha \varphi$  が分岐するとき,  $\varphi$  の導手を  $p^{c(\varphi_p)}$  とかき, 局所 Gauss 和  $\tau(\varphi_p, \psi_p)$  は次で定義している:

$$\tau(\varphi_p, \psi_p) = \sum_{u \in (\mathbf{Z}_p/p^{c(\varphi_p)}\mathbf{Z}_p)^\times} \varphi_p(up^{-c(\varphi_p)}) \psi_p(up^{-c(\varphi_p)}).$$

<sup>9</sup>最初にこの代数性について論じたのは, [Sh76] であると思われる. ただここでいう標準周期というような整性について論じられるような周期について認識されたのは, 肥田の貢献が大きい. 標準周期という単語は, [Va99, (5)] から取っている. [落合 16, 定義 6.10] では  $p$  最適な複素周期と呼ばれている.

まず  $\frac{p^\alpha}{\beta_p p^{\frac{k-3}{2}}} = \frac{p^\alpha}{\beta_{f,p}} \times p$  とかける.  $\epsilon_p(s, \varphi_p, \psi_p) \epsilon_p(1-s, \varphi_p^{-1}, \psi_p^{-1}) = 1$  に注意すると,<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} p^{c(\varphi_p)} \tau(\varphi_p^{-1}, \psi_p)^{-1} &= p^{c(\varphi_p)} \tau(| \cdot |_p \varphi_p, \psi_p^{-1}) = \tau(\varphi_p, \psi_p^{-1}) \\ &= \sum_{u \in (\mathbf{Z}_p / p^{c(\varphi_p)} \mathbf{Z}_p)^\times} \varphi_p(u) \exp(2\pi \sqrt{-1} u p^{-c(\varphi_p)}) =: G(\varphi_p). \end{aligned}$$

以上より, 次が得られる:

$$\mathcal{L}_p(\mathcal{M}_\pi(\phi)) = \begin{cases} \frac{1 - \beta_{f,p}^{-1} \varphi_p^{-1}(p) p^\alpha}{1 - \beta_{f,p} \varphi_p(p) p^{-(\alpha+1)}}, & (\phi_p : \text{不分岐}), \\ \left(\frac{p^\alpha}{\beta_{f,p}}\right)^{c(\varphi_p)} \times G(\varphi_p), & (\phi_p : \text{分岐}). \end{cases}$$

楕円保型形式の  $p$  進  $L$  関数の補間公式を記述する際, こちらの形のものがよく見られる.

5.3. 浅井  $L$  関数の場合.  $E$  を虚二次体とし,  $c$  を複素共役,  $p$  は  $E/\mathbf{Q}$  で不分岐とする.  $\pi$  を  $\mathrm{GL}_2(E_{\mathbf{A}})$  の  $p$ -不分岐,  $p$ -通常的, 正則代数的尖点的保型表現とし, 例 3.8 の設定の通りとする.  $\pi$  の浅井モチーフ  $\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)$  の  $L$  関数  $L(s, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi))$  は,  $\pi$  の浅井  $L$  関数  $L(s, \mathrm{As}^+(\pi))$  を用いて, 次で記述できる:

$$L(s, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)) = L(s+1, \mathrm{As}^+(\pi))$$

(critical 値) 複素共役  $\rho_B$  は,  $H^{-1,-1}(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+)$  に  $+1$  で作用する. これから  $\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)$  の  $\Gamma$  因子は次で与えられる:

$$L_\infty(s, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)) = \Gamma_{\mathbf{C}}(s+n+2) \Gamma_{\mathbf{R}}(s+2)^2, \quad L_\infty(s, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)^\vee) = \Gamma_{\mathbf{C}}(s+n) \Gamma_{\mathbf{R}}(s+1)^2$$

よって,  $\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+$  は,  $s=0$  で critical. より一般に,  $\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\alpha)$  ( $\alpha \in \mathbf{Z}$ ) が  $s=0$  で critical であることと, 次が同値:

$$\alpha \in \{a \in \mathbf{Z} \mid a : \text{奇数}, -n-1 \leq a \leq -1\} \cup \{a \in \mathbf{Z} \mid a : \text{偶数}, 0 \leq a \leq n\}.$$

関数等式を考慮して,  $0 \leq \alpha \leq n$  に着目する.  $\varphi : \mathbf{Q}^\times \setminus \mathbf{Q}_{\mathbf{A}}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$  を有限位数の指標とし,  $\phi = | \cdot |_{\mathbf{A}}^{n-\alpha} \varphi$  とおく. このとき,  $\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\phi)$  が  $s=0$  で critical であるのは次が成り立つことが同値:

- $0 \leq \alpha \leq n$ ,  $\varphi(-1) = (-1)^\alpha$ .

以下,  $\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi)$  が  $s=0$  で critical とする.

( $p$ -通常性)  $p$  が  $E$  で分裂するとき  $p = vv_c$  とかいて,  $\alpha_v, \beta_v$  を  $\pi_v$  の,  $\alpha_{v_c}, \beta_{v_c}$  を  $\pi_{v_c}$  のそれぞれ左武パラメーターとする. また  $\alpha_p = \alpha_v \alpha_{v_c}, \beta_p = \beta_v \beta_{v_c}$  とおく.  $p$  が惰性するとき,  $\alpha_p, \beta_p$  を  $\pi_p$  の左武パラメーターとする.  $\pi_p$  が  $p$ -通常的とすると, 次としてよい:

- $p = vv_c$ : 分裂のとき.  $\mathrm{ord}_p(\alpha_v) = \mathrm{ord}_p(\alpha_{v_c}) = \frac{n+1}{2}, \mathrm{ord}_p(\beta_v) = \mathrm{ord}_p(\beta_{v_c}) = -\frac{n+1}{2}$ .
- $p$ : 惰性のとき.  $\mathrm{ord}_p(\alpha_p) = n+1, \mathrm{ord}_p(\beta_p) = -n-1$ .

また  $L_p(s, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi))$  は次で記述される:

$$L_p(s, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)) = \begin{cases} L(s+1, \pi_v \otimes \pi_{v_c}), & (p = vv_c : \text{分裂}), \\ \frac{1}{(1 - \alpha_p p^{-(s+1)})(1 - \alpha_p \beta_p p^{-2(s+1)})(1 - \beta_p p^{-(s+1)})}, & (p : \text{惰性}). \end{cases}$$

この表示と, (3.2) から,  $\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)$  は, 例 4.2 の意味で,  $p$ -通常的であることがわかる.

(修正因子, 周期) 先と同様の理由で,  $\mathcal{L}_\infty(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi)), \mathcal{L}_p(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi))$  を記述する. また周期  $\Omega(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi))$  を記述する.

( $\mathcal{E}_\infty(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi))$  の定義)  $L_\infty(0, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi))$  は次で与えられる:

$$L_\infty(s, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi)) = \begin{cases} \Gamma_{\mathbf{C}}(2n - \alpha + 2) \Gamma_{\mathbf{R}}(n - \alpha + 2)^2, & (\alpha : \text{偶}, \varphi_\infty(-1) = 1), \\ \Gamma_{\mathbf{C}}(2n - \alpha + 2) \Gamma_{\mathbf{R}}(n - \alpha + 1)^2, & (\alpha : \text{奇}, \varphi_\infty(-1) = -1). \end{cases}$$

<sup>10</sup> $\psi^{-1}$  は,  $\psi^{-1}(x) = \psi(-x)$  で定義する.

すると次が得られる:

$$\mathcal{L}_\infty(\text{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi)) = L_\infty(0, \text{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi)) \times \begin{cases} \frac{\sqrt{-1}^{-(2n-\alpha+2)}}{(-1) \times \Gamma_{\mathbf{R}}(1 - (n - \alpha))^2}, & (\alpha_v : \text{偶}, \varphi_\infty(-1) = 1), \\ \frac{\sqrt{-1}^{-(2n-\alpha+2)}}{\Gamma_{\mathbf{R}}(-(n - \alpha))^2}, & (\alpha : \text{奇}, \varphi_\infty(-1) = -1). \end{cases}$$

( $\mathcal{L}_p(\text{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi))$  の定義) 定義に従って計算すると,  $\text{As}^+(\pi_p)$  の局所  $\gamma$  因子を用いて, 次が得られる:

$$\mathcal{L}_p(\text{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)(\phi)) = \frac{\gamma_p(n - \alpha + 1, \chi_{\alpha_p} \varphi_p, \psi_p)}{\gamma_p(n - \alpha + 1, \text{As}^+(\pi_p) \otimes \varphi_p, \psi_p)}.$$

実際のところ,  $\gamma_p(n - \alpha + 1, \chi_{\alpha_p} \varphi_p, \psi_p)$  という項は, 分子と分母でキャンセルするのだが,  $p$  進浅井  $L$  関数の構成において, 局所積分の計算よりこの形が得られる. 今後の研究における  $p$  進  $L$  関数の構成においても, より標準的な用語による記述は有用であると考えるので, 上記の形で修正因子を記述しておく.

( $\Omega(\text{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi))$  の定義)

$\Omega_{\pi,p}$  を  $\pi$  の標準周期とする. このとき, [Gh99a] により,  $c^+(\text{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)) \sim_{\mathbf{Q}^\times} (2\pi\sqrt{-1})^{n+4} \Omega_{\pi,p}$  が示されている. よって,  $c^+(\text{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi))$  として,  $(2\pi\sqrt{-1})^{n+4} \Omega_{\pi,p}$  を採用する. また  $\tau(\text{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)) = -n-4$  なので,  $\Omega(\text{As}_{\mathcal{M}}^+(\pi)) = \Omega_{\pi,p}$  が得られる.

5.4. いくつかの注意. 予想 4.3 にいくつか注意を与える:

- $p$  進  $L$  関数は,  $K_{\mathcal{M}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}}} \mathcal{O}_{\mathcal{M}}[[\text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q})]]$  の元であるとした. しかし古典的な例を考えると,  $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}[[\text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q})]]$  の元として構成されるべきだろう. しかしながら, 周期自体  $\mathbf{C}^\times/\overline{\mathbf{Q}}^\times$  の元として決まっているため, 整係数の元として予想するためには, まず周期を  $\mathbf{C}^\times/\mathcal{O}_{\mathcal{M}}^\times$  の元として定義する必要がある. 現状, いくつかの実例を除く限り, このような周期の定義は難しいようである. 5.2, 5.3 節では, 標準周期という  $p$  に依存する適当な整構造を反映した周期を採用している. このような操作が一般にどのくらい出来るのかは, 現状明らかではない.
- 周期について, さらに注意を与える. 整性について議論出来るような周期は,  $p$  に依らずに定義出来るのだろうか. 楕円尖点形式に楕円曲線が対応する場合, 標準周期と楕円曲線の Néron 周期が存在する. これらは  $2\pi\sqrt{-1}$  のずれを除き一致することが予想されているが, 着目すべきは Néron 周期の定義は  $p$  に依存していないことである. 楕円曲線の Néron 周期の一般化に相当するものの定義が期待される.
- 基礎体は  $\mathbf{Q}$  であるとしたが, これを一般の基礎体で考えられるだろうか? Katz の  $p$  進  $L$  関数や反円分  $p$  進  $L$  関数など, 基礎体が虚二次体の場合の  $p$  進  $L$  関数の構成はいくつか見られるが, 一般的な予想を書き下した文献は今のところあまりないようである.
- 直和因子に Tate モチーフが現れないという仮定を置いている. これは, 久保田-Leopoldt の  $L$  関数の場合に  $p$  進  $L$  関数が極をもつため,  $K_{\mathcal{M}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}}} \mathcal{O}_{\mathcal{M}}[[\text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q})]]$  ではなく, その全商環の元として定義されるという事情がある.
- 完全  $L$  関数を用いて予想を記述したが, 実際構成されたときされる例では,  $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{M}(\phi))$  が計算されず, 何らかの定数が補間公式に残っている場合が多い. 実際,  $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{M}(\phi))$  を計算しきるには, 保型表現の無限成分の解析が不可欠となる. 保型表現論においても, どの局所積分が期待される  $\Gamma$  因子を与えるかについては, 全く非自明な問題である. またこの問題に由来して, 無限位数の指標による補間公式 (“横方向の合同”) が得られていないものも多い.  $p$  進  $L$  関数の構成にも,  $\infty$  成分の解析は不可欠である.
- $p$ -不分岐という仮定は一般には不要だと思われる. 例えば, 楕円保型形式の場合でも  $p$  で特殊表現になっている場合でも,  $p$  進  $L$  関数は存在する. しかし高階数の簡約代数群の保型表現に付随する  $p$  進  $L$  関数では,  $p$  で不分岐という条件を課しているものも多い.
- [落合 16, 5.3.2 章] で一般的な存在予想の定式化について, また [落合 16, 6.6.1 章] で知られている結果とその展望について, 論じられている.

## 6. $p$ 進浅井 $L$ 関数の構成の概要

6.1. 主結果. 前節までで, 今回の研究結果である  $p$  進浅井  $L$  関数の具体的な形を記述した. 正確な設定を込めて, 今一度, [Na] の主結果を書き下す.

$E$  を虚二次体とし, 奇素数  $p$  が  $E/\mathbf{Q}$  で不分岐とする.  $\pi$  を  $\mathrm{GL}_2(F_{\mathbf{A}})$  の  $p$ -通常の既約尖点的保型表現とする.  $\pi_{\infty}$  の Langlands パラメーターが  $\phi: W_{\mathbf{C}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbf{C}): z \mapsto \mathrm{diag}((z/z^c)^{\frac{n+1}{2}}, (z^c/z)^{\frac{n+1}{2}})$  ( $0 \leq n \in \mathbf{Z}$ ) とかけるとする. (前節まででは,  $n$  は偶数と仮定していたが, ここでは奇数でも良い.)  $p > n$  と仮定する.

イデアル  $\mathfrak{N} \subset \widehat{\mathcal{O}}_E$  に対し,  $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathcal{O}}_E)$  の部分群を次で定める:

$$\mathcal{K}_1(\mathfrak{N}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathcal{O}}_E) \mid c-1, d \in \mathfrak{N} \right\}.$$

$\pi$  は,  $\mathfrak{N}$  をレベルにもつとする. すなわち  $\pi$  は  $\mathcal{K}_1(\mathfrak{N})$  で固定されるベクトルを持ち, そのような性質をもつイデアルの中で  $\mathfrak{N}$  は最小のものとする.  $K_{\pi}$  を  $\mathbf{Q}_p$  の有限次拡大で,  $\pi$  の Hecke 固有値を全て含むものとする. また  $\mathcal{O}_{\pi}$  で  $K_{\pi}$  の整数環を表す.

**定理 6.1.** ([Na, Theorem 8.8])  $0 \leq \alpha \leq n$  を整数とする. 次を仮定する:

- $\pi$  の中心指標は  $p$  で不分岐.
- $\pi$  が共役自己双対であるとき,  $\alpha \neq n$ .
- $\mathfrak{N}$  は, 平方自由.
- $l \neq p$  を素数とし,  $l \mid \mathfrak{N} \cap \widehat{\mathbf{Z}}$  とする. このとき,  $l$  は次のいずれかを満たす:
  - $\pi$  の中心指標は  $l$  で分岐する.
  - $\pi$  の中心指標は  $l$  で不分岐であるとき,  $l$  は  $E$  で分裂し,  $l = vv_c$  と書いたとき,  $\pi_v, \pi_{v_c}$  の片方は主系列表現で, もう片方は特殊表現となる.

このとき, ある  $\mathcal{L}^{\alpha}(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi)) \in K_{\pi} \otimes_{\mathcal{O}_{\pi}} \mathcal{O}_{\pi}[[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^{\infty}})/\mathbf{Q})]]$  が存在し, 任意の  $p$  の外不分岐な有限位数の Hecke 指標  $\varphi: \mathbf{Q}^{\times} \backslash \mathbf{Q}_{\mathbf{A}}^{\times} \rightarrow \mathbf{C}^{\times}$  で,  $\varphi_{\infty}(-1) = (-1)^{n-\alpha}$  なるものに対し,  $\widehat{\phi}(\mathcal{L}^{\alpha}(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi)))$  は, 予想 4.3 の補間公式 (4.1) を満たす. (ただし,  $\phi = |\cdot|_{\mathbf{A}}^{-\alpha} \varphi$  で,  $\widehat{\phi}$  は  $\phi$  の  $p$  進 avatar.)

**注意 6.2.** 定理の内容について, いくつかの注意をしておく.

- (1) 定理 6.1 において, 基礎体は一般に CM 体で同様の結果が得られる. 基礎体が虚二次体の場合は, Loeffler-Williams による先行研究 ([LW]) があり, 今回の結果は, 彼らの結果のある種の拡張を与えている.
- (2) 予想 4.3 より, 次が期待されている.  $\mathrm{Tw}_p: K_{\pi} \otimes_{\mathcal{O}_{\pi}} \mathcal{O}_{\pi}[[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^{\infty}})/\mathbf{Q})]] \rightarrow K_{\pi} \otimes_{\mathcal{O}_{\pi}} \mathcal{O}_{\pi}[[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^{\infty}})/\mathbf{Q})]]$  を,  $\mathrm{Tw}_p(\sigma) = \varepsilon_{\mathrm{cyc}}(\sigma)\sigma$  を線型に拡張して定義する. このとき,  $0 \leq \alpha, \alpha' \leq n$  に対して,

$$(6.1) \quad \mathrm{Tw}_p^{\alpha-\alpha'}(\mathcal{L}^{\alpha'}(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi))) = \mathcal{L}^{\alpha}(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi))$$

が成り立つと予想される. これは虚二次体の場合, [LW] では示されているものの, CM 体の場合にはまだ分かっていない. CM 体上の場合, 構成からは Eisenstein コホモロジーの分母の振る舞いなど整性についてはまだよく分からない部分がある. [Na] の議論では, critical 値ごとに有理性を取り扱っているため, critical 値の間を比べる上のような等式 (6.1) には, もう少し詳しい研究が必要である. 5.4 節でも言及したが, 等式 (6.1) のような“横方向の合同”は, 保型表現の整構造に関わってくるため, 今後この方面の研究課題の一つと考えられる.

- (3) レベルに関する仮定は,  $p$  を割らない素点での  $L$  因子の明示公式を得るために課している. 仮定のもと,  $p$  を割らない素点での  $L$  因子の明示公式は比較的簡単に求められる. 一般のレベルでも, 主張は正しいと考えられるが,  $p$  進  $L$  関数の構成という主題からは外れた問題であるため, [Na] では, 主張の仮定をつけて証明している. ([LW] では, この点については全く議論がされていない.)
- (4)  $\pi$  は共役自己双対であるとき,  $\alpha \neq n$  という条件は, 複素  $L$  関数がこの場合極をもつという事実由来する.
- (5) 基礎体が CM 体の場合,  $p$ -通常性ではなく,  $p$ -概通常性を仮定する. こういった細かな差異が, 予想 4.3 では基礎体を有理数体と仮定している理由の一つである.

**注意 6.3.** 浅井  $L$  関数に着目して, 研究している動機として, これが岩澤理論の高次元化の一つを与えるという期待が挙げられる. 実際, 浅井  $L$  関数の特殊値は  $\mathrm{GSp}(4)$  のテータ関数の Siegel 保型

形式との間の合同を記述すると考えられる。保型表現の合同と Selmer 群, 浅井  $L$  関数の特殊値との関係は, [Be] において考察されている。

6.2. 構成の概略. 構成の概略については, 技術的になるので, 核となる議論や技術を [Na] を引用しつつ紹介するに留める。

(標準周期の定義)

$f$  を保型表現  $\pi$  の  $p$ -安定化新形式とする。Eichler-志村-Harder 同型により,  $f$  は対称空間  $Y_{\mathcal{K}}^E = \mathrm{GL}_2(E) \backslash \mathrm{GL}_2(E_{\mathbf{A}}) / \mathbf{C}^{\times} \mathrm{SU}_2 \mathcal{K}_1(\mathfrak{N})$  上の局所係数  $\delta(f)$  の 1 次微分形式を定める。この  $f$  の Fourier 係数を用いた  $f$  の正規化と, 局所系のコホモロジーと微分形式のコホモロジーの比較同型を用いて, 標準周期  $\Omega_{\pi,p}$  が定義される。([Na, Section 6.2].)

(浅井  $L$  関数の特殊値の代数性)

浅井  $L$  関数の特殊値の代数性を導くためには, 浅井  $L$  関数の積分表示を介するコホモロジーによる記述をおこなう。

まず  $Y_{\mathcal{K}}^E$  上の局所系を  $Y_{\mathcal{K}} = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_{\mathbf{A}}) / \mathbf{R}^{\times} \mathrm{SO}_2 \mathcal{K}_1(\mathfrak{N}_{\mathbf{Q}}) (\mathfrak{N}_{\mathbf{Q}} = \mathfrak{N} \cap \widehat{\mathbf{Z}})$  上に引き戻すとこれは直和分解される。微分形式  $\delta(f)$  を  $Y_{\mathcal{K}}$  上に引き戻し, 直和分解の一つの成分へ射影をとったものを  $\delta^{\alpha}(f)$  とかく。実はこの直和成分のラベル  $\alpha$  と, critical 値  $L(n - \alpha, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi)(\varphi))$  のラベル  $\alpha$  が対応している。([Na, Section 6.5].)

さらに Eisenstein 級数  $E$  を用いて, もう一つ  $Y_{\mathcal{K}}$  上に 1 次微分形式  $\delta(E)$  を定義する。Harder の手法 ([Ha87]) を用いて,  $\delta(E)$  が有理係数のコホモロジーの元であることを示す。([Na, Proposition 6.7].) すると  $\delta^{\alpha}(f)$  と  $\delta(E)$  のカップ積の  $Y_{\mathcal{K}}$  上での積分

$$I^{\alpha} := \frac{1}{\Omega_{\pi,p}} \int_{Y_{\mathcal{K}}} \delta^{\alpha}(f) \cup \delta(E) dg$$

は,  $L(n - \alpha, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi))$  の積分表示を与え, 周期の定義より特殊値  $L(n - \alpha, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi)) / \Omega_{\pi,p}$  の代数性, とくに  $K_{\pi}$  の元を与えることが示せる。([Na, Proposition 6.11, Theorem 8.8]. またこの部分の議論の原型は [Gh99a, Section 7] に見られる。)

(Birch の補題)

$p$  進浅井  $L$  関数の構成には, 特殊値  $L(n - \alpha, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi)(\varphi))$  の積分表示が必要であるため, 上の議論を全てレベル  $p^r$  ( $r \in \mathbf{Z}, c(\varphi) \mid r$ ) 付きで行う。このためには, 浅井部分  $L$  関数  $L_x(n - \alpha, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi)(\varphi))(x \in \mathrm{Cl}_{\mathbf{Q}}^{+}(p^r))$  の積分表示を与えればよい。( $\mathrm{Cl}_{\mathbf{Q}}^{+}(p^r)$  は,  $\mathbf{Q}$  の法  $p^r$  の狭義イデアル類群で, 有限指標  $\varphi$  は,  $\mathrm{Cl}_{\mathbf{Q}}^{+}(p^r)$  上の指標とみなしている。) すなわち

$$(6.2) \quad \frac{L(n - \alpha, \mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi)(\varphi))}{\Omega_{\pi,p}} \stackrel{“=”}{=} \sum_{x \in \mathrm{Cl}_{\mathbf{Q}}^{+}(p^r)} \varphi(x) I_{r,x}^{\alpha}$$

と, 浅井  $L$  関数を分解して,  $I_{r,x}^{\alpha}$  のコホモロジー解釈を与えればよい。これは Birch の補題とよばれ,  $I_{r,x}^{\alpha}$  の記述にはレベル  $p^r$  の Eisenstein 級数を用いて行う。([Na, Proposition 7.1].)

ここで “=” と書いたのは, 実際のところは (6.2) の左辺は, 予想 4.3 の補間公式 (4.1) の右辺が正しいからである。次に記述するように (6.2) の正しい = を与えるように Eisenstein 級数を選ぶ部分が, 全く非自明な作業となる。

(技術的な補題)

類体論の相互写像による  $x \in \mathrm{Cl}_{\mathbf{Q}}^{+}(p^r)$  の  $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^r})/\mathbf{Q})$  への像を  $\sigma_x$  とおく。このとき,

$$\mathcal{L}_{p,r}^{\alpha}(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi)) = \sum_{x \in \mathrm{Cl}_{\mathbf{Q}}^{+}(p^r)} I_{r,x}^{\alpha} \sigma_x \in K_{\pi}[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^r})/\mathbf{Q})]$$

とおく。以上の設定の下, 次を示す:

- (分母の有界性)  $\mathcal{L}_{p,r}^{\alpha}(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi))$  の分母は  $r$  に依らず, 有界である。
- (distribution property)  $\{\mathcal{L}_{p,r}^{\alpha}(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi))\}_{r \geq 1}$  は射影系をなす。
- (補間公式)  $\widehat{\phi}(\mathcal{L}_{p,r}^{\alpha}(\mathrm{As}_{\mathcal{M}}^{+}(\pi)))$  は, (4.1) の右辺に一致する。

$p$  進  $L$  関数の構成における本質的な部分は上の三つにまとめられる。証明には, これらの補題を満たすような良い Eisenstein 級数を選ぶ必要がある。Loeffler-Williams の先行研究では, Siegel 単数から定まる Eisenstein 級数を選択している。この Eisenstein 級数の定めるコホモロジー類は, 整係数を持ち, distribution property を満たす。また補間公式は, 大域的な方法で導いている。[Na] では

Loeffler-Williams の方法を, アデールの方法で解釈し, 基礎体が一般の総実体の場合に Eisenstein 級数の一般化を考察している. ([Na, Section 5]) 一般の場合でも, distribution relation は, ほぼ同様に証明出来る. ([Na, Section 8.2].) 大きな違いは, コホモロジー類の分母の取り扱いと, 補間公式である.

分母については, Eisenstein コホモロジー類の有理性は示せるものの, 基礎体が総実体の場合, 整性については未だよく分からない部分がある. [Na] では, 各 Eisenstein 級数  $\{E_r\}_{r \geq 0}$  の (コホモロジーの) 分母が,  $E_0$  の分母を用いて抑えられることを示し, 有理係数のコホモロジーの分母の有界性を導いている. ([Na, Section 8.1])

また補間公式は, 上記のカップ積を局所積分に分解し, 保型表現の枠組みに持ち込んで計算を行う. とくに  $p$  での局所積分では, 局所関数等式を用いて, 補間公式を導いており, 予想 4.3 の補間公式に局所  $\gamma$  因子が現れる自然な説明を与えている. ([Na, Theorem 8.8, Section 9, 10, 11].)

### ( $p$ 進浅井 $L$ 関数の構成)

上記の技術的な補題が証明できれば,

$$\mathcal{L}_p^\alpha(\text{As}_M^+(\pi)) := \lim_{\substack{\uparrow \\ r}} \mathcal{L}_{p,r}^\alpha(\text{As}_M^+(\pi)) \in K_\pi \otimes_{\mathcal{O}_\pi} \mathcal{O}_\pi[[\text{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q})]]$$

が所望の  $p$  進浅井  $L$  関数を与える.

### 謝辞

第 64 回代数学シンポジウムでの研究発表の機会を頂き, 主催者の先生方に御礼申し上げます. とくにシンポジウム責任者の金銅誠之先生, プログラム責任者 (数論) の市野篤史先生, 安福悠先生に感謝致します. 本研究は, JSPS からの支援 (若手研究 (B)17K14174) を頂いています.

### REFERENCES

- [Be] T. Berger, *On the Bloch-Kato conjecture for the Asai  $L$ -function*, preprint, arXiv1507.00684.
- [Cl90] L. Clozel, “Motifs et formes automorphes : applications du principe, de fonconalité” in *Automorphic forms, Shimura varieties and  $L$ -functions*, (L. Clozel et J.S. Milne edit.), vol. 1. 77-159, Acad. Press (1990).
- [Co89] J. Coates, *On  $p$ -adic  $L$ -functions attached to motives over  $\mathbf{Q}$  II*, Bol. Soc. Bras. Mat. **20** (1989), no. 1, 101-112.
- [CPR89] J. Coates, B. Perrin-Riou, *On  $p$ -adic  $L$ -functions attached to motives over  $\mathbf{Q}$* , Advanced Studies in Pure Math. **17**, (1989), 23-54.
- [De79] P. Deligne, “Valeurs de fonctions  $L$  et périodes d’intégrales” in *Automorphic Forms, Representations, and  $L$ -functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977)*, Proc. Symp. Pure Math. **33** Part II, Amer. Math. Soc., Providence, (1979), 247-289.
- [Gh99a] E. Ghate, *Critical values of the twisted tensor  $L$ -function in the imaginary quadratic case*, Duke Math. J. **96** (1999), no. 3, 595-638.
- [Ha87] G. Harder, *Eisenstein cohomology of arithmetic groups. The case  $GL(2)$* , Invent. Math. **89** (1987), 37-118.
- [Hi94] H. Hida, *On the critical values of  $L$ -functions of  $GL(2)$  and  $GL(2) \times GL(2)$* , Duke Math. J. **74** (1994), 431-529.
- [Kn94] A. W. Knapp, “Local langlands correspondence: the Archimedean case”, in *Motives (Seattle, WA, 1991)*, Proc. Symp. Pure Math. **55**, Part II, Amer. Math. Soc., Providence, (1994), 393-410.
- [LW] D. Loeffler and C. Williams,  *$P$ -adic Asai  $L$ -functions of Bianchi modular forms*, preprint, arXiv:1802.08207.
- [Na] K. Namikawa, *A construction of  $p$ -adic Asai  $L$ -functions for  $GL_2$  over  $CM$  fields*, preprint, arXiv:1912.07251.
- [Sh76] G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with cusp forms*, Commun. Pure Appl. Math. **29**, (1976), 783-804.
- [Va99] V. Vatsal, *Canonical periods and congruence formulae*, Duke Math. J. **98** (1999), 397-419.
- [落合 14] 落合理, 岩澤理論とその展望 (上), 岩波数学叢書, 岩波書店, (2014).
- [落合 15] 落合理, 岩澤理論の高次元化をとりまく風景, 第 60 回代数学シンポジウム報告集, (2015), 137-161.
- [落合 16] 落合理, 岩澤理論とその展望 (下), 岩波数学叢書, 岩波書店, (2016).
- [黒栗斎 05] 黒川信重, 栗原将人, 斎藤毅, 数論 II, 岩波書店, (2005).

FACULTY OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY, 744 MOTOOKA, NISHI-KU, FUKUOKA, 819-0395, JAPAN  
 Email address: namikawa@math.kyushu-u.ac.jp