三角圏のスペクトラムとその可換環論への応用（CONSTRUCTION OF SPECTRA OF TRIANGULATED CATEGORIES AND ITS APPLICATIONS TO COMMUTATIVE ALGEBRA）

松井紘樹（HIROKI MATSUI）

三角圏 $\mathcal{T}$ の thick 部分圏の分類とは，$\mathcal{T}$ の thick 部分圏の集合 $\mathbb{T}$ と，ある位相空間 X の部分集合の集合 $\mathbb{S}$ との間の全単射

$$\mathbb{T} \rightleftarrows \mathbb{S}$$

を見つけることである．Devinatz-Hopkins-Smith [8, 11] による有限スペクトラムの thick 部分圏の分類以降，三角圏の thick 部分圏の分類問題は可換環論，代数幾何学，モジュラー表現論，作用素環論等分野を問わず重要な問題の一つとなっている [4, 5, 7, 10, 15, 18]．これらの分類において本質的に重要な役割を果たすのは三角圏上のテンソル構造である．近年 Balmer [1] はテンソル三角幾何学と呼ばれる分野を創始し，これらの分類に統一的な視点を与えた．

与えられたテンソル三角圏 $\mathcal{T}$（よい対称モノイダル構造を持つ三角圏）に対して，Balmer は今日 Balmer スペクトラムと呼ばれる位相空間 $\mathrm{Spec}_{\otimes}\mathcal{T}$ を構成し，$\mathcal{T}$ のテンソルイデアル（テンソル積についてイデアルとなっているような thick 部分圏）の分類問題が $\mathrm{Spec}_{\otimes}\mathcal{T}$ の構造解析に帰着されることを示した．この結果は上に上げた thick 分類圏の分類問題に一般的な回答を与え，上にあげた分類の統一的な説明を与えた．さらに，$\mathrm{Spec}_{\otimes}\mathcal{T}$ の構造解析を通してテンソル三角圏の幾何学的/代数的な研究が可能となった．2010 年の ICM（国際数学者会議）のにおいて Balmer [3] がテンソル三角幾何学について招待講演を行ったように，テンソル三角幾何学は成功を収め，非常に広い分野において注目を集めている．

一方で，必ずしもすべての三角圏が良いテンソル構造を持つとは限らず，テンソル三角幾何学はそのような三角圏にすぐに応用できるものではない．さらに，そのような三角圏にも重要なものは沢山あり，例えば可換ネーター環 R に対して，その有界導来圏 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\,R)$ や特異圏 $\mathrm{D_{sg}}(R) := \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\,R)/\mathrm{K^b}(\mathrm{proj}\,R)$ などがその典型例である．本報告集においては，第 64 回代数学シンポジウムにおいて行った講演をもとに，テンソル積を持たない三角圏に対する，いわゆる "tensor-free" な三角幾何学について解説する．具体的には与えられた三角圏に対して，元の代数的対象の幾何的な性質をよく反映するような適切な位相空間（以下スペクトラム）を構成する事で Balmer のテンソル三角幾何学の類似の類似の理論を展開する事を目指す．

以降，集合論的な問題を避けるため圏といえば常に本質的に小さいもの，つまり同型類が集合をなすものとする．

1. テンソル三角幾何学

ここでは，本研究のモチベーションとなるテンソル三角幾何学について簡単に解説する．以下に定義するテンソル三角圏がテンソル三角幾何学における主役を担う．

Definition 1.1. **テンソル三角圏**とは，三角圏 $\mathcal{T}$，**テンソル積**と呼ばれる $\mathcal{T}$ 上の exact bifunctor $\otimes : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$，**単位対象**と呼ばれる対象 $\mathbf{1} \in \mathcal{T}$ からなる三組 $(\mathcal{T}, \otimes, \mathbf{1})$ で，三角圏構造と整合性を持つ対称モノイダル圏となっているものである．詳しくは [12,

Appendix A] を参照のこと．特に，テンソル積 $\otimes$ 及び単位対象 $\mathbf{1}$ は以下の自然同型をみたす：

- （結合性）$(L \otimes M) \otimes N \cong L \otimes (M \otimes N)$,
- （可換性）$M \otimes N \cong N \cong M$,
- （単位性）$M \otimes \mathbf{1} \cong M$.

以下は典型的なテンソル三角圏の例である．

Example 1.2. (1) 有限スペクトラムのなす安定ホモトピー圏 $\mathrm{SH}^{\mathrm{fin}}$ はスマッシュ積 $\wedge$ によりテンソル三角圏 $(\mathrm{SH}^{\mathrm{fin}}, \wedge, \mathbb{S})$ をなす．ここで，$\mathbb{S}$ は球面スペクトラム．

(2) X をネータースキームとする．このとき，X 上の完全複体のなす導来圏 $\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ は導来テンソル積 $\otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{O}_X}$ によりテンソル三角圏 $(\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X), \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{O}_X}, \mathcal{O}_X)$ をなす．特に，可換ネーター環 R について $X = \operatorname{Spec} R$ を考えることでテンソル三角圏 $(\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} R), \otimes_R, R)$ を得る．

(3) k を体，G を有限群とする．このとき，有限生成 kG 加群の安定加群圏 $\underline{\mathrm{mod}}\, kG$ および有界導来圏 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} kG)$ は k 上のテンソル積によりテンソル三角圏 $(\underline{\mathrm{mod}}\, kG, \otimes_k, k)$, $(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} kG), \otimes_k, k)$ をなす．

(4) R を可換ネーター環とする．このとき，右有界導来圏 $\mathrm{D}^{-}(\operatorname{mod} R)$ は導来テンソル積 $\otimes^{\mathbf{L}}_R$ によりテンソル三角圏 $(\mathrm{D}^{-}(\operatorname{mod} R), \otimes^{\mathbf{L}}_R, R)$ をなす．

Balmer のアイデアは，テンソル三角圏を可換環の類似とみなして Zariski スペクトラムと同様の構成を行うことである．実際，可換環とはアーベル群 R，双線形写像 $\cdot : R \times R \to R$，そして単位元 1 の三組 $(R, \cdot, 1)$ であり結合性，可換性，そして 1 の単位性を満たすものであった．

Definition 1.3. [1, Definitions 1.2 and 2.1] $(\mathcal{T}, \otimes, \mathbf{1})$ をテンソル三角圏とする．

(1) $\mathcal{T}$ の充満加法部分圏 $\mathcal{X}$ が **thick** であるとは以下の条件を満たす時に言う．
- $\mathcal{T}$ の完全三角 $L \to M \to N \to L[1]$ について，L, M, N の内 2 つが $\mathcal{X}$ に入るならば，残り 1 つも $\mathcal{X}$ に入る．
- $\mathcal{T}$ の対象 M, N について，$M \oplus N \in \mathcal{X}$ ならば，M, $N \in \mathcal{X}$.

(2) $\mathcal{T}$ の **(thick) テンソルイデアル**とは，$\mathcal{T}$ の thick 部分圏 $\mathcal{I}$ で
$$M \in \mathcal{T}, N \in \mathcal{I} \Rightarrow M \otimes N \in \mathcal{I}$$
を満たすものである．

(3) $\mathcal{T}$ のテンソルイデアル $\mathcal{P}$ が**素テンソルイデアル**であるとは，$\mathcal{P} \neq \mathcal{T}$ かつ
$$M \otimes N \in \mathcal{P} \Rightarrow M \in \mathcal{P} \text{ or } N \in \mathcal{P}$$
を満たすものである．$\mathcal{T}$ の素テンソルイデアルの集合を $\operatorname{Spec}_{\otimes} \mathcal{T}$ と表すことにする．

可換環の素テンソルイデアルの集合に Zariski 位相と呼ばれる位相が入っていたように，$\operatorname{Spec}_{\otimes} \mathcal{T}$ にも位相を導入することができる．

Definition 1.4. [1, Definition 2.1] $\mathcal{T}$ の対象 M に対して，その **Balmer support** を
$$\operatorname{Supp}_{\otimes}(M) := \{\mathcal{P} \in \operatorname{Spec}_{\otimes} \mathcal{T} \mid M \notin \mathcal{P}\}$$
で定める．容易に分かるように $\operatorname{Supp}_{\otimes}(M) \cup \operatorname{Supp}_{\otimes}(N) = \operatorname{Supp}_{\otimes}(M \oplus N)$ が成立するので，$\operatorname{Spec}_{\otimes} \mathcal{T}$ 上には $\{\operatorname{Supp}_{\otimes}(M) \mid M \in \mathcal{T}\}$ を閉集合の基底とするような位相が入る．つまり，この位相に関する閉集合は
$$\mathsf{Z}(\mathcal{E}) := \bigcap_{M \in \mathcal{E}} \operatorname{Supp}_{\otimes}(M) = \{\mathcal{P} \in \operatorname{Spec}_{\otimes} \mathcal{T} \mid \mathcal{E} \cap \mathcal{P} = \emptyset\} \ \ (\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T})$$

なる形の集合である．このようにして定まる位相空間 $\operatorname{Spec}_{\otimes}\mathcal{T}$ を $\mathcal{T}$ の **Balmer スペクトラム**と呼ぶ．

Remark 1.5. $\operatorname{Spec} R$ 上の Zariski 位相において，

$$\mathsf{V}(f) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid f \in \mathfrak{p}\} \ \ (f \in R)$$

なる形の集合が閉集合の基底を成していた事を思い出すと，Balmer support $\operatorname{Supp}_{\otimes}(M)$ の定義は

$$\operatorname{Supp}_{\otimes}(M) = \{\mathcal{P} \in \operatorname{Spec}_{\otimes}\mathcal{T} \mid M \text{ ``}\in\text{''} \ \mathcal{P}\}$$

とすべきでなはいかと思うかもしれない．実際上のように Balmer support を定義してもそれらは閉集合の基底を成し，位相を定める事が分かる．実はこのように定義される 2 つの位相空間は互いに Hochster 双対と呼ばれる関係を成しており，一方から他方が完全に復元される．したがってどちらで位相を定義しても本質的な問題は現れない．例えば Hochster 双対により，位相空間の開集合と後に定義する Thomason 部分集合が入れ替わる．

テンソル三角圏の Balmer support は以下の性質を満たす．

Lemma 1.6. [1, Lemma 2.6]

(1) $\operatorname{Supp}_{\otimes}(0) = \emptyset$.
(2) 任意の $M \in \mathcal{T}$ と整数 n について $\operatorname{Supp}_{\otimes}(M[n]) = \operatorname{Supp}_{\otimes}(M)$.
(3) $\mathcal{T}$ における完全三角 $L \to M \to N \to L[1]$ に対して $\operatorname{Supp}_{\otimes}(M) \subseteq \operatorname{Supp}_{\otimes}(L) \cup \operatorname{Supp}_{\otimes}(N)$ が成り立つ．
(4) 任意の $M, N \in \mathcal{T}$ について $\operatorname{Supp}_{\otimes}(M \oplus N) = \operatorname{Supp}_{\otimes}(M) \cup \operatorname{Supp}_{\otimes}(N)$.
(5) 任意の $M, N \in \mathcal{T}$ について $\operatorname{Supp}_{\otimes}(M \otimes N) = \operatorname{Supp}_{\otimes}(M) \cap \operatorname{Supp}_{\otimes}(N)$.

これらの性質は非常に基本的であり，様々な分野において現れる種々の support 達も同様の性質を満たす．また，既知の三角圏の thick 部分圏の分類の結果をみると，種々の support 達が重要な役割を果たしていることも分かる．そこで，三角圏の “support”を以下のように定義する．

Definition 1.7. [1, Definition 3.1] $\mathcal{T}$ を三角圏とする．$\mathcal{T}$ の **support data** とは，位相空間 X と対応

$$\sigma : \mathcal{T} \ni M \mapsto \sigma(M) \subseteq X : \text{closed}$$

の組 (X, σ) で Lemma 1.6(1)-(4) と同様の性質を満たすものをいう．さらに，$\mathcal{T}$ がテンソル三角圏のとき，$\mathcal{T}$ の support data (X, σ) が **tensorial** であるとは，Lemma 1.6(1)-(4) に加えて (5) も満たすときにいう．

Example 1.8. (1) $\mathcal{T}$ をテンソル三角圏とする．すでに見たように Balmer support は $\mathcal{T}$ 上の tensorial support data $(\operatorname{Spec}_{\otimes}\mathcal{T}, \operatorname{Supp}_{\otimes})$ を定める．

(2) X をネータースキームとする．このとき，X 上の完全複体 M の **homological support**

$$\operatorname{Supp}_{\mathrm{h}}(M) := \{x \in X \mid M_x \ncong 0 \text{ in } \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{O}_{X,x})\} \subseteq X$$

は $\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ 上の tensorial support data $(X, \operatorname{Supp}_{\mathrm{h}})$ を定める．

(3) k を体，G を有限群とする．このとき，有限生成 kG 加群複体 M の **support variety**

$$\mathrm{V}_G(M) := \mathrm{V}_{+}(\mathsf{ann}_{\mathrm{H}^*(G;k)}\operatorname{Ext}^*(M, M)) \subseteq \operatorname{Spec}^{\mathrm{h}} \mathrm{H}^*(G; k)$$

は $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} R)$ の tensorial support data $(\operatorname{Spec}^{\mathrm{h}} \mathrm{H}^*(G; k), \mathrm{V}_G)$ およびこの制限により $\underline{\operatorname{mod}}\, kG$ の tensorial support data $(\operatorname{Proj} \mathrm{H}^*(G; k), \mathrm{V}_G)$ を定める．

(4) R を可換ネーター環とする．このとき，特異圏 $\mathrm{D_{sg}}(R)$ の対象 M の **singular support**

$$\mathrm{Supp_{sg}}(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Sing}\, R \mid M_{\mathfrak{p}} \not\cong 0 \text{ in } \mathrm{D_{sg}}(R_{\mathfrak{p}})\}$$

は $\mathrm{D_{sg}}(R)$ の support data $(\mathrm{Sing}\, R, \mathrm{Supp_{sg}})$ を定める．

(X, σ) を三角圏 $\mathcal{T}$ の support data とする．このとき，容易にわかるように，

- $\mathcal{X} \in \mathrm{Th}(\mathcal{T})$ に対して $\sigma(\mathcal{X}) := \bigcup_{M \in \mathcal{X}} \sigma(M) \in \mathrm{Spcl}(X)$,
- $W \in \mathrm{Spcl}(X)$ に対して $\sigma^{-1}(W) := \{M \in \mathcal{T} \mid \sigma(M) \subseteq W\} \in \mathrm{Th}(\mathcal{T})$.

ここで，$\mathrm{Th}(\mathcal{T})$, $\mathrm{Spcl}(X)$ はそれぞれ $\mathcal{T}$, X の thick 部分圏，特殊化閉集合の集合を表す．したがって，これらの対応で写像の組

$$\sigma : \mathrm{Th}(\mathcal{T}) \rightleftarrows \mathrm{Spcl}(X) : \sigma^{-1}$$

を得る．さらに，$\mathcal{T}$ がテンソル三角圏で (X, σ) が tensorial のとき，

$$M^{\otimes n} \in \sigma^{-1}(W) \Leftrightarrow \sigma(M) = \sigma(M^{\otimes n}) \subseteq W \Leftrightarrow M \in \sigma^{-1}(W).$$

そこで，以下の概念を定義する．

Definition 1.9. [1, Definition 4.1] $(\mathcal{T}, \otimes, \mathbf{1})$ をテンソル三角圏とする．

(1) $\mathcal{T}$ の**根基テンソルイデアル**とは，$\mathcal{T}$ のイデアル $\mathcal{I}$ で

$$\sqrt{\mathcal{I}} := \{M \in \mathcal{T} \mid M^{\otimes n} \in \mathcal{I} \text{ for some } n \geq 1\}$$

を満たすもの．$\mathrm{Rad}_{\otimes}(\mathcal{T})$ で根基テンソルイデアルの集合を表す．

(2) 位相空間 X の部分集合 W が **Thomason 部分集合**であるとは，

$$W = \bigcup_{i \in I} Z_i \ \ (Z_i^{\complement} \text{は準コンパクト開集合})$$

と書けるときに言う．$\mathrm{Thom}(X)$ で X の Thomason 部分集合の集合を表す．特に，Thomason 部分集合は特殊化閉集合である: $\mathrm{Thom}(X) \subseteq \mathrm{Spcl}(X) := \{W : X \text{ の特殊化閉集合}\}$.

これらの概念について，一つ補題を用意する．

Lemma 1.10. (1) [1, Lemma 4.2] $\mathcal{T}$ のイデアル $\mathcal{I}$ に対して，

$$\sqrt{\mathcal{I}} = \bigcap_{\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \in \mathrm{Spec}\, \mathcal{T}} \mathcal{P}$$

が成立する．

(2) [1, Proposition 2.14] $\mathrm{Spec}_{\otimes} \mathcal{T}$ の *Thomason* 部分集合は

$$W = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Supp}_{\otimes}(M_i)$$

なる集合．

この補題により，対応 $\mathcal{I} \mapsto \sigma(\mathcal{I})$, $W \mapsto \sigma^{-1}(W)$ は

$$\sigma : \mathrm{Rad}_{\otimes}(\mathcal{T}) \rightleftarrows \mathrm{Thom}(X) : \sigma^{-1}$$

に制限されることが分かる．実は Balmer support とはこの対応を全単射にするような tensorial support data で universal なものである．つまり，以下のテンソル三角幾何学における基本定理が成り立つ．

Theorem 1.11. [1, Theorems 4.10 and 5.2] $(\mathcal{T}, \otimes, \mathbf{1})$ をテンソル三角圏とする．

(1) 対応 $\mathcal{I} \mapsto \mathrm{Supp}_{\otimes}(\mathcal{I}) := \bigcup_{M \in \mathcal{I}} \mathrm{Supp}_{\otimes}(M)$, $W \mapsto {\mathrm{Supp}_{\otimes}}^{-1}(W)$ により全単射

$$\mathrm{Supp}_{\otimes} : \mathrm{Rad}_{\otimes}(\mathcal{T}) \rightleftarrows \mathrm{Thom}(\mathrm{Spec}_{\otimes} \mathcal{T}) : {\mathrm{Supp}_{\otimes}}^{-1}$$

を得る．

(2) (X, σ) を $\mathcal{T}$ の *tensorial support data* で以下の *2* 条件を満たすとする．
- X はネーター *sober* 位相空間である．
- 対応

$$\sigma : \mathrm{Rad}_{\otimes}(\mathcal{T}) \rightleftarrows \mathrm{Spcl}(X) : \sigma^{-1}$$

は全単射．

このとき，同相 $X \cong \mathrm{Spec}_{\otimes} \mathcal{T}$ が存在する．

この定理により，テンソル三角圏の構造解析は完全に $\mathrm{Spec}_{\otimes} \mathcal{T}$ の位相構造の解析に帰着されることが分かる．

Balmer は上記定理を既知の部分圏の分類 [5, 6, 18] に応用して以下の結果を得た．

Theorem 1.12. [1, 2]

(1) X をネータースキームとする．このとき，同相

$$\mathrm{Spec}_{\otimes} \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X) \cong X$$

が存在する．

(2) k を体，G を有限群とする．このとき，同相

$$\mathrm{Spec}_{\otimes} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\, kG) \cong \mathrm{Spec}^{\mathrm{h}} \mathrm{H}^*(G; k)$$
$$\mathrm{Spec}_{\otimes}(\underline{\mathrm{mod}}\, kG) \cong \mathrm{Proj}\, \mathrm{H}^*(G; k)$$

が存在する．

Remark 1.13. 一般に，テンソル三角圏の Balmer スペクトラム上に可換環の層が定義され，局所環付き空間となる．実は上の同型は位相空間としてのみならず，局所環付き空間としての同型である．

2. “TENSOR-FREE” な三角幾何学

前節で Balmer のテンソル三角幾何学について簡単に解説した．本節においてはテンソル構造を持たない三角圏におけるテンソル三角幾何学の類似を考え，そのスペクトラムの構成の一つの試みを与える．テンソル三角圏において素テンソルイデアルが重要な役割を果たしていたが，一般の三角圏においては以下の概念を考える．

Definition 2.1. (1) 三角圏 $\mathcal{T}$ が**局所三角圏**であるとは，ただ一つの $\mathbf{0}$ でない thick 部分圏を持つときにいう．

(2) 三角圏 $\mathcal{T}$ の thick 部分圏 $\mathcal{P}$ が**素 thick 部分圏**であるとは，Verdier 商 $\mathcal{T}/\mathcal{P}$ が局所三角圏であるときにいう．$\mathcal{T}$ の素 thick 部分圏の集合を $\mathrm{Spec}\, \mathcal{T}$ と表すことにする．

Example 2.2. (1) X をネータースキームとする．X の点 x に対して，

$$\mathcal{S}(x) := \{M \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X) \mid M_x \cong 0 \text{ in } \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{O}_{X,x})\}$$

は $\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ の素 thick 部分圏である．実際，三角同値

$$\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)/\mathcal{S}(x) \cong \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{O}_{X,x}) \cong \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\, \mathcal{O}_{X,x})$$

が存在するが，[15, Theorem 1.4] によると $\mathrm{K^b}(\operatorname{proj}\mathcal{O}_{X,x})$ はただ一つの $\mathbf{0}$ でない thick 部分圏 $\mathsf{thick}(\mathrm{K}(\mathfrak{m}_{X,x}))$ を持つ．ここで，$\mathrm{K}(\mathfrak{m}_{X,x})$ は $\mathcal{O}_{X,x}$ の極大イデアル $\mathfrak{m}_{X,x}$ の生成系の Koszul 複体，$\mathsf{thick}(\mathrm{K}(\mathfrak{m}_{X,x}))$ は $\mathrm{K}(\mathfrak{m}_{X,x})$ を含む最小の thick 部分圏を表す．

(2) R を超曲面局所環（つまり $\widehat{R} \cong S/(f)$, S は正則局所環）とする．このとき R の特異軌跡 $\operatorname{Sing} R$ の元 $\mathfrak{p}$ に対して，

$$\mathcal{S}(\mathfrak{p}) := \{M \in \mathrm{D_{sg}}(R) \mid M_{\mathfrak{p}} \cong 0 \text{ in } \mathrm{D_{sg}}(R_{\mathfrak{p}})\}$$

は $\mathrm{D_{sg}}(R)$ の素 thick 部分圏である．実際，三角同値

$$\mathrm{D_{sg}}(R)/\mathcal{S}(\mathfrak{p}) \cong \mathrm{D_{sg}}(R_{\mathfrak{p}})$$

が存在し，[17, Theorem 5.10] により $\mathrm{D_{sg}}(R_{\mathfrak{p}})$ はただ一つの $\mathbf{0}$ でない thick 部分圏 $\mathsf{thick}(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$ をもつ．

次に，Balmer スペクトラムの構成に倣って $\operatorname{Spec}\mathcal{T}$ 上に位相を導入する．この位相のもう少し一般的な理論は [14] において与えられている．

Definition 2.3. [14, Definition 2.1] $\mathcal{T}$ の対象 M に対して，その **triangulated support** を

$$\operatorname{Supp}(M) := \{\mathcal{P} \in \operatorname{Spec}\mathcal{T} \mid M \notin \mathcal{P}\}$$

で定める．容易に分かるように $\operatorname{Supp}(M) \cup \operatorname{Supp}(N) = \operatorname{Supp}(M \oplus N)$ が成立するので，$\operatorname{Spec}\mathcal{T}$ 上には $\{\operatorname{Supp}(M) \mid M \in \mathcal{T}\}$ を閉集合の基底とするような位相が入る．つまり，この位相に関する閉集合は

$$\mathsf{Z}(\mathcal{E}) := \bigcap_{M \in \mathcal{E}} \operatorname{Supp}(M) = \{\mathcal{P} \in \operatorname{Spec}\mathcal{T} \mid \mathcal{E} \cap \mathcal{P} = \emptyset\} \ \ (\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T})$$

なる形の集合である．このようにして定まる位相空間 $\operatorname{Spec}\mathcal{T}$ を $\mathcal{T}$ の**スペクトラム**と呼ぶ．

この位相空間は例えば以下の性質を満たす．

Proposition 2.4. [14, Proposition 2.3] $\mathcal{T}$ の素 *thick* 部分圏 $\mathcal{P}$ に対して，

$$\overline{\{\mathcal{P}\}} := \{\mathcal{Q} \in \operatorname{Spec}\mathcal{T} \mid \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}\}.$$

特に，$\operatorname{Spec}\mathcal{T}$ は T_0 空間である．

次に，Balmer の結果 Theorem 1.11 の類似が我々のスペクトラム $\operatorname{Spec}\mathcal{T}$ に対しても成立することを見る．そのために以下の概念を導入する．

Definition 2.5. (1) $\mathcal{T}$ の thick 部分圏 $\mathcal{X}$ が**根基 thick 部分圏**であるとは，

$$\mathcal{X} = \sqrt{\mathcal{X}} := \bigcap_{\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P} \in \operatorname{Spec}\mathcal{T}} \mathcal{P}$$

が成り立つときに言う．$\operatorname{Rad}(\mathcal{T})$ で $\mathcal{T}$ の根基 thick 部分圏の集合を表す．

(2) $\mathcal{T}$ の **parameter set** $\operatorname{Param}\mathcal{T} \subseteq 2^{\operatorname{Spec}\mathcal{T}}$ を

$$\operatorname{Supp}(\mathcal{X}) = \bigcup_{M \in \mathcal{X}} \operatorname{Supp}(M) \ \ (\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T} : \text{thick})$$

なる $\operatorname{Spec}\mathcal{T}$ の部分集合からなる集合とする．

以下が本報告集における第一の主定理である．

Theorem 2.6. *(cf.* [14, Theorem 2.9] *and* [13, Theorem 2.3]*)*

(1) 対応 $\mathcal{X} \mapsto \mathrm{Supp}(\mathcal{X})$，$W \mapsto \mathrm{Supp}^{-1}(W)$ は全単射

$$\mathrm{Supp} : \mathrm{Rad}(\mathcal{T}) \rightleftarrows \mathrm{Param}(\mathcal{T}) : \mathrm{Supp}^{-1}$$

を導く．

(2) (X, σ) を $\mathcal{T}$ の *support data* で以下の *2* 条件を満たすとする．
- X はネーター *sober* 位相空間である．
- 対応

$$\sigma : \mathrm{Th}(\mathcal{T}) \rightleftarrows \mathrm{Spcl}(X) : \sigma^{-1}$$

は全単射．

このとき，位相同型 $X \cong \mathrm{Spec}\,\mathcal{T}$ が存在する．

Remark 2.7. [13] において上の定理 (2) と同様の主張が示されているが，そこで用いられている位相空間は一般に $\mathrm{Spec}\,\mathcal{T}$ とは異なるものである．

Theorem 1.12 と同様にして以下のテンソル積を用いない復元定理を得る．

Corollary 2.8. (1) X を準アフィンスキームとする．このとき，同相

$$\mathrm{Spec}\,\mathcal{T} \cong X$$

が存在する．

(2) k を標数 p の体，G を有限 p 群とする．このとき，同相

$$\mathrm{Spec}_{\otimes} \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\, kG) \cong \mathrm{Spec^h}\, \mathrm{H}^*(G; k)$$
$$\mathrm{Spec}_{\otimes}(\underline{\mathrm{mod}}\, kG) \cong \mathrm{Proj}\, \mathrm{H}^*(G; k)$$

が存在する．

(3) R を超曲面局所環とする．このとき，同相

$$\mathrm{Spec}\, \mathrm{D_{sg}}(R) \cong \mathrm{Sing}\, R$$

が存在する．

3. Applications to commutative algebra

この節では可換ネーター環 R に付随して自然に現れる三角圏である有限生成加群の有界導来圏 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\, R)$ 及び特異圏 $\mathrm{D_{sg}}(R)$ のスペクトラムについて考察する．

以降，$R = S/(x_1, \ldots, x_c)$ を完全交差局所環，S を正則局所環，$x_1, \ldots, x_c$ を S 正則列とする．次数付き超曲面

$$A := S[t_1, \ldots, t_c]/(\sum_{i=1}^{c} x_i t_i) \ \ (\deg t_i = 1, \deg a = 0 \text{ for } a \in S)$$

を考える．このとき全射準同型

$$S[t_1, \ldots, t_c] \twoheadrightarrow A \twoheadrightarrow A/(\underline{x}) = R[t_1, \ldots, t_c],$$

よりスキームの可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^{c-1}_R \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p"'] & Y := \mathrm{Proj}\, A \arrow[r, hook, "u"] & \mathbb{P}^{c-1}_S \arrow[d, "q"] \\
\mathrm{Spec}\, R \arrow[rr, hook, "j"] & & \mathrm{Spec}\, S.
\end{tikzcd}$$

を得る．この可換図式について，Stevenson [16] による以下の観察に注目する．

Lemma 3.1. (1) $\operatorname{Sing} Y \subseteq i(\operatorname{Sing} \mathbb{P}_R^{c-1})$.
(2) $\operatorname{Sing} \mathbb{P}_R^{c-1} = p^{-1}(\operatorname{Sing} R)$.

この補題により，連続写像

$$\varphi : \operatorname{Sing} Y \hookrightarrow i(\operatorname{Sing} \mathbb{P}_R^{c-1}) \overset{i^{-1}}{\cong} \operatorname{Sing} \mathbb{P}_R^{c-1} \xrightarrow{p} \operatorname{Sing} R$$

を得る．構成から $P \in \operatorname{Sing} Y$ に対して，

$$\varphi(P) = (P/(\underline{x}))_0$$

特に，

$$P \subseteq Q \Rightarrow \varphi(P) \subseteq \varphi(Q).$$

一方，Theorem 2.6 と [16, Corollary 10.5] により同相 $\operatorname{Spec} \mathrm{D}_{\mathrm{sg}}(R) \cong \operatorname{Sing} Y$ が存在する．この同相と写像 $\varphi : \operatorname{Sing} Y \to \operatorname{Sing} R$ を用いることで以下の補題を得る．

Lemma 3.2. $\mathcal{P}$ を $\mathrm{D}_{\mathrm{sg}}(R)$ の素 *thick* 部分圏とする．このとき $\mathcal{P}$ は [14] の意味での *prime* となる．つまり $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Sing} R \mid R/\mathfrak{p} \notin \mathcal{P}\}$ はただ一つの極大元を持つ．

Lemma 3.3. $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} R) \not\subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} R)$ を *thick* 部分圏とする．このとき，$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathrm{K}(\mathfrak{p}) \notin \mathcal{P}\}$ がただ一つの極大元を持つことと $\mathcal{P}$ が $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} R)$ の素 *thick* 部分圏であることは同値．

上の 2 つの補題は本報告書における素 thick 部分圏と論文 [14] において定義された異なる意味での素 thick 部分圏の間の関係を与えるものである．特に，[14] の主定理に対応する以下の結果を得る．

Theorem 3.4. *(cf.* [14, Theorems 3.17 and 4.21]*)* R を正則局所環の商であるような完全交差局所環とする．
(1) 常に $\dim \operatorname{Spec} \mathrm{D}_{\mathrm{sg}}(R) \geq \dim \operatorname{Sing} R$ が成立し，次は同値．
  (a) $\operatorname{Spec} \mathrm{D}_{\mathrm{sg}}(R) \cong \operatorname{Sing} R$.
  (b) $\dim \operatorname{Spec} \mathrm{D}_{\mathrm{sg}}(R) = \dim \operatorname{Sing} R$.
  (c) R は超曲面．
(2) 常に $\dim \operatorname{Spec} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} R) \geq \dim R$ が成立し，次は同値．
  (a) $\operatorname{Spec} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} R) \cong \operatorname{Spec} R$.
  (b) $\dim \operatorname{Spec} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} R) = \dim R$.
  (c) R は正則．

4. 終わりに

最後に，三角圏のスペクトラムに関する問題をいくつか述べて終わりにする．

テンソル三角圏 $\mathcal{T}$ のスペクトラム $\operatorname{Spec} \mathcal{T}$ と可換環 R の Zariski スペクトラムに共通する性質として以下の物がある:

- 準コンパクトかつ T_0 である．
- 準コンパクト開集合の全体が開集合の基底をなす．
- 有限個の準コンパクト開集合の共通部分は再び準コンパクト．
- sober 空間である．

この条件を満たすような位相空間は**スペクトラル空間**と呼ばれる．

Question 4.1. 三角圏 $\mathcal{T}$ に対して，$\operatorname{Spec} \mathcal{T}$ はスペクトラル空間か？

その定義から，特殊化閉部分集合や Thomason 部分集合と異なり，Param $\mathcal{T}$ の元のトポロジカルな特徴づけは与えられていない．Lemma 1.10(2) と比べると，以下な自然な問題が現れる．

Question 4.2. 三角圏 $\mathcal{T}$ に対して，$\mathrm{Param}(\mathcal{T}) = \mathrm{Thom}(\mathcal{T})$ か？

References

[1] P. Balmer, The spectrum of prime ideals in tensor triangulated categories, *J. Reine Angew. Math.* **588** (2005), 149–168.

[2] P. Balmer, Spectra, spectra, spectra–tensor triangular spectra versus Zariski spectra of endomorphism rings, *Algebr. Geom. Topol.* **10** (2010), no. 3, 1521–1563.

[3] P. Balmer, Tensor triangular geometry, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Volume II*, 85–112, *Hindustan Book Agency, New Delhi*, 2010.

[4] D. J. Benson; J. F. Carlson; J. Rickard, Thick subcategories of the stable module category, *Fund. Math.* **153** (1997), no. 1, 59–80.

[5] D. J. Benson; S. B. Iyengar; H. Krause, Stratifying modular representations of finite groups, *Ann. of Math. (2)* **174** (2011), no. 3, 1643–1684.

[6] J. F. Carlson; S. B. Iyengar, Thick subcategories of the bounded derived category of a finite group, *Trans. Amer. Math. Soc.* **367** (2015), no. 4, 2703—2717.

[7] Ivo Dell ' Ambrogio, Tensor triangular geometry and KK-theor, *J. Homotopy Relat. Struct.* **5** (2010), no. 1, 319—358.

[8] E. S. Devinatz; M. J. Hopkins; J. H. Smith, Nilpotence and stable homotopy theory, I, *Ann. of Math. (2)* **128** (1988), no. 2, 207—241.

[9] W. Dwyer; P. C. Greenlees; S. Iyenger, Finiteness in derived categories of local rings *Comment. Math. Helv.* **81** (2006), 383–432.

[10] M. J. Hopkins, Global methods in homotopy theory, *Homotopy theory (Durham, 1985)*, 73–96, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 117, *Cambridge Univ. Press, Cambridge*, 1987.

[11] M. J. Hopkins; J. H. Smith, Nilpotence and stable homotopy theory, II, *Ann. of Math. (2)* **148** (1998), no. 1, 1–49.

[12] M. Hovey; J. H. Palmieri; N. P. Strickland, Axiomatic stable homotopy theory, *Mem. Amer. Math. Soc.* **128** (1997), no. 610.

[13] H. Matsui; Singular equivalences of commutative noetherian rings and reconstruction of singular loci, *J. Alg.* **522** (2019), no.15, 170–194.

[14] H. Matsui and R. Takahashi; Construction of spectra of triangulated categories and applications to commutative rings, to appear in *J. Math. Soc. Japan*, `arXiv:1811.06312`.

[15] A. Neeman, The chromatic tower for $D(R)$, With an appendix by Marcel Bökstedt, *Topology* **31** (1992), no. 3, 519–532.

[16] G. Stevenson, Subcategories of singularity categories via tensor actions, *Compos. Math.* **150** (2014), no. 2, 229–272.

[17] R. Takahashi, Classifying thick subcategories of the stable category of Cohen–Macaulay modules, *Adv. Math.* **225** (2010), no. 4, 2076–2116.

[18] R. W. Thomason, The classification of triangulated subcategories, *Compositio Math.*, **105** (1):1–27, 1997.

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153-8914, Japan

Email address: `mhiroki@ms.u-tokyo.ac.jp`