アフィン頂点代数の relaxed 最高ウェイト表現

川節　和哉 (Kawasetsu, Kazuya)
熊本大学大学院先導機構

1　はじめに

頂点代数, ないしは頂点作用素代数は, 一言でいうと, 互いに局所可換な量子場のなす代数である. 重要な無限次元表現を数多く持ち, 2 次元共形場理論の代数版である. 中でも, ある種の有限性条件と表現圏の半単純性を満たす頂点作用素代数は, 表現の指標の張るベクトル空間がモジュラー群 $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用で閉じているという著しい性質を持つ. さらに, Verlinde 公式という, 表現のある種のテンソル積における既約表現の重複度を, 指標の S 変換を表す行列によって記述する公式が成り立つ.

アフィン頂点作用素代数は, アフィン Kac-Moody リー環を用いて構成される頂点作用素代数の族であり, その上の表現は, アフィンリー環上の表現の構造を持つ. 題目の relaxed 最高ウェイト表現とは, 簡単に言うと有限次元単純リー環上のウェイト表現のアフィン化のことである.

T. Creutzig と D. Ridout は, 有限性条件を満たさない許容的アフィン頂点作用素代数 $L_k(sl_2)$ に対して, Verlinde 公式のアナロジーを提唱した. その公式は, relaxed 最高ウェイト表現 (とそのツイスト) に対して記述される.

本稿では, Creutzig-Ridout 理論を簡単に解説し, relaxed 最高ウェイト表現の理論の最近の進展について概観する.

2　頂点作用素代数

ベクトル空間 V を考え, V の元を係数に持つ形式的べき級数の空間を $V[[z,z^{-1}]]=\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \mid a_n \in V\}$ と書く. ただし z は不定元である. V

上の量子場とは, $a(z) \in \mathrm{End}(V)[[z,z^{-1}]]$ であって, 任意の $b \in V$ に対して, ある $N > 0$ が存在して, $a(z)b \in V[[z]]z^N$ が成り立つものをいう.

V が頂点代数 [B] であるとは, 特別な元 $\mathbf{1} \in V$ (真空元) と $T \in \mathrm{End}(V)$ (平行移動作用素) が定まっており, さらに, V の元 a に対して, V 上の量子場 $Y(a,z)$ が線型に定まっていて, 次の公理を満たすことである：

- (局所可換性) 任意の $a, b \in V$ に対して, $N > 0$ が存在して,
$$(z-w)^N Y(a,z)Y(b,w) = (z-w)^N Y(b,w)Y(a,z).$$
- $Y(\mathbf{1},z) = \mathrm{id}_V, \qquad Y(a,z)\mathbf{1} \in a + V[[z]]z, \qquad (a \in V),$
- $T\mathbf{1} = 0, \qquad [T, Y(a,z)] = \partial_z Y(a,z), \qquad (a \in V).$

V を頂点代数とする. $\omega \in V$ が中心電荷 $c \in \mathbb{C}$ のヴィラソロ元であるとは, $Y(\omega,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ と書くと,

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{n^3-n}{12}\delta_{n,-m}c, \qquad n, m \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

を満たすことである.

頂点代数 V とヴィラソロ元 $\omega \in V$ の組 (V,ω) は次の公理を満たすとき頂点作用素代数と呼ぶ [FLM]：

- L_0 が V 上, 半単純に作用する
- V 上の L_0-固有値は非負整数である:
$$V = \bigoplus_{\Delta=0}^{\infty} V_\Delta, \qquad V_\Delta := \{v \in V \mid L_0 v = \Delta v\},$$
- $V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$, $\dim V_\Delta < \infty$, $\forall\Delta$.

(V,ω) を頂点作用素代数とする. 以降, 頂点作用素代数を単に V と書く. V の中心電荷は, ω の中心電荷 c のことである.

頂点作用素代数 V 上の表現 M は, V の元 a に対して M 上の量子場 $Y^M(a,z) \in \mathrm{End}(M)[[z,z^{-1}]]$ が線型に定まっていて, L_0 が半単純に作用しており, いくつかの公理を満たすものをいう. ただし, $Y^M(\omega,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ とかく. L_0-固有ベクトル $v \in M$ の L_0-固有値を, v の共形ウェイトと呼ぶ. M が既約表現のとき, ある $\Delta \in \mathbb{C}$ が存在して, M の L_0-固有値はすべて $\Delta + \mathbb{Z}$ の元である.

M を V 上の表現とする. M の共形ウェイトが次の意味で下に有界のとき, M は正エネルギーであるという：

$$M = \bigoplus_{\Delta\in S, n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} M_{\Delta+n}, \quad \text{with } S \subset \mathbb{C} \text{ such that } \#S < \infty \text{ and}$$

$$\forall\Delta \in S, M_\Delta \neq 0 \text{ and } (\Delta + \mathbb{Z}) \cap S = \{\Delta\}.$$

ただし, $M_\Delta := \{v \in M \,|\, L_0 v = \Delta v\}$ $(\Delta \in \mathbb{C})$ とかく. 部分ベクトル空間 $M_{top} := \bigoplus_{\Delta\in S} M_\Delta$ を M の top 空間という.

特に, M が既約正エネルギー表現のとき,

$$M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_{\Delta+n}, \qquad M_\Delta \neq 0, \qquad \Delta \in \mathbb{C}$$

という形を持ち, $\Delta = \Delta_M$ は M の最小共形ウェイトと呼ばれる. このとき, $M_{top} = M_\Delta$ である.

定義 1. V 上の普通表現とは, 正エネルギー表現 M であって, 各 L_0-固有空間が有限次元であるものをいう.

V 自身は V 上の表現であるが, これを真空表現と呼ぶ. 真空表現は普通表現の例である.

定義 2. 普通表現 M の (形式) 指標とは, 形式的級数

$$\chi[M](q) = \sum_{n\in\mathbb{C}} (\dim M_n) q^{n-c/24}$$

のことである. ただし, q は不定元である.

3 Zhu 理論

頂点作用素代数 V を考え, $U(V)$ をその普遍展開環とする. これはおおよそ $a_{(n)} \in \mathrm{End}(V)$ $(a \in V,\, n \in \mathbb{Z})$ で生成される結合代数のことである (正確な定義は [MNT] を参照せよ). ただし, $a_{(n)}$ は $Y(a, z)$ における z^{-n-1} の係数のことである. V の Zhu 代数とは, 結合代数

$$\mathrm{Zhu}(V) = U(V)_0/(U(V)_0 \cap U(V)U(V)_-)$$

のことである. ただし, $U(V)_0$ は $U(V)$ の元で共形ウェイトを変えない斉次元全体の張る空間, $U(V)_-$ は共形ウェイトを真に下げる斉次元全体の張る空間である. V 上の正エネルギー表現 M を考えたとき, その top 空間 M_{top} には $\mathrm{Zhu}(V)$ 上の表現の構造が誘導される.

定理 1. [Z] 一対一対応

$$\begin{array}{rcl}(V \text{ の既約正エネルギー表現全体}) & \longrightarrow & (\mathrm{Zhu}(V) \text{ の既約加群全体}) \\ M & \longmapsto & M_{top}\end{array}$$

が成り立つ.

商ベクトル空間 $V/V_{(-2)}V$ が有限次元のとき, V は平滑 (C_2 余有限) という. また, V の正エネルギー表現が完全可約のとき, V は有理的であるという. Y. Zhu は, 上記の一対一対応を用いて, V が平滑かつ有理的であるとき, V の既約正エネルギー表現は同型を除いて有限個であり, 既約正エネルギー表現は普通表現であることを示した. さらに, 既約正エネルギー表現の指標が, モジュラー不変性と呼ばれる次の性質を満たすことを示した.

定理 2. [Z] V は平滑かつ有理的であると仮定する. ベクトル空間

$$\mathbb{C}\text{-span}\{\chi[M](q) \,|\, M \text{ は } V \text{ 上の既約正エネルギー表現}\}$$

はモジュラー群 $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用で不変である. ただし, $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用は,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : f(\tau) \longmapsto f\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\Big), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

であり, $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$, $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ である.

このように, 平滑かつ有理的な頂点作用素代数の表現論は強力な理論があり, 非常に発達している. 本稿では, 平滑でない頂点作用素代数の表現論を考察する.

4 アフィン Kac-Moody リー環

$\mathfrak{g}$ を有限次元単純リー環とし, $\mathfrak{h}$ をカルタン部分代数, $\mathfrak{b}$ をボレル部分代数とする. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$, $(\omega_1, \ldots, \omega_\ell)$ をそれぞれ $\mathfrak{g}$ の単純ルート, 基本ウェイトとし, $h, h^\vee$ をそれぞれ $\mathfrak{g}$ のコクセター数, 双対コクセター数とする. 次のリー積で定義される, アフィン Kac-Moody リー環 $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D$ を考える：

$$[at^n, bt^m] = [a,b]t^{n+m} + n(a|b)\delta_{n,-m}K, \quad [D, at^n] = nat^n, \quad [K, \widehat{\mathfrak{g}}] = 0,$$

$(a, b \in \mathfrak{g}, n, m \in \mathbb{Z})$. ここで, $(\cdot|\cdot)$ は $\mathfrak{g}$ 上の正規化された不変内積である. $\widehat{\mathfrak{g}}$ のカルタン部分代数とボレル部分代数を, $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D$, $\widehat{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}[t] + \mathfrak{g}[t]t + \mathbb{C}K + \mathbb{C}D$ ととる. $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$, $(\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_\ell)$ はそれぞれ $\widehat{\mathfrak{g}}$ の単純ルート, 基本ウェイトを表し, D の双対元は $\delta \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ で表す.

以下, k を $-h^\vee$ でない複素数とする. $\widehat{\mathfrak{g}}$ の元 K がスカラー k 倍で作用する $\widehat{\mathfrak{g}}$-加群は, レベル k であるという.

ウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を考える. 本稿では, $\mathfrak{g}$ 上の最高ウェイト λ の既約最高ウェイト加群を L_λ と表す. また, $d = -(\lambda|\lambda + 2\rho)/2(k + h^\vee)$ と置き, $\widehat{\mathfrak{g}}$ 上の最高ウェイト $k\Lambda_0 + d\delta + \lambda$ の既約最高ウェイト加群を $L_{k,\lambda}$ と書く.

定義 3. $\widehat{\mathfrak{g}}$-加群 M がウェイト加群であるとは, M が

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*} M(\lambda), \quad \dim M(\lambda) < \infty \quad (\forall \lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*)$$

という条件を満たすことである. ただし, $M(\lambda) := \{v \in M \mid hv = \lambda(h)v, h \in \widehat{\mathfrak{h}}\}$.

$\mathfrak{g}$-加群に対しても, 定義中の $\widehat{\mathfrak{h}}$ を $\mathfrak{h}$ に置き換えて, ウェイト加群の概念を定義する.

$\mathfrak{g}$-加群 N を考える. このとき, N には次の作用によって $\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D$ 上の表現が引き起こされる： $K = k$, $D = -\Omega/2(k + h^\vee)$, $\mathfrak{g}[t]t = 0$. ここで, Ω は内積 $(|)$ に関する $\mathfrak{g}$ のカシミール元である. すると, 次の $\widehat{\mathfrak{g}}$-加群が誘導される：

$$\widehat{N}_k := U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D)} N,$$

N が巡回加群のとき, $\widehat{N}_k$ の $1 \otimes N$ と交わりが 0 である部分加群による商加群は, relaxed 最高ウェイト加群と呼ばれる.

例えば, $\widehat{N}_k$ の almost 単純商

$$\mathrm{Ind}_k(N) := \widehat{N}_k/(I \cap (1 \otimes N) = 0 \text{ を満たす部分加群 } I \text{ 全体の和}).$$

は, N が巡回加群のとき, relaxed 最高ウェイト加群である.

定義 4. M をレベル k のウェイト $\widehat{\mathfrak{g}}$-加群とし, $c = k \dim \mathfrak{g}/(k + h^\vee)$ とおく. M の全指標 $\mathrm{ch}[M]$ を,

$$\mathrm{ch}[M](y, z, q) = q^{-c/24} y^k \sum_{n \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathfrak{h}^*} \dim M(k\Lambda_0 - n\delta + \lambda) q^n z^\lambda$$

と定義する. ただし, y, z, q は不定元である.

5 アフィン頂点代数

前節の記号をそのまま用いる. $\mathfrak{g}$ 上の自明表現 $N=\mathbb{C}$ に対して,

$$V^k(\mathfrak{g}) := \widehat{\mathbb{C}}_k = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{\mathfrak{g}[t]\oplus\mathbb{C}K\oplus\mathbb{C}D} \mathbb{C}$$

は頂点作用素代数の構造を持ち, 普遍アフィン頂点作用素代数と呼ばれる. 中心電荷は $c = k\dim\mathfrak{g}/(k+h^\vee)$ である. $V^k(\mathfrak{g})$ の単純商代数は (単純) アフィン頂点作用素代数と呼び, $L_k(\mathfrak{g})$ とかく. $L_k(\mathfrak{g})$ は $\widehat{\mathfrak{g}}$-加群として既約最高ウェイト表現 $L(k\Lambda_0)$ と同型である.

$V=V^k(\mathfrak{g})$ または $V=L_k(\mathfrak{g})$ とする. V 上の表現 M には, $\widehat{\mathfrak{g}}$ 上のレベル k 加群の構造が自然に引き起こされ, M 上 $D=-L_0$ が成り立つ. また, M が普通表現のとき, M の全指標 $\mathrm{ch}[M](y,z,q)$ に $y=z=1$ と代入したものは, 指標 $\chi[M](q)$ と一致する.

$L_k(\mathfrak{g})$ が平滑かつ有理的であることと, $k=0,1,2,\ldots$ は同値である. $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と仮定する. このとき, $L_k(\mathfrak{g})$ 上の既約正エネルギー表現全体は, $\widehat{\mathfrak{g}}$ 上のレベル k の既約可積分表現 (レベル k の支配的整ウェイトを最高ウェイトに持つ既約最高ウェイト表現) 全体と一致する. 既約可積分表現には Weyl-Kac 指標公式という, Weyl 指標公式の一般化が適用でき, モジュラー不変性が知られていた [KP]. また, 前節の Zhu 理論によってこのモジュラー不変性を示すことができる.

$\widehat{\mathfrak{g}}$ の許容 (admissible) ウェイトとは, 支配的整ウェイトをある種有理レベルに一般化したものである [KW1]. 許容ウェイトを最高ウェイトに持つ既約最高ウェイト表現を許容表現と呼ぶ. 許容表現は Kac-Wakimoto 指標公式という, Weyl-Kac 指標公式の一般化を満たす. しかも, 指標が $SL_2(\mathbb{Z})$ のある合同部分群上のウェイト 0 モジュラー関数であるという意味で, モジュラー不変である [KW1].

さて, k が許容レベルであるとは, $k\Lambda_0$ が許容ウェイトであることをいう. これは,

$$k+h^\vee = \frac{p}{q}, \qquad p,q\in\mathbb{Z}_{\geq 1}, \qquad (p,q)=1, \qquad p \geq \begin{cases} h^\vee & (q,r^\vee)=1, \\ h & (q,r^\vee)=r^\vee, \end{cases}$$

という形を持つことと同値である. ここで, $r^\vee$ は $\mathfrak{g}$ のディンキン図で一番太いところにおける線の本数である. k が正整数でないとき, $L_k(\mathfrak{g})$ は平滑ではないが, 許容的なとき, $L_k(\mathfrak{g})$ は平滑性のある種の一般化 (擬平滑) を満たす [A1, AK].

$\mathfrak{g}$ のべき零元 f を考える. f に付随する量子 BRST 還元法をレベル k のアフィン頂点作用素代数に適用することで構成される頂点作用素代数を W 代数と言い, $W_k(\mathfrak{g}, f)$ と書く [KRW]. これは f を通る Slodowy 横断片の量子アフィン化と思える. k が整数でない許容レベルのとき, f をうまく選ぶと, $W_k(\mathfrak{g}, f)$ は平滑となる [A1].

このように, 整数でない許容レベルを持つアフィン頂点作用素代数 $L_k(\mathfrak{g})$ (よって平滑ではない) は非常に興味深い対象であり, 本稿ではその表現論を取り扱う.

6 sl_2 のウェイト表現

平滑でないアフィン頂点作用素代数上の既約 relaxed 最高ウェイト表現には, $\mathfrak{g}$ 上の最高ウェイト表現でないウェイト表現から誘導される表現が現れる. そこで, 本節では, 有限次元単純リー環 $\mathfrak{g}$ 上のウェイト表現の分類について解説する. Q, P をそれぞれ $\mathfrak{g}$ のルート格子, ウェイト格子とする.

定義 5. ウェイト $\mathfrak{g}$-加群 N のウェイト台とは, $\mathrm{supp}(N) = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid N(\lambda) \neq 0\}$ のことである. N が稠密 (dense) であるとは, ウェイト台が $\mathrm{supp}(N) = \lambda + Q$ $(\lambda \in \mathfrak{h}^*)$ という形を持つことである.

最高ウェイト加群 $N = L_\lambda$ は $\mathrm{supp}(L_\lambda) \subsetneq \lambda + Q$ であるため, 稠密ではない.

ここで, 簡単のため $\mathfrak{g} = sl_2$ と仮定して, 稠密加群を構成する. f を sl_2 の負ルートベクトルとし, sl_2 の普遍展開環を $U(sl_2)$ と書く. f で生成される $U(sl_2)$ の積閉集合を $S = \langle f \rangle$ と書き, S に関する $U(sl_2)$ の (Ore) 局所化を $S^{-1}U(sl_2)$ と表す. 支配的整ウェイトではないウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^* \setminus P^+$ を考える. このとき, 既約最高ウェイト加群 L_λ 上 f は単射であるため, 局所化 $S^{-1}L_\lambda$ は非零である. 構成より, $S^{-1}L_\lambda$ は sl_2 上の (可約) 稠密加群であり, $\mathrm{supp}(S^{-1}L_\lambda) = \lambda + Q$ である. また, $\mu \in \mathbb{C}$ とし, 指数関数の展開公式を用いて, $S^{-1}L_\lambda$ のツイスト $f^\mu.S^{-1}L_\lambda$ を定義する. この加群のウェイト台は $\lambda - \mu + Q$ である. (ただし $\mathfrak{h}^*$ と $\mathbb{C}$ を, $\alpha_1 \mapsto 1$ によって同一視している.) また, $f^\mu.S^{-1}L_\lambda$ は同型を除いて μ の整数シフトには依存しない.

sl_2 の既約ウェイト表現は次で分類される：

1. 有限次元表現：L_λ, $\lambda \in P^+$.

2. 無限次元最高ウェイト表現：L_λ, $\lambda \in \mathfrak{h}^* \setminus P^+$.

3. 無限次元最低ウェイト表現：L^-_λ, $\lambda \in \mathfrak{h}^* \setminus P^-$.

4. 稠密表現：$f^\mu.S^{-1}L_\lambda$, $\lambda \in \mathfrak{h}^* \setminus P^+$, $\mu \in \mathbb{C}$ s.t. $(\nu|\nu+2\rho) \neq (\lambda|\lambda+2\rho)$ for any $\nu \in \lambda - \mu + Q$.

(ただし, 4 には重複がある: ウェイト台と Casimir 固有値が一致するとき, 同型である.) 一般の有限次元単純リー環 $\mathfrak{g}$ についても, 既約ウェイト表現は [F, M] の結果によって分類されている. 任意の既約ウェイト表現は, $\mathfrak{g}$ の Levi 部分リー環上の既約稠密表現から放物誘導によって得られる [F]. また, 稠密表現が存在すれば, $\mathfrak{g}$ は A 型か C 型であることが示された [F]. 最終的に既約稠密表現は [M] において分類され, したがって既約ウェイト表現は完全に分類された.

7 Creutzig-Ridout 理論

$\mathfrak{g} = sl_2$ と仮定し, k を整数ではない許容レベルとする. すなわち, $k+2 = p/q$ ($p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ は互いに素である) とする. 物理学者 T. Creutzig と D. Ridout は, [CR] において, 次の二つの表現圏を導入した.

まず, $L_k(sl_2)$ の relaxed 表現圏 $\mathbb{L}$ とは,

$$\mathbb{L} = \{\mathrm{Ind}_k(f^\mu.S^{-1}(L_{\lambda_{r,s}})) \,|\, \mu \in \mathbb{R}, 1 \leq r \leq p-1, 1 \leq s \leq q-1\}/(\text{同型})$$

である. ここで, $\lambda_{r,s} := (r-1-(k+2)s)\omega_1$ である. 集合 $\{\lambda_{r,s} \,|\, 1 \leq r \leq p-1, 1 \leq s \leq q-1\}$ は, レベル k の $\widehat{\mathfrak{g}}$ の許容ウェイトの $\mathfrak{h}^*$ への射影であって、$\mathfrak{g}$ の支配的整ウェイトでないウェイト全体の集合と一致する. $\mathbb{L}$ の既約対象全体の集合は, $L_k(sl_2)$ 上の既約 relaxed 最高ウェイト表現であって, sl_2 上の既約稠密表現から誘導されたもの全体の（同型を除いた）集合と一致する.

$L_k(sl_2)$ の標準表現圏 $\mathbb{S}$ とは,

$$\mathbb{S} = \{\sigma^n.M \,|\, M \in \mathbb{L}, n \in \mathbb{Z}\}$$

で定義される. ただし, σ^n は次で定義される $\widehat{\mathfrak{g}}$ の自己同型である:

$$et^m \mapsto et^{m-n}, \quad ht^m \mapsto ht^m - \delta_{m,0}nK, \quad ft^m \mapsto ft^{m+n},$$
$$K \mapsto K, \quad D \mapsto D + \frac{1}{2}nh - \frac{1}{4}n^2K.$$

構成より, $\mathbb{S}$ は Haar 測度つき空間 $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times [1,(p-1)(q-1)/2] \times \mathbb{Z}$ と同一視される. [CR] において, この測度を用いた積分表示を用いて, $\mathbb{S}$ の対象の全指標のモジュラー不変性と, $\mathbb{S}$ の対象間の交絡作用素の空間の次元 (フュージョン係数) を記述する, 連続的 Verlinde 公式が提唱された.

さらに, $L_k(sl_2)$ の既約最高ウェイト表現 (許容表現) は $\mathbb{S}$ に属さないが, $\mathbb{S}$ の (可約) 対象による resolution を持つため, 既約最高ウェイト表現間の (Grothendieck) フュージョン係数も計算でき, 非負整数になるというのが彼らの計算結果である. 許容表現の指標のモジュラー不変性を用いて (通常の) Verlinde 公式を計算すると, 負のフュージョン係数が出てきてしまうという問題があったが, これはその問題を解決していると考えられる.

近年, $L_k(sl_2)$ 以外でも標準表現圏と Verlinde 公式が考察されており, それらによって予言されたフュージョン係数は, Weyl 頂点代数の場合に正しいことが確かめられている [AP].

このように, 標準表現圏は非常に興味深い対象であり, その表現論を調べることや, Creutzig-Ridout 理論の数学的な厳密化が求められている. 標準表現圏は relaxed 最高ウェイト表現をツイストすることで得られるため, relaxed 最高ウェイト表現を調べることが本稿の目的である.

8　主定理

有限次元単純リー環 $\mathfrak{g}$ と許容レベル k を考える. 本稿の主定理の一つ目は, $L_k(\mathfrak{g})$ 上の既約 relaxed 最高ウェイト表現の分類である (D. Ridout との共著論文 [KR2]). $L_k(\mathfrak{g})$ の Zhu 代数は, $U(\mathfrak{g})$ のある両側イデアルによる商代数と同型であることが知られている. [F, M] による $\mathfrak{g}$ 上の既約ウェイト表現の分類と, Zhu による対応 (定理 1) より, $L_k(\mathfrak{g})$ 上の既約 relaxed 最高ウェイト表現の分類は, $L_k(\mathfrak{g})$ 上の既約最高ウェイト表現の分類に帰着される. $L_k(\mathfrak{g})$ 上の既約最高ウェイト表現は, [A3, KW2] において分類されているため, 既約 relaxed 最高ウェイト表現も完全に分類された.

$\mathfrak{g} = A_n$ と仮定する. 上記の分類結果と, W 代数の表現論に関する [A2] の結果により, 既約稠密表現から誘導される $L_k(\mathfrak{g})$ 上の既約 relaxed 最高ウェイト表現と, 極小 W 代数 $W_k(\mathfrak{g}, f_{\alpha_n})$ 上の既約普通表現との間の一対一対応が得られた (稠密表現のツイスト f^μ を除いて) . さらに, 次の意味で指標にも対応がつく.

定理 3. [K] ウェイト $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_{n-1} + (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0})\omega_n$ を考える. 任意の $\mu \in \mathbb{C}^n$ に対して,

$$\mathrm{ch}[\mathrm{Ind}_k(f^\mu.S^{-1}L_\lambda)](y,z,q) = y^k \frac{\chi[H^{BRST}_{f_{\alpha_n}}(L_{k,\lambda})](q)}{\eta(q)^{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^{f_{\alpha_n}}}} \sum_{\nu \in \lambda - \mu + Q} z^\nu$$

が成り立つ.

ここで, S はルートベクトル f_{α_n}, $f_{\alpha_{n-1}+\alpha_n}, \ldots$, $f_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}+\alpha_n}$ で生成される積閉集合であり, f^μ は, ツイスト

$$f^{\mu_1}_{\alpha_n} f^{\mu_2}_{\alpha_{n-1}+\alpha_n} \cdots f^{\mu_n}_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}+\alpha_n} \quad (\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)),$$

を表す. また, 右辺の和において, μ は $\mathfrak{h}^*$ の元と同一視されている. $H^{BRST}_{f_{\alpha_n}}$ は, アフィン頂点代数 $L_k(\mathfrak{g})$ のある種の (放物的) BGG 表現圏から W 代数 $W_k(\mathfrak{g}, f_{\alpha_n})$ の普通表現の圏への関手である [A2]. さらに, $\mathfrak{g}^{f_{\alpha_n}}$ は, 元 f_{α_n} の中心化部分リー環である. この指標公式は, $\mathfrak{g} = A_1$ のときは, Creutzig-Ridout 公式 [CR, KR1] に帰着する. $\mathfrak{g} = A_2$ で許容レベル k の分母が 2 のとき, $W_k(A_2, f_{\alpha_2})$ は平滑かつ有理的であるため, 普通表現の指標はモジュラー不変性を持つ. 定理 3 より, 既約稠密表現から誘導される既約 relaxed 最高ウェイト表現の指標に, そのようなモジュラー不変な関数が現れているため, Creutzig-Ridout 理論におけるモジュラー不変性が (厳密に定義できれば) 成り立つのではないかと期待される.

参考文献

[AP] D. Adamovic and V. Pedic. "On fusion rules and intertwining operators for the Weyl vertex algebra." arXiv:1903.10248 (2019).

[A1] T. Arakawa. "Associated varieties of modules over Kac-Moody algebras and C_2-cofiniteness of W-algebras." *Int. Math. Res. Not.*, 2015:11605–11666, 2015.

[A2] T. Arakawa. "Representation theory of W-algebras, II." *Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics.* Math. Soc. Japan, 2011.

[A3] T. Arakawa. "Rationality of admissible affine vertex algebras in the category $\mathcal{O}$." *Duke Math. J.* 165 (2016): 67–93.

[AK] T. Arakawa and K. Kawasetsu. "Quasi-lisse vertex algebras and modular linear differential equations." Lie Groups, Geometry, and Representation Theory. Birkhäuser, Cham, 2018. 41–57.

[B] R. Borcherds. "Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster." *Proc. Nat. Acad. Sci* 83 (1986): 3068–3071.

[CR] T. Creutzig and D. Ridout. "Modular data and Verlinde formulae for fractional level WZW models II." *Nucl. Phys. B* 875 (2013): 423–458.

[F] S.L. Fernando. "Lie algebra modules with finite-dimensional weight spaces. I." *Trans. Amer. Math. Soc.* 322 (1990): 757–781.

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman. "Vertex operator algebras and the Monster." Vol. 134. Academic press, 1989.

[KP] V. Kac and D. Peterson. "Infinite-Dimensional Lie Algebras, Theta Functions and Modular Forms." *Adv. Math.* 53 (1984): 125–264.

[KRW] V. Kac, S. Roan and M. Wakimoto. "Quantum reduction for affine superalgebras." *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.

[KW1] V. Kac and M. Wakimoto. "Modular invariant representations of infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras." *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 85(14):4956–4960, 1988.

[KW2] V. G. Kac and M. Wakimoto. Classification of modular invariant representations of affine algebras. In *Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988)*, volume 7 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pages 138–177. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.

[K] K. Kawasetsu. in preparation.

[KR1] K. Kawasetsu and D. Ridout. "Relaxed highest-weight modules I: rank 1 cases." *Comm. Math. Phys.* 368 (2019): 627–663.

[KR2] K. Kawasetsu and D. Ridout. "Relaxed highest-weight modules II: classifications for affine vertex algebras." arXiv:1906.02935 (2019).

[M] O. Mathieu. “Classification of irreducible weight modules.” *Ann. Inst. Fourier.* 50 (2000): 537–592.

[MNT] Matsuo, Atsushi, Kiyokazu Nagatomo, and Akihiro Tsuchiya. “Quasi-finite algebras graded by hamiltonian and vertex operator algebras” *Moonshine-The First Quarter Century and Beyond: Proceedings of a Workshop on the Moonshine Conjectures and Vertex Algebras.* Vol. 372. Cambridge University Press, 2010.

[Z] Y. Zhu. “Modular invariance of characters of vertex operator algebras.” *J. Amer. Math. Soc.* 9 (1996): 237–302.