向井対の分類とその応用について

金光 秋博 *

向井対 $(X,\mathcal{E})$ とは, Fano 多様体 X とその上のベクトル束 $\mathcal{E}$ の対であって, 第一 Chern 類に関する, ある条件を満たすものの事を言う．このような対 $(X,\mathcal{E})$ は 1988 年に向井によって, Fano 多様体のある種の一般化として導入されていた [13]. ここでは, 代数学シンポジウムでの講演に沿って, 向井対の分類問題とその応用について報告する．証明や細部については, 論文 [5–7] を参照していただきたいが, 本報告では主に単純向井対と単純 K 同値射の関連を中心に説明したい．そこで, 本稿ではまず向井対, 単純向井対の定義を与えた後, 向井対の分類問題を単純向井対の場合を中心に扱う．その後に応用として, Duo Li によって導入された単純 K 同値射という概念と単純向井対との関連について扱う.

1 向井対

Fano 多様体 X とは, 滑らかな射影代数多様体 X であって, その反標準因子 $-K_X = c_1(X)$ が豊富であるもののことをいう．ここで, $-K_X = c_1(X)$ は接束の行列式束 $\det(T_X)$ に対応する因子である．線束が豊富であることの定義は復習しないが, その概念はベクトル束にも一般化される．本稿では, Hartshorne による豊富性の定義を用いる: すなわち, ベクトル束 $\mathcal{E}$ が豊富であるとは, その射影化 $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ の上の普遍商線束 $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(1)$ が豊富であるときを言う.

向井対 $(X,\mathcal{E})$ の定義は次で与えられる:

定義 1.1 ([13])**.** **向井対** $(X,\mathcal{E})$ とは, Fano 多様体 X とその上の豊富ベクトル束 $\mathcal{E}$ の対であって, $c_1(X) = c_1(\mathcal{E})$ を満たすもののことである.

向井対の**次元**とは $\dim X$ のこととして定め, その**階数**とは $\operatorname{rank}\mathcal{E}$ のこととして定める.

言い換えれば, 向井対とは, その第一 Chern 類 $c_1(X)$ が豊富ベクトル束 $\mathcal{E}$ の第一 Chern 類で表されているような Fano 多様体のことである．一般に, 豊富ベクトル束が与えられたとき, そのベクトル束の階数 $\operatorname{rank}\mathcal{E}$ が大きいほど, それに伴って, その行列式束, あるいは第一 Chern 類 $c_1(\mathcal{E})$ も大きくなる．したがって, 向井対の階数 $\operatorname{rank}(\mathcal{E})$ は, その反標準束の大きさを図る一つの不変量と考えることができる.

注意 1.2. 一般偏極多様体とは, 多様体とその上の豊富ベクトル束の対 $(X,\mathcal{E})$ のことをいい, そのログ標準因子とは, $K_X + c_1(\mathcal{E})$ のことを指す．すると, 向井対とは, 一般偏極多様体 $(X,\mathcal{E})$ であって, ログ Calabi-Yau 条件 "$K_X + c_1(\mathcal{E}) = 0$"を満たすものと言いかえることができる.

向井対の簡単な, しかし基本的である例は, Fano 多様体とその基本因子と呼ばれるものを用いて与えられる:

第 64 回代数学シンポジウム 報告.
The author is a JSPS Research Fellow and supported by the Grant-in-Aid for JSPS fellows (JSPS KAKENHI Grant Number 18J00681).
* 京都大学理学研究科, kanemitu@math.kyoto-u.ac.jp

例 1.3. Fano 多様体 M の, **指数** r_M とは, $\operatorname{Pic} M$ 内で $-K_M$ を割り切る正の整数の最大値のことである:

$$r_M \coloneqq \{\, a \in \mathbf{Z}_{>0} \mid \text{ある Cartier 因子 } H \text{ があって } -K_M = aH \,\}.$$

定義より, ある因子 H_M が存在して, $-K_M = r_M \cdot H_M$ と書ける. Fano 多様体の Picard 群には捻れがないことから, このような因子 H_M は一意的に定まる. この因子 H_M を Fano 多様体 M の**基本因子**と呼ぶ.

さて M を任意の n 次元 Fano 多様体とすると $(M, \mathcal{O}(H_M)^{\oplus r_M})$ は次元が n で階数が r_M である向井対を与える.

上記の例 1.3 では, 指数 r_M の Fano 多様体 M から, 階数 r_M の向井対が得られていた. したがって向井対は Fano 多様体の一般化とみなすことができ, "階数" は "指数" の一般化に相当する.

さて, 例 1.3 で与えた向井対のベクトル束 $\mathcal{E}$ は直線束の直和であった. 一般の向井対については, もちろんこれは正しくない. 次が典型的な例である:

例 1.4. 射影空間 $\mathbf{P}^n$ とその接束 $T_{\mathbf{P}^n}$ の対 $(\mathbf{P}^n, T_{\mathbf{P}^n})$ は向井対の一つである. 実際, 射影空間上の Euler 完全列

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}^{n+1} \to T_{\mathbf{P}^n}(-1) \to 0$$

(に $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ をテンソルすること) により, $T_{\mathbf{P}^n}$ は豊富であることがわかる. また第一 Chern 類に関する条件 "$c_1(X) = c_1(\mathcal{E})$" は定義に他ならない. $n \geq 2$ のとき $T_{\mathbf{P}^n}$ は, 線束の直和には分裂しない.

例 1.4 に挙げた向井対は, 本稿の後半において論ずる単純 K 同値射とも深い関係にある. その準備のために $(\mathbf{P}^n, T_{\mathbf{P}^n})$ の幾何をもう少し詳しく見よう:

$\mathbf{P}^n$ とは, あるベクトル空間 $W \coloneqq \mathbf{C}^{n+1}$ を決めたときに, その超平面をパラメーターづける多様体である:

$$\mathbf{P}^n = \{\, V_n \subset W \mid V_n \text{ は } n \text{ 次元部分空間} \,\}.$$

また, 上述の Euler 完全列の双対は, パラメーター空間 $\mathbf{P}^n$ 上の普遍商束や普遍部分束を与える完全系列である.

一般にベクトル束 $\mathcal{E}$ の射影化は, 各点ごとには $\mathcal{E}$ の超平面のパラメーター空間を与える. したがって, $\mathbf{P}(T_{\mathbf{P}^n})$ は, 一次元部分空間 V_1 と n 次元部分空間 V_n の旗 $(V_1 \subset V_n)$ のパラメーター空間になる:

$$\mathbf{P}(T_{\mathbf{P}^n}) = \mathrm{Fl}(1, n; W) = \{\, (V_1 \subset V_n) \mid V_1 \text{ は一次元部分空間}, V_n \text{ は } n \text{ 次元部分空間} \,\}.$$

また, 射影化 $\mathbf{P}(T_{\mathbf{P}^n})$ からの自然な射影 $p_1 \colon \mathbf{P}(T_{\mathbf{P}^n}) \to \mathbf{P}^n$ は, 旗 $(V_1 \subset V_n)$ を $[V_n] \in \mathbf{P}^n$ に送ることで与えられる.

ここまででは, $\mathbf{P}^n$ を超平面のパラメーター空間と考えていたが, 元のベクトル空間の双対 $W^\vee$ の射影化を考えれば, 一次元部分空間のパラメーター空間が得られる:

$$\check{\mathbf{P}}^n = \{\, V_n \subset W^\vee \mid V_n \text{ は } n \text{ 次元部分空間} \,\} = \{\, V_1 \subset W \mid V_1 \text{ は } 1 \text{ 次元部分空間} \,\}.$$

対称性から, 自然に $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^n}(T_{\mathbf{P}^n}) \simeq \mathrm{Fl}(1, n; W) \simeq \mathbf{P}_{\check{\mathbf{P}}^n}(T_{\check{\mathbf{P}}^n})$ であり, 次の図式が得られる:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbf{P}_{\mathbf{P}^n}(T_{\mathbf{P}^n}) = \mathrm{Fl}(1, n; W) = \mathbf{P}_{\check{\mathbf{P}}^n}(T_{\check{\mathbf{P}}^n}) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ \mathbf{P}^n & & \check{\mathbf{P}}^n \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

新しく現れた射 p_2 は, 自然な射影 $p_2\colon \mathbf{P}_{\check{\mathbf{P}}^n}(T_{\check{\mathbf{P}}^n}) \to \check{\mathbf{P}}^n$ である. したがって $\mathbf{P}(T_{\mathbf{P}^n})$ は Picard 数が 2 の Fano 多様体であり, 2 つの射影空間束の構造 p_1 と p_2 を持つ.

このように射影化が 2 つの射影空間束の構造をもつ向井対を単純向井対といい, その射影化をここでは笠と呼ぶ. 正確には, 次で定義される:

定義 1.5 (単純向井対と笠)**.**

- 階数 r の**単純向井対**とは, 階数 r の向井対 $(X, \mathcal{E})$ であって, 以下の条件を満たすもののことを言う:
  (1) $\rho_X = 1$;
  (2) $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ は別の $\mathbf{P}^{r-1}$ 束の構造を持つ.
- **笠** (論文 [5] では *roof* と呼んでいる) とは単純向井対の射影化として得られる多様体 W のことである.

注意 1.6. 定義から, $(X_1, \mathcal{E}_1)$ を単純向井対とすると, その射影化 $W = \mathbf{P}(\mathcal{E}_1)$ が笠であり, 別の $\mathbf{P}^{r-1}$ 束の構造 $p_2\colon W \to X_2$ をもつ:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbf{P}(\mathcal{E}_1) = W \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ (X_1, \mathcal{E}_1) & & X_2. \end{tikzcd}$$

したがって, W は

(R1) Picard 数が 2 の Fano 多様体であり;
(R2) 2 つの $\mathbf{P}^{r-1}$ 束の構造 p_1 と p_2 を持つ.

一方で, この 2 つの条件が笠を特徴づけるかどうかは, 未解決である. 現状では, 笠を特徴づけるのにもう一つ次の条件が必要である [5, Proposition 1.5]:

(R3) $r_W = r$.

さて, W が笠である場合には, $r_W = r$ であり, 特に W の基本因子 H_W は各 p_i ファイバー $\mathbf{P}^{r-1}$ 上の超平面因子に制限される. このとき $\mathcal{E}_1 = (p_1)_*\mathcal{O}(H_W)$ である. また, $\mathcal{E}_2 := (p_2)_*\mathcal{O}(H_W)$ とおくと, $(X_2, \mathcal{E}_2)$ は向井対となる [16, Proposition 3.3]. とくに $(X_2, \mathcal{E}_2)$ も単純向井対となる.

2 向井対の分類

Fano 多様体研究の一つの究極目標は, その分類であるが, 一般状況での完全な分類は望めない. それでも, 指数の大きい Fano 多様体は比較的簡単な構造を持っていることが知られており, 実際 M を Fano 多様体としたとき, 次が知られている:

(1) $r_M \geq \dim M$ であれば, $M \simeq \mathbf{P}^n$ あるいは $\mathbf{Q}^n$ となる [9].
(2) 藤田は $r_M = \dim M - 1$ となる Fano 多様体を分類していた [2,3].
(3) また, 向井は $r_M = \dim M - 2$ となる Fano 多様体を分類していた [14]. 正確には向井は基本因子に関する条件を一つ仮定し, その仮定の元で分類を与えている. 後に, その仮定は勝手に成り立つことが [1,11] で示されている.

すでに見たように, 向井対の階数は Fano 多様体の指数の一般化とみなす事ができるのであった. 以上の観察をもとに, 向井は "階数の大きい向井対の分類問題" を提示していた. より正確には $\operatorname{rank}\mathcal{E} \geq \dim X$ を満たす向井対の詳細な分類を予想していた [13]. この予想は, 向井対の分類問題における小林・落合の定理の対応物であり, 藤田, Peternell, Ye-Zhang らによって解決されている:

定理 2.1 ([4, 21, 22, 26])**.** 向井対 $(X, \mathcal{E})$ であって $\operatorname{rank}\mathcal{E} \geq \dim X$ を満たすものは次に限る:

(1) $(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(1)^{\oplus n+1})$;
(2) $(\mathbf{P}^n, T_{\mathbf{P}^n})$;
(3) $(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(1)^{\oplus n-1})$;
(4) $(\mathbf{Q}^n, \mathcal{O}(1)^{\oplus n})$.

注意 2.2. 定理 2.1 に現れる対のうち, (1) と (2) は単純向井対であり, ほかは単純ではない.

さて, 上記の分類をすすめて, 階数がもうすこし小さい場合にも分類したいと考えるのは, ごく当然の発想で, 現在までに $\operatorname{rank}\mathcal{E} \geq \dim X - 2$ を満たす場合には, 分類が与えられている. この節の残りでは, これらの分類を紹介したいが, その前にいくつか注意を述べたい.

■Picard 数に関する注意 向井対 $(X, \mathcal{E})$ を分類することを考える際には, その様子は $\rho_X = 1$ の場合と $\rho_X > 1$ の場合とで, 大きく異る. 乱暴に言えば, Picard 数が大きいほど, 底空間 X や射影化 $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ は多くの端射線収縮をもち, そのために生じる制限から構造を決定しやすい. この場合には, 結果として現れる対の種類は多いものの, それらの構造は比較的簡単である. 他方で $\rho_X = 1$ の場合には, その構造を調べる際により詳細な情報を取り出す必要があり, また現れる対 $(X, \mathcal{E})$ たちも様々な幾何, とくに等質空間やその上の等質ベクトル束の幾何と深く関連するものが多く, 大変興味深い. 本稿の残りでは, 筆者が主に携わった場合である, $\rho_X = 1$ の場合に焦点を絞ることにする. $\rho_X > 1$ の場合については, 各所で参考文献を挙げるに留める.

■ベクトル束が分裂する場合に関する注意 定理 2.1 において, ベクトル束 $\mathcal{E}$ が直線束の直和に分解しないのは, (2) の場合のみであることに注意されたい. 一般に, 向井対 $(X, \mathcal{E})$ が与えられたとする. $\rho_X = 1$ は仮定しよう. すると, $\operatorname{Pic}(X)$ は基本因子 H_X に対応する直線束 $\mathcal{O}_X(1)$ によって生成されている. ベクトル束 $\mathcal{E}$ が直線束の直和に分解する場合 (分裂型向井対と呼ぶ) には $\mathcal{E} \simeq \bigoplus_{i=1}^{\operatorname{rank}\mathcal{E}} \mathcal{O}(a_i)$ と正の整数 a_i を用いて書け, $\sum a_i = r_X$ を満たす事がわかる. したがって, $r_X = \sum a_i \geq \operatorname{rank}\mathcal{E}$ となる.

例えば $\operatorname{rank}\mathcal{E} = \dim X - 2$ となる分裂型向井対を考えると, $r_X \geq \dim X - 2$ となる. したがって底空間 X は指数の大きい Fano 多様体の分類からよく分かる. またベクトル束も明示的に書けているので, この場合には分類は完了している. つまり階数の大きい向井対の分類問題において, 本質的なのは非分裂型の向井対を分類することである. そこで, 以下では $\mathcal{E}$ が分裂しない場合に主に焦点を絞る.

■余階数 2 の向井対 $\operatorname{rank}\mathcal{E} = \dim X - 1$ となる向井対は, 1990 年頃までに分類されている:

定理 2.3 (Wiśniewski [25]; Peternell-Szurek-Wiśniewski [23] (cf. Occhetta [17]))**.** 向井対 $(X, \mathcal{E})$ であって $\operatorname{rank} E = \dim X - 1$ を満たすものの完全な分類があり, そのうち $\rho_X = 1$ かつ非分裂型であるものは, 次に限る:

(1) $\left(\mathbf{P}^3, \mathcal{N}(2)\right)$, ここで $\mathcal{N}$ は null correlation 束と呼ばれる $\mathbf{P}^3$ 上のベクトル束 [18].
(2) $\left(\mathbf{Q}^4, \mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{Q}}(1)\right)$. ここで $\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$ は二次超曲面上のスピノル束 [19].

(3) $\left(\mathbf{Q}^3, \mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1)\right)$.

注意 2.4. (1) と (3) は単純向井対である．より詳しく, 両者はその射影化を通じてお互いに関連しており, $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^3}(\mathcal{N}(2)) \simeq \mathbf{P}_{\mathbf{Q}^3}(\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1))$ が成り立ち, したがって次の図式がある:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{P}_{\mathbf{P}^3}(\mathcal{N}(2)) = \mathbf{P}_{\mathbf{Q}^3}(\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1)) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ \mathbf{P}^3 & & \mathbf{Q}^3 \end{tikzcd}$$

ここで, p_1, p_2 はそれぞれの射影化に対応する $\mathbf{P}^1$ 束である．また, この多様体 $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^3}(\mathcal{N}(2)) \simeq \mathbf{P}_{\mathbf{Q}^3}(\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1))$ は, Dynkin 図形が $B_2 = C_2$ となる単純代数群 G の Borel 群による商 G/B である．

■余階数 3 の向井対　さて, 次に紹介したいのは, 階数 $\operatorname{rank}\mathcal{E}$ が $\dim X - 2$ となる向井対の分類である．この場合には, Novelli-Occhetta [16] によって, $\dim X = 4$ かつ $\rho_X \geq 2$ の場合が調べられていた．残りの場合については [6,7] において完全に分類された．ここでは主に, 単純向井対に焦点を絞ることにする．それ以外の場合については元の論文を参照されたい．

定理 2.5. $\operatorname{rank}\mathcal{E} = \dim X - 2$ を満たす向井対の同型類は完全に決定でき, 次が成り立つ:

- $\operatorname{rank}\mathcal{E} = \dim X - 2$ かつ $\rho_X = 1$ を満たす非分裂型向井対は, ちょうど 9 個ある．
- そのうち単純向井対は次の 2 つ:
  (1) $\left(\mathbf{Q}^6, \mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1)\right)$, ここで $\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$ はスピノル束;
  (2) $\left(\mathbf{Q}^5, \mathcal{G}_{\mathbf{Q}}(1)\right)$, ここで $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}$ は, Ottaviani 束と呼ばれるベクトル束である．

詳しい性質やその幾何等は, [8,19,20] 等に譲るが, $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}$ は階数 3 の安定束で, $(c_1, c_2, c_3) = (2, 2, 2)$ を満たすものとして, 特徴づけられている．また, この 2 つの単純向井対はその射影化が笠を与えるが, その構造は次のようになる:

まず対 $\left(\mathbf{Q}^6, \mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1)\right)$ を考えよう．区別のために, この底空間 $\mathbf{Q}^6$ を X_1 と書く．また射影化を W と書く．この射影化 W は, 自然な射影 $p_1\colon W \to X_1$ を持つ．また単純向井対の定義にあるように別の射影空間束の構造 $p_2\colon W \to X_2$ ももつ．この 2 つの射影空間束の構造は対称である．すなわち $X_2 \simeq \mathbf{Q}^6$ が成り立ち, p_2 に対応するベクトル束は X_2 上のベクトル束 $\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1)$ で与えられる:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{P}_{X_1}(\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1)) = W = \mathbf{P}_{X_2}(\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}^*(1)) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X_1 \simeq \mathbf{Q}^6 & & X_2 \simeq \mathbf{Q}^6. \end{tikzcd}$$

似たような対称性を対 $\left(\mathbf{Q}^5, \mathcal{G}_{\mathbf{Q}}(1)\right)$ も持っている: 同様に底空間を X'_1 と書こう．また射影化を W' と書く．この射影化 W' のもつ別の射影空間束の構造 $p'_2\colon W' \to X'_2$ を考えると, $X'_2 \simeq \mathbf{Q}^5$ であり, p'_2 に対応するベクトル束は X'_2 上のベクトル束 $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}(1)$ で与えられる:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{P}_{X'_1}(\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}(1)) = W' = \mathbf{P}_{X'_2}(\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}(1)) \arrow[dl, "p'_1"'] \arrow[dr, "p'_2"] & \\ X'_1 \simeq \mathbf{Q}^5 & & X'_2 \simeq \mathbf{Q}^5. \end{tikzcd}$$

$W=\mathbf{P}_{\mathbf{Q}^6}(\mathcal{S}^*_{\mathbf{Q}}(1))$ は等質空間である: ベクトル空間 $\mathbf{C}^8$ とその上の非退化対称二次形式 q を考える. すると, その上の 3 次元等方的部分空間のパラメーター空間 $\mathrm{OG}(3,8)$ は等質空間であり, W と同型である. 3 次元等方的部分空間 V_3 を一つ固定する. すると $[V_3]$ は $\mathrm{OG}(3,8)$ の点を与える. この V_3 に対して, ちょうど二つの 4 次元等方的部分空間 V_4^+ と V_4^- とが存在して $V_4^+\cap V_4^-=V_3$ となる. 4 次元等方的部分空間のパラメーター空間 $\mathrm{OG}(4,8)$ は二つの連結成分 $\mathrm{OG}(4,8)^+$ と $\mathrm{OG}(4,8)^-$ をもち

- (順番を適当に入れ替えれば) $[V_4^+]\in\mathrm{OG}(4,8)^+$, $[V_4^-]\in\mathrm{OG}(4,8)^-$ であり;
- 各連結成分 $\mathrm{OG}(4,8)^+$, $\mathrm{OG}(4,8)^-$ は $\mathbf{Q}^6$ と同型である.

したがって, 各点 $[V_3]\in\mathrm{OG}(3,8)$ に対して, $[V_4^+]\in\mathrm{OG}(4,8)^+$ と $[V_4^-]\in\mathrm{OG}(4,8)^-$ を対応させることで $\mathrm{OG}(3,8)\to\mathrm{OG}(4,8)^\pm$ なる写像が定義される. この写像が p_1 や p_2 である.

一方で, W' は等質ではない. 二次超曲面 $\mathbf{Q}^5$ と同型である X_1' や X_2' は自然に $\mathbf{P}^6$ に埋め込まれるが, この射影空間は八元数の純虚部分 $\mathrm{Im}\,\mathbf{O}$ の射影化に対応している. また W' は $\mathbf{P}(\mathrm{Im}\,\mathbf{O})\times\mathbf{P}(\mathrm{Im}\,\mathbf{O})$ 内で Cayley 積を用いて定義される. このことから G_2 型の代数群である $\mathrm{Aut}(\mathbf{O})$ が W' に作用することはわかるが, しかし W は (どんな代数群の作用についても) 等質空間とはならない. 詳細は [8, 19, 20] を参考にされたい.

3　単純 K 同値

単純 K 同値射とは, Duo Li によって, ごく最近に導入された概念であり, Atiyah フロップや, この後に紹介する向井フロップの一般化に相当する概念である [10]. 定義は次で与えられる:

定義 3.1 (単純 K 同値射 [10])**.** 単純 K 同値射とは 2 つの滑らかな射影代数多様体の間の双有理射 $\chi\colon Z_1 \dashrightarrow Z_2$ であって, 次の条件を満たす不確定点解消 $Z_1 \xleftarrow{f_1} \widetilde{Z} \xrightarrow{f_2} Z_2$ が存在するもののことをいう:

(1) 各射 $f_i\colon \widetilde{Z}\to Z_i$ は滑らかな連結部分多様体 Y_i に沿う爆発である;
(2) χ は標準因子を保つ, すなわち $f_1^*K_{Z_1}=f_2^*K_{Z_2}$ が成り立つ.

したがって次の図式がある:

$$\begin{tikzcd}
 & E_1 \arrow[r, hook] \arrow[dl] & \mathrm{Bl}_{Y_1} Z_1 = \widetilde{Z} = \mathrm{Bl}_{Y_2} Z_2 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & E_2 \arrow[l, hook'] \arrow[dr] & \\
Y_1 \arrow[r, hook] & Z_1 \arrow[rr, dashed, "\chi"] & & Z_2 & Y_2. \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

ここで E_i は f_i の例外因子である. 爆発に関する標準因子公式

$$K_{\widetilde{Z}}=f_i^*K_{Z_i}+(\mathrm{codim}\,Y_i-1)E_i$$

および $f_1^*K_{Z_1}=f_2^*K_{Z_2}$ という仮定から, $E_1=E_2$ であり $\mathrm{codim}\,Y_1=\mathrm{codim}\,Y_2$ となることがわかる [10, Lemma 2.1]. そこで, 以下では単に E と書いて例外因子 E_i を表す:

$$
\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[lld, "g_1"'] \arrow[d, hook] \arrow[rrd, "g_2"] & & \\
 & & \mathrm{Bl}_{Y_1} Z_1 = \widetilde{Z} = \mathrm{Bl}_{Y_2} Z_2 \arrow[ld, "f_1"'] \arrow[rd, "f_2"] & & \\
Y_1 \arrow[r, hook] & Z_1 \arrow[rr, dashed, "\chi"] & & Z_2 & Y_2. \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}
\tag{3.1}
$$

例 3.2 (向井フロップ)**.** 単純 K 同値射の典型例の一つは, 向井フロップである. この射は次の仮定の元, 構成される射 $\chi\colon Z_1 \dashrightarrow Z_2$ のことである:

条件 3.3.

- Z_1 は滑らかな射影代数多様体, $Y_1 \subset Z_1$ はその滑らかな連結部分多様体.
- $h_1\colon Y_1 \to M$ は 滑らかな射であって, 各ファイバー F_1 について, $(F_1, \mathcal{C}_{Y_1/Z_1}|_{F_1}) \simeq (\mathbf{P}^n, T_{\mathbf{P}^n})$ が成り立つ. ここで $\mathcal{C}_{Y_1/Z_1}$ は余法束である.

さて, その構成を [12] に基づいて復習しよう: まず, Z_1 を Y_1 に沿って爆発し, 次の図式を考える.

$$
\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[lldd, "g_1"'] \arrow[d, hook] \\
 & & \mathrm{Bl}_{Y_1} Z_1 = \widetilde{Z} \arrow[ld, "f_1"'] \\
Y_1 \arrow[r, hook] \arrow[rrd, "h_1"'] & Z_1 & \\
 & & M
\end{tikzcd}
$$

すると, 射 $E \to M$ の各ファイバーは, $\mathbf{P}(T_{\mathbf{P}^n})$ と同型である. またこの多様体 $\mathbf{P}(T_{\mathbf{P}^n})$ は 2 つ目の $\mathbf{P}^{n-1}$ 束の構造を持っているのであった (1.1). このことから, 別の $\mathbf{P}^{n-1}$ 束 $g_2\colon E \to Y_2$ と $\mathbf{P}^n$ ファイブレーション $h_2\colon Y_2 \to M$ であって, 次の図式が可換になるものを見つけることができる:

$$
\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[lldd, "g_1"'] \arrow[d, hook] \arrow[rrdd, "\exists g_2\colon \mathbf{P}^{n-1}\text{ 束}"] & & \\
 & & \mathrm{Bl}_{Y_1} Z_1 = \widetilde{Z} \arrow[ld, "f_1"'] & & \\
Y_1 \arrow[r, hook] \arrow[rrd, "h_1"'] & Z_1 & & & \exists Y_2 \arrow[lld, "\exists h_2\colon \mathbf{P}^n\text{ ファイブレーション}"] \\
 & & M, & &
\end{tikzcd}
$$

ここで, $\mathbf{P}^r$ 束とはベクトル束の射影化 (に対応する射) を指し, $\mathbf{P}^r$ ファイブレーションで, より一般に滑らかな射であってすべてのファイバーが $\mathbf{P}^r$ と同型であるものを指す.

さて, 標準因子を追いかけることで, 勝手な g_2 ファイバー $\mathbf{P}^{n-1}$ の上で, $-E|_E = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)$ となることがわかる. したがって, 中野・藤木判定法を用いることで, 複素多様体 Z_2 と収縮 $\widetilde{Z} \to Z_2$ をうまく見つけて, 多様体 $\widetilde{Z}$ を g_2 に沿って潰すことができる. すなわち, Z_2 は Y_2 を部分多様体として含むような多様体であり

- $\widetilde{Z} = \mathrm{Bl}_{Y_2} Z_2$ が成り立ち, その爆発 $\widetilde{Z} \to Z_2$ を f_2 とすると,
- E は f_2 の例外因子であり, $f_2|_E = g_2$ となるものが存在する:

$$
\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[d, hook] \arrow[ddll, "g_1"'] \arrow[ddrr, "g_2"] & & \\
 & & \mathrm{Bl}_{Y_1} Z_1 = \widetilde{Z} = \mathrm{Bl}_{Y_2} Z_2 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & & \\
Y_1 \arrow[r, hook] \arrow[drr, "h_1"'] & Z_1 \arrow[rr, dashed, "\chi"] & & \exists Z_2 & Y_2 \arrow[l, hook'] \arrow[dll, "h_2"] \\
 & & M & &
\end{tikzcd}
$$

まとめると, 条件 3.3 のもと, 次の図式を構成できる:

$$
\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[d, hook] \arrow[ddll, "g_1"'] \arrow[ddrr, "\exists g_2"] & & \\
 & & \mathrm{Bl}_{Y_1} Z_1 = \widetilde{Z} = \mathrm{Bl}_{Y_2} Z_2 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "\exists f_2"] & & \\
Y_1 \arrow[r, hook] \arrow[drr, "h_1"'] & Z_1 \arrow[rr, dashed, "\chi"] & & \exists Z_2 & \exists Y_2 \arrow[l, hook'] \arrow[dll, "\exists h_2"] \\
 & & M & &
\end{tikzcd}
$$

ここで得られた写像 χ が向井フロップと呼ばれる写像である. 標準因子を追いかけることで, χ が標準因子を保つ, すなわち

$$f_1^*(K_{Z_1}) = f_2^*(K_{Z_2})$$

を満たすことがわかる. したがって χ は (射影的とは限らない Z_2 への) 単純 K 同値射となる.

4 単純 K 同値射の構造定理およびその応用

さて, 上記の向井フロップの構成で肝要であったのは, 対 $(\mathbf{P}^n, T_{\mathbf{P}^n})$ が単純向井対であるという事実であり, 実際に同様の構成で次が証明できる:

命題 4.1 ([5, Proposition 4.2])**.** 次の二条件が成り立つとしよう:

- Z_1 は滑らかな射影多様体, $Y_1 \subset Z_1$ はその滑らかな部分多様体である;
- $h_1 \colon Y_1 \to M$ は滑らかな射であって, 勝手なファイバー F_1 に対して $(F_1, \mathcal{C}_{Y_1/Z_1}|_{F_1})$ が単純向井対である.

すると (複素多様体) Z_2 への単純 K 同値射 $Z_1 \dashrightarrow Z_2$ でその中心が Y_1 となるものが作れる.

上記の命題では, 単純向井対から単純 K 同値射を構成している. 実際には, この逆が成り立ち, 単純 K 同値射はすべて単純向井対から得られる:

定理 4.2 ([5, Theorem 0.1])**.** 勝手な単純 K 同値射は命題 4.1 のようにして得られる. より正確には, 次が成り立つ: $\chi\colon Z_1 \dashrightarrow Z_2$ を単純 K 同値射とし, 図式 (3.1) を考えよう:

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[dll, "g_1"'] \arrow[d, hook] \arrow[drr, "g_2"] & & \\
 & & \mathrm{Bl}_{Y_1} Z_1 = \widetilde{Z} = \mathrm{Bl}_{Y_2} Z_2 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & & \\
Y_1 \arrow[r, hook] & Z_1 \arrow[rr, dashed, "\chi"] & & Z_2 & Y_2 \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

すると滑らかな射 $h_i\colon Y_i \to M$ であって, $h_1 \circ g_1 = h_2 \circ g_2$ がなりたち, さらに各 h_i ファイバー F_i に対して $(F_i, \mathcal{C}_{Y_i/Z_i}|_{F_i})$ が単純向井対となるものがある:

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[dll, "g_1"'] \arrow[d, hook] \arrow[drr, "g_2"] & & \\
 & & \mathrm{Bl}_{Y_1} Z_1 = \widetilde{Z} = \mathrm{Bl}_{Y_2} Z_2 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & & \\
Y_1 \arrow[r, hook] \arrow[drr, "\exists h_1"'] & Z_1 \arrow[rr, dashed, "\chi"] & & Z_2 & Y_2 \arrow[l, hook'] \arrow[dll, "\exists h_2"] \\
 & & \exists M & &
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

言い換えれば, 単純 K 同値射は, 単純向井対が定める双有理射の族になっている.

■単純 K 同値射の分類問題への応用　さて, 定理 4.2 より, 単純 K 同値射に対して, 図式 (4.1) が得られる. 射 $E \to M$ のファイバーは単純向井対の射影化, すなわち笠である. また, 射 χ は局所的には単純向井対 $(F_i, \mathcal{C}_{Y_i/Z_i}|_{F_i})$ の定める K 同値射になっており, とくに, 単純 K 同値射の分類問題と単純向井対の分類問題とは (程度によるが) 同値となる. では, 単純向井対 $(F_i, \mathcal{C}_{Y_i/Z_i}|_{F_i})$ はどのぐらいあるか? 現在までに知られている例は 8 つある. 詳細については, 論文 [5] を参照して頂きたいが, 次の表に, 簡単にまとめておく:

型	笠 W
$A_{r-1} \times A_{r-1}$	$\mathbf{P}^{r-1} \times \mathbf{P}^{r-1}$
A_r^M	$\mathbf{P}(T_{\mathbf{P}^r}) = \mathrm{Fl}(1, r; \mathbf{C}^{r+1})$
A_{2r-2}^G	$\mathrm{Fl}(r-1, r; \mathbf{C}^{2r-1})$
$C_{\frac{3r}{2}-1}$ (r は偶数)	$\mathrm{SFl}(r-1, r; \mathbf{C}^{3r-2})$
D_r	$\mathrm{OG}(r-1; \mathbf{C}^{2r})$
F_4 $(r=3)$	例外型代数群 F_4 に関する 22 次元等質多様体
G_2 $(r=2)$	例外型代数群 G_2 の Borel 群 B による商 G_2/B
$G_2^\dagger$ $(r=3)$	$\mathbf{P}_{\mathbf{Q}^5}(\mathcal{G})$ (Ottaviani 束 $\mathcal{G}$ の射影化)

ここで, 一番左の列には, その笠を識別するための名前 (型と呼んでいる) が書いてあり, 右の列には "笠 W の同型類" が記してある. おおまかに言えば, 型には W の自己同型群に対応する Dynkin 図形が対応しており, 場合によっては, 右肩に区別するための記号がついている.

また右の列で用いた記号は次のとおりである:

- $\mathrm{Fl}(i,j;\mathbf{C}^n)$ は, ベクトル空間 $\mathbf{C}^n$ 内の i 次元部分空間と j 次元部分空間から成る旗のパラメーター空間;
- $\mathrm{SFl}(i,j;\mathbf{C}^{2n})$ は, 斜交ベクトル空間 $\mathbf{C}^{2n}$ 内の i 次元等方的部分空間と j 次元等方的部分空間からなる旗のパラメーター空間;
- $\mathrm{OG}(k,\mathbf{C}^{2n})$ は, 非退化対称二次形式をもつベクトル空間 $\mathbf{C}^{2n}$ 内の k 次元等方的部分空間のパラメーター空間.

また, これまでに現れた単純向井対との関係を記しておくと, 次のようになる

- $A_{r-1}\times A_{r-1}$ は単純向井対 $(\mathbf{P}^{r-1},\mathcal{O}(1)^{\oplus r})$ に対応する.
- A_r^M は単純向井対 $(\mathbf{P}^r,T_{\mathbf{P}^r})$ に対応する.
- C_2 は単純向井対 $(\mathbf{P}^3,\mathcal{N}(2))$ あるいは $(\mathbf{Q}^3,\mathcal{S}^*_{\mathbf{Q}}(1))$ に対応する.
- D_4 は単純向井対 $(\mathbf{Q}^6,\mathcal{S}^*_{\mathbf{Q}}(1))$ に対応する.
- $G_2^\dagger$ は単純向井対 $(\mathbf{Q}^5,\mathcal{G}(1))$ に対応する.

D を 8 つの型のいずれかとしたとき, 単純 K 同値射が "型 D を持つ" ということを 図式 4.1 において, $E\to M$ のすべてのファイバーが型 D の笠と同型であるときを言うことにする. すると, 向井対の分類及び 2 つの $\mathbf{P}^1$ 束の構造を持つ Fano 多様体の分類 [15, 24] の応用として, 次を得る:

系 4.3 ([5, Theorem 0.3])**.** $\chi\colon Z_1 \dashrightarrow Z_2$ を単純 K 同値射とする. すると次が成り立つ:

(1) $\operatorname{codim} Y_i \geq \dim F_i - 2$ であれば, χ の型は $A_{r-1}\times A_{r-1}$, A_r^M, C_2 , D_4, $G_2^\dagger$ のいずれかである.
(2) $\dim Z_i \leq 8$ であれば, χ の型は $A_{r-1}\times A_{r-1}$ $(r\leq 3)$, A_r^M $(r\leq 3)$, C_2, D_4, G_2, $G_2^\dagger$ のいずれかである.

系 4.3 (2) は, Duo Li による 5 次元以下の分類の一般化を与える [10].

注意 4.4. 以上の系では低次元, あるいは余次元の大きいときに, 単純 K 同値射の分類が与えられており, この場合には, その型はこれまでに知られている笠の例 (8 つ) のいずれかに対応する場合となった. また現在知られている例はこの 8 つに対応する場合のみである.

単純 K 同値や単純向井対, 笠の例がこれらで尽くされるかどうかは, 現状わかっておらず, 今後の課題の一つである. これらの 8 つの笠の例を考えると, 最後の例 $G_2^\dagger$ を除いてはすべて等質空間になっている. 一方で最後の例 $G_2^\dagger$ に対応する笠 W は, G_2 型の代数群の作用を持つ多様体ではあるが, 等質空間にはならない. このような笠の例が他にも存在するかどうかは, 著者が非常に興味を持っている問題の一つである.

謝辞. 代数学シンポジウムでの講演の機会を与えていただきましたオーガナイザーの皆様, とくにシンポジウム責任者であります金銅誠之先生, 代数幾何プログラム責任者であります徳永浩雄先生と戸田幸伸先生, 会場責任者であります山崎隆雄先生に感謝いたします.

参考文献

[1] F. Ambro. Ladders on Fano varieties. *J. Math. Sci. (New York)*, Vol. 94, No. 1, pp. 1126–1135, 1999. Algebraic geometry, 9.

[2] Takao Fujita. Classification of projective varieties of Δ-genus one. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, Vol. 58, No. 3, pp. 113–116, 1982.

[3] Takao Fujita. On polarized varieties of small Δ-genera. *Tohoku Math. J. (2)*, Vol. 34, No. 3, pp. 319–341, 1982.

[4] Takao Fujita. On adjoint bundles of ample vector bundles. In *Complex algebraic varieties (Bayreuth, 1990)*, Vol. 1507 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 105–112. Springer, Berlin, 1992.

[5] Akihiro Kanemitsu. Mukai pairs and simple K-equivalence. arXiv:1812.05392v1, 2018.

[6] Akihiro Kanemitsu. Classification of Mukai pairs with corank 3. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, Vol. 69, No. 1, pp. 231–282, 2019.

[7] Akihiro Kanemitsu. Classification of Mukai pairs with dimension 4 and rank 2. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 372, No. 9, pp. 6629–6653, 2019.

[8] Akihiro Kanemitsu. Extremal rays and nefness of tangent bundles. *Michigan Math. J.*, Vol. 68, No. 2, pp. 301–322, 2019.

[9] Shoshichi Kobayashi and Takushiro Ochiai. Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics. *J. Math. Kyoto Univ.*, Vol. 13, pp. 31–47, 1973.

[10] Duo Li. On certain K-equivalent birational maps. *Math. Z.*, Vol. 291, No. 3-4, pp. 959–969, 2019.

[11] Massimiliano Mella. Existence of good divisors on Mukai varieties. *J. Algebraic Geom.*, Vol. 8, No. 2, pp. 197–206, 1999.

[12] Shigeru Mukai. Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or $K3$ surface. *Invent. Math.*, Vol. 77, No. 1, pp. 101–116, 1984.

[13] Shigeru Mukai. Problems on characterization of the complex projective space. In *Birational Geometry of Algebraic Varieties, Open Problems, Katata*, pp. 57–60. the 23rd Int'l Symp., Taniguchi Foundation, 1988.

[14] Shigeru Mukai. Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, Vol. 86, No. 9, pp. 3000–3002, 1989.

[15] Roberto Muñoz, Gianluca Occhetta, and Luis Eduardo Solá Conde. On rank 2 vector bundles on Fano manifolds. *Kyoto J. Math.*, Vol. 54, No. 1, pp. 167–197, 2014.

[16] Carla Novelli and Gianluca Occhetta. Ruled Fano fivefolds of index two. *Indiana Univ. Math. J.*, Vol. 56, No. 1, pp. 207–241, 2007.

[17] Gianluca Occhetta. A note on the classification of Fano manifolds of middle index. *Manuscripta Math.*, Vol. 117, No. 1, pp. 43–49, 2005.

[18] Christian Okonek, Michael Schneider, and Heinz Spindler. *Vector bundles on complex projective spaces*, Vol. 3 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, Boston, Mass., 1980.

[19] Giorgio Ottaviani. Spinor bundles on quadrics. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 307, No. 1, pp. 301–316, 1988.

[20] Giorgio Ottaviani. On Cayley bundles on the five-dimensional quadric. *Boll. Un. Mat. Ital. A (7)*, Vol. 4, No. 1, pp. 87–100, 1990.

[21] Thomas Peternell. A characterization of $\mathbf{P}_n$ by vector bundles. *Math. Z.*, Vol. 205, No. 3, pp. 487–490, 1990.

[22] Thomas Peternell. Ample vector bundles on Fano manifolds. *Internat. J. Math.*, Vol. 2, No. 3, pp. 311–322, 1991.

[23] Thomas Peternell, Michał Szurek, and Jarosław A. Wiśniewski. Fano manifolds and vector bundles. *Math. Ann.*, Vol. 294, No. 1, pp. 151–165, 1992.

[24] Kiwamu Watanabe. $\mathbb{P}^1$-bundles admitting another smooth morphism of relative dimension one. *J. Algebra*, Vol. 414, pp. 105–119, 2014.

[25] Jarosław A. Wiśniewski. Ruled Fano 4-folds of index 2. *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 105, No. 1, pp. 55–61, 1989.

[26] Yun-Gang Ye and Qi Zhang. On ample vector bundles whose adjunction bundles are not numerically effective. *Duke Math. J.*, Vol. 60, No. 3, pp. 671–687, 1990.