BV algebra structures on Hochschild cohomology of self-injective Nakayama algebras

板垣智洋（東京理科大学）*

概要

本稿では self-injective Nakayama algebra のホッホシルトコホモロジー上の Batalin-Vilkovisky 構造を決定する。

1 はじめに

ホッホシルトコホモロジーは Hochschild [5] によって導入され、導来同値の不変量として知られている。多元環 A の n 次ホッホシルトコホモロジー群 $\mathrm{HH}^n(A)$ はホッホシルト複体の n 次コホモロジー群で定義され、$\mathrm{HH}^*(A) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{HH}^i(A)$ はカップ積とブラケットによって Gerstenhaber algebra となる ([3])。

Tradler [7] によって、対称多元環のホッホシルトコホモロジー上に Batalin-Vilkovisky(BV) algebra 構造が存在することが示され、ホッホシルトコホモロジー上の BV algebra 構造の存在性に関する研究が行われている。最近では、Volkov [8] や Lambre-Zhou-Zimmermann [6] によって中山自己同型が対角化可能であるフロベニウス多元環のホッホシルトコホモロジー上に BV algebra 構造が存在することが示された。しかしながら，中山自己同型が対角化可能でないフロベニウス多元環のホッホシルトコホモロジー上に BV algebra 構造が存在することは未だ解明されておらず、具体計算例も多くはない。

本稿では、self-injective Nakayama algebra Λ のホッホシルトコホモロジー $\mathrm{HH}^*(\Lambda)$ 上の BV algebra 構造について述べる。本稿を通して、K は代数的閉体とし、多元環 A の n 個の K 上のテンソル積を $A^{\otimes n}$ で表す。また、次数付き加群 $V^* = \bigoplus_{n\leq 0} V^n$ の homogeneous な元 a に対して、a の次数を $|a|$ で表す。

2 Batalin-Vilkovisky algebra

ここでは、Gerstenhaber algebra と Batalin-Vilkovisky algebra について説明する。

定義 1. Gerstenhaber algebra とは、次数付き K-加群 $V^* = \bigoplus_{n\geq 0} V^n$、カップ積 $\cup : V^n \times V^m \to V^{n+m}$、次数 -1 のリーブラケット $[\ ,\ ] : V^n \times V^m \to V^{n+m-1}$ の 3 つ組 $(V^*, \cup, [\ ,\ ])$ で次を満たすものをいう：

(i) $(V^*, \cup)$ は 0 次に単位元をもつ結合的な次数付き可換多元環である。

(ii) $(V^*, [\ ,\ ])$ が次数付きリー代数 である。

(iii) 任意の homogeneous な元 $a, b, c \in V^*$ に対して、

$$[a, b \cup c] = [a, b] \cup c + (-1)^{(|a|-1)|b|} b \cup [a, c]$$

を満たす。

また、このブラケット $[\ ,\ ]$ を **Gerstenhaber bracket** という。

* 東京理科大学理学部第一部数学科 〒162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3
E-mail address: titagaki@rs.tus.ac.jp
本研究は科研費 若手研究 B(17K14175) の援助を受けている。

定義 2. Batalin-Vilkovisky algebra (BV algebra) とは、0 次に単位元をもつ次数付き可換多元環 $(H^* = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^n, \cup)$ と次の条件を満たす次数 -1 の operator $\Delta : H^* \to H^*$: の 3 つ組 $(H^*, \cup, \Delta)$ のことをいう：

(i) 任意の $r \in \mathbb{Z}$ に対して、$\Delta_{r-1}\Delta_r = 0$ が成り立つ。

(ii) $\Delta_0(1) = 0$ が成り立つ。

(iii) 任意の homogeneous な元 $a, b, c \in H^*$ に対して、

$$\begin{aligned}\Delta(a \cup b \cup c) = \Delta(a \cup b) \cup c + (-1)^{|a|} a \cup \Delta(b \cup c) + (-1)^{|b|(a-1)} \beta \cup \Delta(a \cup c)\\ -\Delta(a) \cup b \cup c - (-1)^{|a|} a \cup \Delta(b) \cup c - (-1)^{|a|+|b|} a \cup b \cup \Delta(c)\end{aligned}$$

を満たす。

また、Δ を **BV differential** という。

注意 3. BV algebra $(H^*, \cup, \Delta)$ はブラケット $[\ ,\ ]$ を homogeneous な元 $a, b \in H^*$ に対して、

$$[a, b] = (-1)^{|a|}(\Delta(a \cup b) - \Delta(a) \cup b - (-1)^{|a|} a \cup \Delta(b))$$

定義すると、$(H^*, \cup, [\ ,\ ])$ は Gerstenhaber algebra となる [4, Proposition 1.2]。この Gerstenhaber algebra の構造も含めて $(H^*, \cup, [\ ,\ ], \Delta)$ を BV algebra という。

3 ホッホシルトコホモロジー

ここでは、ホッホシルトコホモロジーの定義、カップ積、Gerstenhaber bracket について説明し、フロベニウス多元環のホッホシルトコホモロジーの BV algebra 構造について述べる。

定義 4. K-多元環 A に対して、次の複体 $(C^*(A) = \bigoplus_{n\geq 0} C^n(A), \delta_*)$ を A の**ホッホシルト複体**という：各加群は

$$\begin{aligned}C^0(A) &= \mathrm{Hom}_K(K, A) \cong A\\ C^n(A) &= \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes n}, A)\end{aligned}$$

で定義され、$\delta_n : C^n \to C^{n+1}$ は $f \in C^n(A)$, $a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \in A^{\otimes n+1}$ に対して、

$$\begin{aligned}\delta_n(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1})\\ + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1})\\ + (-1)^{n+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) a_{n+1}\end{aligned}$$

で定義される。また、A のホッホシルト複体 $(C^*(A), \delta_*)$ の n 次のコホモロジーを A の n 次**ホッホシルトコホモロジー群**といい、$\mathrm{HH}^n(A)$ で表す。

注意 5. K-多元環 A に対して、$\mathrm{HH}^n(A) \cong \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A)$ が成り立つ。

ホッホシルト複体 $(C^*(A), \delta_*)$ 上のカップ積 $\cup$ は、$f \in C^n(A)$、$g \in C^m(A)$ に対して $f \cup g \in C^{m+n}(A)$ を $a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m} \in A^{\otimes n+m}$ に対して

$$(f \cup g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m}) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) g(a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+m})$$

で定めることによって定義される。これはホッホシルトコホモロジー上のカップ積 $\cup : \mathrm{HH}^n(A) \times \mathrm{HH}^m(A) \to \mathrm{HH}^{n+m}(A)$ を誘導する。

Gerstenhaber [3] によって導入されたホッホシルトコホモロジー上の Gerstenhaber bracket について述べる。$f \in C^n(A)$, $g \in C^m(A)$ $(n+m \geq 1)$ に対して、$[f,g] \in C^{n+m-1}(A)$ を次で定義する：

$n, m \geq 1$ のとき、$1 \leq i \leq n$ である自然数 i に対して、$f \circ_i g \in C^{n+m-1}(A)$ を

$$\begin{aligned}&(f \circ_i g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m-1})\\ &\quad = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes g(a_i \otimes \cdots \otimes a_{i+m-1}) \otimes a_{i+m} \otimes \cdots \otimes a_{n+m-1})\end{aligned}$$

で定義する。$n \geq 1$、$m = 0$ であるとき、$1 \leq i \leq n$ である自然数 n に対して、$f \circ_i g \in C^{n-1}(A)$ を

$$(f \circ_i g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m-1}) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes g \otimes a_i \otimes \cdots \otimes a_{n-1})$$

で定義する。ここで g は A の元とみなしている。また、

$$f \circ g := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(m-1)(i-1)} f \circ_i g$$

と定義し、

$$[f,g] := f \circ g - (-1)^{(n-1)(m-1)} g \circ f \in C^{n+m-1}(A)$$

と定義すると、$[\ ,\ ] : C^n(A) \times C^m(A) \to C^{n+m-1}(A)$ は $[\ ,\ ] : \mathrm{HH}^n(A) \times \mathrm{HH}^m(A) \to \mathrm{HH}^{n+m-1}(A)$ を誘導し、$(\mathrm{HH}^*(A), \cup, [\ ,\ ])$ は Gerstenhaber algebra となる。

この Gerstenhaber algebra を誘導する BV algebra 構造が存在するのかということは、一般には知られていない。いくつかの多元環のクラスについてはホッホシルトコホモロジーの Gerstenhaber algebra 構造に対して、BV algebra 構造が存在することが示されている。ここでは、Volkov [8] の構成方法に沿って、フロベニウス多元環のホッホシルトコホモロジー上の BV algebra 構造について述べる。A をフロベニウス多元環とし、$\langle\ ,\ \rangle$ を bilinear form、ν を中山自己同型とする。写像 $\phi_\nu : C^n(A) \to C^n(A)$ を $f \in C^n(A)$ と $a_i \in A$ に対して、

$$(\phi_\nu(f))(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \nu^{-1}(f(\nu(a_1) \otimes \cdots \otimes \nu(a_n)))$$

で定める。$C^n(A)^\nu := \{f \in C^n(A) \mid \phi_\nu(f) = f\}$ とすると、δ_n は $\delta_n^\nu : C^n(A)^\nu \to C^{n-1}(A)^\nu$ を誘導し、複体 $(C^*(A)^\nu, \delta_*^\nu)$ が得られる。$\mathrm{HH}^n(A)^{\nu\uparrow} = \mathrm{H}^n(C^*(A)^\nu, \delta_*^\nu)$ とおくと、ホッホシルトコホモロジー上の Gerstenhaber algebra の構造は $\mathrm{HH}^n(A)^{\nu\uparrow}$ 上の Gerstenhaber algebra の構造を誘導する。もし、ν が対角化可能であれば、$(\mathrm{HH}^*(A)^{\nu\uparrow}, \cup, [\ ,\ ])$ と $(\mathrm{HH}^*(A), \cup, [\ ,\ ])$ は同型である。

定理 6 ([8, Theorem 2.2])**.** A をフロベニウス多元環、$\langle\ ,\ \rangle$ を bilinear form、ν を中山自己同型とする。このとき、$n \geq 1$, $f \in C^n(A)$ に対して、$\Delta_i f \in C^{n-1}(A)$ $i(1 \leq i \leq n)$ を

$$\langle \Delta_i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}), a_n \rangle = \langle f(a_i \otimes \cdots \otimes a_n \otimes \nu a_1 \otimes \cdots \otimes \nu a_{i-1}), 1 \rangle$$

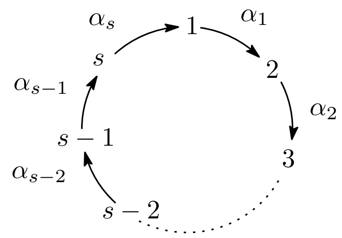
によって定義し、$\Delta := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i(n-1)} \Delta_i : C^n(A) \to C^{n-1}(A)$ とすると、Δ は Gerstenhaber algebra $(\mathrm{HH}^*(A)^{\nu\uparrow}, \cup, [\ ,\ ])$ 上の BV differential を誘導する。

注意 7. フロベニウス多元環 A の中山自己同型 ν が対角化可能であるとき、上の Δ は Gerstenhaber algebra $(\mathrm{HH}^*(A), \cup, [\ ,\ ])$ 上の BV differential を誘導する。

4 Self-injective Nakayama algebra のホッホシルトコホモロジー

ここでは、self-injective Nakayama algebra Λ について説明し、Λ の中山自己同型 ν の位数 $\mathrm{ord}\,\nu$ について、$\mathrm{char}\,K \nmid \mathrm{ord}\,\nu$ のとき、ホッホシルトコホモロジー $\mathrm{HH}^*(A)$ 上の BV algebra 構造を決定し、$\mathrm{char}\,K \mid \mathrm{ord}\,\nu$ のとき、$\mathrm{HH}^*(A)^{\nu\uparrow}$ 上の BV algebra 構造を決定する。

Self-injective Nakayama algebra は bound quiver algebra として、$\Lambda = K\Gamma_s/J^N$ で与えられる。ここで、Γ_s は以下のような点が s 個の quiver を表し、$N \geq 2$、J は道多元環 $K\Gamma_s$ の矢イデアルを表す。



点 l の trivial path を v_l、始点が l で長さが n の道を γ_l^n で表す。このとき、bilinear form $\langle\ ,\ \rangle : \Lambda \times \Lambda \to K$ は $1 \leq l \leq s$ と $0 \leq j \leq N-1$ に対して、

$$\langle \gamma_l^j, \gamma_{l+j}^{N-1-j} \rangle = 1$$

によって与えられる。また、Λ の中山自己同型 ν は

$$\nu(v_l) = v_{l+N-1}, \quad \nu(\gamma_l^j) = \gamma_{l+N-1}^j$$

によって与えられる。特に、$\operatorname{ord}\nu = \dfrac{s}{\gcd(N-1, s)}$ である。以後 $g_0 = \gcd(N-1, s)$ とする。

Bardzell [1] によって monomial algebra の両側射影分解の構成法が与えられており、Λ の両側射影分解 $\boldsymbol{P}$ は次のように与えられる。各両側加群 P_n は

$$P_{2i} = \bigoplus_{l=1}^{s} \Lambda v_l \otimes v_{l+iN}\Lambda \text{ for } i = 0, 1, 2, \ldots$$

$$P_{2i+1} = \bigoplus_{l=1}^{s} \Lambda v_l \otimes v_{l+iN+1}\Lambda \text{ for } i = 0, 1, 2, \ldots$$

で与えられ、各 differential $d_n : P_n \to P_{n-1}$ は、

$$\begin{aligned}
&d_{2i} : P_{2i} \to P_{2i-1} \\
&\qquad v_l \otimes v_{l+iN} \longmapsto v_l\Big(\sum_{k=0}^{N-1} \gamma_l^k \otimes \gamma_{l+k+(i-1)N+1}^{N-k-1}\Big)v_{l+iN} \\
&d_{2i+1} : P_{2i+1} \to P_{2i} \\
&\qquad v_l \otimes v_{l+iN+1} \longmapsto v_l(\gamma_l^1 \otimes 1 - 1 \otimes \gamma_{l+iN}^1)v_{l+iN+1}
\end{aligned}$$

で与えられる。

$x, y \in \Lambda$ に対して、$\varphi_x \in \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(P_{2i}, \Lambda)$ を $\varphi_x(v_l \otimes v_{l+Ni}) = v_l x v_{l+Ni}$ によって定める。同様に $\varphi_y \in \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(P_{2i+1}, \Lambda)$ を $\varphi_y(v_l \otimes v_{l+Ni+1}) = v_l y v_{l+Ni+1}$ によって定める。Bardzell-Locateli-Marcos [2] によって、Λ のホッホシルトコホモロジー環 $\mathrm{HH}^*(\Lambda)$ が計算されているが、ここでは $\operatorname{char} K \nmid \operatorname{ord}\nu$ の場合の Λ のホッホシルトコホモロジー群 $\mathrm{HH}^n(\Lambda) \cong \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\boldsymbol{P}, \Lambda))$ の結果を紹介する。

命題 8 ([2, Proposition 5.1])**.** $N > 2$ のとき、$\mathrm{HH}^0(\Lambda)$ の K-basis は次で与えられる。

$$\begin{cases} B = \left\{\varphi_{\sum_{l=1}^{s}\gamma_l^{as}} \mid 0 \leq a \leq \left[\dfrac{N-2}{s}\right]\right\} & \text{if } N \not\equiv 1 \pmod{s}, \\ B \cup \{\varphi_{\gamma_l^{N-1}} \mid 0 \leq l \leq s\} & \text{if } N \equiv 1 \pmod{s}. \end{cases}$$

命題 9 ([2, Proposition 5.2, Proposition 5.3])**.** $i \geq 1$ に対して、$\mathrm{HH}^{2i}(\Lambda)$ の K-basis は次で与えられる。

$$\begin{cases} B = \left\{\varphi_{\sum_{l=1}^{s}\gamma_l^j} \mid 0 \leq j \leq N-2 \text{ and } j \equiv Ni \pmod{s}\right\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } \operatorname{char} K \nmid N \text{ or } Ni \not\equiv N-1 \pmod{s}, \\ B \cup \{\varphi_{\sum_{l=1}^{s}\gamma_l^{N-1}}\} \text{if } \operatorname{char} K \mid N \text{ and } Ni \equiv N-1 \pmod{s}\}. \end{cases}$$

また、$\mathrm{HH}^{2i-1}(\Lambda)$ の K-basis は次で与えられる。

$$\begin{cases} B = \left\{\varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord}\,\nu)-1}\gamma_{1+kg_0}^{j+1}} \mid 0 \le j \le N-2 \text{ and } j \equiv N(i-1) \pmod{s}\right\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } \mathrm{char}\, K \nmid N \text{ or } Ni \not\equiv N-1 \pmod{s}, \\ B \cup \{\varphi_{\sum_{l=1}^{s} v_l}\} \text{if } \mathrm{char}\, K \mid N \text{ and } Ni \equiv N-1 \pmod{s}\}. \end{cases}$$

$\mathrm{ord}\,\nu < \infty$ かつ $\mathrm{char}\, K \nmid \mathrm{ord}\,\nu$ のとき、ν は対角化可能である。したがって、ホッホシルトコホモロジーは BV algebra 構造をもつ。具体的に計算することによって、次の結果が得られる。

定理 10. $\mathrm{char}\, K \nmid \mathrm{ord}\,\nu$ とする。このとき、次数 -1 の BV differential $\Delta : \mathrm{HH}^*(\Lambda) \to \mathrm{HH}^*(\Lambda)$ は次で与えられる：

$i \ge 0$ とする。$\Delta(\mathrm{HH}^{2i}(\Lambda)) = 0$ であり、$\varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord}\,\nu)-1}\gamma_{1+kg_0}^{j+1}} \in \mathrm{HH}^{2i+1}(\Lambda)$ に対して、

$$\Delta(\varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord}\,\nu)-1}\gamma_{1+kg_0}^{j+1}}) = \frac{Ni-j-1}{g_0}\varphi_{\sum_{l=1}^{s}\gamma_l^j}$$

となる。また、$\mathrm{char}\, K \mid N$ かつ $Ni \equiv N-1 \pmod{s}$ のとき、$\varphi_{\sum_{l=1}^{s} v_l} \in \mathrm{HH}^{2i+1}(\Lambda)$ に対して、

$$\Delta(\varphi_{\sum_{l=1}^{s} v_l}) = 0$$

となる。

系 11. $\mathrm{char}\, K \nmid \mathrm{ord}\,\nu$ とする。このとき、$\mathrm{HH}^*(\Lambda)$ 上の Gerstenhaber bracket $[\ ,\ ]$ は次で与えれられる：
$\varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord}\,\nu)-1}\gamma_{1+kg_0}^{j_1+1}} \in \mathrm{HH}^{2i_1+1}(\Lambda), \varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord}\,\nu)-1}\gamma_{1+kg_0}^{j_2+1}} \in \mathrm{HH}^{2i_2+1}(\Lambda), \varphi_{\sum_{l=1}^{s}\gamma_l^j} \in \mathrm{HH}^{2i}(\Lambda)$ に対して、

$$[\varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord}\,\nu)-1}\gamma_{1+kg_0}^{j_1+1}}, \varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord}\,\nu)-1}\gamma_{1+kg_0}^{j_2+1}}] = \begin{cases} \dfrac{N(i_1-i_2)-j_1+j_2}{g_0}\varphi_{\sum_{l=1}^{s}\gamma_l^{j_1+j_2+1}} & \text{if } \gamma_l^{j_1+j_2+1} \ne 0 \text{ in } \Lambda, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$[\varphi_{\sum_{l=1}^{s}\gamma_l^j}, \varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord}\,\nu)-1}\gamma_{1+kg_0}^{j_1+1}}] = \begin{cases} \dfrac{Ni-j}{g_0}\varphi_{\sum_{l=1}^{s}\gamma_l^{j+j_1}} & \text{if } \gamma_1^{j+j_1+1} \ne 0 \text{ in } \Lambda, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

また、$\mathrm{char}\, K \mid N$ かつ $Ni_0 \equiv N-1 \pmod{s}$ のとき、$\varphi_{\sum_{l=1}^{s} v_l} \in \mathrm{HH}^{2i_0+1}(\Lambda)$ に対して、

$$[\varphi_{\sum_{l=1}^{s} v_l}, \varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord}\,\nu)-1}\gamma_{1+kg_0}^{j_1+1}}] = (Ni_1 - j_1)\varphi_{\sum_{k=0}^{(\mathrm{ord}\,\nu)-1}\gamma_{1+kg_0}^{j_1}}, \quad [\varphi_{\sum_{l=1}^{s} v_l}, \varphi_{\sum_{l=1}^{s}\gamma_l^j}] = 0$$

となる。

$\mathrm{char}\, K \mid \mathrm{ord}\,\nu$ のとき、ν は対角化可能であるとは限らない。実際、$\mathrm{char}\, K = 2$、$\Lambda = \Gamma_s/J^N$ について $s = 2, N = 4$ のとき、$\mathrm{ord}\,\nu = 2$ であるが ν は対角化可能ではない。そこで、コホモロジー $\mathrm{HH}^*(A)^{\nu\uparrow}$ および $\mathrm{HH}^*(A)^{\nu\uparrow}$ 上の BV algebra 構造を決定する。

複体 $\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\boldsymbol{P}, \Lambda)$ のある部分複体のコホモロジーを計算することによって $\mathrm{HH}^n(A)^{\nu\uparrow}$ が決定される。

命題 12. $\mathrm{char}\, K \mid \mathrm{ord}\,\nu$ とする。このとき、$i \ge 1$ に対して、$\mathrm{HH}^{2i-2}(\Lambda)^{\nu\uparrow}$ の K-basis は

$$\left\{\varphi_{\sum_{l=1}^{s}\gamma_l^j} \mid 0 \le j \le N-2 \text{ and } j \equiv Ni \pmod{s}\right\}$$

で与えられ、$\mathrm{HH}^{2i-1}(\Lambda)^{\nu\uparrow}$ の K-basis は

$$\{\varphi_{\sum_{k=0}^{\frac{s}{g_0}-1}\gamma_{k(N-1)}^j} \mid 0 \le j \le N-2 \text{ and } j \equiv N(i-1) \pmod{s}\}$$

で与えられる。

命題 13. $\mathrm{char}\, K \mid \mathrm{ord}\,\nu$ とする。このとき、次数付き可換代数として $\mathrm{HH}^*(\Lambda)^{\nu\uparrow} \cong \mathrm{HH}^*(\Lambda)$ である。

定理 14. $\operatorname{char} K \mid \operatorname{ord} \nu$ とする。このとき、次数 -1 の BV differential $\Delta : \mathrm{HH}^*(\Lambda)^{\nu\uparrow} \to \mathrm{HH}^*(\Lambda)^{\nu\uparrow}$ は次で与えられる：

$i \geq 0$ とする。$\Delta(\mathrm{HH}^{2i}(\Lambda)^{\nu\uparrow}) = 0$ であり、$\varphi_{\sum_{k=0}^{\frac{s}{g_0}-1} \gamma^j_{k(N-1)}} \in \mathrm{HH}^{2i+1}(\Lambda)$ に対して、

$$\Delta(\varphi_{\sum_{k=0}^{\frac{s}{g_0}-1} \gamma^j_{k(N-1)}}) = \frac{N-1}{g_0} \varphi_{\sum_{l=1}^{s} \gamma_l^j}$$

となる。特に、$[\ ,\ ] = 0$ である。

例 15. $\operatorname{char} K = 2$、$\Lambda = K\Gamma_s/J^4$ とする。このとき、中山自己同型 ν は対角化可能ではなく、

$$\mathrm{HH}^*(\Lambda)^{\nu\uparrow} = K[x, y, z]/(x^2, y^2)$$

である。ここで、

$$\deg x = 0,\ \deg y = 1,\ \deg z = 2.$$

である。また、BV-differential Δ は

$$\begin{aligned} &\Delta(1) = \Delta(x) = \Delta(z_0) = \Delta(xz) = \Delta(z^2) = 0, \\ &\Delta(y) = 1,\ \Delta(yx) = x,\ \Delta(yz) = z. \end{aligned}$$

で与えられ、$[\ ,\ ] = 0$ である。

一方、ホッホシルトコホモロジー $\mathrm{HH}^*(\Lambda)$ 上の Gertenhaber bracket $[\ ,\ ]$ は

$$[x, x] = [y, y] = [x, z] = [z, z] = 0,\ [x, y] = x,\ [y, z] = z$$

で与えられ、$\mathrm{HH}^*(\Lambda)$ と $\mathrm{HH}^*(\Lambda)^{\nu\uparrow}$ は Gerstenhaber algebra として同型ではない。

謝辞

今回の講演の機会を与えていただきました中岡宏行先生ならびに関係者の方々に心より感謝いたします。

参考文献

[1] M.J. Bardzell, The alternating syzygy behavior of monomial algebras, J. Algebra 188 (1997), no. 1, 69–89.

[2] M.J. Bardzell, A.C. Locateli and E.N. Marcos, On the Hochschild cohomology of truncated cycle algebras, Comm. Alg. 28 (2000), 1615–1639.

[3] M. Gerstenhaber, The cohomology structure of an associative ring, Ann. of Math. 78(2) (1963), 267–288.

[4] E. Getzler, Batalin-Vilkovisky algebras and two-dimensional topological field theories, Comm. Math. Phys. 159 (1994), 265–285.

[5] G. Hochschild, On the cohomology groups of an associative algebra, Ann. of Math. 46(2) (1945) 58-67.

[6] T. Lambre, G. Zhou and A. Zimmermann, The Hochschild cohomology ring of a Frobenius algebra with semisimple Nakayama automorphism is a Batalin-Vilkovisky algebra, J. Algebra 446 (2016), 103–131.

[7] T. Tradler, The Batalin-Vilkovisky algebra on Hochschild cohomology induced by infinity inner products, Ann. Inst. Fourier 58 (7) (2008), 2351–2379.

[8] Yu.V. Volkov, BV differential on Hochschild cohomology of Frobenius algebras, J. Pure. Appl. Algebra 200 (2016), 3384–3402.