有限群，デザイン，量子情報ーーー特に unitary t-groups と unitary t-designs について

坂内英一（Eiichi Bannai）

(Professor Emeritus of Kyushu University)

この原稿は 2019 年 9 月 2 日〜5 日に東北大学で開催された第 64 回代数学シンポジウムにおける著者の上記のタイトルでの一般向け講演 (9 月 3 日) の記録です．講演は日本語で行いましたが，スライドは英語で書きました．この報告集の原稿はその英語の原稿をほぼそのまま使って，日本語を必要に応じて付け加えました．日本語と英語のちゃんぽんになっていますが，日本語を知らない場合も英語だけを追ってある程度理解していただけることを期待してこのような形にしました．数学的内容のより詳しい解説については後述する参考文献などを参照していただけたらと思います．

講演のアブストラクト (予稿)：

デザイン理論とは，与えられた空間 M に対して，M を近似する良い有限部分集合を見つけ出すことにある．M が単位球面 S^{n-1} の場合は spherical design と呼ばれ，M が v 個の点の集合 V の k 点部分集合全体 $\binom{V}{k}$ (Johnson アソシエーションスキーム $J(v,k)$ とも呼ばれる）の場合は combinatorial design と呼ばれる．この講演では，先ず，spherical t-designs および combinatorial t-designs の場合の理論の概略を，実例，存在問題，構成問題， Fisher 型不等式，tight t-designs，有限群論との関連性，などを中心にのべる．

次に，t-design の概念の色々な拡張およびそれについての研究の現状（何が知られていて何を知りたいと思うかを中心に) 述べる．(Bannai-Bannai-Tanaka-Zhu, Design theory from the viewpoint of algebraic combinatorics, Graphs and Combinatorics (2017) 参照.）

最後に M が unitary group $U(d)$ の場合の t-designs (unitary t-designs) について述べる．この概念は物理の量子情報の分野で主に研究されて来た．$U(d)$ の t-design それ自身が群になっている時，それは untary t-group と呼ばれる．任意の $t \geq 2$ に対しての unitary t-groups の分類が （物理の分野では困難と考えられていたようであるが），実は $d \geq 5$ の時は Guralnick-Tiep, Decompositions of small tensor powers and Larsen's conjecture, Rep. Theory (2005) で既に知られていることを，また残った $d = 2, 3, 4$ の場合の分類も可能であることを，Bannai-Navarro-Rizo-Tiep, Unitary t-groups, arXiv:1810.02507 (to appear in J. Math. Soc. Japan) は示した．またその結果を用いて，群 $Sp(4, 3)$ を用いての $U(4)$ の unitary 4-design の具体的な構成にも成功した (Bannai-Nakahara-Zhao-Zhu, On the explicit constructions of certain unitary t-designs, arXiv:1906.04583).

デザインとは何か (What is a design ?)

デザイン理論の目的は，与えられた空間 M に対して M を全体として良く近似する有限部分集合 X $(\subset M)$ を見つけることにある．(The purpose of design theory is, for a given space M, to find good finite subsets X that approximate the whole space M well.)

ここでは，先ず，M が球面 S^{n-1} および M が Johnson association scheme $J(v,k)$ の場合を考える．ここで，$J(v,k)$ は v 個からなる有限集合 V の k 個の元からなる部分集合の全体を表す．$J(v,k)$ は群論的には対称群 S_v の部分群 $S_k \times S_{v-k}$ による等質空間 $S_v/(S_k \times S_{v-k})$ を表す．この集合には association scheme と呼ばれる構造が入り，Johnson association scheme $J(v,k)$ と呼ばれる．
以下 t は自然数とする．

定義．球面 *t*-デザイン (Spherical t-design) (Delsarte-Goethals-Seidel, 1977)
Let $S^{n-1} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ be the unit sphere. A finite subset X of S^{n-1} is called a spherical t-design on S^{n-1}, if

$$\frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} f(x)d\sigma(x) = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x),$$

for all $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, polynomials of degree $\leq t$.

定義．組合せ *t*-デザイン(Combinatorial t-design) (a classical concept).
A subset X of $\binom{V}{k}(= J(v,k))$ is called a combinatorial t-design (a t-(v,k,λ) design), if

$$|\{A \in X \mid T \subset A\}| = \lambda(=\text{constant, indep. of the choice of } T.)$$

holds for all $T \in \binom{V}{t}$,

講演では主に次の３つの問題を取り扱った．

(i) What problems we are most interested in, in particular from the viewpoint of Algebraic Combinatorics. First, we will discuss this in the context of spherical t-designs and combinatorial t-designs.
(Part I : Spherical t-designs と combinatorial t-designs についての概説.)

(ii) What kinds of generalizations of t-design concept we would like to consider. (There are generalizations in several different directions.)
(Part II : t-design の概念の種々の拡張を考える.)

(iii) Explanations of some new results, in particular on unitary t-designs.
(Part III : Unitary t-groups と unitary t-designs についての新しい結果の紹介.)

Part I
球面 t-デザインと組合せ t-デザイン
(Spherical t-designs and combinatorial t-designs)

I-1. 球面 t-デザイン (Spherical t-designs)

(1) S^{n-1} の t-デザインの例 (Examples of spherical t-designs)

For $n = 2$, the $t+1$ vertices of a regular $(t+1)$-gon inscribed in $S^1(\subset \mathbb{R}^2)$ form a t-design. (So, we mostly consider the cases $n \geq 3$ in what follows.)

For $n = 3$, the set of vertices of the 5 regular polyhedrons inscribed in $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ becomes a spherical t-design for the following t.

- 4 vertices of a regular tetrahedron form a 2-design.
- 6 vertices of a regular octahedron form a 3-design.
- 8 vertices of a cube form a 3-design.
- 12 vertices of a regular icosahedronn form a 5-design.
- 20 vertices of a regular dodecahedron form a 5-design.

Question. Can you find spherical t-designs for bigger t in S^2 ?
(I think you will find that this question is not so easy indeed.)

他の有名な例としては，

- $n = 8$ のとき，E_8-ルート系の 240 個のルートの全体（長さ 1 に正規化したもの）は spherical 7-design である．
- $n = 24$ のとき，Leech 格子の 196560 個の min vectors の全体（長さ 1 に正規化したもの）は spherical 11-design である．
  (For $n = 8, n = 24$, the 240 min. vectors of E_8-lattice and the 196560 min. vectors of Leech lattice make a 7-design in S^7 and an 11-design in S^{23} respectively.)

大きな t に対して，また大きな n に対して，spherical t-designs in S^{n-1} が存在するかまた構成できるかどうかは自明ではない．（これに関しては後述する．）

有限群，格子を用いての球面デザインの例
(constructions of spherical t-designs obtained from finite groups and lattices)

球面 t-デザインの多くの具体例の構成は，以下のように有限群および格子から自然に得られる．

(a) G を実直交群 $O(n)$ の有限部分群とする．任意の単位ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ の G による軌道 $X = x^G = \{x^g \mid g \in G\}$ として得られる．
(b) $L \subset \mathbb{R}^n$ を格子 (lattice) とする．L の長さ $\sqrt{m}$ の shell $L_m = \{x \in L \mid x \cdot x = m\}$ から $X = \frac{1}{\sqrt{m}} L_m$ として得られる．

(Many examples of spherical t-designs are obtained either as:
(a) an orbit of a finite group $G \subset O(n)$, or

(b) a shell of a lattice $L \subset \mathbb{R}^n$, i.e., $X = \{\frac{1}{\sqrt{m}}x \mid x \in L,\ x \cdot x = m\}$ for a fixed m.)

しかし，上の構成において，(a) については知られている例は全て $t \leq 19$ (for $n \geq 3$) であり，(b) においては知られている例は全て $t \leq 11$ (for any $n \geq 2$) である.
(However, those known examples are always $t \leq 19$ for (a) (for $n \geq 3$), $t \leq 11$ for (b) (for any $n \geq 2$).)
このことは有限群あるいは格子から自然に出来るものを考えているだけでは限界があるということを意味すると思われる.

Note that, for each of (a) and (b), it seems that

" **Whether t is always bounded by an absolute constant independent of n in each of the cases (a) and (b)** "

is an interesting open problem.

研究課題： 組合せデザインに関しては上に述べたことの類似が成り立つか否かは, すなわち，有限置換群あるいはコードから作られる組合せ t-デザインを考察することは，興味ある問題と思われる.
Many examples of combinatorial t-designs are obtained either as:
(a') an orbit of a finite permutation group $G \subset S_v$, or
(b') a shell of a (linear) code $C \subset (\mathbb{F}_2)^v$, i.e., $X = \{support(x) \mid x \in C,\ weight(x) = k\}$ for a fixed k.
However, for each of (a') and (b'), t is bounded by an absolute constant for all known examples !

We can ask whether t is always bounded by an absolute constant in each of the above cases (a') and (b') ! $((a')$ is answered yes, by using the classification of finite simple groups, but (b') is still open, I believe.)

(2) 球面 t-デザインの存在問題 (the existence of spherical t-designs)

- There exist t-designs on S^{n-1} for any pair of n and t !
(Seymour-Zaslavsky, Advances in Math., 1984)

- Many proofs are known, but they only show the existence, and good explicit constructions are not yet known.

- The best existence result is due to Bondarenko-Radchenko-Viazovska (Annals of Math.,2013) that shows the existence of t-designs with the sizes asymptotically the same order as the best possible bound., if n is fixed and $t \to \infty$. However, it seems that if t is fixed and $n \to \infty$, then good bounds are unknown. (This is an interesting open problem.)

- Most of known existence proofs use the continuous property of real numbers.
A new existence proof was obtained by Zhen Cui, Jiacheng Xia, and Ziqing Xiang: "Rational designs" (Advances in Math., 2019).

(3) 球面 t-デザインの具体的な構成について(Explicit constructions of spherical t-designs)

- Some are known (Kuperberg, 2005, for $n=3$). See also, for $n=3$, $|X|=(t+1)^2$ with $t \leq 100$ (Chen-Frommer-Lang, 2011)

- Ziqing Xiang: Explicit spherical designs, (preprint, 2018) gives a more general explicit constructions. (However, note that It is a delicate question what are good explicit constructions. Good explicit constructions are yet to be given !)

It is easy to see that, if $X \subset S^{n-1}$ is a spherical t-design, then for any orthogonal transformation $g \in O(n)$, $X^g \subset S^{n-1}$ is a spherical t-design. Moreover, if X_1 and X_2 are spherical t-designs, then $X_1 \cup X_2$ is a spherical t-design.
So, we are naturally interested in the spherical t-designs of small sizes.

Problems.

(i) Are there any natural theoretical lower bounds of the size of spherical t-designs on S^{n-1} ? (Yes. Fisher type inequality below.)

(ii) For a given pair of t and n, determine the spherical t-designs of the smallest size ("optimal" aspherical t-designs) in S^{n-1}. (This is the most fundamental problem in design theory, but not easy in general.)

Here, we mainly consider the Problem (i).

(4) $|X|$ の自然な下限と tight t-デザイン (Fisher type lower bound and tight t-designs)

For a spherical t-design X on S^{n-1}, the following Fisher type lower bounds for $|X|$ hold:

$$
\begin{aligned}
|X| &\geq \binom{n-1+e}{e} + \binom{n-1+e-1}{e-1}, \quad \text{if} \quad t=2e, \\
|X| &\geq 2\binom{n-1+e}{e}, \qquad \text{if} \quad t=2e+1.
\end{aligned}
$$

If the equality holds in one of above inequalities, then X is called a tight spherical t-design. (We are interested in the classification problem of tight spherical t-designs.)

(5) Tight spherical t-designs の分類について. (Classification of tight t-design on S^{n-1})

$n = 2 \Longrightarrow X$ is a regular $(t+1)$-gon
(So we assume $n \geq 3$ in what follows)

- We get $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11\}$ (Bannai-Damerell, 1979,1980).

Tight t-designs on S^n are classified for all t, except $t = 4, 5, 7$. Some further non-existence results for $t = 4, 5, 7$ are known. (Bannai-Munemasa-Venkov (2004), Nebe-Venkov (2013).) But the problem is still open for $t = 4, 5, 7$.

I-2. 組合せデザイン

(A) The existence and the construction problems of combinatorial t-(v, k, λ) designs have a long history in combinatorics.
(Kirkman, Steiner, Witt, Ray-Chaudhuri, Wilson, Teirlinck, Keevash, etc.)

The general existence result for $t = 2$ was shown by Wilson (1974). Teirlinck (1987) proved the existence of t-designs for any t, but for some specific k and λ, by using induction.

Recently, Keevash (2019+) proved the general existence proof (corresponding to Wilson's for $t = 2$), by using the probabilistic methods. The explicit constructions are not yet possible. For example, it seems no explicit 6 - $(v, k, 1)$ designs are explicitly described yet.

(B) Fisher type lower bound for combinatorial t-designs in $J(v, k)$, and tight combinatorial t-designs

Fisher type lower bound becomes, for $t = 2e$,

$$|X| \geq \binom{v}{e}.$$

We say X is a tight $2e$-design in $J(v, k)$, if "=" holds.

The classification of tight combinatorial t-designs have very much studied, by Ray-Chaudhuri-Wilson (1977), Enomoto-Ito-Noda (1977), Bannai (1978), Dukes and Short-Gershman (2012), Z. Xiang (2018), etc.. Note that tight 2-designs are symmetric designs and since there are too many examples, the classifications are certainly impossible, The classification is still open for $t = 2e \geq 20$. (The concept and the classification problem of tight $t(= 2e + 1)$-designs are reduced to the case of tight $2e$-designs.)

Part II.
t-デザインの概念の拡張
(Generalizations of t-design concept)

Generalization (I). Change the space M.

Change sphere S^{n-1} to compact symmetric spaces of rank 1
(= projective spaces over $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$.)
Or, change $J(v,k)$ to other Q-polynomial association schemes.

There are more generalizations. I will come back to this important topic later in my talk. So, let me discuss some other kinds of generalizations first.

Generalization (II). Allow weight function w (Cubature formula)

- Let $X \subset S^{n-1}$, and let $w : X \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Then the pair (X, w) is called a weighted spherical t-design, if

$$\frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} f(x)d\sigma(x) = \sum_{x\in X} w(x)f(x),$$

for $^\forall f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, polynomials of degree $\leq t$.

- Let $X \subset M = \binom{V}{k}$, and let $w : X \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Then the pair (X, w) is called a weighted combinatorial t-design, if

$$\sum_{T\subset A\in X} w(A) = \text{const} \left(\text{independent of } T \in \binom{V}{t}\right).$$

Generalization (III). Allow different block sizes. Euclidean t-designs and relative t-designs.

For spherical t-designs, consider several concentric spheres of radii $\{r_1, r_2, \ldots, r_p\}$. Let $X_\nu = X \cap S_{r_\nu}^{n-1}$. Then (X, w) is called an Euclidean t-design on $S_{r_1} \cup S_{r_2}, \cup \cdots \cup S_{r_p}$ if

$$\sum_{\nu=1}^{p} \frac{w(X_{r_\nu})}{|S_{r_\nu}^{n-1}|}\int_{S_{r_\nu}^{n-1}} f(x)d\sigma(x) = \sum_{x\in X} w(x)f(x).$$

For combinatorial t-designs or more generally for a Q-polynomial association scheme $\mathfrak{X} = (M, \{R_i\}_{0\leq i\leq d})$, and a fixed $x_0 \in M$, a pair (X, w) with $X \subset M$, is callled a relative t-design with respect to $x_0 \in M$, if $E_i\phi_{(X,w)} \in \langle E_i\phi_{x_0}\rangle$ holds for $i = 1, 2, \ldots, t$, where $\phi_{(X,w)}$ is the characteristic vector of (X, w), namely $\phi_{(X,w)}(y) = w(y)$ if $y \in X$ and $= 0$, if $y \notin X$.

Note that the concept of "combinatorial t-design" was (algebraically) generalized for any Q-polynomial association schemes (Delsarte (1973)).

Let $\mathfrak{X} = (M, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ be a Q-polynomal association scheme.
Let $\mathcal{A} = \langle A_0, A_1, \ldots, A_d \rangle = \langle E_0, E_1, \ldots, E_d \rangle$ be the Bose-Mesner algebra and let $E_0, E_1, \ldots, E_d$ be the primitive idempotents. Then $X \subset M$ is a t-design, if

$$E_i \phi_X = 0 \text{ for } i = 1, 2, \ldots, t,$$

where ϕ_X is the characteristic vector (column vector) for X.

Note that t-design in Johnson association scheme $J(v, k)$ is equivalent to the concept of combinatorial t-(v, k, λ) design. While, t-design in the Hamming association scheme $H(d, q)$ is equivalent to the concept called an orthogonal array of strength t.

For the study of Euclidean t-designs, in particular of Fisher type bounds and of tight designs, see many papers of Eiichi and Etsuko Bannai (2005$\sim$). This concept was started by Neumaier-Seidel (1988) and Delsarte-Seidel (1989).

For the study of relative t-designs on association schemes, cf. Bannai-Bannai-Tanaka-Zhu (2017), etc. Fisher type lower bounds and the classification problems of certain tight t-designs were mainly studied.

The concept of relative t-designs was first conceived and studied by Delsarte (1977): Pairs of vectors in the space of association schemes (1977). However, this theory was seriously studied only recently (last less than 10 years), after imitating the study of Euclidean t-designs.

The relative t-design on binary Hamming association schemes $H(d, 2)$ is equivalent to the concept of "(weighted) regular t-wise balanced design", namely combinatorial t-designs which allow different sizes of blocks.

Fisher type lower bound for $H(d, 2)$ was first obtained by Z. Xiang (2012).

Generalization (IV). T-designs.

• For spherical designs, let $T \subset \{1, 2, 3, \cdots\}$. We say $X \subset S^{n-1}$ is a spherical T-design, if the following holds

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0, \text{ for all } f(x) \in \mathrm{Harm}_i(\mathbb{R}^n), \text{ with } i \in T.$$

• For combinatorial T-design (or Q-polynomial association schemes), X is a T-design (where $T \subset \{1, 2, \ldots, d\}$, if $E_i \phi_X = 0$, for all $i \in T$.

Note that if $T = \{1, 2, \ldots, t\}$, then T-design is an ordinary t-design.

This concept of T-design is due to Delsarte (1973). However, that there is an interesting Fisher type lower bound for $T = \{t\}$ was first observed by Bannai-Okuda-Tagami (2015). Then tight spherical $\{4\}$-designs were classified by Okuda-Yu (2017), and more general cases were studied by Zhu-Bannai-Bannai-Kim-Yu (Electronic J Comb., 2017), say, spherical $\{8, 4\}$-designs.

Note that spherical 2-designs are equivalent to tight frames (on the unit sphere).

Generalization (I). Change the space M (again).

For the spherical case, we already mentioned the cases taking M as compact rank 1 symmetric spaces (=projective spaces), (Cf. Hoggar (1982).)

(i) Compact symmetric spaces of arbitrary ranks.

(i-a) Homogeneous spaces G/H, for Lie group G.

Say, real Grassmannian spaces (Bachoc-Coulangeon-Nebe (2002), Bachoc-Bannai-Coulangeon(2004); complex Grassmannian spaces (Roy, 2010), etc.

(i-b) G itself is a Lie group,

Cf. Unitary t-designs, Roy-Scott, 2009, etc.

(ii) Complex sphere (Roy-Suda, 2011).

(This space is not a symmetric space.)

(iii) There are many many interesting spaces and we can study the concept of t-designs (or T-designs) in various situations.

Part III. Unitary t-groups and unitary t-designs

III-1. Unitary t-designs.

初めに述べたように, デザイン理論の本質は, 与えられた空間 M に対して M をよく近似する有限部分集合 X を見つけたり研究することにある. M が球面の時が 球面デザインであり, M が Johnson アソシエーションスキーム $J(v,k)$ の時が組合せデザイン (Combinatorial t-(v, k, λ) design) という具合である. M がユニタリー群 $U(d)$ の時にユニタリー群 $U(d)$ を近似する良い有限部分集合 X が unitary t-design である. Unitary t-design の一つの定義は次のように与えられる.

$U(d)$ を $d \times d$ のユニタリー行列全体の作る通常のユニタリー群とし，その元が $U = (u_{i,j})_{1 \le i \le d, 1 \le i \le d}$ で表されているとする．$Hom(U(d), r, s)$ を $u_{i,j}$ 達に関して r-次, $\overline{u_{i,j}}$ 達に関して s-次の斉次な多項式全体の作る空間とする．$U(d)$ の部分集合 X が unitary t-design であるとは, X は $U(d)$ を近似する良い有限部分集合であり, 次のように定義される．Spherical t-design (Cf. Delsarte-Goethals-Seidel [9] (1977) および Roy-Suda [14] など) との類似にも留意されたい.

定義. A finite set $X \subset U(d)$ is called a unitary t-design, if

$$\text{(i)} \quad \int_{U(d)} f(U) dU = \frac{1}{|X|} \sum_{U \in X} f(U), \quad \text{for all } f \in \mathrm{Hom}(U(d), t, t).$$

ここでは $\int_{U(d)} dU = 1$ と正規化されているとする.

この条件 (i) は次の２つの条件 (ii), (iii) とも同値である.

$$\text{(ii)} \quad \int_{U(d)} U^{\otimes t} \otimes (U^*)^{\otimes t} dU = \frac{1}{|X|} \sum_{U \in X} U^{\otimes t} \otimes (U^*)^{\otimes t},$$

$$\text{(iii)} \quad \int_{U(d)} |tr(U)|^{2t} dU = \frac{1}{|X|^2} \sum_{U, V \in X} |tr(U^* V)|^{2t}.$$

(他にも同値な条件が数多くある.)

Unitary t-design の考察は物理（量子情報理論）で始まったようであり, この原稿の末尾に述べる (i) Gross-Audenaert-Eisert [10](2007), (ii) Scott [15](2008) などが最初に発表された文献と思われる. 正式な発表年は 2009 年になるが,

(iii) Dankert-Cleve-Emerson-Livine [7] (2009) (arXiv: quant-ph/0606161)

が unitary t-design という言葉を使った最初の論文で [10], [15] もそれに負っているとの物理の人の話である. また, もっと古い関連した物理の論文もあり, "twirl" という概念が unitary t-design の元になっているとも考えられるという話である. いずれにせよ, ユニタリー群 $U(d)$ は物理においても色々の形で本質的に現れるのでその有限個の点による近似は非常に役立つのは確かと思われる. (iv) Roy-Scott の論文 [13] (2009) は数学的立場から総合的な解説を与えている. 最近の重要な論文としては (v) Zhu-Kueng-Grassl-Gross [17] (2016, arXiv: 1609.08172) などを参照されたい. 他にも非常に多くの論文がある.

III-2. Unitary *t*-groups

次に $U(d)$ の有限部分群自身が unitary t-design になっている場合を考えよう. すなわち, $U(d)$ の有限部分群 G で G 自身が unitary t-design となっているものを **unitary *t*-group** と呼ぶことにする. このとき次がなりたつ.

Let χ be the natural representation (of degree d) of $U(d)$. Then a finite subgroup G of $U(d)$ is called a **unitary *t*-group**, if

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi(g)|^{2t} = \int_{U(d)} |tr(U)|^{2t} dU.$$

2018 年 8 月頃までの時点では, unitary 3-groups in $U(d)$ は以下のような例に見られるように, いくつか知られていた. また unitary 4-groups は $d \geq 3$ に対しては一つも知られていないという状況であった. 多分それらは存在しないだろうと思われていたとおもわれるが, それを示すことは非常に困難であろうと一般的に考えられていたと思われた.

Unitary 3-designs の例

(i) Clliford groups: $d = 2^m, \quad G_m = Z_4 * 2_+^{1+2m} Sp(2m, 2)$,
(ii) Sporadic examples:
$d = 3, \quad 3.A_6,$
$d = 4, \quad 6.A_7, Sp(4,3)$
$d = 6, \quad 6.L_3(4).2_1, 6_1U_4(3)$
$d = 12, \quad 6.Suz,$
$d = 18, \quad 3.J_3.$

$d = 2$ に対しては unitary 5-group (例えば $G = SL(2,5)$) が知られている.
一方, $d \geq 3$ に対して unitary 4-groups in $U(d)$ は存在するか否かは（物理において）未解決な興味深い問題であると考えられていたと思われた.

昨年 (2018 年)8 月の草津セミナーの後 unitary t-group の分類に関して, Tiep との交流が生じた. その結果 unitary t-groups の分類は Guralnick-Tiep [11] (2005) で基本的には分類の本質的な部分がすでになされていることが分かった. 正確に言うと, そこでは群論的に（有限単純群の分類を full に用いて）$d \geq 5$ の場合に unitary 4-group の非存在が示され, また $d \geq 5$ の条件のもとで unitary 2 group の分類も原理的に得られていた. ただし [11] と unitary t-groups との関連はほとんど知られていなかった. Eiichi Bannai, Gabriel Navarro, Noelia Rizo, Pham Huu Tiep [5] の共著論文"Unitary t-groups" は, このことを（物理の未解決問題が群論ではすでに [11] で本質的に解決されていたことを）指摘し, 更に [11] で残されていた $d = 2, 3, 4$ の場合の分類も完成させた. すなわち,[11] [5] を合わせて, 任意の $t \geq 2$ と 任意の $d \geq 2$ に対しての unitary t-groups の完全な分類が得られた訳である. この分類結果は複雑であるが, 結果はそれ自身非常に面白いと思われるし, 物理などへの応用という意味でも非常に役に立つと思われる. この分類の詳細に関しては, [11, 5] を参照されたい.

III-3. Explicit constructions of some unitary t-designs.

Unitary t-designs in $U(d)$ は任意の $d \geq 2$ と任意の t に対して存在することは知られている.（Seymour-Zaslavsly (1984) の帰結である.）一方 unitary t-designs in $U(d)$ の具体的な構成はほとんど知られていなかった. 特に $d \geq 3$ で $t \geq 3$ の場合には,unitary 3-groups として知られているもの以外には, 本質的には具体的な構成は成されていなかったと思われる. ここでは特に unitary 4-design in $U(4)$ の場合をを解決を, Eiichi Bannai, Mikio Nakahara, Da Zhao, Yan Zhu [6] (2019) に基づいて紹介する. 一般的に次の結果を得る.

定理 1 (Bannai-Nakahara-Zhao-Zhu [6]).
Let χ be the natural representation of $U(d)$ (of degree d). Let G be a unitary t-group in $U(d)$. Suppose that

$$(\chi^{t+1},\chi^{t+1})_G = (\chi^{t+1},\chi^{t+1})_{U(d)} + 1.$$

(Note that $(\chi^{t+1},\chi^{t+1})_G = (\chi^{t+1},\chi^{t+1})_{U(d)}$ is equivalent to the condition that G is a unitary $(t+1)$-group. Also note that $(\chi^{t+1},\chi^{t+1})_{U(d)} = d!$, if $d \geq t$.)
Then
(i) There is a unique non-trivial $G \times G$-invariant $f \in Hom(U(d), t+1, t+1)$.
(ii) Let x_0 be any zero (in $U(d)$) of f. (There are many such zeros, since f is nontrivial.) Then, the orbit X of x_0 by the action of $G \times G$ is a unitary $(t+1)$-design in $U(d)$.

定理 2．
(i) ([5, 6]) The following groups G are unitary 3-groups in $U(d)$ with the property that $(\chi^4,\chi^4)_G = 7 (= (\chi^4,\chi^4)_{U(d)} + 1)$.
(a) $d = 4$, $G = Sp(4,3)$.
(b) $d = 6$, $G = 6_1.U_4(3)$.
(c) $d = 12$, $G = 6.Suz$.
(ii) ([6]) We can construct unitary 4-designs in $U(4)$ explicitly (numerically). (これは上に述べた定理 1 を実行することにより構成される.) このときの design X のサイズ $|X|$ は $|Sp(4,3)|^2/6 = 447897600$ となる.
一方 $d = 6, d = 12$ の場合は具体的に求めるにはコンピューターの計算でも容量, 計算速度の点で今の所手にあまる. より良いコンピューター環境があれば原理的には可能である.

III-4. 考えたい問題

最後にいくつかの考察中の問題を提示する. 興味ある方の挑戦を期待します.

未解決問題 （有限群の立場から）

(i) Let G be a subgroup of $O(d), (d \geq 3)$.
Let χ_i be the irreducible representation of $O(d)$ on $Harm_i(\mathbb{R}^d)$.
Then G acts on the space $Harm_i(\mathbb{R}^d)$. The paper of Tiep [16] (2006) classifies those G with $\chi_1 \downarrow_G$ and $\chi_2 \downarrow_G$ being irreducible.
Can we classify those $G \subset O(d)$ with $(1,\chi_i)_G = 0$ for $i = 1, 2, \ldots, k$?
In particular,
is there any finite G such that this holds for $k = 12$?
No example is known, but the non-existence is still an open problem.
(Note that
$\chi_i \downarrow_G$ are irreducible for $i = 1, 2, \ldots, s$,
implies that
$(1,\chi_i)_G = 0$ for $i = 1, 2, \ldots, 2s$, but the converse does not necessarily hold.)

(ii) Let G be an irreducible finite subgroup of $U(d)$, and let χ be the natural representation of G. Then, can we determine G such that $(\chi^2, \chi^2)_G = 3$. (Note that $(\chi^2, \chi^2)_{U(d)} = 2$.) We believe that the method of [11] can be applied. From such G, we can construct unitary 2-designs in $U(d)$.

(Note that some constructions of unitary 2-designs in $U(d)$ are known, but this will add many more new examples.)

(Note that the key of the proof of 定理 2 above was to find a unitary t-group in $U(d)$ such that $(\chi^{t+1}, \chi^{t+1})_G = d! + 1$, where $(\chi^{t+1}, \chi^{t+1})_{U(d)} = d!$. This is the case of $t = 1$ in 定理 1.)

現在進展中の問題

(i) Zhu-Kueng-Grassl-Gross [17] は次のことを予想し, 未解決問題として提起している．すなわち, Clifford group $G = G_m$ は unitary 3-design であることが知られている. $G = G_m$ は複素射影空間 $\mathbb{CP}^{d-1}$ に自然に働く. $x_0 \in \mathbb{CP}^{d-1}$ の G による orbit が projective 4-design になるための必要十分条件は, x_0 が $\mathbb{CP}^{d-1}$ の non-trivial な (unique に定まる) 調和多項式 ϵ の零点になっていることである．このとき,

予想 (Conjecture 2 in [17]). このようにしてできる orbit が projective 4-design であれば必ず unitary 5-design になっている.

この予想は, G-invariant な $Harm(\mathbb{C}^{n-1}, 5, 5)$ が存在しないことと同値である．現在この予想が正しいことを示す論文を準備中である. これは Da Zhao および 大浦学との共同研究であり, Nebe-Rains-Sloane [12] の real Clifford group の不変式に関する結果の complex Clifford group G_m に対する version を得ることにより証明される.

(ii) Unitary 3-group である Clifford group G_m を用いて unitary 4-design in $U(2^m)$ が原理的に構成できる．特に, G_2 を用いて unitary 4-designs in $U(4)$ が explicit に（numerical に）構成できる．（Da Zhao との共同研究）.

(iii) 一般の d および t に対して，unitary t-designs in $U(d)$ が原理的に構成できると思われる.（奥田隆幸による部分的な未発表の先行研究がある．方法はその方法と似た部分と異なる部分がある．詳細は現在の所まだ細かいところを詰める必要がある.）

2019 年 12 月の時点における追加と文献案内

(1) Part I に関して Spherical t-design についての基本的な文献は，Delsarte-Goethals-Seidel [9], 坂内英一・坂内悦子 [2]，坂内英一・坂内悦子・伊藤達郎 [3]，Bannai-Bannai [1] などを参照されたい. Combinatorial t-design についての多くの論文および本があるが，代数的組合せ論の立場からは Delsarte [8] が一番の大本である．坂内英一・坂内悦子・伊藤達郎 [3] も部分的に参考になると思われる.（組合せ論の立場からの Combinatorial t-designs の本は非常に数多くある.）

(2) Part II に関しては，Bannai-Bannai-Tanaka-Zhu [4] に基づいている．部分的には [1], [2], [3] なども参考になると思われます.

(3) Part III に関する文献は，[13]，[11]，[17]，[5]，[6] などを参照してください．上の Part III の (i) で述べた結果は　Eiichi Bannai, Manabu Oura, Da Zhao の 3 名の共著論文として準備中です．一方 (ii), (iii) で述べた結果は，現在 Eiichi Bannai, Yoshifumi Nakata, Tkayuki Okuda, Da Zhao の 4 名の共著論文として準備中です．この後者の論文では，unitary t-designs in $U(d)$ の具体的な構成を次元 d に関する induction を用いて構成できます．具体的なアルゴリズムを与えていて，またサイズの評価もきちんと得られますが，具体的な計算量はどんどん増えていくので，どこまで実用に役立つかという点では問題点は残っています．なおこの unitary t-designs の構成法は spherical t-designs in S^{n-1} の場合にも具体的な新しい構成法が得られるので，その点でも興味深いと思われます．これら 2 つの論文は（[5]，[6] とともに）この分野の進展に影響を与えることができるのではないかと自負しています．

(4) 最後に一言．Unitary t-design を通じて，有限群，デザイン，量子情報の間の関連性を述べたかったのですが，物理を良く知らないこともあり力不足でほとんど述べられませんでした．物理関係の unitary t-design と関連する最近の論文は [6] の文献表を参照してください．我々は今まで主に exact な unitary t-design と呼ばれるもののみに興味を持って研究してきましたが，approximate unitary t-design という概念もあって，物理ではそれも考えられ，多くの研究もされてきています．Exact なものを考えると構成は非常に難しくて今の所手が出なくてなかなか実際に応用できるようなものは見つけられないので，approximate なもので妥協して実際に応用に使えるようなものを見つけたいというのがその理由と思われます．([6] の文献表は approximate unitary t-design も含んでいます.）しかし個人的には (代数，あるいは代数的組合せ論の立場に立って）exact なものに固執したいと思っています．

References

[1] E. Bannai, E. Bannai: A survey on spherical designs and algebraic combinatorics on spheres, Europ. J. Comb. 30 (2009), 392-425.

[2] 坂内英一, 坂内悦子: 球面上の代数的組合せ理論, Springer Tokyo, 1999.

[3] 坂内英一, 坂内悦子, 伊藤達郎: 代数的組合せ論入門, 共立出版, 2016.

[4] E. Bannai, E. Bannai, H. Tanaka, Y. Zhu: Design Theory from the viewpoint of algebraic combinatorics, Graphs and Comb. 33 (2017), 1-41).

[5] E. Bannai, G. Navarro, N. Rizo, P. M. Tiep, Unitary t-groups, preprint (2018), to appear in J. Math. Soc. Japan.

[6] E. Bannai, M. Nakahara, D. Zhao, Y. Zhu: On the explicit constructions of certain unitary t-designs, J. Phys. A: Math. Theor. 52(49):495301 (2019).

[7] C. Dankert, R. Cleve, J. Emerson, E. Livine: Exact and approximate unitary 2-designs and their applications to fidelity estimation, Phys. Rev. A, 80:012304 (2009), arXiv:quant-ph/0606161.

[8] P. Delsarte: An algebraic approach to the association schemes of coding theory, Philips Res. Rep. Suppl.,1973, vi+97.

[9] P. Delsarte, J.-M. Goethals, J. J. Seidel: Spherical codes and designs, Geom. Dedicata 6 (1977), 363–388.

[10] D. Gross, K. Audenaert, J. Eisert: Evenly distributed unitaries: on the structure of unitary designs, J. Math. Phys. 48 (2007), 052104.

[11] R. M. Guralnick, P. H. Tiep: Decompositions of small tensor powers and Larsen's conjecture, Represent. Theory 9 (2005), 138–208.

[12] G. Nebe, E. M. Rains, N. J. A. Sloane: The invariants of the Clifford groups, Des. Codes, Cryptogr. 24 (2001), 99–121.

[13] A. Roy, A. J. Scott: Unitary designs and codes, Designs, Codes and Cryptrography 53 (2009), 13–31.

[14] A. Roy, S. Suda: Complex spherical codes and designs, J. of Comb. Designs 22 (2014), 105–148.

[15] A. J. Scott: Optimizing quantum process tomography and unitary 2-designs, J. of Physics A 41 (2008) 055308.

[16] P. H. Tiep: Finite groups admitting Grassmannian 4-designs, J. Algebra 306 (2006), 227–243.

[17] H. Zhu, R. Kueng, M. Grassl, D. Gross: The Clifford group fails gracefully to be unitary 4-design, arXiv:1609.08172v1.