対称群の群代数とヘッケ代数の常識

有木進（大阪大学大学院情報科学研究科）

Abstract. 対称群やヘッケ代数は古くから研究されている対象であるが、いまだに進歩し続けている分野である。本稿では現在常識とされていることを解説する。とくに対称群の群代数が次数付代数であることやヘッケ代数の研究から生まれ他の代数の研究に発展している概念について解説する。また、最終節で対称群の元の簡約表示の集合と柏原クリスタルの関係にも少し触れる。

1. 導入

私の座右の銘は"Good in theory, devil in detail" である。世の中には理論を作るのが好きな数学者と実例を理解したい数学者の 2 種類がいると思うが、理論を適用しようと思った場合使えることはまずない。多くの理論はただ新しい言葉で語るだけであり具体的計算結果は改善しない。たとえば n 次行列の積が n の何乗で計算できるかというような問題など多くの具体的な問題で数学は工学の後塵を拝し最良の結果を出すことができない。Goppa 符号や Mersenne twister のような例は極めてまれである。数学の目的は最終的には何か具体的な結果が得られるところにあるべきで抽象的な理論を展開するのも新しい概念や物の見方を通じて従来計算できなかったものや分類できなかったものが計算できたり分類できるようになることが最終目的であると信じる。そのレベルに到達しているか否かが一流の理論かそうでないかの差なのだと思う。私の専門は Hecke 代数のモジュラー表現論である。本稿の目的はこの具体的対象を理解する努力の中で役に立った理論を紹介することである。現実には Hecke 代数のモジュラー表現という具体例をもとにいくつかの新しい理論が生まれることになった。例えば B 型 Hecke 代数のモジュラー既約表現の分類さえ Kac-Moody Lie 代数の可積分加群の圏化を必要とした。

- 可積分加群の圏化理論は Chuang-Rouquier により導来圏同値を扱える形に精密化され、Rouquier の 2-Kac Moody 理論として他の代数にも応用されている。
- セルラー代数は Hecke 代数の Specht 加群理論を基に Graham-Lehrer により導入された概念で半単純代数の表現論からモジュラー表現論に移行する適切な枠組みであり、この概念も他の代数に応用されている。
- 柏原クリスタルは数理物理や表現論全般で使われる有用な概念である。

また何よりも対称群の群代数が次数付代数であるという事実は、対称群が 100 年以上研究されてきた対象であるにもかかわらず 21 世紀になるまで誰もわからなかった、という驚くべき結果であり、学部で対称群を教えるときは是非触れていただきたい事実である。私はいわゆる岩堀 Hecke 代数のみですでに手一杯であるが、そもそも Hecke 代数は有限群と部分群の対 (G, H) に対し定義されるものであるから他の Hecke 代数の中にもまだ私たちの知らないおもしろい例があるだろう。最近は柏原先生と韓国の共同研究者を中心に箙 Hecke 代数とアフィン量子代数の表現論との関係が明らか

Key words and phrases. 対称群、ヘッケ代数、セルラー代数、導来圏同値.
本代数学シンポジウムへの参加は基盤研究（C) 18K03212 の経費を使用した。.

になってきており、Hecke 代数の研究は現在様々な方向に広がっている。また、A 型 Hecke 代数は対称群の群代数の q-変形であるが、q を固定してもさらにもうひとつ隠れた変形変数がある。このことも箙 Hecke 代数が導入されて初めて見えてきた事実である。

2. 次数付代数としての対称群の群代数とヘッケ代数

2.1. 対称群の Coxeter 生成元. いうまでもないが、対称群 S_n は $[n]=\{1,2,\dots,n\}$ から自分自身への全単射写像の全体に写像の合成により群構造を入れたものであり、生成元と基本関係により定義された群と同型である。すなわち、A_{n-1} 型 Coxeter 群を

$$W(A_{n-1})=\langle\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}\mid\sigma_i^2=1,\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1},\ \sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i\ (j\neq i\pm1)\rangle$$

と定義し、$i=1,\dots,n-1$ に対し i と $i+1$ を交換する互換を $s_i=(i,i+1)$ と書くと、生成元と基本関係で定義される群のもつ普遍性質により写像 $\sigma_i\mapsto s_i=(i,i+1)\in S_n$ から定まる群準同型 $W(A_{n-1})\to S_n$ が群同型になる。この同型により $W(A_{n-1})$ と S_n を同一視し、基本互換 $\{s_i\mid 1\le i\le n-1\}$ を Coxeter 生成元と呼ぶのであった。

2.2. Hecke 代数. R を単位的可換環、G を有限群とする。G の部分群 H に対し H の単位加群の誘導加群を 1_H^G と書く。念のため書くが、有限群論では誘導関手を制限関手の左随伴として定義する。すなわち、G を基底とする R-加群を RG と書き、G の積を R-線形に延長して RG の積を定めるとき、RH-加群 V に対し

$$V_H^G=RG\otimes_{RH}V$$

である。他方、G 上の R 値関数のなす R-加群を $R[G]$ と書き、畳み込み積により $R[G]$ に積を定めても群代数の特殊性により RG と同型になる。これが理由かどうかわからないが、他分野では RG を $R[G]$ と書くことも多いようである。また、RH-加群 V に対し G 上の V 値関数の集合を考え、H の右作用 $f\cdot h(x)=h^{-1}f(hx)$ による固定点の集合を誘導加群 V_H^G と定義する流儀もある。つまりこの誘導関手は $\mathrm{Hom}_H(RG,-)$ であり制限関手の右随伴である。群代数の特殊性により 2 種類の誘導加群は同型であり中山関係式と呼ばれる。$\mathcal{H}=\mathrm{End}_G(1_H^G)$ を Hecke 代数と呼ぶ。$\mathcal{H}$ の元は $G/H\times G/H$ 上の G-不変 R 値関数を用いて

$$xH\mapsto\sum_{yH\in G/H}f(xH,yH)yH$$

と表わされる。ここで G-作用は $G/H\times G/H$ への対角 G-作用である。実際、

$$gxH\mapsto\sum_{yH\in G/H}f(xH,yH)gyH=\sum_{gyH\in G/H}f(gxH,gyH)gyH$$

の係数比較より $f(xH,yH)$ が G-不変 R 値関数になることは明らかである。そこで G-軌道の特性関数を用いて $\mathcal{H}$ の基底を与えることができる。これを Schur 基底と呼ぶ。

註 1. $G/H\times G/H$ 上の G-不変 R 値関数のなす自由 R-加群に畳み込み積により積を定義すると、$\mathcal{H}$ の反転代数 $\mathrm{End}_G(1_H^G)^{\mathrm{op}}$ と同型である。

Schur は Schur 基底に関する構造定数を書き下した。$\mathbb{F}_q$ を有限体、G を代数群、H を G の閉部分群とし、Hecke 代数

$$\mathrm{End}_{G(\mathbb{F}_q)}\left(1_{H(\mathbb{F}_q)}^{G(\mathbb{F}_q)}\right)$$

[0]私個人の感想をいえば一般に集合 X 上の R 値関数の集合を $R[X]$ と書く用法が標準的だと思うので、G-集合 X を基底にもつ R-加群は RX と書きたいのであるが。

を考えると幾何との関係が生まれる。等質空間 G/H が完備射影多様体になることと H が Borel 部分群を含むことが同値であることから、G/H が旗多様体の場合が深く研究されており、Kazhdan-Lusztig 予想の記述に使われて有名になった。この例は Iwahori-Matsumoto が Hecke 代数を生成元と基本関係で記述しており、岩堀 Hecke 代数と呼ばれる。この生成元と基本関係を用いれば一般の Coxeter 群と任意の $q \in R$ に対して Hecke 代数が定義でき、Hecke 代数が Coxeter 群の群代数の q-変形になる。

G が一般線形群のとき A 型 Hecke 代数と呼ぶ。$q=1$ のときが対称群の群代数になる。本稿では対称群関係に限って話をしているので A 型 Hecke 代数の定義だけ書いておく。

定義 1. R を可換環、$q \in R$ とする。生成元 $T_1, \dots, T_{n-1}$ と関係式

$$(T_i - q)(T_i + 1) = 0,\ \ T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$$
$$T_i T_j = T_j T_i \ (j \neq i \pm 1)$$

で定義される R-代数 $\mathcal{H}_n$ を A_{n-1} 型 *Hecke* 代数と呼ぶ。

1990 年代になって R を任意の代数閉体、$q \in R$ を 1 の冪根とする設定の研究が始まった。動機は $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の非等標数モジュラー表現論である。この応用では q は素数べきだから R の標数が ℓ $(\gcd(\ell, q) = 1)$ ならば $q \in \mathbb{F}_\ell^\times$ となるが、以後は q が素数べきという仮定をはずす。一般に

$$e = \min\{k \in \mathbb{N} \mid 1 + q + \cdots + q^{k-1} = 0\} \quad （e \geq 2 \text{ に注意}）$$

を量子標数と呼ぶ。

2.3. 円分箙 Hecke 代数. 対称群の群代数が次数付代数である事実は Coxeter 生成元を使う限り見えてこない。我々は新しい生成元と基本関係に移る。この新しい生成元は Khovanov-Lauda 生成元と呼ばれる。対称群の群代数や Hecke 代数の別の生成元を与えるにはまず量子標数から定まる Dynkin 図形が必要である。

定義 2. *Dynkin* 図形 Γ_q を量子標数が $e = \infty$ のとき A_∞、$2 \leq e < \infty$ のとき $A^{(1)}_{e-1}$ とする。Γ_q の頂点集合は $e = \infty$ のとき $I = \mathbb{Z}$、$2 \leq e < \infty$ のとき $I = \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ である。また、Γ_q の定める *Kac-Moody Lie* 代数の単純ルートの集合を $\Pi = \{\alpha_i\}_{i \in I}$ とする。

まず円分箙 Hecke 代数を定義する。定義には次の形の多項式族が必要である。

$$Q_{i,j}(u,v) = \begin{cases} \sum_{p(\alpha_i,\alpha_i)+q(\alpha_j,\alpha_j)+2(\alpha_i,\alpha_j)=0} t_{i,j;p,q} u^p v^q & (\text{if } i \neq j) \\ 0 & (\text{if } i = j) \end{cases}$$

ただし $t_{i,j;p,q} \in R$ は $t_{i,j;-a_{ij},0} \in R^\times$ であり、また $Q_{i,j}(u,v) = Q_{j,i}(v,u)$ とする。Khovanov-Lauda[KL1] において円分箙 Hecke 代数が導入された。

定義 3. 対称化可能 *Cartan* 行列 $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ に対し、A の定める *Kac-Moody Lie* 代数の重み格子を P とする。多項式族 $(Q_{i,j}(u,v))_{i,j \in I}$ と支配的整重み $\Lambda \in P$ から定まる円分箙 *Hecke* 代数 $R^\Lambda(n)$ とは、生成元

$$\{e(\nu) \mid \nu \in I^n\} \cup \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{\psi_1, \dots, \psi_{n-1}\}$$

---

[0] この移行は量子アフィン代数の有限次元表現の研究が Chevalley 生成元から Drinfeld 生成元に移行することで進展したことを連想させる。

と基本関係式

$$e(\nu)e(\nu') = \delta_{\nu,\nu'}e(\nu)$$
$$\sum_{\nu\in I^n} e(\nu) = 1$$
$$x_r e(\nu) = e(\nu)x_r, \ \ x_r x_s = x_s x_r$$
$$\psi_r e(\nu) = e(s_r\nu)\psi_r$$

$$\psi_r x_s = x_s \psi_r \ \ (\textit{if } s \neq r, r+1)$$
$$\psi_r \psi_s = \psi_s \psi_r \ \ (\textit{if } r \neq s \pm 1)$$
$$x_r \psi_r e(\nu) = (\psi_r x_{r+1} - \delta_{\nu_r,\nu_{r+1}})e(\nu)$$
$$x_{r+1}\psi_r e(\nu) = (\psi_r x_r + \delta_{\nu_r,\nu_{r+1}})e(\nu)$$
$$\psi_r^2 e(\nu) = Q_{\nu_r,\nu_{r+1}}(x_r, x_{r+1})e(\nu)$$

$$(\psi_{r+1}\psi_r\psi_{r+1} - \psi_r\psi_{r+1}\psi_r)e(\nu) = \begin{cases} \frac{Q_{\nu_r,\nu_{r+1}}(x_r,x_{r+1}) - Q_{\nu_r,\nu_{r+1}}(x_{r+2},x_{r+1})}{x_r - x_{r+2}} e(\nu) & \textit{if } \nu_r = \nu_{r+2}, \\ 0 & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

および円分条件 $x_1^{\langle \alpha_{\nu_1}^\vee, \Lambda\rangle} e(\nu) = 0$ から定まる単位的 R-代数である。

註 2. R が体ならば $R^\Lambda(n)$ は有限次元で、$(R^\Lambda(n), R^\Lambda(n))$-両側加群同型

$$\mathrm{Hom}_R(R^\Lambda(n), R) \simeq R^\Lambda(n)$$

がある。つまり $R^\Lambda(n)$ は対称代数である。他方、$Q_{i,j}(u,v)$ が $u-v$ の多項式のとき柏原先生は $R^\Lambda(n)$ を円分対称箙 *Hecke* 代数と呼ぶので、「円分対称箙 *Hecke* 代数は対称代数である」という命題は非自明な命題であることに注意されたい。この対称箙 *Hecke* 代数という呼び方も標準的になりつつある。

註 3. 当初 *Khovanov-Lauda* は $Q_{i,j}(u,v)$ を u,v の対称式になるように選んでいた。*Brundan-Kleshchev* が $u-v$ の多項式に変更したときは *sign modified* 箙 *Hecke* 代数と呼んでいた。

Dynkin 図形が木ならば円分箙 Hecke 代数 $R^\Lambda(n)$ は多項式族 $Q_{i,j}(u,v)$ の取り方に依存しないが、$A_{e-1}^{(1)}$ ならば媒介変数 t に依存する。つまり、Hecke 代数の変数 q が 1 の冪根のとき円分箙 Hecke 代数の Lie 型 $A_{e-1}^{(1)}$ を定めるが、q を固定してもなおもうひとつの変形パラメータ t が隠れているのである。これも対称群と Hecke 代数に関する現代の常識である。多項式族 $Q_{i,j}(u,v)$ の標準形は次のように与えられる。

(1) $e=2$ ならば $Q_{0,1}(u,v) = u^2 + tuv + v^2$.

(2) $e \geq 3$ ならば $t \in R^\times$ を媒介変数として

$$Q_{i,i+1}(u,v) = u + v \ \ (0 \leq i \leq e-2),$$
$$Q_{e-1,0}(u,v) = u + tv,$$
$$Q_{i,j}(u,v) = 1 \ \ (j \not\equiv i \pm 1 \bmod e).$$

筆者は表現型を計算することで代数 $R^\Lambda(n)$ の同型類が実際に t の値により異なることを確認している。円分箙 Hecke 代数 $R^\Lambda(n)$ は次の次数付けにより次数付代数になる。

$$\deg(e(\nu)) = 0, \ \ \deg(x_r e(\nu)) = (\alpha_{\nu_r}, \alpha_{\nu_r}), \ \ \deg(\psi_s e(\nu)) = -(\alpha_{\nu_s}, \alpha_{\nu_{s+1}}).$$

ここで内積値は Cartan 行列から定まり、$A_{e-1}^{(1)}$ 型の場合は $(\alpha_i, \alpha_i) = 2$ かつ $i \neq j$ のとき $(\alpha_i, \alpha_j) = -a_{ij}$ である。

次の定理は Brundan-Kleshchev 同型定理 [BK1] の特別な場合であり、ここで再掲はしないが、とくに対称群の群代数の Khovanov-Lauda 生成元の具体的な取り方も与えている。

定理 4. *A* 型 *Hecke* 代数 $\mathcal{H}_n$ に対し *Dynkin* 図形 $\Gamma_q = A_\infty, A_{e-1}^{(1)}$ から定まる円分箙 *Hecke* 代数 $R^{\Lambda_0}(n)$ を考える。ただし Λ_0 は $A_{e-1}^{(1)} \setminus A_{e-1}$ に対応する基本重みであり、$2 \leq e < \infty$ のとき $t = (-1)^e$ と取る。このとき $\mathcal{H}_n \simeq R^{\Lambda_0}(n)$ である。とくに対称群の群代数や *A* 型 *Hecke* 代数は次数付代数である。

この同型を通じて対称群の群代数や Hecke 代数に次数付代数の構造が入る。Coxeter 生成元 T_i は次数の異なる斉次元の和である。対称群の群代数の q-変形が Hecke 代数であることを知っている研究者は多いと思うが、q を固定してもなお変形の変数 t が隠れていたわけでこの事実も円分箙 Hecke 代数の導入で初めてわかったことである。

註 4. *Brundan-Kleshchev* 同型定理は円分 *Hecke* 代数と円分箙 *Hecke* 代数の同型を示した定理であり、とくに *B* 型 *Hecke* 代数も次数付代数である。

2.4. **円分箙 Hecke 代数のブロック分解.** 単純ルート n 個の和 β を考え、

$$I^\beta = \{\nu \in I^n \mid \alpha_{\nu_1} + \cdots + \alpha_{\nu_n} = \beta\}$$

とすると、$e(\beta) = \sum_{\nu \in I^\beta} e(\nu)$ は $R^\Lambda(n)$ の中心元になる。とくに $A_{e-1}^{(1)}$ 型円分箙 Hecke 代数の場合 $e(\beta)$ が原始中心冪等元になり

$$R^\Lambda(\beta) = R^\Lambda(n)e(\beta)$$

が $R^\Lambda(n)$ のブロック代数になる。次の予想は可積分加群を円分箙 Hecke 代数の加群圏を用いて圏化するとき成り立ってほしい性質であり、重要な未解決問題である。

予想 1. 他の *Lie* 型のときも $R^\Lambda(\beta)$ は直既約代数であろう。

3. セルラー代数

3.1. **セルラー代数.** 代数幾何や数論の研究者なら Hodge filtration や weight filtration が思い浮かぶと思うが、filtration を付け加えた構造を考えるのは数学において標準的なことである。表現論において有名なのは準遺伝代数であり、準遺伝的と呼ばれる両側イデアルの列をもち、加群圏が最高重み圏になるための特徴づけを与える。対称群の群代数や Hecke 代数の Specht 加群の理論を基として、セルイデアルと呼ばれる両側イデアルの列をもつ代数が Graham-Lehrer により公理化され、セルラー代数と呼ばれる。

定義 5. 有限次元代数 A が半順序集合 Λ と各 $\lambda \in \Lambda$ ごとに与えられた集合 $\mathrm{ST}(\lambda)$ でラベルされる基底 $\{C_{ST}^\lambda \mid \lambda \in \Lambda,\ S, T \in \mathrm{ST}(\lambda)\}$ をもつとする。C_{ST}^λ が次の条件 *(i)(ii)* をみたすとき A をセルラー代数と呼ぶ。

(i) $C_{ST}^\lambda \mapsto C_{TS}^\lambda$ の定める線形変換 $\iota : A \to A$ は A の反自己同型である。

(ii) $a \in A$ とする。$\lambda \in \Lambda$ と $S \in \mathrm{ST}(\lambda)$ に対し $r_U^{(a,S)} \in R$ が存在して

$$aC_{ST}^\lambda \equiv \sum_{U \in \mathrm{ST}(\lambda)} r_U^{(a,S)} C_{UT}^\lambda \mod A^{>\lambda}$$

となる。ただし $A^{>\lambda} = \mathrm{Span}\{C_{UV}^\mu \mid U, V \in \mathrm{ST}(\mu),\ \mu > \lambda\}$ であり、$r_U^{(a,S)}$ は T に依存しない。

定理 6. 基礎体の標数が 2 と異なるならばセルラー代数と森田同値な有限次元代数もまたセルラー代数である。

定理 7 (Murphy)**.** *A* 型 *Hecke* 代数はセルラー代数である。とくに対称群の群代数はセルラー代数である。

対称群 S_n の群代数の場合、$\mathbb{C}S_n$ の既約加群を Young 対称子を用いて構成するのが古典的であるが、分母に注意すれば Young 対称子を用いて $\mathbb{Z}S_n$ の両側イデアル列を作ることができ、複素数体に係数拡大すれば $\mathbb{C}S_n$ の両側既約加群の直和への分解が得られる。つまり半単純代数 $\mathbb{C}S_n$ の両側既約加群への直和分解から対応する $\mathbb{Z}S_n$ の両側イデアル列に移ることによりモジュラー表現の研究に移ることができる。現在のところ我々は対称群とその周辺の研究で手一杯であるが、より一般の有限群 G と G の既約表現がすべて絶対既約になる体をとり、K の整数環 $\mathcal{O}_K$ を係数とする群代数 $\mathcal{O}_K G$ を考えたとき、いつセルラー代数になるのかなどは調べられていない。

問 1. 他の有限群の群代数に対しいつセルラー代数になるかを調べよ。

註 5. セルラー代数の定義は思ったよりもきつく、ここで *Brauer tree* 代数の説明はしないがたとえば次の定理が知られている。

定理 8 (Ohmatsu)**.** 基礎体の標数が 2 と異なる有限次元対称代数が有限表現型かつセルラー代数ならば *Brauer tree* が直線の *Brauer tree* 代数である。

3.2. **セル加群.** Lie 代数の表現論でいえば Verma 加群にあたる役目をセルラー代数の表現論において果たすのがセル加群である。

定義 9. A をセルラー代数とする。$\{C_T \mid T \in \mathrm{ST}(\lambda)\}$ を基底にもつ A-加群 $C(\lambda)$ を

$$aC_S = \sum_{T\in \mathrm{ST}(\lambda)} r_T^{(a,S)} C_T$$

で定め、$C^\lambda_{US}C^\lambda_{TV} \equiv \langle C_S, C_T\rangle C^\lambda_{UV} \mod A^{>\lambda}$ により $C(\lambda)$ 上の対称形式を定める。$C(\lambda)$ をセル加群と呼ぶ。

定理 10 (Graham-Lehrer)**.** セル加群に対し次の定理が成り立つ。

(1) $L(\lambda) = C(\lambda)/\mathrm{Rad}_{\langle\ ,\ \rangle}C(\lambda)$ は 0 または絶対既約加群になり、すべての既約加群はこのようにして得られる。
(2) $\mathrm{Ext}^i(L(\mu), L(\nu)) = \mathrm{Ext}^i(L(\nu), L(\mu))$ が成り立つ。
(3) $L(\mu)$ の射影被覆を $P(\mu)$ とする。
   – $[C(\lambda) : L(\mu)]$ を成分にもつ非負整数成分行列 D を分解行列
   – $[P(\mu) : L(\nu)]$ を成分にもつ非負整数成分行列 C を *Cartan* 行列
   と呼ぶ。このとき $C = D^T D$ および $\det(C) > 0$ が成り立つ。

セルラー代数の枠組みができると上記のように既約加群の完全代表系の構成法がわかり、計算効率はともかく、Gram 行列をもとに既約加群が求まることがわかる。

しかしアルゴリズム以上の具体的かつ明示的な最終結果を求めるならば、一般には Gram 行列の階数の制御は難しく、結果を得るのは容易ではない。筆者が円分 Hecke 代数と呼ばれる有限次元代数の無限族に対して明示的な既約加群の分類を行ったときには次節で述べる圏化理論を開発する必要があった。しかし結果はきれいで、Misra-Miwa 模型上に実現された $A^{(1)}_{e-1}$ 型最高重み柏原結晶を用いて既約加群を分類するという結果が得られた。

問 2. セルラー代数の一般論がこのような形で成功する例を他にも見つけよ。

本稿の主題である対称群の群代数と Hecke 代数に対しては Specht 加群の時代（柏原結晶が存在してもいない時代）に Dipper-James が非自明な組合せ論的計算により次の結果を与えている。

定理 11. e を量子標数とする。このとき、*Hecke* 代数 $\mathcal{H}_n$ の既約表現は e-制限的 *Young* 図形で分類される。すなわち、次の集合で分類される。

$$\{\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}\mid 0\leq\lambda_i-\lambda_{i+1}\leq e-1,\ \sum_{i=1}^n\lambda_i=n\}$$

現在の視点から見れば、最高重み柏原結晶 $B(\Lambda_0)$ の Misra-Miwa 模型上の実現を用いた既約加群の分類に他ならない。

註 6. 上で述べたように、対称群の群代数の場合 *Specht* 加群（正確には双対 *Specht* 加群）がセルラー代数の基である。*Specht* 加群はモジュラー表現を扱うために開発された加群で、すべてを整数係数の計算で行うために *Garnir* 関係式による書き換え規則を必要とする。しかし、対称群の群代数が半単純代数になるときを扱うのならば標準盤を基底とする *Young* の半正規表現のほうがはるかに見通しがよく計算も楽で扱いやすい。すなわち有理数計算を許す代わりややこしい書き換え規則は必要ないのである。*Fulton* の本はその意味で変なやり方をしている。*Specht* 加群の本質的存在理由を説明せず読者を間違った方向へ誘導しているように思われる。

4. 最高重み加群の圏化と Chuang-Rouquier 導来同値

4.1. **KP hierarchy.** 京都学派のソリトン理論の研究では charged fermion または neutral fermion をもとに Fock 空間を導入し、$\mathfrak{gl}(\infty)$ と $\mathfrak{go}(\infty)$ の加群になっていることを見たのち簡約という操作によりアフィン Lie 代数の表現を実現していた。

(1) KP hierarchy の簡約は $\mathfrak{g}(A_\ell^{(1)})$.
(2) BKP hierarchy の簡約は $\mathfrak{g}(A_{2\ell}^{(2)})$ または $\mathfrak{g}(D_{\ell+1}^{(2)})$.

また、$\mathfrak{g}(A_{2\ell-1}^{(1)})$ に folding を行うと $\mathfrak{g}(C_\ell^{(1)})$ が作用する Fock 空間が得られる。

対称群と A 型 Hecke 代数に関係するのは (1) であり、Fock 空間は $\mathfrak{g}(A_\ell^{(1)})$-加群となる。Lie 代数の作用を量子群の作用に変形した変形 Fock 空間も京都学派が導入し可解格子模型の研究に使われた。

Fock 空間も変形 Fock 空間も Young 図形を基底とする無限次元線形空間であり、Chevalley 生成元の作用が組合せ論的に定義される。またテンソル積を考えることで高階 Fock 空間と高階変形 Fock 空間も定義される。このとき真空が最高重み加群を生成するが、この最高重み加群の重み空間が Hecke 代数のブロック代数の加群圏の Grothendieck 群と同一視され、Chevalley 生成元の作用が誘導関手と制限関手の直和因子から定まる完全関手に持ちあがる、という描像が当初筆者が得た描像であり、この描像の基で円分 Hecke 代数の既約加群の分類等を行ったが、Brundan-Kleshchev[BK2] によりこの描像は円分箙 Hecke 代数の次数付加群圏による圏化に精密化された。

最高重み加群 $V(\Lambda)$ は可積分加群であるから重みの集合に Weyl 群が作用する。今の場合、Weyl 群はアフィン対称群

$$\big\langle \{s_i\}_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}}\mid s_is_js_i=s_js_is_j\ (j-i\pm1\in e\mathbb{Z}),\ s_is_j=s_js_i\ (\text{otherwise})\ \big\rangle.$$

である。Chuang-Rouquier[CR] は圏化の描像を精密化し、応用として次の定理を得た。

定理 12 (Chuang-Rouquier)**.** 重み $\Lambda-\beta$ と $\Lambda-\beta'$ がアフィン対称群の作用で移りあうならば $R^\Lambda(\beta)$ と $R^\Lambda(\beta')$ は導来同値である。

4.2. **圏化と次元公式.** 変形 Fock 空間の真空ベクトルは最高重みが Λ_0 の可積分加群 $V_q(\Lambda_0)$ を生成すること及び $R^{\Lambda_0}(\beta)$ の加群圏が重み空間 $V_q(\Lambda_0)_{\Lambda_0-\beta}$ の圏化を与えることから次の次元公式が得られる。

$$\dim_q e(\nu')R^{\Lambda_0}(\beta)e(\nu) = \sum_{\lambda\vdash n} K_q(\lambda,\nu')K_q(\lambda,\nu)$$

ただし、$K_q(\lambda,\nu)$ は剰余列（標準盤の数字の順に剰余を読んだもの）が $\mathrm{res}(T)=\nu$ をみたす標準盤 $T\in\mathrm{ST}(\lambda)$ すべてに対して $q^{\deg(T)}$ を足し上げたものである。$\deg(T)$ の定義は難しくないが説明のためには若干の準備が必要なためここでは省略する。

註 7. *KP hierarchy* の代わりに *BKP hierarchy* の *Fock* 空間を用いれば他のアフィン *Lie* 型 $R^{\Lambda_0}(\beta)$ に対する同様の次元公式が得られる。

註 8. 円分箙 *Hecke* 代数に移るもうひとつの利点は生成元の中に冪等元が豊富に存在することである。*Coxeter* 生成元で考えるかぎり *Hecke* 代数の冪等元の構成は極めて難しい。計算可能な冪等元が得られることでたとえばブロック代数の表現型の決定が可能になった。τ 傾理論を用いると順表現型ブロック代数の代数構造もわかる。

4.3. **圏化理論.** Chuang-Rouquier の $\mathfrak{sl}_2$ 圏化理論と対称群や Hecke 代数の加群圏による可積分最高重み $\mathfrak{g}(A^{(1)}_{e-1})$-加群の圏化は下記のように一般化されており、2 表現であることを確認するための定理（Control by K_0, Heisenberg categorification etc.）が知られている。$\mathfrak{g}$ を Kac-Moody Lie 代数、P を重み格子、$\Pi=\{\alpha_i\}_{i\in I}$ とする。Rouquier は、P が対象、1 射が $E_i1_\lambda:\lambda\to\lambda+\alpha_i, F_i1_\lambda:\lambda\to\lambda-\alpha_i$ $(\lambda\in P, i\in I)$ で生成され、2 射がある定義関係式をみたす

$$x:E_i1_\lambda\to E_i1_\lambda,\ \ \psi:E_iE_j1_\lambda\to E_jE_i1_\lambda,\ \ \eta:1_\lambda\to F_iE_i1_\lambda,\ \ \epsilon:E_iF_i1_\lambda\to 1_\lambda$$

で生成されている 2 圏 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ を導入した。A 型の場合は Khovanov-Lauda の定義した 2 圏 [KL2] もあり、両者の定義が同値であることは Brundan[B] によって証明された。$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ は Kac-Moody Lie 代数の圏化である。

定義 13. $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の 2 表現とは、圏の族 $\{\mathcal{R}_\lambda\}_{\lambda\in P}$ と関手

$$E_i1_\lambda:\mathcal{R}_\lambda\to\mathcal{R}_{\lambda+\alpha_i},\ \ F_i1_\lambda:\mathcal{R}_\lambda\to\mathcal{R}_{\lambda-\alpha_i},$$

の組であって、

(1) 自然変換 $xe(i):E_i\to E_i,\ \psi e(ij):E_iE_j\to E_jE_i$ が存在して、$xe(i)$ と $\psi e(ij)$ から定まる $x_ke(\nu),\ \psi_ke(\nu)$ が箙 *Hecke* 代数の関係式をみたす。

(2) F_i は E_i の右随伴関手である。

(3) $\eta_i:1\to F_iE_i$ を単位自然変換, $\epsilon_i:E_iF_i\to 1$ を余単位自然変換とするとき、

$$\sigma_{ij}=F_iE_j\epsilon_i\circ F_i\psi e(ij)F_i\circ\eta_iE_jF_i:E_jF_i\to F_iE_j$$

は $i\neq j$ のとき可逆。すなわち、$a\in\mathcal{R}_\lambda$ とすると

$$E_jF_i(a)\xrightarrow{(\eta_i)_{E_jF_i(a)}}F_iE_iE_j(F_i(a))\xrightarrow{F_i((\psi e(ij))_{F_i(a)})}F_iE_j(E_iF_i(a))\xrightarrow{F_iE_j((\epsilon_i)_a)}F_iE_j(a)$$

が可逆であることを要請する。

(4) $\lambda(\alpha_i^\vee)\geq 0$ のとき、次式で定める自然変換 $E_iF_i1_\lambda\to F_iE_i1_\lambda\oplus 1_\lambda^{\oplus\lambda(\alpha_i^\vee)}$

$$\left(\sigma_{ii},\epsilon_i,\epsilon_i\circ(xe(i)F_i),\ldots,\epsilon_i\circ(xe(i)F_i)^{\lambda(\alpha_i^\vee)-1}\right)^T$$

が可逆であることを要請する。ここで、$a\in\mathcal{R}_\lambda$ に対し $xe(i)F_i$ は

$$xe(i)_{F_i(a)}\in\mathrm{Hom}(E_iF_i(a),E_iF_i(a))$$

である。

(5) $\lambda(\alpha_i^\vee) \le 0$ のとき、次式で定める自然変換 $E_iF_i1_\lambda \oplus 1_\lambda^{\oplus -\lambda(\alpha_i^\vee)} \to F_iE_i1_\lambda$

$$\Big(\sigma_{ii}, \eta_i, F_ixe(i)\circ\eta_i, \ldots, (F_ixe(i))^{-\lambda(\alpha_i^\vee)-1}\circ\eta_i\Big)$$

が可逆であることを要請する。ここで、$a \in \mathcal{R}_\lambda$ に対し $F_ixe(i)$ は

$$F_i(xe(i)_a) \in \mathrm{Hom}(F_iE_i(a), F_iE_i(a))$$

である。

- 円分箙 Hecke 代数の加群圏が Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}(A_{e-1}^{(1)})$ の量子群の可積分最高重み加群の重み空間を圏化するという描像
- 可積分最高重み加群上の Weyl 群作用の導来同値への持ち上げ

もまた対称群の群代数と Hecke 代数に関する現代の常識と言ってよい。そして圏化理論は他にも一般線形群の等標数モジュラー表現論、BGG 圏 $\mathcal{O}$ 等に応用され、圏化理論に現れる標準基底を通じて Lie 超代数 $\mathfrak{gl}(m|n)$ の既約指標公式の研究も進んだ。

5. 簡約表示と柏原クリスタル

Coxeter 生成元に関する話題には対称群の簡約表示の理論があり、対称群の常識と思ってほしいので Edelman-Greene 対応の Morse-Schilling による一般化と柏原結晶 [BS] について少しだけ触れる。標語的にいえば次が成立する。

定理 14. $w \in S_n$ の簡約表示の集合を $R(w)$ とする。

(1) *Edelman-Greene* 対応という *Robinson-Schensted-Knuth* 対応と似た手続きで簡約表示に半標準盤と標準盤の対を対応させることができる。

(2) *15* ゲーム（*jeu de taquin*）を用いて $|R(w)|$ を計算することができる。

(3) 簡約表示の減少列分解の集合に柏原結晶構造が入り、*Edelman-Greene* 対応（の一般化）が結晶同型を与える。

よく知られているように、$[d] = \{1, 2, \ldots, d\}$ をアルファベットとする語長 n の語の集合を $[d]^n$ とするとき、Robinson-Schensted-Knuth 対応は Schensted insertion (bumping procedure) という操作によって半標準盤と標準盤の対を対応させる操作であり、行の数が d 以下のヤング図形 λ に対し、アルファベット $[d]$ の半標準盤の集合を $\mathrm{SST}_d(\lambda)$、$\mathrm{ST}(\lambda)$ を標準盤の集合とすると、全単射

$$[d]^n \simeq \bigsqcup_{\lambda\vdash n} \mathrm{SST}_d(\lambda)\times \mathrm{ST}(\lambda)$$

が得られる。柏原結晶とは特別な彩色有向グラフのことで、Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}$ をひとつ固定し、有向辺は単純ルートで彩色され、頂点は重み格子の元による重みが与えられている。柏原結晶の公理は省略するが、$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_d(\mathbb{C})$ ならば $\mathrm{SST}_d(\lambda)$ を頂点とする連結な柏原結晶が定義され、最高重み λ の既約 $\mathfrak{g}$-加群 $V(\lambda)$ の結晶基底に付随する柏原結晶 $B(\lambda)$ の実現を与えている。とくに $[d] = \mathrm{SST}_d((1))$ は $\mathfrak{g}$ の定義表現に付随する柏原結晶であり、この柏原結晶を B で表わす。柏原結晶のテンソル積規則により $[d]^n$ は柏原結晶 $B^{\otimes n}$ と同一視される。すなわち Robinson-Schensted-Knuth 対応の両辺に出てくる集合はともに彩色有向グラフの頂点集合と思うことができる。このとき彩色有向グラフとして同型かどうかが問題となるが京都学派は次の定理を与えた。

定理 15. *Robinson-Schensted-Knuth* 対応は次の結晶同型を与える。

$$B^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{\lambda\vdash n} B(\lambda)^{\oplus|\mathrm{ST}(\lambda)|}$$

Edelman-Greene 対応とは Schensted insertion の計算手続きを一か所変更したもので、具体的には $i, i+1$ を含む行に i を挿入したとき i が $i+1$ を追い出すのではなく行に変化がないまま次の行に $i+1$ が挿入される、という規則に変えたものである。このとき、Edelman-Greene[EG] は全単射

$$R(w) \simeq \bigsqcup_{\lambda \vdash \ell(w)} \mathrm{SST}_{n-1}(w, \lambda) \times \mathrm{ST}(\lambda)$$

を与えた。ただし $\mathrm{SST}_{n-1}(w, \lambda)$ は読みが w の簡約表示を与える半標準盤のなす $\mathrm{SST}_{n-1}(\lambda)$ の部分集合である。

定義 16. $w \in S_n$ の簡約表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ の深さ d の減少列分解とは

$$(i_1 \cdots i_{k_1})(i_{k_1+1} \cdots i_{k_2}) \cdots (i_{k_{d-1}+1} \cdots i_\ell)$$

と $i_1 \cdots i_\ell$ を連続する減少部分列 d 個に分けたものをいう。減少部分列は空集合でもよい。$w \in S_n$ の簡約表示の深さ d の減少列分解の集合を $B_d(w)$ とする。

$w \in S_n$ の簡約表示から得られる減少列分解に対し Edelman-Greene 対応

$$\emptyset \leftarrow i_\ell \cdots i_1 = (P, Q) \in \mathrm{SST}_{n-1}(w^{-1}, \lambda) \times \mathrm{ST}(\lambda)$$

を計算し、各 $i \in [d]$ に対し $Q \in \mathrm{ST}(\lambda)$ に書かれている $k_d - k_{d-i+1} + 1, \ldots, k_d - k_{d-i}$ を i に書き換えると次の全単射が得られる。ただし $k_0 = 0, k_d = \ell$ とする。

$$B_d(w) \simeq \bigsqcup_{\lambda \vdash \ell(w)} \mathrm{SST}_{n-1}(w^{-1}, \lambda) \times \mathrm{SST}_d(\lambda)$$

これが Edelman-Greene 対応の Morse-Schilling による一般化である。

定理 17 (Morse-Schilling)**.** $B_d(w)$ に柏原結晶の構造が入り、*Edelman-Greene* 対応（の一般化）により柏原結晶同型

$$B_d(w) \simeq \bigsqcup_{\lambda \vdash \ell(w)} B(\lambda)^{\oplus |\mathrm{SST}_{n-1}(w^{-1}, \lambda)|}$$

が得られる。

15 ゲームを用いた $|\mathrm{SST}_{n-1}(w, \lambda)|$ の求め方についての説明は省略する。

References

[B] J. Brundan, On the definition of Kac-Moody 2-category, Math. Ann. **364** (2016), 353–372.

[BK1] J. Brundan and S. Kleshchev, Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras, Invent. Math. **178** (2009), 451–484.

[BK2] J. Brundan and S. Kleshchev, Graded decomposition numbers for cyclotomic Hecke algebras, Adv. Math. **222** (2009), 1883–1942.

[BS] D. Bump and A. Schilling, Crystal Bases: Representations and Combinatorics, World Scientific. 2017.

[CR] J. Chuang and R. Rouquier, Derived equivalences for symmetric groups and $\mathfrak{sl}_2$-categorification, Ann. Math. **167** (2008), 245–298.

[EG] P. Edelman and C. Greene, Balanced tableaux, Adv. Math. **63** (1987), 42–99.

[KL1] M. Khovanov and A. Lauda, A diagrammatic approach to categorification of quantum groups, I, Representation Theory, **13** (2009), 309–347.

[KL2] M. Khovanov and A. Lauda, A categorification of quantum $\mathfrak{sl}(n)$, Quantum Top., **1** (2010), 1–92.

〒 565-0871 大阪府吹田市山田丘 1-5 大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

E-mail address: `ariki@ist.osaka-u.ac.jp`