

第63回代数学シンポジウム報告集

於 東京工業大学

2018年9月3日～9月6日

2018年度 第63回代数学シンポジウム 報告集

本書は平成30年9月に東京工業大学で開催された第63回代数学シンポジウムの報告集です.

記

日時：2018年9月3日(月)～9月6日(木)
会場：東京工業大学本館地階 H101 講義室
会場責任者：内藤 聡
プログラム責任者：[群論・表現論] 佐垣 大輔, 田辺 顕一郎
[数論] 今井 直毅, 都築 正男
[代数幾何] 高橋 篤史, 吉永 正彦
[環論] 高木 俊輔, 増岡 彰
シンポジウム責任者：藏野 和彦 (評議員)

プログラム

9月3日(月)
9:45-10:45 田中 太初 (東北大学 情報科学研究科)
「距離正則グラフの Terwilliger 代数の拡張について」
11:00-12:00 島倉 裕樹 (東北大学 情報科学研究科)
「中心電荷 2 4 の正則頂点作用素代数の分類について」
13:30-14:30 中筋 麻貴 (上智大学 理工学部)
「Schur 多重ゼータ関数とその特殊値について」
14:45-15:45 跡部 発 (東京大学 数理科学研究科)
「保型形式のリフティングの最近の進展について」
16:00-17:00 宮谷 和堯 (広島大学 理学研究科)
「p-進超幾何微分方程式と p-進 Liouville 数」

9月4日(火)
(*9:45-10:45 丹原 大介 (弘前大学 理工学研究科)
「hom 関手の群による商について」
(*11:00-12:00 谷崎 俊之
「1 のベキ根における量子群の表現論」
(*13:30-14:30 権 寧魯 (九州大学 数理学研究院)
「セルバーグゼータ関数と素測地線定理の現在」
(*14:45-15:45 中村 博昭 (大阪大学 理学研究科)
「グロタンディーク・タイヒミュラー理論の話題から」
16:00-17:00 越川 皓永 (京都大学 数理解析研究所)
「半安定還元の場合の A_{inf} コホモロジー」

9月5日(水)
(*9:45-10:45 向井 茂 (京都大学 数理解析研究所)
「K3, Enriques, Coble 曲面- 無限自己同型群を中心として」
(*11:00-12:00 徳永 浩雄 (首都大学東京 理学研究科)
「平面代数曲線のトポロジーと 2 次被覆の "arithmetic"」
(*13:30-14:30 梶浦 宏成 (千葉大学 理学研究院)
「有限次元 A_{∞} 代数の表現論」
(*14:45-15:45 西田 康二 (千葉大学 理学研究院)
「シンボリックリース環のネータ性について」
16:00-17:00 安田 健彦 (東北大学 理学研究科)
「Cohen-Macaulayness of klt singularities in positive characteristics」

9月6日(木)

9:45-10:45 岩成 勇 (東北大学 理学研究科)

「非可換代数多様体のホッジ構造と周期写像について」

11:00-12:00 佐野 太郎 (神戸大学 理学研究科)

「対数的 Calabi-Yau 多様体の変形について」

13:30-14:30 澁川 陽一 (北海道大学 理学研究院)

「ヤン・バクスター方程式からホップ重代数へ」

14:45-15:45 大関 一秀 (山口大学 創成科学研究科)

「正規化されたヒルベルト関数について」

16:00-17:00 原伸生 (東京農工大学 工学研究院)

「On Frobenius summands of graded rings」

(*)印付きの講演は、専門分野以外の聴衆も対象とした、サーベイなどを含む講演です。

目次

田中 太初	距離正則グラフの Terwilliger 代数の拡張について	6
島倉 裕樹	中心電荷 2 4 の正則頂点作用素代数の分類について	18
中筋 麻貴	Schur 多重ゼータ関数とその特殊値について	27
跡部 発	保型形式のリフティングの最近の進展について	39
丹原 大介	hom 関手の群による商について	45
谷崎 俊之	1 のベキ根における量子群の表現論	55
権 寧魯	セルバーグゼータ関数と素測地線定理の現在	72
中村 博昭	グロタンディーク・タイヒミュラー理論の話題から	92
越川 皓永	半安定還元の場合の A_{inf} コホモロジー	102
向井 茂	$K3$, Enriques, Coble 曲面- 無限自己同型群を中心として	111
徳永 浩雄	平面代数曲線のトポロジーと2次被覆の "arithmetic"	119
梶浦 宏成	有限次元 A_{∞} 代数の表現論	129
西田 康二	On the Noetherian property of symbolic Rees rings	142
安田 健彦	Cohen-Macaulayness of klt singularities in positive characteristics	154
岩成 勇	非可換代数幾何における周期写像について	159
佐野 太郎	対数的 Calabi-Yau 多様体の変形	175
澁川 陽一	ヤン・バクスター方程式からホップ歪代数へ	185
大関 一秀	正規化されたヒルベルト関数について	191
原 伸生	Frobenius summands of graded rings	200

距離正則グラフの Terwilliger 代数の拡張について*

田中 太初

東北大学大学院情報科学研究科

純粋・応用数学研究センター

1 序

本稿で論じる Q -多項式距離正則グラフは、有限古典群の等質空間となる例を数多く含む非常に豊かな研究対象である。特に、これらのグラフの持つ代数的性質が 1 変数 (q -)超幾何直交多項式の階層である **Askey スキーム** [22, 23] を特徴付けることが 1982 年に Leonard [27] により示されている。この結果を受けて 1984 年の坂内–伊藤の本 [3] では、「 Q -多項式距離正則グラフを全て決定する」という大きな目標が提示された。この目標は現在でもまだ達成されてはいないが、これまでに様々な飛躍的進展があった。これらの成果を概説した文献としては、[3] に加えて [1, 4, 10] を挙げる。

代数的グラフ理論ではグラフの隣接代数を考察する。これはグラフの隣接行列で生成される (\mathbb{C} 上) 全行列環の可換部分代数であり、グラフの大域的な性質を反映する。これに対して Terwilliger [41, 42, 43] は、グラフの各頂点について現在 **Terwilliger 代数** と呼ばれる非可換半単純行列代数を導入した。 Q -多項式距離正則グラフの場合には、Terwilliger 代数は隣接行列、及び固定した頂点に応じて定まる「双対隣接行列」により生成され、グラフの局所的構造を良く反映する。また、ここでは詳しくは述べないが、隣接行列と双対隣接行列は Terwilliger 代数の各既約加群上に所謂**三重対角対** [19] として作用する。三重対角対については、アフィン量子代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の表現論と絡んだ非常に深い理論が構築されており ([18, 20] 等を参照)、今後これらの成果を Q -多項式距離正則グラフの構造の研究に順次応用していくことになる。

非同形な Q -多項式距離正則グラフの組で (構造定数まで込めて) 隣接代数が同形となるものは、多くの無限系列が存在する。Terwilliger 代数は隣接代数より遥かに多くの情報を含むものの、Terwilliger 代数のレベルでも区別できない Q -多項式距離正則グラフの組もまた、二部グラフの場合に無限系列が知られている。Terwilliger 代数を一般化した代数として、鈴木 [33] は頂点ではなく、各「頂点部分集合」に対する「Terwilliger 代数」を導入した。本稿では、頂点部分集合として適切なものを選ぶことにより、 Q -多項式距離正則グラフの (頂点に対する) Terwilliger 代数の理論が、三重対角対との関連も含めてほぼそのまま一般化できることを紹介する。

*本稿の内容は田中利恵氏及び渡邊悠太氏との準備中の論文 [39] に基づく。

2 Q -多項式距離正則グラフとその Terwilliger 代数

本稿を通して、 $\Gamma = (X, R)$ は連結有限単純グラフとする。ここで X は頂点集合、 R は辺集合であり、各辺は X の 2 点部分集合である。隣接した 2 頂点間の距離を 1 として、 X 上に自然に距離 ∂ が定まる。グラフの直径 D を

$$D := \max\{\partial(x, y) : x, y \in X\}$$

とし、各頂点 $x \in X$ に対して

$$\Gamma_i(x) := \{y \in X : \partial(x, y) = i\} \quad (0 \leq i \leq D)$$

とおく。次の性質を満たす整数 a_i, b_i, c_i ($0 \leq i \leq D$) が存在するとき、 Γ を距離正則グラフと呼ぶ：

$\partial(x, y) = i$ を満たす全ての $x, y \in X$ について

$$|\Gamma_{i-1}(x) \cap \Gamma_1(y)| = c_i, \quad |\Gamma_i(x) \cap \Gamma_1(y)| = a_i, \quad |\Gamma_{i+1}(x) \cap \Gamma_1(y)| = b_i$$

が成り立つ。

これは組合せ的な定義であるが、 X がグラフの自己同型群 $\text{Aut } \Gamma$ の 2 点等質空間となっているとき、すなわち

$$\partial(x, y) = \partial(x', y') \iff \exists g \in \text{Aut } \Gamma \text{ s.t. } x' = gx, y' = gy$$

が成り立つときには明らかに満たされる (この場合特に距離可移グラフと呼ぶ)。距離正則グラフは常に正則グラフであり、その次数 k は

$$k = b_0 = |\Gamma_1(x)|$$

で与えられる。また、次を距離正則グラフ Γ の交叉列と呼ぶ：

$$\iota(\Gamma) := \{b_0, b_1, \dots, b_{D-1}; c_1, c_2, \dots, c_D\}$$

ここで、等式 $a_i + b_i + c_i = k$ によって交叉列から a_i 達が復元できることに注意する。

例 1. $X = \{0, 1\}^D$ とし、2 頂点 $x = (x_1, \dots, x_D), y = (y_1, \dots, y_D) \in X$ は 1ヶ所だけ異なっているときに辺で結ばれるとしてグラフ Γ を定めると、 Γ は距離正則グラフとなる。このグラフを $\Gamma = Q_D$ と表し、 D 次元超立方体と呼ぶ。 Q_D は実際距離可移グラフであり、 B 型 Weyl 群 $\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_D$ が作用する。また、交叉列は次で与えられる：

$$\iota(Q_D) = \{D, \dots, 2, 1; 1, 2, \dots, D\}$$

なお、 Q_{D-1} は誘導部分グラフとして自然に Q_D に埋め込まれることに注意する：

$$Q_1 \hookrightarrow Q_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow Q_{D-1} \hookrightarrow Q_D \hookrightarrow \dots$$

仮定 2. 以後、 Γ は常に距離正則グラフとする。

行と列が頂点集合 X で添え字付けされた \mathbb{C} 上の行列全体の集合 (\mathbb{C} -代数) を $\mathbb{C}^{X \times X}$ と書く。 Γ の第 i 距離行列 $A_i \in \mathbb{C}^{X \times X}$ を次で定める：

$$(A_i)_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{if } \partial(x,y) = i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (x, y \in X)$$

特に、 $A_0 = I$ (単位行列) である。また、 A_1 は Γ の通常の隣接行列であり、

$$A := A_1$$

と略記する。距離正則グラフの定義の代数的な意味は以下の通りである：

$$A \cdot A_i = b_{i-1}A_{i-1} + a_iA_i + c_{i+1}A_{i+1} \quad (0 \leq i \leq D) \quad (1)$$

ただし $A_{-1} = A_{D+1} := 0$ である。 Γ の隣接代数を

$$\mathbf{A} := \mathbb{C}[A] \subset \mathbb{C}^{X \times X}$$

と書くことにすると、上の3項漸化式により \mathbf{A} は部分空間として

$$\mathbf{A} = \langle A_0, A_1, \dots, A_D \rangle$$

と表される。特に、隣接行列 A は丁度 $D + 1$ 個の異なる固有値

$$\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_D \in \mathbb{R}$$

を持つことが分かる。また、基底 A_0, A_1, \dots, A_D に関する \mathbf{A} の構造定数は交叉列 $\iota(\Gamma)$ によって完全に決定されることに注意する。 Γ の次数 k は常に A の固有値であり、以後常に

$$\theta_0 = k$$

とおく。固有値 θ_ℓ に関する A の固有空間への直交射影を $E_\ell \in \mathbb{C}^{X \times X}$ と表す。なお、 $J \in \mathbb{C}^{X \times X}$ を全ての成分が1の行列とすると、 $E_0 = |X|^{-1}J$ となる。これら $D + 1$ 個の直交射影 E_0, E_1, \dots, E_D は隣接代数 \mathbf{A} の (中心) 原始幂等元である：

$$\mathbf{A} = \langle E_0, E_1, \dots, E_D \rangle$$

補足 3. Γ が距離可移グラフのときは、 \mathbf{A} は $\text{Aut } \Gamma$ の X 上の置換表現の中心化代数と一致する。また、この場合置換表現は無重複であり、隣接行列 A の各固有空間は $\text{Aut } \Gamma$ の既約表現を提供する。

次の性質を満たす実数 $a_\ell^*, b_\ell^*, c_\ell^*$ ($0 \leq \ell \leq D$) が存在するとき、 Γ は順序 $\{E_\ell\}_{\ell=0}^D$ (もしくは $\{\theta_\ell\}_{\ell=0}^D$) に関して Q -多項式であるという：

$$b_{\ell-1}^* c_\ell^* \neq 0 \quad (1 \leq \ell \leq D) \text{ かつ}$$

$$|X| E_1 \circ E_\ell = b_{\ell-1}^* E_{\ell-1} + a_\ell^* E_\ell + c_{\ell+1}^* E_{\ell+1} \quad (0 \leq \ell \leq D) \quad (2)$$

が成り立つ。ただし $E_{-1} = E_{D+1} := 0$ であり、 \circ は成分ごとの積を表す。

これは 1973 年に Delsarte [11] により導入された極めて重要な概念であり、これによって Delsarte は符号と組合せデザインを双対的な対象として統一的に議論することに成功したのである。この「Delsarte 理論」の最近の進展に関しては [1, 12, 29] 等を参照されたい。なお、 $E_1 \circ E_\ell$ は $E_1 \otimes E_\ell$ の主小行列であり、従って半正定値であることから、 $a_\ell^*, b_\ell^*, c_\ell^*$ 達は全て非負であることが分かる (**Krein 条件**)。

例 4. 超立方体 $\Gamma = Q_D$ は降順 $\theta_0 > \theta_1 > \dots > \theta_D$ に関して Q -多項式である。

補足 5. 実際 Q_D は、 $\theta_0 > \theta_1 > \dots > \theta_D$ としたときに順序 $\theta_0, \theta_{D-1}, \theta_2, \theta_{D-3}, \dots$ に関して Q -多項式となる。一般に、サイクルを除く (すなわち $k \geq 3$ となる) 距離正則グラフは、 Q -多項式となる固有値の順序を高々二つしか持たないことが知られている [13, 32]。

仮定 6. 以後、 Γ は常に順序 $\{E_\ell\}_{\ell=0}^D$ に関して Q -多項式であるとする。

3 項漸化式 (1), (2) から二組の 1 変数直交多項式系 $\{f_i\}_{i=0}^D, \{f_\ell^*\}_{\ell=0}^D$ が得られるが、冒頭で述べたように次の結果が知られている：

定理 7 (Leonard [27], Bannai–Ito [3]). *The f_i and the f_ℓ^* belong to the Askey scheme.*

Leonard [27] はパラメータ q が ± 1 と異なる場合を主に考察して Askey scheme の最上位 (${}_4\phi_3$) に位置する Askey–Wilson 多項式 (もしくは q -Racah 多項式) を捉えたが、 $q = \pm 1$ の場合も含めた極限等の詳細な考察は [3] で成された。 $q = -1$ のときの直交多項式 $\{f_i\}_{i=0}^D, \{f_\ell^*\}_{\ell=0}^D$ は現在坂内–伊藤多項式と呼ばれ、Vinet や Zhedanov 等により近年活発に研究されている ([16] 等を参照)。

次に、Terwilliger 代数 [41, 42, 43] の定義を述べる。以下、頂点 $x \in X$ を一つ固定し、第 i 双対冪等元 $E_i^* = E_i^*(x) \in \mathbb{C}^{X \times X}$ を次で定める：

$$(E_i^*)_{y,z} = \begin{cases} 1 & \text{if } y = z \in \Gamma_i(x) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (y, z \in X)$$

頂点 x に関する Terwilliger 代数 $\mathbf{T} = \mathbf{T}(x)$ は、隣接行列 A と双対冪等元 $E_0^*, E_1^*, \dots, E_D^*$ で生成される $\mathbb{C}^{X \times X}$ の部分代数である：

$$\mathbf{T} := \mathbb{C}[A, E_0^*, E_1^*, \dots, E_D^*] \subset \mathbb{C}^{X \times X}$$

補足 8. Γ が距離可移グラフのときは、 \mathbf{T} は $\text{Aut } \Gamma$ に於ける x の固定部分群の X 上の置換表現の中心化代数の部分代数である。 Q_D を含むいくつかの主要な無限系列について、これら二つの代数が実際一致することが示されている ([17, 34] 等)。

\mathbf{T} の定義は距離正則グラフとは限らない一般のグラフに対しても意味をなすが、仮定 2, 6 の下で、さらに双対隣接行列 $A^* = A^*(x) \in \mathbb{C}^{X \times X}$ を導入する：

$$(A^*)_{y,z} = \begin{cases} |X|(E_1)_{x,y} & \text{if } y = z \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (y, z \in X)$$

このとき、次が成り立つ：

補題 9. The Terwilliger algebra \mathbf{T} is generated by A and A^* , i.e.,

$$\mathbf{T} = \mathbb{C}[A, A^*].$$

Proof. 隣接代数 \mathbf{A} が E_0, E_1, \dots, E_D を線形基底に持つことに注意すると、3項漸化式 (2) より距離行列 A_0, A_1, \dots, A_D 達は $|X|E_1$ の \circ に関する多項式で書けることが分かる。これらの行列の等式の第 x 列を取り出して対角行列を作ると、 $E_0^*, E_1^*, \dots, E_D^*$ を A^* の (通常の積に関する) 多項式として表す等式になる。□

系 10. The matrices A and A^* act on each irreducible \mathbf{T} -module as a tridiagonal pair.

ここで、有限次元ベクトル空間 $V = \mathbb{C}^n$ 上の対角化可能な線形変換 A, A^* は、以下を満たす A の固有空間の順序 $\{V_\ell\}_{\ell=0}^d$ と A^* の固有空間の順序 $\{V_i^*\}_{i=0}^{d^*}$ が存在するときに三重対角対と呼ばれる [19] :

V は $\mathbb{C}[A, A^*]$ -加群として既約であり、各 $0 \leq i \leq d^*$ と $0 \leq \ell \leq d$ に対して

$$AV_i^* \subset V_{i-1}^* + V_i^* + V_{i+1}^*, \quad A^*V_\ell \subset V_{\ell-1} + V_\ell + V_{\ell+1} \quad (3)$$

が成り立つ。ただし $V_{-1} = V_{d+1} = V_{-1}^* = V_{d^*+1}^* := 0$ である。

系 10 では、条件 (3) はもちろん 3 項漸化式 (1), (2) から直ちに従うのである。いずれにせよ、系 10 は Q -多項式距離正則グラフとその Terwilliger 代数の定義から直接的に導かれるほぼ自明な結果であることを強調したい。

三重対角対の分類はパラメータ q が 1 の冪根でない場合には既に完成している [18, 20]。また、Terwilliger 代数の表現論を用いた Q -多項式距離正則グラフの構造の研究もこれまでに多く成されている。例えば、 Q -多項式距離正則二部グラフについては、Caughman [7] が $D \geq 12$ の場合に交叉列を (ほぼ) 決定した。この結果は最近 Miklavič [30] により $D \geq 9$ まで拡張されている。また、所謂擬分割グラフの分類が Gavriilyuk–Koolen [14] により完成された。彼らはある種の既約 \mathbf{T} -加群に付随する Terwilliger 多項式と呼ばれる次数 4 の多項式の性質を巧妙に用いたのであるが、この手法は最近他のクラスの Q -多項式距離正則グラフに対しても大きな成果を上げている [15]。

3 Q -多項式距離正則二部グラフの辺に関する Terwilliger 代数

前節では Q -多項式距離正則グラフとその Terwilliger 代数に関する基本的な事項を述べた。特に、 Q -多項式距離正則二部グラフに関する前述の Caughman [7] の強力な結果は、これらのグラフの Terwilliger 代数の既約加群に関する彼自身の研究 [6] に基づいているが、一方で [6] を吟味すると、実際 Q -多項式距離正則二部グラフについては、既約 \mathbf{T} -加群の標準加群 \mathbb{C}^X に於ける重複度や、現れる三重対角対の型まで込めて、 \mathbf{T} の構造が完全に交叉列によって決まってしまうことが分かる。このような特殊な状況になっているからこそ交叉列の決定が可能となったとも言えるが、このクラスのグラフの分類の完成を目指す上で、道具が \mathbf{T} だけでは足りないことをこの事実は意味している。

超立方体 Q_D は二部グラフであるが、他の無限系列として、 D 型の直交群 $\text{PGO}_{2D}^+(\mathbb{F}_q)$ の等質空間となる二部双対極グラフと呼ばれる距離可移グラフがある。二部双対極グラフと同じ交叉列を持つ例として **Hemmeter** グラフの系列があるが、これらは距離可移グラフではない。Hemmeter グラフ以外に同じ交叉列を持つ Q -多項式距離正則二部グラフを特定することが目下の目標である。

仮定 11. 以後、本節では Γ はさらに二部グラフであるとする。

上記の目標に取り組む上で、頂点に関する通常の Terwilliger 代数 $\mathbf{T} = \mathbf{T}(x)$ では二部双対極グラフと (例えば) Hemmeter グラフを区別できないので、新たな代数を導入する。辺 $e \in R$ を固定し、

$$\Gamma_i(e) := \{y \in X : \partial(e, y) = i\} \quad (0 \leq i \leq D-1)$$

とおく。ちなみに、 Γ が二部グラフであることから 3 辺の長さが $1, D, D$ となる三角形は存在しないので、 $\Gamma_D = \emptyset$ である。頂点の場合と同様に、第 i 双対冪等元 $E_i^* = E_i^*(e) \in \mathbb{C}^{X \times X}$ を次で定める：

$$(E_i^*)_{y,z} = \begin{cases} 1 & \text{if } y = z \in \Gamma_i(e) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (y, z \in X)$$

辺 e に関する Terwilliger 代数 $\mathbf{T} = \mathbf{T}(e)$ は、隣接行列 A と双対冪等元 $E_0^*, E_1^*, \dots, E_{D-1}^*$ で生成される $\mathbb{C}^{X \times X}$ の部分代数である：

$$\mathbf{T} := \mathbb{C}[A, E_0^*, E_1^*, \dots, E_{D-1}^*] \subset \mathbb{C}^{X \times X}$$

さらに、双対隣接行列 $A^* = A^*(e) \in \mathbb{C}^{X \times X}$ を

$$A^* = \frac{1}{2} \sum_{x \in e} A^*(x)$$

と定めると、次が示される：

定理 12. *The Terwilliger algebra \mathbf{T} is generated by A and A^* , i.e.,*

$$\mathbf{T} = \mathbb{C}[A, A^*],$$

unless $\Gamma = Q_D$ and the Q -polynomial ordering is the one described in Remark 5.

系 13. *The matrices A and A^* act on each irreducible \mathbf{T} -module as a tridiagonal pair unless Γ is the above exception.*

主張に例外が存在し、かつ特定されていることから推察されるように、これらは定理 9 や系 10 とは異なり全くもって非自明な結果であり、Leonard の定理 (定理 7) を線形代数学の立場から再構成した概念である **Leonard 対** [44, 45, 46] の理論を用いて証明される [36, 37]。なお、上記の例外は Askey スキームに於けるパラメータ $q = -1$ の場合に該当する。このような Q -多項式距離正則グラフは Terwilliger [40] により 3 種類の無限系列に限ることが示されており、その中で二部グラフである系列は例外に挙げた 1 種類のみである

(講演では例外を2種類としたが、誤りである)。ちなみに、Leonard 対は実際、三重対角対で固有空間 V_ℓ, V_ℓ^* 達の次元が全て1となる場合である。

二部双対極グラフの自己同型群は辺集合 R 上に可移に作用するが、Hemmeter グラフの場合は二つの軌道に分かれる。従って Hemmeter グラフの場合、 $\mathbf{T} = \mathbf{T}(e)$ の構造は e をどちらの軌道から取るかに依存する。実は、これと類似の状況は前節に議論した頂点の場合にも見出される。すなわち、Grassmann グラフの系列 (の特別な場合) と、Van Dam と Koolen [9] により 2005 年に発見された捻れ Grassmann グラフの系列は同じ交叉列を持つが、前者の自己同型群は頂点集合 X 上に可移に作用する一方、後者の場合は二つの軌道に分かれる。Bang-Fujisaki-Koolen [2] は、頂点に関する捻れ Grassmann グラフの Terwilliger 代数 $\mathbf{T}(x)$ の構造が x の含まれる軌道によって著しく異なることを示している。

ここで、 $\mathbf{T} = \mathbf{T}(e)$ に関する結果を一つ紹介したい。

仮定 14. 以後、本節では Γ は定理 25 の例外ではないとする。すなわち、 $\Gamma = \mathcal{Q}_D$ の場合については、 Q -多項式となる固有値の順序としては常に $\theta_0 > \theta_1 > \dots > \theta_D$ を考える。

W を既約 \mathbf{T} -加群とする。

補題 15. *There exist non-negative integers $\varepsilon, \varepsilon^*$, and d such that*

$$\{i : E_i^* W \neq 0\} = \{\varepsilon, \varepsilon + 1, \dots, \varepsilon + d\}, \quad \{\ell : E_\ell W \neq 0\} = \{\varepsilon^*, \varepsilon^* + 1, \dots, \varepsilon^* + d\}.$$

これら三つのパラメータに関して、例えば次のような定理が証明される：

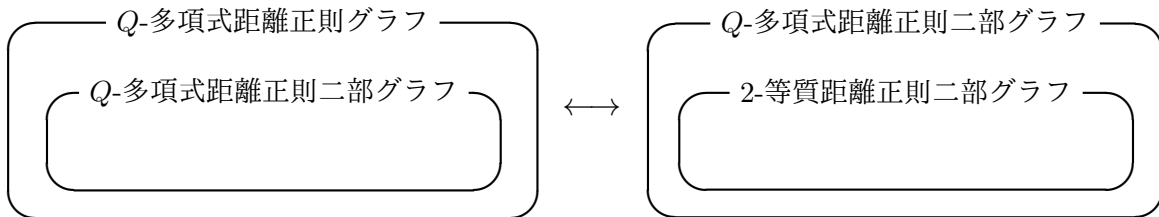
定理 16. *We have $2\varepsilon + d \geq D - 1$. Moreover, if equality holds then we have*

$$\dim E_i^* W = 1 \quad (\varepsilon \leq i \leq \varepsilon + d), \quad \dim E_\ell W = 1 \quad (\varepsilon^* \leq \ell \leq \varepsilon^* + d),$$

and the structure of W is determined by $\iota(\Gamma)$, ε , and ε^ .*

この定理は [6, 41, 42] の結果の一部に対応するものであるが、前節で述べた Terwilliger 多項式の理論もまた $\mathbf{T}(e)$ の場合に移植される。これらの道具を駆使して Q -多項式距離正則二部グラフの構造の解析を押し進めることを目論んでいるのであるが、本節の残りでは、二部グラフの場合の $\mathbf{T}(e)$ の理論と一般の場合の $\mathbf{T}(x)$ の理論との類似を示す好例をもう一つ紹介したい。

Q -多項式距離正則二部グラフの場合は $\mathbf{T}(x)$ の構造が交叉列によって完全に決まってしまうことを述べたが、他の種々の観点からもこのクラスは Q -多項式距離正則グラフ全体の中で特殊だと言える。一方、 Q -多項式距離正則二部グラフの中でも、2-等質グラフと呼ばれる同様に特殊なクラスがある。すなわち、下記の類似が成り立つ：



この類似は例えば [21, 28] 等に見出される。なおここで、次の性質を満たす整数 $p_{i,j;r,s}$ ($0 \leq i, j, r, s \leq D$) が存在するとき、 Γ は2-等質であるという：

$\partial(x, y) = 2$ を満たす全ての $x, y \in X$ について

$$|\Gamma(z) \cap \Gamma_r(x) \cap \Gamma_s(y)| = p_{i,j;r,s}$$

が任意の $z \in \Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ に対して成り立つ。

この定義は一見複雑であるが、次が成立する：

定理 17 (Curtin [8]). *A bipartite distance-regular graph is 2-homogeneous if and only if it is Q -polynomial and antipodal.*

Γ が対蹠的であるとは、(仮定 6 の下では) $\Gamma_D(x) = 1$ 、すなわち各頂点に対して最も遠い頂点が一意的に定まることである。2-等質グラフは結び目の不変量を与えるスピンモデルの研究から生じた概念であり、 $D = 5$ の場合を除き既に分類されている：

定理 18 (Nomura [31]). *If Γ is 2-homogeneous then Γ is one of the following: (i) the D -cube \mathcal{Q}_D ; (ii) the complete bipartite graph $K_{k,k}$ minus a perfect matching ($D = 3$); (iii) a Hadamard graph ($D = 4$); (iv) $D = 5$ and*

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (1, \mu, k - \mu, k - 1, k), \quad b_i = c_{5-i} \quad (0 \leq i \leq 4),$$

where $k = t(t^2 + 3t + 1)$, $\mu = t(t + 1)$, and $2 \leq t \in \mathbb{Z}$.

前述の Caughman [6] の結果の類似として、次の結果が成り立つ：

定理 19. *If Γ is 2-homogeneous, then $\iota(\Gamma)$ determines the structure of $\mathbf{T} = \mathbf{T}(e)$.*

4 Q -多項式距離正則グラフの子孫に関する Terwilliger 代数

前節では Q -多項式距離正則二部グラフの辺に関する Terwilliger 代数を考察したが、実際準備中の論文 [39] ではより一般的な状況で理論を展開しており、前節の内容はその特殊(ただし重要な)ケースである。本稿では最後にこの一般論について簡単に紹介する。以下では Γ は特に二部グラフとは仮定しない。

$Y \subset X$ を空でない頂点部分集合とし、 $\chi \in \mathbb{C}^X$ をその特性ベクトルとする：

$$\chi_z = \begin{cases} 1 & \text{if } z \in Y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (z \in X)$$

Y の幅 w 及び双対幅 w^* を次で定める [5]：

$$w = \max\{i : \chi^\top A_i \chi \neq 0\}, \quad w^* = \max\{\ell : \chi^\top E_\ell \chi \neq 0\}$$

幅 w は Y の 2 頂点間の距離の最大値である。一方、双対幅 w^* の意味は分かり難いかもかもしれないが、このように隣接行列 A_0, A_1, \dots, A_D と原始冪等元 E_0, E_1, \dots, E_D を双対的な対象と捉えることが、Delsarte 理論 [11] の成功の鍵であった。パラメータ w と w^* に関する Brouwer–Godsil–Koolen–Martin [5] の理論は Delsarte 理論とある意味で対を成すものである。また、前節と同様にして Y に関する Terwilliger 代数 $\mathbf{T} = \mathbf{T}(Y)$ が定義できるが、Brouwer 達の理論で w にまつわる部分については、鈴木 [33] によって $\mathbf{T}(Y)$ の既約加群の観点からさらに一般化されている。以下は Brouwer 達の主結果の一つである：

定理 20 (Brouwer et al. [5]). *We have $w + w^* \geq D$.*

この定理で等号が成立する場合に Y が様々な良い性質を持つことも示されている。次はその一例である：

定理 21 (Brouwer et al. [5], T. [37]). *If $w + w^* = D$, then the subgraph induced on Y is a Q -polynomial distance-regular graph with diameter w , with at most three exceptions of Γ for given D and w .*

Brouwer 達は $w + w^* = D$ かつ誘導部分グラフが連結であれば上の結論が得られることを示したが、[37] で筆者は誘導部分グラフが連結でなくなるような Γ の例が各 D と w について高々三つであることを証明したのである。これらの例外はやはり Askey スキームに於けるパラメータ $q = -1$ の場合に該当する。この定理を念頭に置き、 $w + w^* = D$ を満たす Y を Γ の子孫と呼ぶことにする。

例 22. 一点集合 $\{x\}$ は常に Γ の子孫である ($w = 0$)。

例 23. Γ が二部グラフならば、任意の辺 $e \in R$ は Γ の子孫である ($w = 1$)。

例 24. $\Gamma = Q_D$ のとき、各 $0 \leq i \leq D$ に対して $Q_i \subset Q_D$ は子孫である ($w = i$)。

子孫の概念は非常に本質的であり、極値集合論で有名な **Erdős–Ko–Rado** の定理の一般化等でも重要な役割を果たす [35, 38]。子孫の構造等に関する詳細については [37] を参照されたい。 Γ の子孫 Y に対して、双対隣接行列 $A^* = A^*(Y) \in \mathbb{C}^{X \times X}$ を

$$A^* = \frac{1}{|Y|} \sum_{x \in Y} A^*(x)$$

と定めると、前節と同様に以下の定理が示される：

定理 25. *Suppose that Y is a descendent of Γ . Then the Terwilliger algebra $\mathbf{T} = \mathbf{T}(Y)$ is generated by A and A^* , i.e.,*

$$\mathbf{T} = \mathbb{C}[A, A^*],$$

unless Γ is one of at most three exceptions in Theorem 21.

系 26. *Suppose that Y is a descendent of Γ . Then the matrices A and A^* act on each irreducible \mathbf{T} -module as a tridiagonal pair, unless Γ is one of at most three exceptions in Theorem 21.*

これらの結果を基礎として、頂点に関する従来の Terwilliger 代数 $\mathbf{T}(x)$ の理論を子孫 Y に関する Terwilliger 代数 $\mathbf{T}(Y)$ に拡張することが可能になるのである。なお、この拡張理論の興味深い応用例として、 $w = 1$ の子孫 Y (所謂 **Delsarte クリーク**) とその 1 頂点 $x \in Y$ を取り、二種類の Terwilliger 代数 $\mathbf{T}(x) = \mathbb{C}[A, A^*(x)]$ と $\mathbf{T}(Y) = \mathbb{C}[A, A^*(Y)]$ で生成されるさらに大きな非可換半単純行列代数 $\mathbb{C}[A, A^*(x), A^*(Y)]$ の既約加群を考察することで、 (C_1^Y, C_1) 型ダブルアフィンヘッケ環や非対称 **Askey–Wilson** 多項式、及びこれらのある種の退化との関連を見出すことができる [24, 25, 26]。

参考文献

- [1] 坂内 英一, 坂内 悦子, 伊藤 達郎, 代数の組合せ論入門, 共立出版, 2016 年.
- [2] S. Bang, T. Fujisaki, and J. H. Koolen, The spectra of the local graphs of the twisted Grassmann graphs, *European J. Combin.* 30 (2009) 638–654.
- [3] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic combinatorics I: Association schemes*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1984.
- [4] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, and A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [5] A. E. Brouwer, C. D. Godsil, J. H. Koolen, and W. J. Martin, Width and dual width of subsets in polynomial association schemes, *J. Combin. Theory Ser. A* 102 (2003) 255–271.
- [6] J. S. Caughman IV, The Terwilliger algebras of bipartite P - and Q -polynomial schemes, *Discrete Math.* 196 (1999) 65–95.
- [7] J. S. Caughman IV, Bipartite Q -polynomial distance-regular graphs, *Graphs Combin.* 20 (2004) 47–57.
- [8] B. Curtin, 2-Homogeneous bipartite distance-regular graphs, *Discrete Math.* 187 (1998) 39–70.
- [9] E. R. van Dam and J. H. Koolen, A new family of distance-regular graphs with unbounded diameter, *Invent. Math.* 162 (2005) 189–193.
- [10] E. R. van Dam, J. H. Koolen, and H. Tanaka, Distance-regular graphs, *Electron. J. Combin.* (2016) #DS22; arXiv:1410.6294.
- [11] P. Delsarte, An algebraic approach to the association schemes of coding theory, *Philips Res. Rep. Suppl. No.* 10 (1973).
- [12] P. Delsarte and V. I. Levenshtein, Association schemes and coding theory, *IEEE Trans. Inform. Theory* 44 (1998) 2477–2504.
- [13] G. A. Dickie, Q -polynomial structures for association schemes and distance-regular graphs, thesis, University of Wisconsin, 1995.
- [14] A. L. Gavrilyuk and J. H. Koolen, The Terwilliger polynomial of a Q -polynomial distance-regular graph and its application to pseudo-partition graphs, *Linear Algebra Appl.* 466 (2015) 117–140.
- [15] A. L. Gavrilyuk and J. H. Koolen, On a characterization of the Grassmann graphs, preprint (2018); arXiv:1806.02652.
- [16] V. X. Genest, L. Vinet, and A. Zhedanov, The non-symmetric Wilson polynomials are the Bannai–Ito polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.* 144 (2016) 5217–5226; arXiv:1507.02995.
- [17] D. Gijswijt, A. Schrijver, and H. Tanaka, New upper bounds for nonbinary codes based on the Terwilliger algebra and semidefinite programming, *J. Combin. Theory Ser. A* 113 (2006) 1719–1731.
- [18] T. Ito, K. Nomura, and P. Terwilliger, A classification of sharp tridiagonal pairs, *Linear Algebra Appl.* 435 (2011) 1857–1884; arXiv:1001.1812.

- [19] T. Ito, K. Tanabe, and P. Terwilliger, Some algebra related to P - and Q -polynomial association schemes, in: A. Barg and S. Litsyn (Eds.), Codes and association schemes, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, pp. 167–192; arXiv:math/0406556.
- [20] T. Ito and P. Terwilliger, The augmented tridiagonal algebra, Kyushu J. Math. 64 (2010) 81–144; arXiv:0904.2889.
- [21] A. Jurišić, J. Koolen, and P. Terwilliger, Tight distance-regular graphs, J. Algebraic Combin. 12 (2000) 163–197.
- [22] R. Koekoek, P. A. Lesky, and R. F. Swarttouw, Hypergeometric orthogonal polynomials and their q -analogues, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [23] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, The Askey scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q -analog, report 98-17, Delft University of Technology, 1998; <http://aw.twi.tudelft.nl/~koekoek/askey.html>.
- [24] J.-H. Lee, Q -polynomial distance-regular graphs and a double affine Hecke algebra of rank one, Linear Algebra Appl. 439 (2013) 3184–3240; arXiv:1307.5297.
- [25] J.-H. Lee, Nonsymmetric Askey–Wilson polynomials and Q -polynomial distance-regular graphs, J. Combin. Theory Ser. A 147 (2017) 75–118; arXiv:1509.04433.
- [26] J.-H. Lee and H. Tanaka, Dual polar graphs, a nil-DAHA of rank one, and non-symmetric dual q -Krawtchouk polynomials, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 14 (2018) 009; arXiv:1709.07825.
- [27] D. A. Leonard, Orthogonal polynomials, duality and association schemes, SIAM J. Math. Anal. 13 (1982) 656–663.
- [28] M. S. MacLean, An inequality involving two eigenvalues of a bipartite distance-regular graph, Discrete Math. 225 (2000) 193–216.
- [29] W. J. Martin and H. Tanaka, Commutative association schemes, European J. Combin. 30 (2009) 1497–1525; arXiv:0811.2475.
- [30] Š. Miklavič, On bipartite Q -polynomial distance-regular graphs with diameter 9, 10, or 11, Electron. J. Combin. 25 (2018) #P1.52.
- [31] K. Nomura, Spin models on bipartite distance-regular graphs, J. Combin. Theory Ser. B 64 (1995) 300–313.
- [32] H. Suzuki, Association schemes with multiple Q -polynomial structures, J. Algebraic Combin. 7 (1998) 181–196.
- [33] H. Suzuki, The Terwilliger algebra associated with a set of vertices in a distance-regular graph, J. Algebraic Combin. 22 (2005) 5–38.
- [34] Y.-Y. Tan, Y.-Z. Fan, T. Ito, and X. Liang, The Terwilliger algebra of the Johnson scheme $J(N, D)$ revisited from the viewpoint of group representations, European J. Combin., to appear.
- [35] H. Tanaka, Classification of subsets with minimal width and dual width in Grassmann, bilinear forms and dual polar graphs, J. Combin. Theory Ser. A 113 (2006) 903–910.

- [36] H. Tanaka, A bilinear form relating two Leonard systems, *Linear Algebra Appl.* 431 (2009) 1726–1739; arXiv:0807.0385.
- [37] H. Tanaka, Vertex subsets with minimal width and dual width in Q -polynomial distance-regular graphs, *Electron. J. Combin.* 18 (2011) #P167; arXiv:1011.2000.
- [38] H. Tanaka, The Erdős–Ko–Rado theorem for twisted Grassmann graphs, *Combinatorica* 32 (2012), 735–740; arXiv:1012.5692.
- [39] H. Tanaka, R. Tanaka, and Y. Watanabe, The Terwilliger algebra of a Q -polynomial distance-regular graph with respect to a set of vertices, in preparation.
- [40] P. Terwilliger, P and Q polynomial schemes with $q = -1$, *J. Combin. Theory Ser. B* 42 (1987) 64–67.
- [41] P. Terwilliger, The subconstituent algebra of an association scheme I, *J. Algebraic Combin.* 1 (1992) 363–388.
- [42] P. Terwilliger, The subconstituent algebra of an association scheme II, *J. Algebraic Combin.* 2 (1993) 73–103.
- [43] P. Terwilliger, The subconstituent algebra of an association scheme III, *J. Algebraic Combin.* 2 (1993) 177–210.
- [44] P. Terwilliger, Two linear transformations each tridiagonal with respect to an eigenbasis of the other, *Linear Algebra Appl.* 330 (2001) 149–203; arXiv:math/0406555.
- [45] P. Terwilliger, Leonard pairs and the q -Racah polynomials, *Linear Algebra Appl.* 387 (2004) 235–276; arXiv:math/0306301.
- [46] P. Terwilliger, Two linear transformations each tridiagonal with respect to an eigenbasis of the other; comments on the parameter array, *Des. Codes Cryptogr.* 34 (2005) 307–332; arXiv:math/0306291.

中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の分類について

島倉 裕樹 (Hiroki Shimakura)

東北大学大学院 情報科学研究科
純粋・応用数学研究センター

Research Center for Pure and Applied Mathematics,
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

e-mail: shimakura@tohoku.ac.jp

本稿では中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の分類に関する最近の進展について報告する。^{注1}

1 背景

次は頂点作用素代数 (VOA) の研究当初からの基本的な問題の一つである。

- 中心電荷 24 の正則 VOA ^{注2}を分類せよ。

(有理的な) VOA V が正則とは, 既約加群が同型を除いて V のみ, である. (非自明な) 正則 VOA の中心電荷は 8 の正の倍数となることが知られており ([Zh96]), 中心電荷が 8, 16 の場合はユニモジュラ偶格子に付随する格子 VOA と同型となる ([DM04b]). したがって, 中心電荷 24 は考えるべき次の中心電荷である. ここで, (非同型な) 階数 32 のユニモジュラ偶格子は沢山あるため, (非同型な) 中心電荷 32 の正則 (格子) VOA も沢山あり, (通常の意味では) 分類するのは難しいことを注意しておく.

「中心電荷 24 の正則 VOA の分類問題」は「階数 24 のユニモジュラ偶格子の分類問題」の類似と考えることができる. 階数 24 のユニモジュラ偶格子は Niemeier によって分類されており ([Ni73]), 丁度 24 個ある. これらは Niemeier 格子と呼ばれる. 一般に偶格子のノルム 2 のベクトルはルート系をなす. Niemeier 格子の構造はノルム 2 のベクトルがなすルート系から (同型の除いて) 一意的に決まることが知られている. すなわち, Niemeier 格子は (\emptyset を含む) 24 個のルート系で特徴付けられる. そこで, 中心電荷 24 の正則 VOA でも同様な分類を行いたい.

^{注1}概説論文 [LS18b+] が出版予定である.

^{注2}本稿で扱う正則 VOA は有理的 (表現が完全可約), C_2 -有限 ($V/\langle u_{(-2)}v \mid u, v \in V \rangle$ が有限次元), CFT 型 (V_0 が一次元), 自己双対 (V の contragredient 加群が V と同型) を仮定している.

偶格子におけるノルム 2 は (非自明な) 最小ノルム^{注3}であることから, (CFT 型の) VOA の (非自明な) 最小共形重み^{注4}である 1 の空間に着目する. 一般に, (CFT 型の) VOA V の共形重み 1 の空間 V_1 には 0-積でリー代数構造が入り ([Bo86]), これがルート系に対応する構造だと考えられる. このリー代数構造を用いた「中心電荷 24 の正則 VOA の分類」の現状について報告する.

2 階数 24 のユニモジュラ偶格子の分類について

この章では階数 24 のユニモジュラ偶格子の分類の概略について述べる. 詳細は [Eb02] を参照せよ.

Φ を階数 24 のユニモジュラ偶格子のノルム 2 のベクトルの成すルート系とすると, 次が成立する.

- Φ の階数は 0 か 24.
- Φ の既約成分のルート系のコクセター数は (取り方によらず) $|\Phi|/24$.

Φ の既約成分のルート系は A, D, E 型であり, 上の性質を満たすルート系は (空集合も含めて) 24 通りであることがわかる. 逆に, この 24 通りのルート系 Φ に対して, 丁度ノルム 2 のベクトルが Φ を成す階数 24 のユニモジュラ偶格子が丁度一つ存在する. 実際に $\Phi \neq \emptyset$ であれば, Φ が生成するルート格子を (ルート系を大きくしないように) 拡大してユニモジュラ偶格子を構成でき, 同型を除いて一意的となる. ノルム 2 のベクトルを持たない階数 24 のユニモジュラ偶格子 L はノルム 8 のベクトルによる直交基底を持つことが $L/2L$ の代表元を考えることで確認でき, その正規直交基底を用いて L とリーチ格子と同型であることが示せる.

3 正則 VOA の重さ 1 の空間のリー代数構造

この章では中心電荷 24 の正則 VOA の重さ 1 の空間のリー代数構造の可能性について述べる.

V を中心電荷 24 の正則 VOA とする. V_1 には 0-積によってリー代数構造が入り, n -積によって V 上に affine 表現が定義される. そして [DM04b, DM06] (cf. [Sc93]) において次が示されている^{注5}.

- V_1 は半単純, 24 次元の abelian, 0 のいずれかになる.
- $V_1 \neq 0$ のとき, V_1 が生成する部分 VOA の共形元は V の共形元と一致する.

^{注3}ノルム 0 の零ベクトルを除くという意味.

^{注4}真空ベクトルは共形重み 0 であるが, それで張られる部分空間を除く, という意味.

^{注5}階数 24 のユニモジュラ偶格子のルート系の性質の類似と考えられる.

- V_1 が半単純のとき, V_1 の各単純イデアルに対して, レベル k は正の整数であり,

$$\frac{h^V}{k} = \frac{\dim V_1 - 24}{24}.$$

ただし, h^V は双対コクセター数.

これらの条件と単純リー代数の分類を用いると, 221 通りの半単純リー代数の可能性が得られる. これに追加の条件^{注6}を考えることで, 次が得られる ([Sc93, EMS18a+]).

- 中心電荷 24 の正則 VOA の重さ 1 の空間上の (レベル付) リー代数構造は 71 個^{注7}のいずれかである.

これら 71 個のリー代数のリストは Schellekens のリストと呼ばれる ([Sc93]). 分類問題を解決するには, Schellekens のリストの各リー代数 \mathfrak{g} に対して, 次を示せばよい.

- (I) $V_1 \cong \mathfrak{g}$ となるような中心電荷 24 の正則 VOA V の存在;
- (II) $V_1 \cong \mathfrak{g}$ となる中心電荷 24 の正則 VOA V の一意性.

4 中心電荷 24 の正則 VOA の存在

この章では, 中心電荷 24 の正則 VOA の存在に関する結果を述べる.

最小ノルムが 2 である Niemeier 格子は, ノルム 2 のベクトルが生成するルート格子の拡大として得られる. この手法の VOA 類似は, 重さ 1 の空間のリー代数が生成する affine VOA の拡大としての中心電荷 24 の正則 VOA の構成である. 実際, [Sc93] に affine VOA の加群としての既約分解の候補が一つ与えられている. しかしながら, この手法で VOA を構成するのは難しい. その理由は (格子 VOA の場合を除くと) 単純カレント拡大となっていないため, 一般論が十分に整備されていないことにある.^{注8}

この困難を避ける方法として, 現状では \mathbb{Z}_n -軌道体構成法を用いた正則 VOA の構成が行われている.^{注9} 大雑把に言うと, 既知の正則 VOA V と (ある種の仮定を満たす) 有限位数の自己同型 g に対して, その固定点として得られる部分 VOA V^g を別方向へ拡大して, (新しい) 正則 VOA $V^{\text{orb}(g)}$ を構成する方法である. V^g の既約加群は全て単純カレントのため, $V^{\text{orb}(g)}$ が V^g の単純カレント拡大となり, 既存の理論で扱うことが出来ることを注意しておく.

次が具体的な \mathbb{Z}_n -軌道体構成法^{注10}である ([EMS18a+]).

^{注6}[EMS18a+] では V_2 への作用まで考えることで, 満たすべき追加の条件を得ている.

^{注7}モンスター単純群の位数の最大素因子が 71 である. もちろん, モンスター単純群はムーンシャイン VOA の自己同型群であり, ムーンシャイン VOA は中心電荷 24 の正則 VOA である. 何か 71 の繋がりがあるのだろうか?

^{注8}講演では非単純カレント拡大の理論が殆どないと言ったが, 実際には圏論を応用した理論 ([HKL15]) がある.

^{注9}格子における neighborhood の類似と思われる.

^{注10}中心電荷は 24 でなくてもよい.

- (1) V を正則 VOA, g を V の有限位数 n の自己同型とする.
- (2) $V^g = \{v \in V \mid g(v) = v\}$ は V の (共形元が同じ) 部分 VOA となる.
- (3) 各 $1 \leq i \leq n-1$ に対して, 既約 g^i -twisted V -加群 $V(g^i)$ が一意的に存在する ([DLM00]).
- (4) 各 $1 \leq i \leq n-1$ に対して, $V(g^i)$ の共形重み^{注11}が $(1/n)\mathbb{Z}_{>0}$ に入ると仮定する.^{注12}
- (5) 各 $1 \leq i \leq n-1$ に対して, ある既約 V^g -部分加群^{注13} $\overline{V(g^i)} \subset V(g^i)$ で $V^{\text{orb}(g)} := V^g \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} \overline{V(g^i)}$ が正則 VOA となるものが存在する. さらに, $V^{\text{orb}(g)}$ は V^g の \mathbb{Z}_n -graded な単純カレント拡大となる.

既知の正則 VOA から \mathbb{Z}_n -軌道体構成法を用いて新しい正則 VOA を構成することが個別に行われ ([Bo86, FLM88, DGM96, La11, LS12, Mi13, SS16, EMS18a+, LS16a, LS16b, LL]), 次が証明された.

- Schellekens のリストにあるリー代数 \mathfrak{g} に対して, 中心電荷 24 の正則 VOA V で $V_1 \cong \mathfrak{g}$ となるものが存在する.

構成から, どの二つの中心電荷 24 の正則 VOA も, (複数回の) \mathbb{Z}_n -軌道体構成法で結びつく事がわかる. しかしながら, 深い理解のためには, 次の問題を考えることが重要である.

- 中心電荷 24 の正則 VOA を統一的な方法で構成せよ.

最近, G. Höhn が提案したアプローチ ([Hö]) について簡単に紹介する. V を正則 VOA とし, $V_1 \neq 0$ とする. V_1 は reductive リー代数となるので ([DM04a]), カルタン部分代数 $\mathfrak{h} \subset V_1$ が取れる. そこで, \mathfrak{h} の commutant $W = \text{Comm}_V(\mathfrak{h})$ ([FZ92]) ともう一回の commutant $U = \text{Comm}_V(W)$ を考えると, $\mathfrak{h} \subset U$ となる. さらに $U \otimes W \subset V$ であり, $U \otimes W$ と V は共形元を共有する. ここで, U が \mathfrak{h} で生成されるハイゼンベルグ VOA の拡大となり, V が正則であることから, U は格子 VOA となる. さらに, U の既約加群は全て単純カレントであることから, ミラー拡大の理論 ([KM15, HKL15, Lin17]) を用いて, W の既約加群が全て単純カレントであることがわかる. したがって, V は $U \otimes W$ の単純カレント拡大となっている.^{注14}

ここで V の中心電荷を 24 とする. このとき, [Hö] では W がリーチ格子 Λ のある自己同型 f から得られる VOA $V_{\Lambda_f}^f$ と同型であることが示唆されている. ここで $\Lambda_f =$

注11 $L(0)$ の作用で $V(g^i)$ に重みが入るが, その最小値

注12 この仮定を満たす g に対して \mathbb{Z}_n -軌道体構成法が適用できる.

注13 V^g -加群としては $V(g^i)$ は (通常) 加群となる

注14 ここまでは正則 VOA の仮定の下で得られる. しかしながら, 一般には W が何かわからないため, $U \otimes W$ を用いて V を調べるのが難しい. 中心電荷 24 の場合にこの方法を用いて研究できる理由は, W が別の方法で構成されたものと (結果的に) 同型となるからである.

$\Lambda \cap (\{v \in \Lambda \mid f(v) = v\})^\perp$ であり, \hat{f} は f の V_{Λ_f} への持ち上げである. さらに f の共役類の可能性が 11 個挙げられている.

そこで, 実際にこれら 11 個の共役類に対して, $V_{\Lambda_f}^{\hat{f}}$ の性質を調べ, 対となる格子 VOA U を見つけることで, ($V_1 \neq 0$ である) 70 個の中心電荷 24 の正則 VOA が構成できることを確認した ([LS17, La])^{注 15}.

5 中心電荷 24 の正則 VOA の一意性

$V_1 = 0$ の場合は次の FLM 予想^{注 16}がある ([FLM88]).

- 中心電荷 24 の正則 VOA V が $V_1 = 0$ を満たすならば, V はムーシャイン VOA V^\natural と同型.

次の仮定を加えた“弱”バージョンが証明されている.

- V_2 が V_2^\natural と代数として同型 ([DGL07]).
- V が $L(1/2, 0)^{\otimes 48}$ を共通の共形元を持つ部分 VOA として持つ ([LY07]).
- V が $L(1/2, 0)^{\otimes 2}$ を部分 VOA として持つ ([ALY18]).

しかしながら, オリジナルの仮定である $V_1 = 0$ からは V_2 の構造について殆どわからない. 例えば $L(1/2, 0)$ が一つ含まれる事も示されていない.

ムーシャイン VOA はリーチ格子 VOA から \mathbb{Z}_2 -軌道体構成法を用いて構成された ([FLM88]). 同様なリーチ格子 VOA からの \mathbb{Z}_n -軌道体構成法を用いたムーシャイン VOA の研究結果がある ([DM04a, Mi13, CLS18, ALY18, Ca18]). また, リーチ格子 VOA への \mathbb{Z}_n -軌道体構成法を用いないムーシャイン VOA の構成も知られている ([Mi04, Cr]).

さて, $V_1 \neq 0$ の場合は一意性が証明されている ([DM94, LS15, LL, LS1, KLL18, EMS18b+, LS18a+, LS2]). すなわち, 次が成立する.

- 重さ 1 の空間が 0 でない中心電荷 24 の正則 VOA の構造はリー代数 V_1 の構造から一意的に決まる.

一意性の証明の殆どは以下で述べる [LS1] の議論を基にして証明されている: \mathfrak{g} をリー代数, \mathfrak{p} を \mathfrak{g} の部分代数, W を中心電荷 c の正則 VOA, n を正の整数とする. 次を仮定する.

仮定 1: $V_1 \cong \mathfrak{g}$ を満たす任意の中心電荷 c の正則 VOA V に対して, $V^{\text{orb}(\sigma)} \cong W$ と $V_1^\sigma \cong \mathfrak{p}$ を満たす位数 n の V の自己同型 σ が存在する.

^{注 15}11 通りの VOA W を用いて同様の手法で構成されており, より統一的な構成と言えるであろう.

^{注 16}ルート系が \emptyset の Niemeier 格子, すなわちリーチ格子, は同型を除いて一意である ([Co69]). この予想はリーチ格子の一意性の VOA 類似と考えられる.

仮定 2: 次の条件を満たす位数 n の自己同型 $\psi \in \text{Aut}W$ の共役類はただ一つである:

$$W_1^\psi \cong \mathfrak{p} \text{ かつ } (W^{\text{orb}(\psi)})_1 \cong \mathfrak{g}.$$

- 仮定 1 と 2 を満たすとする. このとき, $V_1 \cong \mathfrak{g}$ であるような任意の中心電荷 c の正則 VOA V は $W^{\text{orb}(\psi)}$ と同型である. 特に, V の VOA 構造は $V_1 \cong \mathfrak{g}$ から一意的に決まる.

Proof. 仮定 1 から, \mathbb{Z}_n -軌道体構成法を V と σ に適用して $V_1^\sigma \cong \mathfrak{p}$ かつ $V^{\text{orb}(\sigma)} \cong W$ が得られる. W は V^g の \mathbb{Z}_n -graded 単純カレント拡大なので, 次数付けに用いる \mathbb{Z}_n の双対 $\mathbb{Z}_n^* \cong \mathbb{Z}_n$ が自己同型として作用する. この生成元 g は W の位数 n の自己同型である. さらに, W と g に \mathbb{Z}_n -軌道体構成法を用いると, 最初の \mathbb{Z}_n -軌道体構成法の逆を辿ることになるので, $W_1^g \cong \mathfrak{p}$ かつ $W^{\text{orb}(g)} \cong V$ となる. 特に, $(W^{\text{orb}(g)})_1 \cong \mathfrak{g}$ である. よって, 仮定 2 から, g は ψ と共役になり, $V \cong W^{\text{orb}(g)} \cong W^{\text{orb}(\psi)}$ を得る. \square

この証明方法を W がリーチ格子 VOA V_Λ の場合に適用して, 次の結果を得た ([LS18a+]).

- 共形重み 1 の空間のリー代数構造が $A_{3,4}^3 A_{1,2}$, $A_{4,5}^2$, $D_{4,12} A_{2,6}$, $A_{6,7}$, $A_{7,4} A_{1,1}^3$, $D_{5,8} A_{1,2}$ または $D_{6,5} A_{1,1}^2$ である正則 VOA は同型を除いて一意的である.^{注 17}

この証明から, これら正則 VOA はリーチ格子 VOA から \mathbb{Z}_n -軌道体構成法で得られることがわかる. ただし, $A_{6,7}$ の場合は既に V_Λ から \mathbb{Z}_7 -軌道体構成法で構成されている ([LS16b]). したがって, 次の問題が得られる.

- リーチ格子 VOA と適切な自己同型に軌道体構成法を適用して, 全ての中心電荷 24 の正則 VOA を構成せよ.^{注 18}
- さらに, この構成法を用いて一意性を証明せよ.^{注 19}

6 終わりに

ここ数年の進展によって, 中心電荷 24 の正則 VOA の分類問題がほぼ解決され, 残された問題はムーンシャイン VOA の特徴付けである FLM 予想だけとなった. より深い理解のために, さらなる研究が進んでいる.

謝辞 講演の機会を与えてくださった世話人の先生方に感謝します. また, 講演後に質問とコメントをくださった田邊頭一朗氏, 佐垣大輔氏, 山田裕理氏に感謝します.

^{注 17} $X_{n,k}$ は X_n 型の単純リー代数でレベルが k を意味する.

^{注 18} 構成は概ね完成したようである. そこで用いるリーチ格子 VOA の自己同型は内部自己同型とリーチ格子の自己同型の持ち上げの積の形でかけるが, そのリーチ格子の自己同型は 4 章の最後で述べた 11 通りの共役類に属するものである.

^{注 19} 構成で用いる自己同型の位数がかなり大きい場合 (40 前後まで) があり, その場合は仮定 2 を確認することが困難である. したがって, 別の議論を考える必要がある. 参考までに [LS18a+] で仮定 2 を確認したリーチ格子 VOA の自己同型の位数は高々 10 である.

参考文献

- [ALY18] T. Abe, C.H. Lam and H. Yamada, Abe, Toshiyuki; Lam, Ching Hung; Yamada, Hiromichi; On \mathbb{Z}_p -orbifold constructions of the Moonshine vertex operator algebra, *Math. Z.* **290** (2018), 683–697.
- [Bo86] R.E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A.* **83** (1986), 3068–3071.
- [Ca18] S. Carnahan, 51 constructions of the Moonshine module, *Commun. Number Theory Phys.* **12** (2018), 305–334.
- [CLS18] H.Y. Chen, C.H. Lam and H. Shimakura, \mathbb{Z}_3 -orbifold construction of the Moonshine vertex operator algebra and some maximal 3-local subgroups of the Monster, *Math. Z.* **288** (2018), 75–100.
- [Co69] J.H. Conway, A characterisation of Leech's lattice, *Invent. Math.* **7** (1969) 137–142.
- [Cr] T. Creutzig, Lecture note for Mini-course in Kyoto 2018.
- [DGM96] L. Dolan, P. Goddard and P. Montague, Conformal field theories, representations and lattice constructions, *Comm. Math. Phys.* **179** (1996), 61–120.
- [DGL07] C. Dong, R.L. Griess and C.H. Lam, Uniqueness results for the moonshine vertex operator algebra, *Amer. J. Math.* **129** (2007), 583–609.
- [DM94] C. Dong and G. Mason, The construction of the moonshine module as a Z_p -orbifold, in *Mathematical aspects of conformal and topological field theories and quantum groups* (South Hadley, MA, 1992), *Contemp. Math.*, **175**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 37–52.
- [DLM00] C. Dong, H. Li, and G. Mason, Modular-invariance of trace functions in orbifold theory and generalized Moonshine, *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), 1–56.
- [DM04a] C. Dong and G. Mason, Rational vertex operator algebras and the effective central charge, *Int. Math. Res. Not.* (2004), 2989–3008.
- [DM04b] C. Dong and G. Mason, Holomorphic vertex operator algebras of small central charge, *Pacific J. Math.* **213** (2004), 253–266.
- [DM06] C. Dong and G. Mason, Integrability of C_2 -cofinite vertex operator algebras. *Int. Math. Res. Not.* (2006), Art. ID 80468, 15 pp.
- [Eb02] W. Ebeling, Lattices and codes, A course partially based on lectures by F. Hirzebruch. Second revised edition. *Advanced Lectures in Mathematics*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2002.
- [EMS18a+] J. van Ekeren, S. Möller and N. Scheithauer, Construction and classification of holomorphic vertex operator algebras, *J. Reine Angew. Math.* (Published Online).
- [EMS18b+] J. van Ekeren, S. Möller and N. Scheithauer, Dimension Formulae in Genus Zero and Uniqueness of Vertex Operator Algebras, *Internat. Math. Res. Notices* (Published Online).
- [FLM88] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex operator algebras and the Monster, *Pure and Appl. Math.*, Vol.134, Academic Press, Boston, 1988.
- [FZ92] I. Frenkel and Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke Math. J.* **66** (1992), 123–168.
- [Hö] G. Höhn, On the Genus of the Moonshine Module; arXiv:1708.05990.
- [HKL15] Y. Huang, A. Kirillov, and J. Lepowsky, Braided tensor categories and extensions of vertex operator algebras, *Comm. Math. Phys.* **337** (2015), 1143–1159.

- [KLL18] K. Kawasetsu, C.H. Lam and X. Lin, \mathbb{Z}_2 -orbifold construction associated with (-1) -isometry and uniqueness of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24. *Proc. Amer. Math. Soc.* **146** (2018), 1937–1950.
- [KM15] M. Krauel and M. Miyamoto, A modular invariance property of multivariable trace functions for regular vertex operator algebras, *J. Algebra* **444** (2015), 124–142.
- [La11] C.H. Lam, On the constructions of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24, *Comm. Math. Phys.* **305** (2011), 153–198
- [La] C.H. Lam, Orbifold vertex operator algebras associated with coinvariant lattices of Leech lattice; arXiv:1805.10778.
- [LL] C.H. Lam and X. Lin, A holomorphic vertex operator algebra of central charge 24 with weight one Lie algebra $F_{4,6}A_{2,2}$, arXiv:1612.08123.
- [LS12] C.H. Lam and H. Shimakura, Quadratic spaces and holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, *Proc. Lond. Math. Soc.* **104** (2012), 540–576.
- [LS15] C.H. Lam and H. Shimakura, Classification of holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, *Amer. J. Math.* **137** (2015), 111–137.
- [LS16a] C.H. Lam and H. Shimakura, Orbifold construction of holomorphic vertex operator algebras associated to inner automorphisms, *Comm. Math. Phys.* **342** (2016), 803–841.
- [LS16b] C.H. Lam and H. Shimakura, A holomorphic vertex operator algebra of central charge 24 whose weight one Lie algebra has type $A_{6,7}$, *Lett. Math. Phys.* **106** (2016), 1575–1585.
- [LS17] C.H. Lam and H. Shimakura, Construction of Holomorphic Vertex Operator Algebras of Central Charge 24 Using the Leech Lattice and Level p Lattices, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)* **12** (2017) 39–70.
- [LS18a+] C.H. Lam and H. Shimakura, On orbifold constructions associated with the Leech lattice vertex operator algebra, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* (Published Online).
- [LS18b+] C.H. Lam and H. Shimakura, 71 holomorphic vertex operator algebras of central charge 24, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)* (to appear).
- [LS1] C.H. Lam and H. Shimakura, Reverse orbifold construction and uniqueness of holomorphic vertex operator algebras; arXiv:1606.08979.
- [LS2] C.H. Lam and H. Shimakura, Inertia groups and uniqueness of holomorphic vertex operator algebras; arXiv:1804.02521.
- [LY07] C.H. Lam and H. Yamauchi, A characterization of the moonshine vertex operator algebra by means of Virasoro frames, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2007**, Art. ID rnm003, 10 pp.
- [Lin17] X. Lin, Mirror extensions of rational vertex operator algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **369** (2017) 3821–3840.
- [Mi04] M. Miyamoto, A new construction of the Moonshine vertex operator algebra over the real number field, *Ann. of Math.* **159** (2004), 535–596.
- [Mi13] M. Miyamoto, A \mathbb{Z}_3 -orbifold theory of lattice vertex operator algebra and \mathbb{Z}_3 -orbifold constructions, in *Symmetries, integrable systems and representations*, 319–344, *Springer Proc. Math. Stat.* **40**, Springer, Heidelberg, 2013.
- [Ni73] H.V. Niemeier, Definite quadratische Formen der Dimension 24 und Diskriminante 1, *J. Number Theory* **5** (1973), 142–178.
- [SS16] D. Sagaki and H. Shimakura, Application of a \mathbb{Z}_3 -orbifold construction to the lattice vertex operator algebras associated to Niemeier lattices, *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2016), 1621–1646.

- [Sc93] A.N. Schellekens, Meromorphic $c = 24$ conformal field theories, *Comm. Math. Phys.* **153** (1993), 159–185.
- [Zh96] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237–302.

Schur 多重ゼータ関数とその特殊値について¹

中筋麻貴 (上智大学理工学部)

1 はじめに

素数分布の研究において重要な役割をなすゼータ関数は、複素変数 $s \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

として定義される。この関数は $\operatorname{Re}(s) > 1$ において絶対収束する。このリーマンのゼータ関数の拡張として発展したのが、変数を多変数化した多重ゼータ関数である。特に 1990 年代以降、活発な研究が報告されている (詳細は [AK1], [Mat] 等参照)。リーマンゼータ関数の多変数化については、いくつかの方法が知られているが、ここでは、その中の一つである Euler-Zagier 型と呼ばれる多重ゼータ関数を紹介する：

定義 1.1 複素変数 $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{C}$ に対し、多重ゼータ関数、等号付き多重ゼータ関数をそれぞれ次の級数で定める：

$$\zeta(s_1, \dots, s_n) = \sum_{m_1 < \dots < m_n} \frac{1}{m_1^{s_1} \dots m_n^{s_n}}, \quad (1.1)$$

$$\zeta^*(s_1, \dots, s_n) = \sum_{m_1 \leq \dots \leq m_n} \frac{1}{m_1^{s_1} \dots m_n^{s_n}}. \quad (1.2)$$

これらの級数 (1.1) および (1.2) はどちらも $\operatorname{Re}(s_1), \dots, \operatorname{Re}(s_{n-1}) \geq 1$ and $\operatorname{Re}(s_n) > 1$ において絶対収束する。

一方、一般線型群の既約指標として定義される Schur 関数は、表現論や組合せ論の分野、特に対称関数の理論において重要な研究対象である。それぞれの分野の同値条件により、様々な定義の仕方が可能であるが、ここでは semi-standard Young tableau を用いた定義を用いる：

¹本研究は O. Phuksuwan 氏 (Chulalongkorn University) および山崎義徳氏 (愛媛大学) との共同研究、および、中村直樹氏 (上智大学) との共同研究に基づく。

とする. λ に対するヤング図形 $D(\lambda)$ の各箱に, X の元を書き入れた図形 $T = (t_{ij})$ ($t_{ij} \in X$) を形 (shape) が λ の X 上の Young tableau と呼ぶ. また, 形が λ の全ての X 上の Young tableau たちの集合を $T(\lambda, X)$ と書く. さらに, 各列に対して下方方向に強い意味で増加し, 各行に対して右方向に弱い意味で増加する \mathbb{N} 上の Young tableau を semi-standard Young tableau と呼び, 形が λ のそれらすべての集合を $SSYT(\lambda)$ と書く. これらの記号を用いて, Schur 関数 (1.3) の構成に類似させた多重ゼータ関数を次のように導入する:

定義 2.1 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ と変数 $\mathbf{s} = (s_{ij}) \in T(\lambda, \mathbb{C})$ に対し,

$$\zeta_\lambda(\mathbf{s}) = \sum_{M \in SSYT(\lambda)} \prod_{(i,j) \in D(\lambda)} \frac{1}{m_{ij}^{s_{ij}}}$$

と定義する. これを Schur 多重ゼータ関数と呼ぶ. ここで $M = (m_{ij})_{(i,j) \in D(\lambda)} \in SSYT(\lambda)$.

Schur 多重ゼータ関数の特別な場合として, $\lambda = (r)$ の場合を考える. このとき, $\mathbf{s} = (s_{1j}) \in T(\lambda, \mathbb{C})$ に対し, 対応する semi-standard Young tableaux は

m_{11}	m_{12}	\cdots	m_{1r}
----------	----------	----------	----------

 で表される. すなわち,

$$\zeta_{(r)}(s_{11}, \dots, s_{1r}) = \sum_{m_{11} \leq \dots \leq m_{1r}} \frac{1}{m_{11}^{s_{11}} \cdots m_{1r}^{s_{1r}}}$$

であり, (1.2) から, これは等号付き多重ゼータ関数 $\zeta^*(s_{11}, \dots, s_{1r})$ であることがわかる.

同様に考えると, $\lambda = (1^r)$ の場合, (1.1) より, $\mathbf{s} = (s_{i1}) \in T(\lambda, \mathbb{C})$ に対し,

$$\zeta_{(1^r)}(s_{11}, \dots, s_{r1}) = \sum_{m_{11} < \dots < m_{r1}} \frac{1}{m_{11}^{s_{11}} \cdots m_{r1}^{s_{r1}}} = \zeta(s_{11}, \dots, s_{r1})$$

であることがわかる. 以上より, 定義 2.1 で定義した Schur 多重ゼータ関数 ζ_λ は, (1.1) および (1.2) の両方の多重ゼータ関数の拡張であると言える.

Schur 多重ゼータ関数の収束域は次で与えられる.

補題 2.2 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ に対し, $C(\lambda) \subset D(\lambda)$ を λ の corner の集合とし,

$$W_\lambda := \left\{ \mathbf{s} = (s_{ij}) \in T(\lambda, \mathbb{C}) \left| \begin{array}{l} \operatorname{Re}(s_{ij}) \geq 1 \text{ for } \forall (i,j) \in D(\lambda) \setminus C(\lambda) \\ \operatorname{Re}(s_{ij}) > 1 \text{ for } \forall (i,j) \in C(\lambda) \end{array} \right. \right\}$$

とする. このとき, $\zeta_\lambda(\mathbf{s})$ は, $\mathbf{s} \in W_\lambda$ において絶対収束する.

3 行列式表示

Schur 関数 s_λ のよく知られた行列式表示として, Jacobi-Trudi formula を紹介する :

定理 3.1 (Jacobi-Trudi formula) $h_r = s_{(r)}$ を完全対称式, $e_r = s_{(1^r)}$ を基本対称式とする. このとき, s_λ は次で表される行列式表示を持つ :

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{r \times r}, \quad s_\lambda = \det(e_{\lambda'_i - i + j})_{s \times s}.$$

前節の議論より, Schur 多重ゼータ関数 ζ_λ は Schur 関数 s_λ の類似であり, 完全対称式に対応するのが等号付き多重ゼータ関数 ζ^* , 基本対称式に対応するのが多重ゼータ関数 ζ であることから, 同様の公式が成り立つことが期待できる. 実際, 以下の定理を得た.

分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ に対し,

$$W_\lambda^{\text{diag}} := \{\mathbf{s} \in W_\lambda \mid s_{i+k, j+k} = s_{i, j} \text{ for } \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

とする. W_λ^{diag} の元は, ζ_λ の収束域にある \mathbf{s} について, さらに対角成分が等しいという条件を付加したものを意味する. このとき, 次が成り立つ :

定理 3.2 $\mathbf{s} = (s_{ij}) \in W_\lambda^{\text{diag}}$ とし, $s_{ij} = a_{j-i}$ とおく.

(1) $1 \leq i < \lambda_1'$ を満たすすべての i に対し, $\text{Re}(s_{i, \lambda_i}) > 1$ とする. このとき,

$$\zeta_\lambda(\mathbf{s}) = \det [\zeta^*(a_{-j+1}, a_{-j+2}, \dots, a_{-j+(\lambda_i - i + j)})]_{1 \leq i, j \leq \lambda_1'}$$

ここで, $\lambda_i - i + j = 0$ のとき $\zeta^*(\dots) = 1$, $\lambda_i - i + j < 0$ のとき 0 とする.

(2) $1 \leq i < \lambda_1$ を満たすすべての i に対し, $\text{Re}(s_{i, \lambda'_i}) > 1$ とする. このとき,

$$\zeta_\lambda(\mathbf{s}) = \det [\zeta(a_{j-1}, a_{j-2}, \dots, a_{j-(\lambda'_i - i + j)})]_{1 \leq i, j \leq \lambda_1}$$

ここで, $\lambda'_i - i + j = 0$ のとき, $\zeta(\dots) = 1$, $\lambda'_i - i + j < 0$ のとき 0 とする.

定理の証明は, Lindström-Gessel-Viennot lemma の手法を用いる.

上の定理において, (1) (2) は同じ ζ_λ の行列表示である. これより, この定理の系として, 多重ゼータ関数と等号付き多重ゼータ関数の新しい関係式が得られる.

系 3.3

$$\det(\zeta^*(a_{-j+1}, a_{-j+2}, \dots, a_{-j+(\lambda_i+j-i)}))_{1 \leq i, j \leq n} = \det(\zeta(a_{j-1}, a_{j-2}, \dots, a_{j-(\lambda_i+j-i)}))_{1 \leq i, j \leq \lambda_1}.$$

特に, $\lambda = (n)$, $\lambda = (1^n)$ とすると, (1.1) の等号付き多重ゼータ関数表示, および (1.2) の (等号なし) 多重ゼータ関数表示が得られる:

系 3.4 $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{C}$ が $\Re(s_1), \dots, \Re(s_n) > 1$ を満たすとする. このとき,

$$(1) \zeta(s_1, \dots, s_n) = \begin{vmatrix} \zeta^*(s_1) & \zeta^*(s_2, s_1) & \cdots & \cdots & \zeta^*(s_n, \dots, s_2, s_1) \\ 1 & \zeta^*(s_2) & \cdots & \cdots & \zeta^*(s_n, \dots, s_2) \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 1 & \zeta^*(s_n, s_{n-1}) \\ & & & & 1 & \zeta^*(s_n) \end{vmatrix},$$

$$(2) \zeta^*(s_1, \dots, s_n) = \begin{vmatrix} \zeta(s_1) & \zeta(s_2, s_1) & \cdots & \cdots & \zeta(s_n, \dots, s_2, s_1) \\ 1 & \zeta(s_2) & \cdots & \cdots & \zeta(s_n, \dots, s_2) \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 1 & \zeta(s_n, s_{n-1}) \\ & & & & 1 & \zeta(s_n) \end{vmatrix}.$$

4 Variation

Schur 関数については, Macdonald[Mac] の ninth variation として, Jacobi-Trudi formula 以外の行列式表示も知られている (c.f. [NNSY]). Schur 多重ゼータ関数について, 同様の variation を考察したのでその一部を紹介する.

4.1 skew 型 Jacobi-Trudi formula

λ と μ を $\lambda \supset \mu$ を満たす分割とする. すなわち, 各 i について, $\lambda_i \geq \mu_i$ を満たすとする. $\lambda \setminus \mu$ を skew Young diagram といい, λ/μ で表す. semi-standard Young diagram と同様に, 各列に対して下方向に強い意味で増加し, 各行に対して右方向に弱い意味で増加する正の整数を箱に書き入れた tableau を skew semi-standard Young tableau と呼び, 形が λ/μ のすべての skew semi-standard Young tableaux の集合を $\text{SSYT}(\lambda/\mu)$ と書く.

例. $\lambda = (6, 3, 2, 2)$, $\mu = (4, 1, 1)$ とする. このとき, 次の例は形が λ/μ の skew semi-standard

tableaux の 1 つである.

				2	3
	1	4			
	3				
5	5				

定義 4.1 $\mathbf{s} = (s_{ij}) \in T(\lambda/\mu, \mathbb{C})$ とする. *skew* 型 Schur 多重ゼータ関数を以下で定義する :

$$\zeta_{\lambda/\mu}(\mathbf{s}) = \sum_{M \in \text{SSYT}(\lambda/\mu)} \frac{1}{M^{\mathbf{s}}}.$$

収束域については, 以下で得られる.

補題 4.2 $C(\lambda/\mu) \subset D(\lambda/\mu)$ を λ/μ の *corner* の集合とする.

$$W_{\lambda/\mu} := \left\{ (s_{ij}) \in T(\lambda/\mu, \mathbb{C}) \left| \begin{array}{l} \text{Re}(s_{ij}) \geq 1 \text{ for } \forall (i, j) \in D(\lambda/\mu) \setminus C(\lambda/\mu) \\ \text{Re}(s_{ij}) > 1 \text{ for } \forall (i, j) \in C(\lambda/\mu) \end{array} \right. \right\}.$$

とする. このとき, $\zeta_{\lambda/\mu}(\mathbf{s})$ は, $\mathbf{s} = (s_{ij}) \in W_{\lambda/\mu}$ において絶対収束する.

skew 型 Schur 多重ゼータ関数 $\zeta_{\lambda/\mu}$ について, 以下の Jacobi-Trudi formula を得た.

定理 4.3 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ を $\lambda \supset \mu$ を満たす分割とする. $\mathbf{s} = (s_{ij}) \in W_{\lambda/\mu}^{\text{diag}}$ とし, $s_{ij} = a_{j-i}$ とおく. このとき, $\text{Re}(s_{i\lambda_i}) > 1$ ($1 \leq i < \lambda_1'$), $\text{Re}(s_{i\lambda_i'}) > 1$ ($1 \leq i < \lambda_1$) に対し, 次が成り立つ :

$$\begin{aligned} \zeta_{\lambda/\mu}(\mathbf{s}) &= \det(\zeta^*(a_{\mu_j-j+1}, a_{\mu_j-j+2}, \dots, a_{\mu_j-j+(\lambda_i-\mu_j-i+j)}))_{1 \leq i, j \leq n}, \\ \zeta_{\lambda/\mu}(\mathbf{s}) &= \det(\zeta(a_{-\mu_j'+j-1}, a_{-\mu_j'+j-2}, \dots, a_{-\mu_j'+j-(\lambda_i'-\mu_j'-i+j)}))_{1 \leq i, j \leq \lambda_1}. \end{aligned}$$

系 4.4

$$\begin{aligned} &\det(\zeta^*(a_{\mu_j-j+1}, a_{\mu_j-j+2}, \dots, a_{\mu_j-j+(\lambda_i-\mu_j-i+j)}))_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= \det(\zeta(a_{-\mu_j'+j-1}, a_{-\mu_j'+j-2}, \dots, a_{-\mu_j'+j-(\lambda_i'-\mu_j'-i+j)}))_{1 \leq i, j \leq \lambda_1}. \end{aligned}$$

4.2 Giambelli formula

t を λ の対角成分の数とする. $1 \leq i \leq t$ に対し, $p_i = \lambda_i - i$, $q_i = \lambda_i' - i$ を満たす 2 つの数列 p_1, \dots, p_t , q_1, \dots, q_t を準備する. このとき, $\lambda = (p_1, \dots, p_t \mid q_1, \dots, q_t)$ を Frobenius 記法と

呼ぶ。例えば、 $\lambda = (6, 4, 4, 2, 2) = (5, 2, 1|4, 3, 0)$ と表される。このとき、Schur 関数に対する、Giambelli formula の拡張として以下の結果を得た。

定理 4.5 分割 λ の Frobenius 記法を $\lambda = (p_1 - 1, \dots, p_t - 1 | q_1, \dots, q_t)$ とする。 $\mathbf{s} = (s_{ij}) \in W_\lambda^{\text{diag}}$ とし、 $s_{ij} = a_{j-i}$ とおく。このとき、以下が成り立つ：

$$\zeta_\lambda(\mathbf{s}) = \det(\zeta_{(p_i, 1^{q_j})}(\mathbf{s}))_{1 \leq i, j \leq t}.$$

5 Quasi-symmetric function

Schur 多重ゼータ関数は quasi-symmetric 関数に一般化することができる。

定義 5.1 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ を分割、 $\alpha = (\alpha_{ij}) \in T(\lambda, \mathbb{N})$ とする。このとき、

$$S_\lambda(\alpha) = \sum_{(m_{ij}) \in \text{SSYT}(\lambda)} \prod_{(i,j) \in D(\lambda)} t_{m_{ij}}^{\alpha_{ij}},$$

とおき、これを Schur 型 quasi-symmetric 関数と呼ぶ。

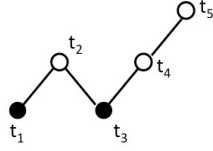
Sections 3, 4 と同様の議論を用いることにより、Schur 型 quasi-symmetric 関数 $S_\lambda(\alpha)$ について、Jacobi-Trudi formula, skew 型 Jacobi-Trudi formula, Giambelli formula 等が得られる。また、Hoffmann([H]) によって、quasi-symmetric 関数の全体 QSym と多重ゼータ値の調和積代数が (Hopf) 同型になることが示されている。この対応により、QSym と可換 Hopf 代数との同型対応が得られ、QSym における対合射 S を考えることにより、Schur 型 quasi-symmetric 関数に対する関係式が得られる：

定理 5.2 μ を skew 型の形、 $\mu^\#$ を μ の anti-diagonal に対する転置とする。このとき、次が成り立つ。

$$S(S_\mu(\alpha)) = (-1)^{|\mu|} S_{\mu^\#}(\alpha^\#).$$

6 反復積分表示

本節では、山本修司氏 [Y] によって導入された多重ゼータ値に対する反復積分表示の応用について述べる。 \circ と \bullet を線で結んだグラフとして 2 色半順序集合を表す。ここで、頂点の順序に対応した変数の大小順序を 2 つの頂点の順序は上が下より大きいとして入れる。また、 \circ (resp. \bullet) に対応する変数 t に対し、 $\delta(t) = 0$ (resp. $\delta(t) = 1$) と定義する。例えば、次のグラフに対し、



変数の順序は $t_1 < t_2 > t_3 < t_4 < t_5$, $(\delta(t_1), \delta(t_2), \delta(t_3), \delta(t_4), \delta(t_5)) = (1, 0, 1, 0, 0)$ となる.

定義 6.1 グラフ化した 2 色半順序集合 X に対し,

$$I(X) = \int_D \prod_i w_{\delta(t_i)}(t_i),$$

と定める. ここで, $D = \{(t_1, \dots) | 0 < t_i < 1\}$, $w_0(t) = \frac{dt}{t}$, $w_1(t) = \frac{dt}{1-t}$ を表すものとする.

例えば, 先ほどの例の場合, 次で表される.

$$I\left(\begin{array}{c} \text{graph} \end{array}\right) = \int_D \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_3}{1-t_3} \frac{dt_4}{t_4} \frac{dt_5}{t_5}.$$

山本氏は Euler-Zagier 型多重ゼータ値をこの積分表示を用いて表した ([Y]).

定理 6.2

$$\zeta(k_1, k_2, \dots, k_r) = I\left(\begin{array}{c} \text{graph} \end{array}\right),$$

$$\zeta^*(l_1, l_2, \dots, l_s) = I\left(\begin{array}{c} \text{graphs} \end{array}\right).$$

また, [KY] では, これを拡張し, 次の積分表示を得た.

定理 6.3

$$\sum_{\substack{0 < m_1 < \dots < m_r \\ 0 < n_1 \leq \dots \leq n_s}} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r} n_1^{\ell_1} \dots n_s^{\ell_s}} = I\left(\begin{array}{c} \text{graphs} \end{array}\right).$$

定理 6.2, 定理 6.3 の多重ゼータ値はそれぞれ, $\begin{matrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{matrix}$, $[\ell_1 \cdots \ell_s]$, $\begin{matrix} k_1 \\ \vdots \\ * \end{matrix}$ ($* = \ell_s + k_r$) に対する Schur 多重ゼータ値として表される. これより,

$\begin{matrix} * & \cdots & \ell_s \\ \vdots & & \\ k_r & & \end{matrix}$ ($* = \ell_1 + k_1$) で表される

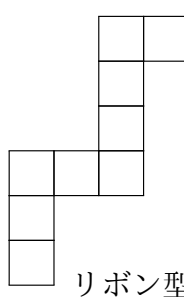
Schur 多重ゼータ値が次の積分表示で得られることが容易にわかる.

定理 6.4

$$\sum_{\substack{0 < m_1 < \cdots < m_r \\ \parallel \\ 0 < n_1 \leq \cdots \leq n_s}} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r} n_1^{\ell_1} \cdots n_s^{\ell_s}} = I \left(\begin{array}{c} \text{Diagram with } l_s \text{ and } k_r \text{ labels} \end{array} \right).$$

同様の方法で, これはリボン型と呼ばれる形 λ に対する Schur 多重ゼータ関数の積分表示として一般化することができる.

例. $\zeta_\lambda \left(\begin{array}{cc} & 1 & 2 \\ & 1 & \\ 2 & 2 & \end{array} \right) = I \left(\begin{array}{c} \text{Diagram with labels 1, 2} \end{array} \right),$

 リボン型

山本積分表示は変数変換を用いることにより双対性が導かれる. 例えば, 上の例の場合,

$$\zeta_\lambda \left(\begin{array}{cc} & 1 & 2 \\ & 1 & \\ 2 & 2 & \end{array} \right) = I \left(\begin{array}{c} \text{Diagram with variables } t_1, \dots, t_8 \end{array} \right) = \int_D \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_3}{1-t_3} \frac{dt_4}{1-t_4} \frac{dt_5}{1-t_5} \frac{dt_6}{t_6} \frac{dt_7}{1-t_7} \frac{dt_8}{t_8}$$

と表され, ここで $t'_i = 1 - t_{9-i}$ ($1 \leq i \leq 8$) において変数変換すると, 次を得る:

$$= \int_{D'} \frac{dt'_1}{1-t'_1} \frac{dt'_2}{t'_2} \frac{dt'_3}{1-t'_3} \frac{dt'_4}{t'_4} \frac{dt'_5}{t'_5} \frac{dt'_6}{t'_6} \frac{dt'_7}{1-t'_7} \frac{dt'_8}{t'_8} = I \left(\begin{array}{c} \text{Diagram} \end{array} \right) = \boxed{2 \ 4 \ 2}.$$

このとき、 $D' = \{(t'_i) | t'_1 < t'_2 > t'_3 < t'_4 < t'_5 < t'_6 > t'_7 < t'_8\}$ を表す。このように、Schur 多重ゼータ値の反復積分表示により、Schur 多重ゼータ値間の関係式を導くことができる。

7 Schur 型多重ベルヌーイ数

本節では、ベルヌーイ数の Schur 型への拡張を考える。本節は中村氏（上智大学）との共同研究 ([NN]) に基づく。ベルヌーイ数 B_n は、自然数をべき乗和で表したときの係数に現れる数列であり、リーマンゼータ関数と次の関係式が知られている：正の整数 m に対し、

$$\zeta(1-m) = -\frac{B_m}{m}, \quad \zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1} B_{2m}}{2 \cdot (2m)!} (2\pi)^{2m}.$$

多重ゼータ関数と関係する多重ベルヌーイ数は、B 型、C 型で区別されており、多重対数関数 $\text{Li}_k(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^k}$ ($k \in \mathbb{Z}$) を用いて、それぞれ次のように定義される：非負整数 m に対し、

$$\frac{\text{Li}_k(1-e^{-z})}{1-e^{-z}} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{B}_m^{(k)} \frac{z^m}{m!}, \quad \frac{\text{Li}_k(1-e^{-z})}{e^z-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{C}_m^{(k)} \frac{z^m}{m!}.$$

さらなる一般化として、多重対数関数 $\text{Li}_k(z)$ を拡張した多重対数級数

$\text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(z) = \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}$ ($k_i \geq 1, |z| < 1$) が知られているが、これらをさらに Schur 型に拡張することを考える： $\mathbf{z} = \{z_{ij} | (i, j) \in C(\lambda)\}$ に対し、

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}^{\lambda}(\mathbf{z}) := \sum_{(m_{ij}) \in \text{SSYT}(\lambda)} \frac{\mathbf{z}^{m_c}}{m_{ij}^{k_{ij}}}, \quad (k_{ij} \geq 1, |z_{ij}| < 1).$$

ここで、 $\mathbf{z}^{m_c} = \prod_{(i,j) \in C(\lambda)} z_{ij}^{m_{ij}}$ を表す。この級数は、 $\lambda = (1^r)$ とすると、多重対数級数 $\text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(z)$

と一致する。この級数を用いて、Schur 型のベルヌーイ数を定義する。ただし、本報告集では、hook 型、すなわち $\lambda = (n, 1^{\ell-1})$ に限定した場合を考える。このとき、 $C(\lambda) = \{(1, n), (\ell, 1)\}$ である。簡単のため、 $(z_n, z_{\ell}) := (z_{1n}, z_{\ell 1})$ 、 $(m_n, m_{\ell}) := (m_{1n}, m_{\ell 1})$ と書く。このとき、B 型、C 型多重ベルヌーイ数の拡張として、hook Schur 型多重ベルヌーイ数を以下で定義する。

$$\frac{\text{Li}_{\mathbf{k}}^{\lambda}(1 - e^{-z_n}, 1 - e^{-z_{\ell}})}{(1 - e^{-z_n})(1 - e^{-z_{\ell}})} = \sum_{m_n, m_{\ell}=0}^{\infty} \mathbb{B}_{m_n, m_{\ell}}^{\lambda, \mathbf{k}} \frac{z_n^{m_n} z_{\ell}^{m_{\ell}}}{m_n! m_{\ell}!}$$

$$\frac{\text{Li}_{\mathbf{k}}^{\lambda}(1 - e^{-z_n}, 1 - e^{-z_{\ell}})}{(e^{z_n} - 1)(e^{z_{\ell}} - 1)} = \sum_{m_n, m_{\ell}=0}^{\infty} \mathbb{C}_{m_n, m_{\ell}}^{\lambda, \mathbf{k}} \frac{z_n^{m_n} z_{\ell}^{m_{\ell}}}{m_n! m_{\ell}!}.$$

このとき、次の定理を得た。

定理 1. $\lambda = (n, 1^{\ell-1})$ に対し、 $\mathbf{k} = (k_{ij}) \in \mathbb{N}^{|\lambda|}$ とする。このとき、 $r, s \in \mathbb{N}$ に対し、

$$\mathbb{B}_{r,s}^{\lambda, \mathbf{k}} = \sum_{p=0}^r \sum_{q=0}^s \binom{r}{p} \binom{s}{q} \mathbb{C}_{p,q}^{\lambda, \mathbf{k}}, \quad \mathbb{C}_{r,s}^{\lambda, \mathbf{k}} = \sum_{p=0}^r \sum_{q=0}^s (-1)^{r+s-p-q} \binom{r}{p} \binom{s}{q} \mathbb{B}_{p,q}^{\lambda, \mathbf{k}},$$

が成り立つ。

また、Arakawa-Kaneko の多重ゼータ関数 ([AK2])、および、Kaneko-Tsumura 型の多重ゼータ関数 ([KT]):

$$\xi_{k_1, \dots, k_r}(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{\text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(1 - e^{-t})}{e^t - 1} t^{s-1} dt \quad (\text{Re}(s) > 0),$$

$$\eta_{k_1, \dots, k_r}(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{\text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(1 - e^t)}{1 - e^t} t^{s-1} dt \quad (\text{Re}(s) > 0),$$

の $\lambda = (n, 1^{\ell-1})$ の hook Schur 型への拡張として、 $\mathbf{k} = (k_{ij}) \in \mathbb{N}^{|\lambda|}$ 、 $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ 、 $\text{Re}(s_1), \text{Re}(s_2) > 0$ に対し、以下のように定義する：

$$\xi_{\mathbf{k}}^{\lambda}(s_1, s_2) = \frac{1}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\text{Li}_{\mathbf{k}}^{\lambda}(1 - e^{-z_n}, 1 - e^{-z_{\ell}})}{(e^{z_n} - 1)(e^{z_{\ell}} - 1)} z_n^{s_1-1} z_{\ell}^{s_2-1} dz_n dz_{\ell}$$

$$\eta_{\mathbf{k}}^{\lambda}(s_1, s_2) = \frac{1}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\text{Li}_{\mathbf{k}}^{\lambda}(1 - e^{z_n}, 1 - e^{z_{\ell}})}{(1 - e^{z_n})(1 - e^{z_{\ell}})} z_n^{s_1-1} z_{\ell}^{s_2-1} dz_n dz_{\ell}.$$

このとき、次の定理を得た。

定理 2. 関数 $\xi_{\mathbf{k}}^{\lambda}(s_1, s_2)$ および $\eta_{\mathbf{k}}^{\lambda}(s_1, s_2)$ は s_1, s_2 に関する複素全平面に整関数として解析接続される。また、以下が成り立つ。

$$\xi_{\mathbf{k}}^{\lambda}(-p, -q) = (-1)^{p+q} \mathbb{C}_{p,q}^{\lambda(\mathbf{k})}, \quad \eta_{\mathbf{k}}^{\lambda}(-p, -q) = \mathbb{B}_{p,q}^{\lambda(\mathbf{k})}.$$

References

- [AK1] 荒川恒男, 金子正信, 多重ゼータ値入門, COE Lecure Note Vol. 23, Kyushu University, 2010.
- [AK2] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, *Nagoya Math. J.* **153** (1999), pp.189–209.
- [H] M. E. Hoffman, Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums, *Kyushu J. Math.*, **69** (2015), no.2, pp.345–366.
- [KT] M. Kaneko and H. Tsumura. Multi-poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, *Nagoya Math. J.*, **232** (2018), pp.19–54.
- [KY] M. Kaneko and S. Yamamoto, A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations, *Selecta Math. (N. S.)* **24** (2018), no.3, pp.2499–2521.
- [Mac] I. G. Macdonald, Schur functions: theme and variations, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire (Saint-Nabor, 1992)*, pp. 5–39, Publ. Inst. Rech. Math. Av., 498, Univ. Louis Pasteur, Strasbourg, 1992.
- [Mat] K. Matsumoto, On the analytic continuation of various multiple-zeta functions, *Number Theory for the Millennium* (Urbana, 2000), Vol. II, M.A. Bennett et. al. (eds.), A. K. Peters, Natick, MA, 2002, pp. 417–440.
- [NNSY] J. Nakagawa, M. Noumi, M. Shirakawa and Y. Yamada, Tableau representation for Macdonald’s ninth variation of Schur functions, (*English summary*) *Physics and combinatorics* (Nagoya, 2000), pp. 180-195, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001.
- [NN] N. Nakamura and M. Nakasuji, Schur type poly-Bernoulli numbers, preprint.
- [NPY] M. Nakasuji, O. Phuksuwan, and Y. Yamasaki, On Schur multiple zeta functions: A combinatoric generalization of multiple zeta functions, *Adv. Math.* **333** (2018), pp.570–619.
- [Y] S. Yamamoto, Multiple zeta-star values and multiple integrals, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, B68, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto (2017).

MAKI NAKASUJI

nakasuji@sophia.ac.jp

保型形式のリフティングの最近の進展について

北海道大学 理学研究院 跡部 発

Hiraku Atobe

Department of Mathematics, Hokkaido University

Abstract

Arthur の重複度公式の応用として得られる, Siegel モジュラー形式のリフティングと強重複度一定理を紹介する.

1 Siegel モジュラー形式

ランク n のシンプレクティック群を

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \mid {}^t g \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

を表す. これは, 次数 n の Siegel 上半空間

$$\mathfrak{H}_n = \{ Z \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t Z = Z, \mathrm{Im}(Z) > 0 \}$$

に次のように作用する. (但し, 実対称行列 Y が正定置の時に $Y > 0$ と書く.)

$$g\langle Z \rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \quad g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}), \quad Z \in \mathfrak{H}_n.$$

定義 1.1 正則関数 $F: \mathfrak{H}_n \rightarrow \mathbb{C}$ が次の条件 1, 2 を満たす時, 重さ k の Siegel カスプ形式であるという.

1. $F(\gamma\langle Z \rangle) = \det(CZ + D)^k F(Z)$ for $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$;
2. カスプ条件.

重さ k の Siegel カスプ形式のなすベクトル空間を $S_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ で表す.

一変数の場合と同様に, $S_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ は有限次元 \mathbb{C} -ベクトル空間であり, その上には Hecke 作用素が作用する. カスプ形式 $F \in S_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ が Hecke 同時固有形式の時, 各素数 p について, 佐武パラメーター

$$\{\beta_{1,p}^\pm, \dots, \beta_{n,p}^\pm\} \in (\mathbb{C}^\times)^n / \mathfrak{S}_n \times \{\pm 1\}^n$$

が定まり, 標準 L -関数

$$L(s, F, \mathrm{std}) = \prod_p \left((1 - p^{-s})^{-1} \prod_{i=1}^n (1 - \beta_{i,p} p^{-s})^{-1} (1 - \beta_{i,p}^{-1} p^{-s})^{-1} \right)$$

が $\text{Re}(s) \gg 0$ において定義される. これは, 全 s -平面に有理型に解析接続し, $s \leftrightarrow 1 - s$ に関する関数等式を持つことが知られている.

例 1.2 $n = 1$ とする. この時,

$$\text{Sp}_1(\mathbb{R}) = \text{SL}_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathfrak{H}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}.$$

カスプ形式 $f \in S_k(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ のカスプ条件とは, f が次の形の Fourier 展開を持つことである.

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_f(m) e^{2\pi n \sqrt{-1}z}.$$

Hecke L -関数

$$L(s, f) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_f(m)}{m^s}$$

が $\text{Re}(s) \gg 0$ において定義される. カスプ形式 f が Hecke 同時固有形式の時, $L(s, f)$ は次数 2 の L -関数である. 一方で, 標準 L -関数 $L(s, f, \text{std})$ は次数 3 であり, 随伴 L -関数 $L(s, f, \text{Ad})$ と一致する. これは $\text{Re}(s) \gg 0$ において, 次の式で定義される.

$$\begin{aligned} L(s, f, \text{Ad}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{0 < d|n} (-1)^{\Omega(\frac{n}{d})} d^{-(k-1)} a_f(d)^2 \right) n^{-s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{d>0 \\ d^2|n}} \left(\frac{n}{d^2}\right)^{-(k-1)} a_f\left(\left(\frac{n}{d^2}\right)^2\right) \right) n^{-s} \\ &= \prod_p \left(1 - a_f(p^2) p^{-(s+k-1)} + a_f(p^2) p^{-(2s+k-1)} - p^{-3s} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

但し, $\Omega(d)$ は d の重複を含めた素因子の個数である. これは全 s -平面に解析接続し, 関数等式

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1) \Gamma_{\mathbb{C}}(s+k-1) L(s, f, \text{Ad}) = \Gamma_{\mathbb{R}}(-s+2) \Gamma_{\mathbb{C}}(-s+k) L(1-s, f, \text{Ad})$$

を満たす. ここで, $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$, $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)$ とおいた. さらに,

$$\frac{L(1, f, \text{Ad})}{\langle f, f \rangle} = \frac{2^{2k-1} \pi^{k+1}}{(k-1)!}$$

が成り立つことが知られている.

カスプ形式のなす空間 $S_k(\text{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ は有限次元であり, 特に,

- $\dim_{\mathbb{C}} S_k(\text{SL}_2(\mathbb{Z})) = 1$ for $k = 12, 20, 26$;

- $\dim_{\mathbb{C}} S_k(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z})) = 1$ for $k = 12, 14$

が知られている。宮脇は $k = 12, 14$ に対して、 $S_k(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$ の（定数倍を除いて一意な）Hecke 同時固有形式 F_k の Hecke 作用を数値計算し、次のような予想を立てた。

予想 1.3 (宮脇 [M92]) (A) $\Delta \in S_{12}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, $g_{20} \in S_{20}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, $F_{12} \in S_{12}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$ をそれぞれ Hecke 同時固有形式とする時、

$$L(s, F_{12}, \mathrm{std}) = L(s, \Delta, \mathrm{std})L(s + 10, g_{20})L(s + 9, g_{20})$$

が成り立つであろう。

(B) $\Delta \in S_{12}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, $g_{26} \in S_{26}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, $F_{14} \in S_{14}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$ をそれぞれ Hecke 同時固有形式とする時、

$$L(s, F_{14}, \mathrm{std}) = L(s, \Delta, \mathrm{std})L(s + 13, g_{26})L(s + 12, g_{26})$$

が成り立つであろう。

この予想は、 F_{12} や F_{14} がそれぞれ、二つのカスプ形式 (Δ, g_{20}) , (Δ, g_{26}) からのリフトであることを示唆する。このような二つのカスプ形式からのリフティングを紹介する。それは Arthur の重複度公式を応用することで得られる。

2 Arthur の重複度公式とその応用

有理数体 \mathbb{Q} のアデル環を $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathrm{fin}} \times \mathbb{R}$ で表す。

定義 2.1 関数 $\varphi: \mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ が次の条件を満たす時、二乗可積分な保型形式であるという。

1. $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$ for $\gamma \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Q})$;
2. φ は滑らか;
3. φ は K -有限, 但し, $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A})$ の極大コンパクト部分群 $K = K_{\mathrm{fin}} \times K_{\infty}$ は

$$K_{\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t\alpha\beta = {}^t\beta\alpha, {}^t\alpha\alpha + {}^t\beta\beta = \mathbf{1}_n \right\}$$

と, $K_{\mathrm{fin}} = \prod_p \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}_p)$ により定めた;

4. φ は $Z(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{\infty}))$ -有限, 但し, $Z(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{\infty}))$ は $\mathfrak{g}_{\infty} = \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ の普遍包絡環 $Z(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{\infty}))$ の中心である;
5. φ は二乗可積分, 即ち,

$$\int_{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{Sp}_n(\mathbb{A})} |\varphi(g)|^2 dg < \infty.$$

二乗可積分な保型形式のなすベクトル空間を $\mathcal{A}^2(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ で表す.

空間 $\mathcal{A}^2(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ は自然に, $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}) \times (\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$ -加群になる. **Arthur** の重複度公式 ([Ar13, Theorem 1.5.2]) は, $\mathcal{A}^2(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ の $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}) \times (\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$ -加群としての既約分解を A -パラメーターという概念で与える結果である.

カスプ形式 $F \in S_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ は次のようにして, $\varphi_F \in \mathcal{A}^2(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ を与える.

$$\varphi_F(\gamma g_\infty \kappa_{\mathrm{fin}}) = F(g_\infty \langle \sqrt{-1} \cdot \mathbf{1}_n \rangle) \det(C\sqrt{-1} + D)^{-k}$$

for $\gamma \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Q})$, $g_\infty = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, and $\kappa_{\mathrm{fin}} \in K_{\mathrm{fin}}$. このようにして得られる保型形式を重さ k の正則カスプ形式といい, それらのなすベクトル空間を $S_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ で表す. この空間 $S_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ は $\mathcal{A}^2(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ の $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ -安定な部分空間である.

Chenevier–Lannes は [CL19, Chapter VIII paragraph 5.1] において, Arthur の重複度公式を $S_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ に移植した. これによって, $S_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ は A -パラメーターによって分解されることになる. この分解は表現論の言葉で書かれているが, それをモジュラー形式の言葉で言い換えることで, 次のリフティングの定理が得られる.

定理 2.2 Hecke 同時固有形式 $f \in S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ と非負整数 n, r で, $n - r \geq 0$ が偶数となるものを固定する.

(A) $k \equiv (n + r)/2 \pmod{2}$ と $k > (n - r)/2$ を仮定する. この時, Hecke 同時固有形式 $g \in S_{k + \frac{n+r}{2}}(\mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z}))$ に対して, Hecke 同時固有形式 $F_{f,g} \in S_{k + \frac{n+r}{2}}(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ であって,

$$L(s, F_{f,g}, \mathrm{std}) = L(s, g, \mathrm{std}) \prod_{i=1}^{n-r} L\left(s + k + \frac{n-r}{2} - i, f\right)$$

を満たすものが存在する.

(B) $k \equiv (n - r)/2 \pmod{2}$ と $k > (n + r)/2$ を仮定する. この時, Hecke 同時固有形式 $g \in S_{k - \frac{n-r}{2}}(\mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z}))$ に対して, Hecke 同時固有形式 $F_{f,g} \in S_{k + \frac{n-r}{2}}(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ であって,

$$L(s, F_{f,g}, \mathrm{std}) = L(s, g, \mathrm{std}) \prod_{i=1}^{n-r} L\left(s + k + \frac{n-r}{2} - i, f\right)$$

を満たすものが存在する.

定理 2.2 (A) において, $(k, n, r) = (10, 3, 1)$ とした時が予想 1.3 (A) であり, 定理 2.2 (B) において, $(k, n, r) = (13, 3, 1)$ とした時が予想 1.3 (B) である. また, $r = 0$ の時には, $L(s, g, \mathrm{std})$ は Riemann のゼータ関数 $\zeta(s)$ であると理解する. この場合のリフティングは, f の Duke–Imamogle–Ibukiyama–Ikeda リフトである.

定理 2.2 のリフティングは、定数倍を除いて一意的である。これは Chenevier–Lannes による重複度一定理 [CL19, Chapter VIII, Corollary 5.4] から従う。これも Arthur の重複度公式の応用である。Mœglin–Renard による最新の結果 [MR] を用いることで、次のように重複度一定理の拡張が得られる。

定理 2.3 (強重複度一定理) $i = 1, 2$ について, $F_i \in S_{k_i}(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ を Hecke 同時固有形式とする。次を仮定する。

- ほとんど全ての素数 p に対して, F_1 の p における佐武パラメーターと F_2 のそれは一致する;
- n が偶数の場合は $\{k_1, k_2\} \neq \{\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\}$.

この時, 定数 $c \in \mathbb{C}^\times$ が存在して, $F_2 = cF_1$ となる。

証明の方針 ステップ 1 正則カスプ形式 φ_{F_i} で生成される $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}) \times (\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$ -加群 $\pi_{F_i} \subset \mathcal{A}^2(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ を考える。これは既約になる。

ステップ 2 仮定と Adams–Johnson [AJ87], Arancibia–Mœglin–Renard [AMR], Mœglin–Renard [MR] の結果より, π_{F_1} と π_{F_2} は同型であることが分かる。

ステップ 3 局所 A -packet の重複度一定理 (Mœglin [Moe11a, Moe11b], Xu [X], Adams–Johnson [AJ87], Arancibia–Mœglin–Renard [AMR], Mœglin–Renard [MR] の結果) から, π_{F_1} と π_{F_2} は $\mathcal{A}^2(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ の部分空間として一致することが分かる。

ステップ 4 不分岐最小重さのベクトルの一意性より, φ_{F_2} は φ_{F_1} の定数倍であることが分かる。特に, F_2 は F_1 の定数倍となる。

□

謝辞

代数学シンポジウムにおける講演の機会を下さった世話人の皆様に感謝いたします。

参考文献

- [AJ87] J. Adams and J. F. Johnson, *Endoscopic groups and packets of nontempered representations*. *Compositio Math.* **64** (1987), no. 3, 271–309.
- [AMR] N. Arancibia, C. Mœglin and D. Renard, *Paquets d’Arthur des groupes classiques et unitaires*, arXiv:1507.01432v2.
- [Ar13] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations: orthogonal and symplectic groups*, *American Mathematical Society Colloquium Pub-*

- lications*, **61**, 2013.
- [CL19] G. Chenevier and H. Lannes, *Automorphic forms on even unimodular lattices*, to appear in *the Springer collection Ergebnisse* in 2019.
- [M92] I. Miyawaki, *Numerical examples of Siegel cusp forms of degree 3 and their zeta-functions*, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A* **46** (1992), no. 2, 307–339.
- [Moe11a] C. Mœglin, *Multiplicité 1 dans les paquets d’Arthur aux places p -adiques. On certain L -functions*, 333–374, *Clay Math. Proc.*, **13**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [Moe11b] C. Mœglin, *Image des opérateurs d’entrelacements normalisés et pôles des séries d’Eisenstein*, *Adv. Math.* **228** (2011), no. 2, 1068–1134.
- [MR] C. Mœglin and D. Renard, *Sur les paquets d’Arthur de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ contenant des modules unitaires de plus haut poids, scalaires*, arXiv:1802.04611v2.
- [X] B. Xu, *On Mœglin’s parametrization of Arthur packets for p -adic quasisplit $\mathrm{Sp}(N)$ and $\mathrm{SO}(N)$* . *Canad. J. Math.* **69** (2017), no. 4, 890–960.

hom 関手の群による商について

丹原大介

1 日本語書籍に見る圏論

近年、圏論を標題に掲げた邦書の出版が相次いでいる。新しい方からあげると

前原和壽『圏論入門』2018年8月
清水勇二『圏と加群』2018年3月
中岡宏行『圏論の技法』2015年12月
圏論の歩き方委員会編『圏論の歩き方』2015年9月

他に翻訳も出ている。

レンスター『ベーシック圏論』土岡俊介訳 2017年1月
アウディー『圏論』前原和壽訳 2015年9月

この活況を引き起こしている要因を筆者は知らない。すでに圏が広く使われていた80年代、90年代には見られなかった現象である。ここでは時代を遡って、圏論が一般に広まる前に日本において圏を扱った書物がどのように出版されてきたか辿ってみたい。

まず70年代に二つの書があげられる。

大熊正『圏論(カテゴリー)』1979年
竹内外史『層・圏・トポス』1978年

大熊正の本は槇書店の数学選書の一冊であったが今日手に入らない。竹内外史の名高い本は現在もプリントを重ねる。これらに先立って圏を主題とする単行本はない。圏論の教科書としては大熊正の本が最初と見えようか。著者は序で日本は圏論に冷淡だと嘆いていた。今日の状況を見たら何と云うだろう。

雑誌に目を移すと、「現代数学」にカテゴリーの記事が見られる。

倉田令二郎, カテゴリーを学ぶ, 現代数学 1977年~1978年
森毅, 集合のカテゴリー, 現代数学 1971年

また「数学セミナー」臨時増刊号の

『数学100の発見』1972年

において100番目の発見として「カテゴリー・ファンクター」の項があり、その執筆者は井関清志である。60年代に移り、圏が扱われている数学書を拾ってみよう。

服部昭『現代代数学』1968年 「圏とホモロジー」の章あり
日本数学会編『岩波数学辞典第2版』1968年 「圏と関手」の項目あり
永田雅宜『抽象代数への入門』1967年 「圏と関手」の章あり
小松醇郎・中岡稔・菅原正博『位相幾何学I』1967年 「圏」の語あり

河田敬義・大口邦雄『位相幾何学』1967年 「圏」の語あり

松村英之『集合論入門』1966年 「圏と関手」の章あり

彌永昌吉・小平邦彦『現代数学概説 I』1961年 「Category と functor」の節あり

『岩波数学辞典』の初版は1954年であるが、そこにカテゴリーもホモロジー代数も見られない。学会誌「数学」の

米田信夫, Universality について I, II, 数学 1961年, 1962年

を見ると, category の訳語として「対象系」が使われている。

50年代は

H.Cartan and S.Eilenberg, Homological Algebra, 1956年

が出てホモロジー代数の成立を告げ, 日本でも

中山正・服部昭『ホモロジー代数学』1957年

が続いた。ここでは「カテゴリー」, 「関手」の語が使われている。同じ年の

秋月康夫・鈴木通夫『高等代数学 II』1957年

には, 「複体, ホモロジー」の一節があるが圏には触れていない。60年代に「圏」を使い始めた著者らの50年代の著作

小松醇郎・戸田宏・中岡稔『位相幾何学』1957年

河田敬義・竹内外史『位相幾何学』1952年

を見ても, 圏の言及はない。さらに圏論誕生の年1945年まで遡っても圏に触れた本は見つからない。

こうしてみると, 圏の概念が日本語の書物に登場するのは1957年の『ホモロジー代数学』から, 日本語の「圏」が使われ始めるのは1966年の『集合論入門』からのようである。(講演時『集合論入門』は見えていなかった。)

圏という語の発案者は不明と講演で述べたが, 後日 category に圏の訳があてられた経緯を次の記事で知った。

河田敬義, 日本数学会編集数学辞典第2版, 数学セミナー 1968年7月号

数学辞典は同年6月に刊行された。4年にわたる編集を率いた河田敬義が苦勞談を打ち明けている。とくにまちまちだった数学の術語の日本語訳に苦心したという。原文を引用する。

まず問題になったのは, 外国語の述語, たとえば category という言葉が, 従来の論理学の用語とは別の意味に用いられています。これを外国語のまま 'category' とするか, 仮名で 'カテゴリー' とするか, 適当な訳をつけるかという3種類の選択があります。内部でも議論をし, 数学外の人々の意見ももとめました。全体的結論として, ローマ字綴りのままは全く採用しないこと, 仮名書きは, すでに日本語として熟しているときにだけ用いて, 無暗に新しく作らないこと, 結局なるべく適当な訳を作ることになりました。category には '圏' という訳をつけました。

「『圏』という訳をつけました」の明示されていない主語は編集委員会であろうか。河田敬義本人であるのかもしれない。数学辞典の執筆陣に名を連ねる服部昭，永田雅宜，小松醇郎，中岡稔，菅原正博，松村英之らは訳語「圏」の採用を知っていて，いち早く著作に取り入れたのだろう。

2 「自然な同型」

周知のとおり，category theory の誕生は Eilenberg と MacLane の論文

General theory of natural equivalences, Trans.Amer.Math.Soc. 58 (1945)

による。ここで彼らは category, functor, natural equivalence の一般的定義を与えたが，先立って群の category における functor と natural equivalence の定義を論文

Natural isomorphisms in group theory, Proc.Nat.Acad.Sci. U.S.A. 28 (1942)

で与えている。その序文はつぎのように始まる。

Frequently in modern mathematics there occur phenomena of “naturalness”: a “natural” isomorphism between two groups or between two complexes, a “natural” homeomorphism of two spaces and the like. We here propose a precise definition of the “naturalness” of such correspondences, as a basis for an appropriate general theory.

大学で受けた講義をふりかえって「自然な～」という言い方は圏を意識することなく使われていたと思うが，Eilenberg と MacLane が naturality の定義を与える以前に，natural isomorphism といった言い方が慣用的にされていたのだろうかと疑問が湧く。以下少しだけ調べたことである。

MacLane 自身が Birkhoff とともに著した抽象代数の教科書

G.Birkhoff/S.MacLane, A Survey of Modern Algebra, 1941

に “natural isomorphism” は現れない。(改版 1953 年には現れる。)

1945 年以前のトポロジーの代表的な教科書

S.Lefschetz, Algebraic Topology, 1942

P.Alexandroff/H.Hopf, Topologie I, 1935

H.Seifert/W.Threlfall, Lehrbuch der Topologie, 1934

を開いてみたが，“natural isomorphism” は見当たらなかった。なお上記 Lefschetz の書に有向集合上の群の逆系の間の同型が現れ，それが自然同型の一例であるとして Eilenberg と MacLane の 1942 年論文が引用している。論文での使用例は十分調べていない。

講演では以上を前置きとして本題に入った。3 節で hom 関手の群による商を導入し，それをを用いて 4 節で極限の一般化，5 節で随伴の一般化を考察する。以下において Set は集合の圏を表す。 B, C などは小さい圏を表す。

3 hom 関手とその直和, 商

圏 \mathcal{C} の対象 x に対して $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, -): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ は

$$y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$$

なる関手である。 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, x): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ は

$$y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x)$$

なる関手である。また $\text{Hom}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ は

$$(x, y) \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$$

なる関手である。

関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ が表現可能 (representable) であるとは, \mathcal{C} のある対象 x に対して同型

$$F \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, -)$$

が存在することをいう。反変関手 $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ についても同様に言う。

つぎに “familiably representable” の定義をする。関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ が族的表現可能 (familiably representable) であるとは, \mathcal{C} のある対象の族 $(x_i)_{i \in I}$ に対して同型

$$F \cong \coprod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_i, -)$$

が存在することをいう。つまり hom 関手の直和と同型な関手のことである。反変関手についても同様に言う。[CJ], [L1], [L2] で “familiably representable” の語が使われている。

次に “nearly representable” を定義する。圏 \mathcal{C} の対象 x の自己同型群 $\text{Aut}(x)$ の部分群 G があるとき, \mathcal{C} の任意の対象 y に対して集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ に G が作用する。その商集合を $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)/G$ と書く。 y を変数とみて関手

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, -)/G: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

を得る。関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ が殆ど表現可能 (nearly representable) であるとは, \mathcal{C} のある対象 x と $\text{Aut}(x)$ のある部分群 G に対して同型

$$F \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, -)/G$$

が存在することをいう。

米田の補題により以下が言える。

- $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, -)/G \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x', -)/G' \iff \exists u: x \rightarrow x' \text{ isomorphism, } uGu^{-1} = G'$
- 殆ど表現可能な関手の群作用による商関手もまた殆ど表現可能。

関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ が殆ど族的表現可能 (nearly familiably representable) であるとは, \mathcal{C} のある対象の族 $(x_i)_{i \in I}$ および部分群 $G_i \subset \text{Aut}(x_i)$ の族に対して同型

$$F \cong \coprod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_i, -)/G_i$$

が存在することをいう。

4 有限圏における極限

圏における直積の定義を hom 関手を用いて言えばつぎのようになる。圏 \mathcal{C} の対象 x, y, z に対して、関手の同型 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, x) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, z)$ があるとき、 z は x と y の直積であるという。 \mathcal{C} において x と y の直積が存在するということは、 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, x) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, y)$ が表現可能であるということである。ここで表現可能を族的表現可能や殆ど族的表現可能におきかえれば、直積の存在より緩やかな条件になるだろう。

有限圏とは対象も射も有限個しかない圏をいう。有限圏 \mathcal{C} においては、任意のふたつの対象の直積が存在するならば、 \mathcal{C} は半順序集合と圏同値であることが知られている。さらに終対象も存在すれば、 \mathcal{C} は束と同値であり、したがって余積と始対象が存在する。有限圏の場合、hom 関手の有限直積が族的表現可能ないしは殆ど族的表現可能という条件は、以下のように余極限の部分的存在と同値であると言える。

定理 1 有限圏 \mathcal{C} について次の 2 条件は同値である。

- (i) \mathcal{C} 上の表現可能反変関手の有限直積は族的表現可能である。
- (ii) \mathcal{C} において pushout と coequalizer が存在する。

定理 2 有限圏 \mathcal{C} について次の 2 条件は同値である。

- (i) \mathcal{C} 上の表現可能反変関手の有限直積は殆ど族的表現可能である。
- (ii) \mathcal{C} において pushout が存在する。

ふたつの定理は [T1] で証明されている。定理 1 と有限圏のバーンサイド環との関係について [T2] に報告がある。

5 群を法とする随伴

互いに逆向きな関手の対

$$\mathcal{B} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{C}$$

に対して、自然な全単射

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(x), y) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{B}}(x, G(y)) \\ (x \in \mathcal{B}, y \in \mathcal{C}) \end{aligned}$$

が与えられたとき、 F は G の左随伴関手である、または G は F の右随伴関手であるというのであった。

このとき

$$L(x, y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(x), y)$$

とおくと、 L は関手

$$L: \mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

であり

$$\begin{aligned} L(x, -) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(x), -) \\ L(-, y) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{B}}(-, G(y)) \end{aligned}$$

であるから, $L(x, -)$ も $L(-, y)$ も表現可能である。

逆に, 任意の関手 $L: \mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ について, 2 条件

- $L(x, -): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ が表現可能 ($\forall x \in \mathcal{B}$)
- $L(-, y): \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ が表現可能 ($\forall y \in \mathcal{C}$)

が成り立つとする。

$$\begin{aligned} L(x, -) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(x), -) \\ L(-, y) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{B}}(-, G(y)) \end{aligned}$$

なる $F(x), G(y)$ をとれば,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(x), y) \cong L(x, y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{B}}(x, G(y))$$

となるから随伴対

$$\mathcal{B} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{C}$$

を得る。

こうして, \mathcal{B} と \mathcal{C} の間の随伴というものは, $L: \mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ であって条件

- $L(x, -): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ が表現可能 ($\forall x \in \mathcal{B}$)
- $L(-, y): \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ が表現可能 ($\forall y \in \mathcal{C}$)

をみたすものと同等であるといえる。 L がこの 2 条件を満たすとき, L は変数別に表現可能である (slicewise representable) ということにする。

一般に関手 $\mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ を bimodule とか distributor と呼んだりする。両側加群のテンソル積と同様に, $L: \mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, $M: \mathcal{C}'^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ に対して, 合成 $L \otimes_{\mathcal{C}} M: \mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ が定義される。([B] の記法は $L \circ M$ 。) また圏 \mathcal{C} の $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$ を distributor と見ることができる。

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathbf{Set} \\ (x, y) &\mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \end{aligned}$$

関手 $p: \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$, $q: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ があるとき, 関手圏の間に引き戻し関手

$$(p \times q)^*: [\mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{C}, \mathbf{Set}] \rightarrow [\mathcal{B}'^{\text{op}} \times \mathcal{C}', \mathbf{Set}]: L \mapsto L \circ (p \times q)$$

が定義される。その左随伴関手が存在しそれを

$$(p \times q)_!: [\mathcal{B}'^{\text{op}} \times \mathcal{C}', \mathbf{Set}] \rightarrow [\mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{C}, \mathbf{Set}]$$

と記す。

ここで再び表現可能性を族表現可能性に代えてみよう。

$L: \mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ について,

- $L(x, -): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ が族表現可能 ($\forall x \in \mathcal{B}$)
- $L(-, y): \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ が族表現可能 ($\forall y \in \mathcal{C}$)

をみたすとき, L は変数別に族的表現可能 (slicewise familially representable) であるという。

このとき任意の $x \in \mathcal{B}$, $y \in \mathcal{C}$ に対して

$$\begin{aligned} L(x, -) &\cong \coprod_i \text{Hom}_{\mathcal{C}}(u_i, -) \quad (u_i \in \mathcal{C}) \\ L(-, y) &\cong \coprod_j \text{Hom}_{\mathcal{B}}(-, v_j) \quad (v_j \in \mathcal{B}) \end{aligned}$$

なる同型をとる。 x に対する添字 i の集合を $I(x)$ とおくと、関手 $I: \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ を得る。 y に対する添字 j の集合を $J(y)$ とおくと、関手 $J: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ を得る。

I の要素の圏 $\mathbb{E}(I)$ が定義される。その対象は対 (x, i) ($x \in \mathcal{B}, i \in I(x)$) である。射 $(x, i) \rightarrow (x', i')$ は \mathcal{B} の射 $f: x \rightarrow x'$ であって $I(f)(i') = i$ をみたすものである。射影 $\theta: \mathbb{E}(I) \rightarrow \mathcal{B}$ は $(x, i) \mapsto x$ なる関手である。 J の要素の圏 $\mathbb{E}(J)$ と射影 $\pi: \mathbb{E}(J) \rightarrow \mathcal{C}$ が定義される。

すると、関手 $\tilde{L}: \mathbb{E}(I)^{\text{op}} \times \mathbb{E}(J) \rightarrow \mathbf{Set}$ および同型

$$L \cong (\theta \times \pi)_! \tilde{L}$$

があることがいえる。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(I) & \xrightarrow{\tilde{L}} & \mathbb{E}(J) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{L} & \mathcal{C} \end{array}$$

そして \tilde{L} は変数別に表現可能であり、 $\mathbb{E}(I)$ と $\mathbb{E}(J)$ の間の随伴を与える。

圏 \mathcal{B} 上の反変関手に対する要素の圏は \mathcal{B} 上の離散ファイバー圏というものである。双対的に、圏 \mathcal{C} 上の共変関手に対する要素の圏は \mathcal{C} 上の離散双対ファイバー圏というものである。

必要十分条件として述べると以下のようなになる。

命題 関手 $L: \mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ について次の2条件は同値である。

- (i) L は変数別に族的表現可能である。
- (ii) 離散ファイバー圏 $\theta: \tilde{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}$, 離散双対ファイバー圏 $\pi: \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$, 変数別に表現可能な関手 $\tilde{L}: \tilde{\mathcal{B}}^{\text{op}} \times \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{Set}$ および同型

$$L \cong (\theta \times \pi)_! \tilde{L}$$

が存在する。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{B}} & \xrightarrow[\text{adjoint}]{\tilde{L}} & \tilde{\mathcal{C}} \\ \theta \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{L} & \mathcal{C} \end{array}$$

つぎに「表現可能」を「殆ど表現可能」に代えて distributor を考察する。

distributor $L: \mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ について、

- $L(x, -): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ が殆ど表現可能 ($\forall x \in \mathcal{B}$)
- $L(-, y): \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ が殆ど表現可能 ($\forall y \in \mathcal{C}$)

であるとき、 L は変数別に殆ど表現可能 (slicewise nearly representable) であるという。

この性質は合成に引き継がれる。すなわち $L: \mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, $M: \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ が変数別に殆ど表現可能であれば、 $L \otimes_{\mathcal{C}} M: \mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ も変数別に殆ど表現可能である。

ある有限性の仮定のもとで、変数別に殆ど表現可能な distributor の分解定理が成り立つ。それを述べるため関手についての G 条件、関手の3つ組の G 三角形を定義する。

$\phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を関手とする。 $x \in \mathcal{C}$ に対し $G_x = \text{Ker}(\text{Aut}(x) \rightarrow \text{Aut}(\phi(x)))$ とおく。

ϕ についての右 G 条件はつぎの二つからなる。

- (i) ϕ はオブジェクトにおいて全射。すなわち $\phi: \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D})$ は全射。
- (ii) 任意の $x, x' \in \mathcal{C}$ に対し, ϕ の引き起こす写像

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x', x)/G_x \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\phi(x'), \phi(x))$$

は全単射。

すべての $G_x = 1$ のときは, ϕ は圏同値となる。 ϕ がオブジェクトにおいて恒等写像であるときは, [P, 1.3] で exterior quotient と呼ぶものと同じである。

双対的に, ϕ についての左 G 条件はつぎの二つからなる。

- (i) ϕ はオブジェクトにおいて全射。
- (ii) 任意の $x, x' \in \mathcal{C}$ に対し,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x')/G_x \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\phi(x), \phi(x'))$$

は全単射。

つぎに左 G 三角形を定義する。圏の可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{E} \\ \phi \downarrow & \searrow \sigma & \\ \mathcal{D} & & \end{array}$$

において, ϕ は左 G 条件を満たすと仮定する。

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x')/G_x \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\phi(x), \phi(x'))$$

であった。 $x \in \mathcal{C}$ と $z \in \mathcal{E}$ に対し, 関手 σ は写像

$$\text{Hom}_{\mathcal{E}}(\tau(x), z)/G_x \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\phi(x), \sigma(z))$$

をひきおこす。この写像が全単射である ($\forall x, \forall z$) と仮定する。このとき, (ϕ, σ, τ) を左 G 三角形という。

すべての $G_x = 1$ のときは, σ は coreflector というものになる ($\sigma\rho \simeq 1$ なる左随伴 ρ が存在)。

双対的に右 G 三角形を定義できる。

有限性条件のもとで, 変数別に殆ど表現可能な distributor の構造について次が成り立つ。

定理 3 圏 \mathcal{C} において, 分裂全射の無限列

$$\cdots \xrightarrow{g_2} y_2 \xrightarrow{g_1} y_1 \xrightarrow{g_0} y_0$$

があれば, ある番号から先の g_i は同型射になると仮定する。

このとき $L: \mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ について次の 2 条件は同値である。

- (i) L は変数別に殆ど表現可能である。
- (ii) 左 G 三角形

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{G} \\ \theta \downarrow & \searrow \sigma & \\ \mathcal{B} & & \end{array}$$

と右 G 三角形

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xleftarrow{\omega} & \mathcal{H} \\ & \searrow \rho & \downarrow \pi \\ & & \mathcal{C} \end{array}$$

および同型

$$L \cong (\sigma \times \rho)_! \text{Hom}_{\mathcal{G}}$$

が存在する。

(注 1) \mathcal{C} が有限であれば定理の仮定はみたされる。

(注 2) 一般的な同型

$$(\sigma \times \rho)_! \text{Hom}_{\mathcal{G}} \cong (1 \times \sigma)^* \text{Hom}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{G}} (\rho \times 1)^* \text{Hom}_{\mathcal{C}}$$

が成り立つ。

証明の道筋を述べる。

$L: \mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ が変数別に殆ど表現可能であるとする。 $x \in \mathcal{B}, y \in \mathcal{C}$ に対して同型

$$\begin{aligned} L(x, -) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{x}, -)/H_x \quad (\tilde{x} \in \mathcal{C}, H_x \leq \text{Aut}(\tilde{x})) \\ L(-, y) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{B}}(-, \hat{y})/K_y \quad (\hat{y} \in \mathcal{B}, K_y \leq \text{Aut}(\hat{y})) \end{aligned}$$

を選ぶ。このように対象の対応 $x \mapsto \tilde{x}, y \mapsto \hat{y}$ が選ばれると, 射の対応

$$\begin{aligned} (f: x \rightarrow x') &\mapsto (\tilde{f}: \tilde{x} \rightarrow \tilde{x}') \\ (g: y \rightarrow y') &\mapsto (\hat{g}: \hat{y} \rightarrow \hat{y}') \end{aligned}$$

を上と同型と両立するように選ぶことができる。

真の随伴に対する unit, counit と同様に $x \in \mathcal{B}$ に対して \mathcal{B} の射 $\eta_x: x \rightarrow \hat{\tilde{x}}$ がとれる。 $y \in \mathcal{C}$ に対して \mathcal{C} の射 $\epsilon_y: \hat{\tilde{y}} \rightarrow y$ がとれる。随伴のときと同様に triangle identity が群を法として成り立つ。

$$\begin{aligned} \epsilon_{\tilde{x}} \tilde{\eta}_x &\equiv 1 \pmod{H_x} \\ \hat{\epsilon}_y \eta_{\hat{y}} &\equiv 1 \pmod{K_y} \end{aligned}$$

補題 圏 \mathcal{C} において, 分裂全射の無限列

$$\cdots \xrightarrow{g_2} y_2 \xrightarrow{g_1} y_1 \xrightarrow{g_0} y_0$$

があれば, ある番号から先の g_i は同型射になると仮定する。

このとき任意の $x \in \mathcal{B}$ に対して

$$\epsilon_{\tilde{x}}: \hat{\tilde{x}} \rightarrow \tilde{x}$$

は同型射である。任意の $y \in \mathcal{C}$ に対して

$$\eta_{\hat{y}}: \hat{y} \rightarrow \hat{\tilde{y}}$$

は同型射である。

そこで

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0 &= \{x \in \mathcal{B} \mid \eta_x \text{ は同型}\} \\ \mathcal{C}_0 &= \{y \in \mathcal{C} \mid \epsilon_y \text{ は同型}\}\end{aligned}$$

とおくと補題により

$$\begin{aligned}x \in \mathcal{B} &\implies \tilde{x} \in \mathcal{C}_0 \\ y \in \mathcal{C} &\implies \hat{y} \in \mathcal{B}_0\end{aligned}$$

がいえる。 \mathcal{B}_0 の商として圏 $\bar{\mathcal{B}}_0$ および右 G 条件をみたま関手 $p: \mathcal{B}_0 \rightarrow \bar{\mathcal{B}}_0$ が定義される。 \mathcal{C}_0 の商として圏 $\bar{\mathcal{C}}_0$ および左 G 条件をみたま関手 $q: \mathcal{C}_0 \rightarrow \bar{\mathcal{C}}_0$ が定義される。distributor

$$M: \mathcal{B}^{\text{op}} \times \bar{\mathcal{B}}_0 \rightarrow \mathbf{Set}, K: \bar{\mathcal{B}}_0^{\text{op}} \times \bar{\mathcal{C}}_0 \rightarrow \mathbf{Set}, N: \bar{\mathcal{C}}_0^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

が定義され, L は

$$L \cong M \otimes_{\bar{\mathcal{B}}_0} K \otimes_{\bar{\mathcal{C}}_0} N$$

と分解する。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{L} & \mathcal{C} \\ & \searrow M & \nearrow N \\ & \bar{\mathcal{B}}_0 & \xrightarrow{K} & \bar{\mathcal{C}}_0 \end{array}$$

K は圏同値 $\bar{\mathcal{B}}_0 \simeq \bar{\mathcal{C}}_0$ を与える。さらに, M と N からそれぞれ右 G 三角形と左 G 三角形が生じ, それから定理の (ii) の同型を得る。

参考文献

- [B] F.Borceux, Handbook of Categorical Algebra 1, Cambridge University Press, 1994.
- [CJ] A.Carboni and P.Johnstone, Connected limits, familial representability and Artin glueing, Math. Struct. Comp. Science 5(1995).
- [L1] T.Leinster, Higher operads, Higher categories, Cambridge University Press, 2004.
- [L2] T.Leinster, The Euler characteristic of a category, Documenta Math.13 (2008).
- [P] L.Puig, Frobenius Categories versus Brauer Blocks, Birkhäuser, 2009.
- [T1] D.Tambara, Finite categories with pushouts, Theory and Applications of Categories vol.30 (2015), 1017–1031.
- [T2] 丹原大介, On quotient of Hom-functors, 『有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究』, 数理解析研究所講究録 1872 (2014), 158–164.

(2018 年 12 月 21 日提出)

1 のベキ根における量子群の表現論

谷崎俊之

1 はじめに

\mathfrak{g} を \mathbb{C} 上の有限次元単純 Lie 代数とし, 対応する量子群 (\mathfrak{g} の包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ の q 類似) を $U_q(\mathfrak{g})$ で表す. また 1 のベキ根 $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して, $U_q(\mathfrak{g})$ の $q = \zeta$ における特殊化として得られる \mathbb{C} 代数を $U_\zeta(\mathfrak{g})$ で表す (De Concini-Kac 型量子群). この報告では, $U_\zeta(\mathfrak{g})$ の表現論について概説を行う. 既約表現を分類することが真っ先に考えるべき問題であるが, 実はそれすらまだ解決されていない. したがって知られていることはあまり多くはないのが現状である.

ひとつの指導原理は, $U_\zeta(\mathfrak{g})$ の表現論と, 正標数における有限次元単純リー代数の表現論の間の並行関係である. より正確に述べると, k を標数 $p > 0$ の代数閉体とし, \mathfrak{g} と同じルート系をもつ k 上の有限次元単純 Lie 代数 \mathfrak{g}_k の包絡代数 $U(\mathfrak{g}_k)$ を考えるとき, \mathbb{C} 代数 $U_\zeta(\mathfrak{g})$ の表現論と, k 代数 $U(\mathfrak{g}_k)$ の表現論の間に著しい類似が成立していることが, 以前から知られている. 特に, Lusztig [12] は $U_\zeta(\mathfrak{g})$ の既約表現の分類と $U(\mathfrak{g}_k)$ の既約表現の分類が, まったく同じ仕組みのもとで, いわゆる Springer ファイバーの同変 K 群を用いて記述できることを予想した. 実は $U(\mathfrak{g}_k)$ に関しては, この Lusztig の予想は Bezrukavnikov-Mirković-Rumynin [1], Bezrukavnikov-Mirković [2] により既に解決されている. また, これに限らず, $U(\mathfrak{g}_k)$ の表現論の方が $U_\zeta(\mathfrak{g})$ の表現論よりも先んじている側面が多いのも事実である. したがって, これから述べる $U_\zeta(\mathfrak{g})$ の表現論においては, 先行する $U(\mathfrak{g}_k)$ の表現論を横目で睨みながら, 成り立つべき事を予測しその証明を考えていくことになる.

以下, $U(\mathfrak{g}_k)$ の表現論にも触れつつ, $U_\zeta(\mathfrak{g})$ の表現論の現況について筆者の力の及ぶ範囲で解説を行う.

2 量子群

\mathfrak{g} を \mathbb{C} 上の有限次元単純 Lie 代数, \mathfrak{h} をその Cartan 部分代数とする. Δ をルート系とし, Q をルート格子, P をウェイト格子とする. また W をワイル群とする. 単純ルートの集合 $\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ をひとつ固定し, 対応して決まる正ルートの集合を Δ^+ で表す:

$$\Pi \subset \Delta^+ \subset \Delta \subset Q \subset P \subset \mathfrak{h}^*, \quad W \subset GL(\mathfrak{h}^*).$$

さらに, \mathfrak{h}^* 上の W 不変対称双線形形式

$$(\cdot, \cdot) : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{C}$$

であって, 短ルート α に対して $(\alpha, \alpha)/2 = 1$ を満たすものをとる.

文字 q を不定元とする \mathbb{Q} 上の有理関数体 $\mathbb{Q}(q)$ を \mathbb{F} で表す.

定義 2.1. \mathfrak{g} に対応する \mathbb{F} 上の量子群 $U_{\mathbb{F}} (= U_q(\mathfrak{g}))$ とは, 単位元をもつ \mathbb{F} 上の結合代数であって, 生成系

$$k_\lambda \ (\lambda \in P), \quad e_i, f_i \ (i \in I)$$

と基本関係式

$$\begin{aligned} k_\lambda k_\mu &= k_{\lambda+\mu} \quad (\lambda, \mu \in P), \quad k_0 = 1, \\ k_\lambda e_i k_{-\lambda} &= q^{2(\lambda, \alpha_i)} e_i \quad (\lambda \in P, i \in I), \\ k_\lambda f_i k_{-\lambda} &= q^{-2(\lambda, \alpha_i)} f_i \quad (\lambda \in P, i \in I), \\ e_i f_j - f_j e_i &= \delta_{ij} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} \quad (i, j \in I), \\ \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q_i} e_i^r e_j e_i^{1-a_{ij}-r} &= 0 \quad (i, j \in I, i \neq j), \\ \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q_i} f_i^r f_j f_i^{1-a_{ij}-r} &= 0 \quad (i, j \in I, i \neq j). \end{aligned}$$

により定義されるものである. ここで, $i \in I$ に対して, $q_i = q^{(\alpha_i, \alpha_i)/2}$, $k_i = k_{\alpha_i}$. また $i, j \in I$ に対して, $a_{ij} = 2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_i, \alpha_i)$ とする. さらに, 非負整数 n の t 類似を

$$[n]_t = \frac{t^n - t^{-n}}{t - t^{-1}} \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

で定め、 $m \geq n \geq 0$ に対して、2項係数 $\binom{n}{m}$ の t 類似を

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_t = \frac{[n]_t!}{[m]_t![n-m]_t!}, \quad [n]_t! = [n]_t \cdots [2]_t [1]_t$$

により定める. □

そこで、量子群 $U_{\mathbb{F}}$ において不定元 q を

$$\zeta = (1 \text{ の原始 } \ell \text{ 乗根}) \in \mathbb{C}$$

に特殊化して得られる \mathbb{C} 上の量子群を以下のように定める. ただし ℓ は次の条件を満たすものとする.

- (A) $\ell > 1$ は正の奇数,
- (B) $(\ell, |P/Q|) = 1$,
- (C) \mathfrak{g} が G_2 型の場合は, $(\ell, 3) = 1$.

パラメータ q に ζ を代入するために, $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(q)$ の部分環 $\mathbb{A} = \mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ を考える. また \mathbb{A} 上の量子群 $U_{\mathbb{A}}$ を

$$U_{\mathbb{A}} = \langle k_{\lambda}, e_i, f_i \mid \lambda \in P, i \in I \rangle_{\mathbb{A}\text{-alg}} \subset U_{\mathbb{F}} \quad (\text{De Concini-Kac form})$$

により定め、環準同形 $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C} (q \mapsto \zeta)$ に関して

$$U (= U_{\zeta}(\mathfrak{g})) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{A}} U_{\mathbb{A}}$$

とおく. この \mathbb{C} 代数 U の表現論が、我々の今後の考察対象である.

3 中心

一般に、環 R に対してその中心 $Z(R)$ を

$$Z(R) = \{z \in R \mid rz = zr (r \in R)\}$$

で定める.

U は無限次元代数であるが、有限次元代数に対する Schur の補題の類似が、次のように成り立つことが知られている:

定理 3.1. 既約 U 加群 M に対して

$$\exists \xi \in \text{Hom}_{\text{alg}}(Z(U), \mathbb{C}) \text{ s.t. } zm = \xi(z)m \quad (z \in Z(U), m \in M).$$

□

一般に, 中心指標 $\xi \in \text{Hom}_{\text{alg}}(Z(U), \mathbb{C})$ に対して

$$U_\xi = U/\text{Ker}(\xi)U$$

とおく. 定理 3.1 により

$$\{\text{既約 } U \text{ 加群}\} = \bigsqcup_{\xi \in \text{Hom}_{\text{alg}}(Z(U), \mathbb{C})} \{\text{既約 } U_\xi \text{ 加群}\}.$$

したがって, 各中心指標 ξ に対して既約 U_ξ 加群が分類できれば, 既約 U 加群が分類できたことになる. が, その前にまず, 中心がどれくらい大きくて中心指標がどれくらいあるかを知っておく必要がある.

U は $U_{\mathbb{A}}$ の特殊化だったので, $U_{\mathbb{A}}$ の中心元は U の中心元を定める. すなわち,

$$Z(U_{\mathbb{A}}) = Z(U_{\mathbb{F}}) \cap U_{\mathbb{A}} \subset U_{\mathbb{A}}$$

に関して,

$$Z_{\text{Har}}(U) := \text{Im}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{A}} Z(U_{\mathbb{A}}) \rightarrow U)$$

は $Z(U)$ の部分代数となる. これを U の Harish-Chandra 中心と呼ぶ. $U_{\mathbb{F}}$ の中心がどうなっているかはよく知られており ([13] など), それから次が従う.

定理 3.2. \mathbb{C} 代数の同型

$$Z_{\text{Har}}(U) \cong (U_{\text{even}}^0)^{W^\circ} \quad (\text{Harich-Chandra 同型})$$

が自然に定まる. ここで

$$U^0 = \sum_{\lambda \in P} \mathbb{C}k_\lambda \subset U, \quad U_{\text{even}}^0 = \sum_{\lambda \in P} \mathbb{C}k_{2\lambda} \subset U.$$

また $(U_{\text{even}}^0)^{W^\circ}$ は, W の U_{even}^0 への作用

$$(1) \quad w \circ k_{2\lambda} = \zeta^{2(\rho, w\lambda - \lambda)} k_{2w\lambda}, \quad \rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$$

に関する不変元の全体.

□

ζ が 1 のべき根でなければ Harish-Chandra 中心が中心全体になってしまうのだが、我々が考えている 1 のべき根の場合には、 U の中心は、以下みるようにもっと大きくなる。

W の最長元 w_0 の最短表示を決めるごとに、Lusztig のルート・ベクトルと呼ばれる U の元の集合

$$e_\alpha, f_\alpha \quad (\alpha \in \Delta^+)$$

が定まる。ここでは、その定義の詳細は省略するが、 α が単純ルート α_i のときは $e_{\alpha_i} = e_i$, $f_{\alpha_i} = f_i$ である。また

$$\left\{ \left(\prod_{\alpha \in \Delta^+} e_\alpha^{m_\alpha} \right) k_\lambda \left(\prod_{\alpha \in \Delta^+} f_\alpha^{n_\alpha} \right) \mid m_\alpha, n_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0} (\alpha \in \Delta^+), \lambda \in P \right\}$$

は U の \mathbb{C} 上の基底を与える (積の順序は一つ決めて考える)。

このとき

$$k_{\ell\lambda} (\lambda \in P), \quad e_\alpha^\ell, f_\alpha^\ell \quad (\alpha \in \Delta^+)$$

は $Z(U)$ に含まれることがわかる。実際、 $k_{\ell\lambda}$, e_i^ℓ , f_i^ℓ が中心元である事は $U_{\mathbb{F}}$ の定義関係式と、 ζ が 1 の原始 ℓ 乗根である事から明らか。一般の e_α, f_α についても、これらが e_i, f_i を U の自己同型で移したものになっていることから明らか。そこで、 $Z(U)$ の部分代数

$$Z_{\text{Fr}}(U) := \langle k_{\ell\lambda}, e_\alpha^\ell, f_\alpha^\ell \mid \lambda \in P, \alpha \in \Delta^+ \rangle$$

を U の Frobenius 中心と呼ぶ (w_0 の最短表示の選び方にはよらない)。

De Concini-Procesi [7] は、 $Z(U)$ が $Z_{\text{Har}}(U)$ と $Z_{\text{Fr}}(U)$ により生成されることを証明した (なお、正標数における単純リー代数の包絡代数 $U(\mathfrak{g}_k)$ に関する対応する結果は、Veldkamp [17], Kac-Weisfeiler [10], Brown-Gordon [3] による)。より詳しくは、次の定理が成立する。

定理 3.3 (De Concini-Procesi [7]). $Z(U)$ は $Z_{\text{Har}}(U)$ と $Z_{\text{Fr}}(U)$ により生成される。さらに、 U の積から定まる自然な写像 $Z_{\text{Har}}(U) \times Z_{\text{Fr}}(U) \rightarrow Z(U)$ は \mathbb{C} 代数の同型

$$(2) \quad Z(U) \cong Z_{\text{Har}}(U) \otimes_{Z_{\text{Har}}(U) \cap Z_{\text{Fr}}(U)} Z_{\text{Fr}}(U).$$

を導く。 □

以下、同型 (2) の幾何的な記述を与える。

まず Harish-Chandra 中心 $Z_{\text{Har}}(U)$ について考える。 G を \mathbb{C} 上の連結かつ単連結な単純代数群で $\text{Lie}(G) = \mathfrak{g}$ を満たすものとし、 T をその極大トーラスとする。このとき

T の代数群としての指標群 $\text{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$ は P と同一視される ($\lambda \in P$ に対する T の指標を χ_λ で表すことにする). したがって, T のアフィン代数多様体としての座標環 $\mathbb{C}[T] = \bigoplus_{\lambda \in P} \mathbb{C}\chi_\lambda$ とアーベル群 P の群環 $\mathbb{C}[P] = \bigoplus_{\lambda \in P} \mathbb{C}e(\lambda)$ は, \mathbb{C} 代数として自然に同型である:

$$\mathbb{C}[T] \cong \mathbb{C}[P] \quad (\chi_\lambda \leftrightarrow e(\lambda)).$$

$Z_{\text{Har}}(U)$ は $(U_{\text{even}}^0)^{W^\circ}$ と同型だったので,

$$U_{\text{even}}^0 \cong \mathbb{C}[P] \quad (k_{2\lambda} \leftrightarrow e(\lambda)).$$

により, \mathbb{C} 代数の同型

$$(3) \quad Z_{\text{Har}}(U) \cong \mathbb{C}[P]^{W^\circ} \cong \mathbb{C}[T/W^\circ]$$

が得られた.

注意 3.4. U_{even}^0 への W の作用 (1) を $\mathbb{C}[P], \mathbb{C}[T]$ に移して, $\mathbb{C}[P]$ への W の作用

$$w \circ e(\lambda) = \zeta^{2(\rho, w\lambda - \lambda)} e(w\lambda) \quad (w \in W, \lambda \in P)$$

と, $\mathbb{C}[T]$ への W の作用

$$w \circ \chi_\lambda = \zeta^{2(\rho, w\lambda - \lambda)} \chi_{w\lambda} \quad (w \in W, \lambda \in P)$$

が定まる. $\mathbb{C}[T]$ はアフィン代数多様体 T の座標環なので, 対応して有限群 W のアフィン代数多様体 T への作用 $W \times T \ni (w, t) \mapsto w \circ t \in T$ が定まる ($\hat{t} \in T$ を $\chi_\lambda(\hat{t}) = \zeta^{2(\rho, \lambda)}$ ($\forall \lambda \in P$) により定めるとき, $t \in T$ に対して $w \circ t = w(t\hat{t})\hat{t}^{-1}$).

一般に, 有限群 \mathcal{G} が \mathbb{C} 上のアフィン代数多様体 X に作用しているとき, 商集合

$$X/\mathcal{G} = \{X \text{ 上の } \mathcal{G} \text{ 軌道} \}$$

にアフィン代数多様体の構造が入って, その座標環 $\mathbb{C}[X/\mathcal{G}]$ は $\mathbb{C}[X]$ における \mathcal{G} 不変元の全体 $\mathbb{C}[X]^\mathcal{G}$ と一致する. □

次に Frobenius 中心 $Z_{\text{Fr}}(U)$ について考える. B^+, B^- を G の Borel 部分群であって $B^+ \cap B^- = T$ を満たすものとし, N^\pm を B^\pm の極大ベキ単部分群とする. $G \times G$ の閉部分群 K を

$$K = \{(n_+, n_- t^{-1}) \mid n_\pm \in N^\pm, t \in T\} \subset B^+ \times B^-$$

により定める. De Concini-Procesi [7] は \mathbb{C} 代数の同型

$$(4) \quad Z_{\text{Fr}}(U) \cong \mathbb{C}[K]$$

を構成した. [7] では, Poisson 代数としての生成系の間に対応を手で与え, これが Poisson 代数としての同型を導くことを示している. その後, Gavarini [8] により, Drinfeld 形式を用いた直接的でしかもよりわかりやすい構成が与えられた. ここでその詳細は省略する.

Harish-Chandra 中心と Frobenius 中心の共通部分 $Z_{\text{Har}}(U) \cap Z_{\text{Fr}}(U)$ についてみよう. (3) により $Z_{\text{Har}}(U)$ を $\mathbb{C}[P]^{W^\circ}$ と同一視するとき, $Z_{\text{Har}}(U)$ の部分代数 $Z_{\text{Har}}(U) \cap Z_{\text{Fr}}(U)$ は, $\mathbb{C}[P]^{W^\circ}$ の部分代数 $\mathbb{C}[\ell P]^W$ と一致する ($\mathbb{C}[P]$ への W の作用を $\mathbb{C}[\ell P]$ に制限すると, ひねりが消えて, W の $\mathbb{C}[P]$ への通常的作用になる). $\mathbb{C}[\ell P]$ と $\mathbb{C}[P]$ の同一視 ($e(\ell\lambda) \leftrightarrow e(\lambda)$) を用いる事により, 同型

$$(5) \quad Z_{\text{Har}}(U) \cap Z_{\text{Fr}}(U) \cong \mathbb{C}[P]^W \cong \mathbb{C}[T/W]$$

と可換図式

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} Z_{\text{Har}}(U) \cap Z_{\text{Fr}}(U) & \hookrightarrow & Z_{\text{Har}}(U) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbb{C}[T/W] & \xrightarrow{p^*} & \mathbb{C}[T/W^\circ] \end{array}$$

が得られた. ここで p^* は, $T \ni t \mapsto t^\ell \in T$ の導く写像 $p: T/W^\circ \rightarrow T/W$ から定まる準同形写像.

最後に, 埋め込み $Z_{\text{Har}}(U) \cap Z_{\text{Fr}}(U) \subset Z_{\text{Fr}}(U)$ が同一視 (4), (5) のもとでどう書けるかをみよう. G の G への共役作用

$$G \times G \rightarrow G \quad ((g, x) \mapsto \text{Ad}(g)(x) = gxg^{-1})$$

に関する G 上の不変関数の全体のなす \mathbb{C} 代数

$$\mathbb{C}[G]^{\text{Ad}(G)} = \{f \in \mathbb{C}[G] \mid f(\text{Ad}(g)(x)) = f(x) \ (g, x \in G)\}$$

を考える. G 上の関数を T に制限する写像 $\mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[T]$ は, \mathbb{C} 代数の同型写像 $\mathbb{C}[G]^{\text{Ad}(G)} \cong \mathbb{C}[T/W]$ を導くことが知られている. したがって \mathbb{C} 代数の埋め込み $\mathbb{C}[T/W] \hookrightarrow \mathbb{C}[G]$ に対応して, 代数多様体の射

$$\pi: G \rightarrow T/W$$

が定まる. なおこの写像 π は次のようにも書ける. $g \in G$ に対して, その Jordan 分解を $g = g_{\text{ss}}g_{\text{uni}}$ と書く. このとき, g_{ss} と共役な T の元 t が W 共役を除いて一意に定まり,

$\pi(g) = [t]$ となる (t を含む W 軌道に対応する T/W の点を $[t]$ で表す). そこで, π と代数多様体の射

$$\delta : K \rightarrow G \quad (\delta(x_1, x_2) = x_1 x_2^{-1})$$

の合成

$$\pi \circ \delta : K \rightarrow T/W$$

を考えると, 可換図式

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} Z_{\text{Har}}(U) \cap Z_{\text{Fr}}(U) & \hookrightarrow & Z_{\text{Fr}}(U) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbb{C}[T/W] & \xrightarrow{(\pi \circ \delta)^*} & \mathbb{C}[K] \end{array}$$

が成立する.

以上の議論により

$$(8) \quad Z(U) \cong \mathbb{C}[T/W \circ] \otimes_{\mathbb{C}[T/W]} \mathbb{C}[K] \cong \mathbb{C}[(T/W \circ) \times_{T/W} K].$$

ここで $\mathbb{C}[(T/W \circ) \times_{T/W} K]$ はアフィン代数多様体

$$(9) \quad (T/W \circ) \times_{T/W} K = \{([t], k) \in (T/W \circ) \times K \mid t^\ell \sim_G \delta(k)_{\text{ss}}\}$$

の座標環である. ただし, \sim_G は G 上の同値関係:

$$x \sim_G y \iff \exists g \in G \text{ s.t. } x = g y g^{-1}.$$

4 中心指標

(8), (9) により, 中心指標 ($\text{Hom}_{\text{alg}}(Z(U), \mathbb{C})$ の元) と代数多様体 $(T/W \circ) \times_{T/W} K$ の点とは 1 対 1 に対応する. そこで, $([t], k) \in (T/W \circ) \times_{T/W} K$ に対応する中心指標を $\xi_{t,k} \in \text{Hom}_{\text{alg}}(Z(U), \mathbb{C})$ と書くことにする.

以下の目標は, 各 $([t], k) \in (T/W \circ) \times_{T/W} K$ に対して, $U_{\xi_{t,k}} = U/\text{Ker}(\xi_{t,k})U$ の表現を調べることである.

注意 4.1. Frobenius 中心は有限の余次元を持つ. 特に, $U_{\xi_{t,k}}$ は有限次元. したがって, 任意の既約 U 加群は有限次元である. \square

次の定理により, 考えるべき $([t], k) \in (T/W \circ) \times_{T/W} K$ の範囲を大幅に狭める事ができる.

定理 4.2 (De Concini-Kac [4]). $k, k' \in K$ に対して, $\delta(k) \sim_G \delta(k')$ が成り立っていると
 する. $t \in T$ が $([t], k) \in (T/W \circ) \times_{T/W} K$ を (したがって $([t], k') \in (T/W \circ) \times_{T/W} K$
 も) を満たすならば

$$(10) \quad U_{\xi_{t,k}} \cong U_{\xi_{t,k'}}$$

が成り立つ. □

注意 4.3. 正標数のリー代数 \mathfrak{g}_k の場合の対応する事実の証明はずっと簡単である. 実際
 この場合には, 群 G_k が $U(\mathfrak{g}_k)$ に自然に作用している. したがって, $U(\mathfrak{g}_k)$ の Frobenius
 中心 $Z_{\text{Fr}}(U(\mathfrak{g}_k))$ を $k[\mathfrak{g}_k^*]$ と同一視することにより, G_k の \mathfrak{g}_k^* への作用が定まるが, これ
 は coadjoint 作用と一致する. これから直ちに, 正標数のリー代数に対する定理 4.2 の類
 似が導かれる.

しかし, 量子群の場合には G_k の $U(\mathfrak{g}_k)$ への自然な作用にあたるものを構成すること自
 体が難しい. [4] においては, 無限次元の群の U への “quantum coadjoint action” が構
 成され, これを用いて上述の定理が示されている. □

注意 4.4. 実は, De Concini-Kac [4] では, G の共役類 O であって k と k' が $\delta^{-1}(O)$ の
 同じ連結成分に含まれるようなものがあるときに, (10) が成り立つ事が示されている.
 これと De Concini-Procesi [7, Theorem 16.2] により, $\delta(k)$ が G の中心元でないときに
 は, 定理が成り立っていることが従う. $\delta(k)$ が中心元有的时候には, $U_{\mathbb{F}}$ の自己同型 F で
 あって,

$$F(k_\lambda) = \varepsilon_\lambda k_\lambda, \quad F(e_i) = e_i, \quad F(f_i) = \varepsilon_{\alpha_i} f_i$$

で定まるものを使えば, 定理が容易に示される. ここで $\varepsilon_\lambda \in \{\pm 1\}$ ($\lambda \in P$) は

$$\varepsilon_\lambda \varepsilon_\mu = \varepsilon_{\lambda+\mu}, \quad \varepsilon_0 = 1$$

を満たすもの. □

$([t], k) \in (T/W \circ) \times_{T/W} K$ を一つ決める. そこで $U_{\xi_{t,k}}$ の表現を調べる事を考え
 る. $\delta(k)$ を含む G の共役類を O とする. 定理 4.2 により, 別の $k' \in K$ であって,
 $\delta(k') \in O$ となるものをとるとき, $U_{\xi_{t,k}}$ の表現論と $U_{\xi_{t,k'}}$ の表現論は同じである. し
 たがって, k を k' で置き換えて考えればよい. そこで, k' をうまく取ることを考える.
 写像 $\delta : K \rightarrow G$ ($(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2^{-1}$) の像は G の開集合 $N^+ T N^-$ と一致する. 単純
 代数群の共役類の一般論から $O \cap (N^+ T) \neq \emptyset$ である事が知られている. したがって
 $\delta(k') \in N^+ T$ としてよい. このとき $k' = (xh, h^{-1})$ ($x \in N^+, h \in T$) と書ける. この

場合, $\delta(k') = xh^2$ なので, $\delta(k)_{\text{ss}} \sim_G h^2 \in T$. したがって, $[t] \in T/W \circ$ の代表元 $t \in T$ は $t^\ell = h^2$ を満たしているとしてよい.

以上の議論により, 次の (a), (b) を満たす $([t], k) \in (T/W \circ) \times_{T/W} K$ に対して, $U_{\xi_{t,k}}$ を考えればよいことがわかった.

- (a) $k = (xh, h^{-1}) \quad (x \in N^+, h \in T)$,
- (b) $t^\ell = h^2$.

注意 4.5. 正標数のリー代数 \mathfrak{g}_k の場合, 上の議論における $k \in K$ に対応する

$$x \in \mathfrak{g}_k^* \cong \text{Hom}_{\text{alg}}(Z_{\text{Fr}}(U(\mathfrak{g}_k)), k)$$

は, ベキ零元の場合に帰着できる. $x \in \mathfrak{g}_k^*$ の Jordan 分解 $x = x_{\text{ss}} + x_{\text{nil}}$ において $\mathfrak{l}_k = Z_{\mathfrak{g}_k}(x_{\text{ss}})$ とおくと, Frobenius 中心指標 $x \in \mathfrak{g}_k^*$ をもつ $U(\mathfrak{g}_k)$ 加群を考えると, Frobenius 中心指標 $x_{\text{nil}} \in \mathfrak{l}_k^*$ をもつ $U(\mathfrak{l}_k)$ 加群を考えることは同等であることがわかる. しかしベキ根での量子群の場合, この議論が適用できない場合がある. $g \in G$ に対して, 埋め込み $Z_G(g_{\text{ss}}) \subset G$ は量子群レベルでは定義できない場合がある. 量子群の場合には, $\delta(k)$ がベキ単の場合だけでなく, もう少し多くの場合を考える必要が出てくる ([5] 参照). □

5 baby Verma 加群

以下, (a), (b) をみたく x, h, t に対して中心指標

$$(11) \quad \xi = \xi_{t, (xh, h^{-1})} \in \text{Hom}_{\text{alg}}(Z(U), \mathbb{C})$$

をとり, U_ξ 加群を考える. ξ の Frobenius 中心への制限 $\xi|_{Z_{\text{Fr}}(U)}$ は次をみたく:

$$\xi(k_{\ell\lambda}) = \chi_\lambda(h), \quad \xi(e_\alpha^\ell) = 0, \quad (\xi(f_\alpha^\ell) \text{ は } x \text{ による}).$$

M を有限次元 U_ξ 加群とする. Frobenius 中心の作用から, $m \in M$ に対して

$$k_\lambda^\ell m = \chi_\lambda(h)m \quad (\lambda \in P), \quad e_\alpha^\ell m = 0, \quad f_\alpha^\ell m = \xi(f_\alpha^\ell)m \quad (\alpha \in \Delta^+)$$

が成り立つ. 特に, ルート・ベクトルの間の交換関係に関する Levendorskii-Soibelman の結果を用いると,

$$M' := \{m \in M \mid e_\alpha m = 0 \quad (\alpha \in \Delta^+)\} \neq 0$$

が従う。 U の定義式により, $k_\lambda M' \subset M'$ ($\lambda \in P$) である。 M' の線形作用素として $k_\lambda^\ell - \chi_\lambda(h) = 0$ であるが, $z^\ell - \chi_\lambda(h) \in \mathbb{C}[z]$ は分離多項式なので, k_λ は M' 上の作用素として対角化可能。 $\{k_\lambda\}_{\lambda \in P}$ は互いに可換なので, M' 上の作用素として同時対角化可能。 したがってある $s \in T$ に対して

$$M'(s) := \{m \in M' \mid k_\lambda m = \chi_\lambda(s)m \ (\lambda \in P)\} \neq \{0\}.$$

$M'(s)$ への Frobenius 中心の作用をみる事により,

$$\chi_{\ell\lambda}(s) = \chi_\lambda(h) \quad (\lambda \in P).$$

すなわち $h = s^\ell$. また $M'(s)$ への Harish-Chandra 中心の作用をみる事により,

$$\varphi(t) = \varphi(s^2) \quad (\varphi \in \mathbb{C}[T/W \circ] \subset \mathbb{C}[T]).$$

すなわち, $s^2 \in W \circ t$.

以上により, ある $s \in T$ であって

$$(12) \quad h = s^\ell, \quad s^2 \in W \circ t$$

を満たすものと, ある $m \in M \setminus \{0\}$ に対して,

$$k_\lambda m = \chi_\lambda(s)m \quad (\lambda \in P), \quad e_\alpha m = 0, \quad f_\alpha^\ell m = \xi(f_\alpha^\ell)m \quad (\alpha \in \Delta^+).$$

定義 5.1 (baby Verma 加群). (12) を満たす $s \in T$ に対して U 加群 $Z_\xi[s]$ を次で定める:

$$Z_\xi[s] = U / \left(\sum_{\lambda \in P} U(k_\lambda - \chi_\lambda(s)) + \sum_{\alpha \in \Delta^+} Ue_\alpha + \sum_{\alpha \in \Delta^+} U(f_\alpha^\ell - \xi(f_\alpha^\ell)) \right) \quad \square$$

このとき $Z_\xi[s]$ は U_ξ 加群である。 また, 上の議論により, 任意の既約 U_ξ 加群は, ある $Z_\xi[s]$ の商加群と同型である。 さらに PBW 型定理により

$$(13) \quad \dim Z_\xi[s] = \ell^{|\Delta^+|}.$$

$Z_\xi[s]$ は圏 \mathcal{O} における Verma 加群の類似物である。 ただし, Verma 加群と比べると, さほどたちのよくない側面もある。 Verma 加群はただ一つの既約商加群をもつのであったが, baby Verma 加群は複数個の既約商加群をもつこともあり得るのである。 これは ξ による。

$t = h = 1$ の場合, (12) を満たす $s \in T$ は, $s = w \circ 1$ ($w \in W$) と書ける。 $\ell \gg 1$ ならば, $w \circ 1$ ($w \in W$) は互いに相異なる元である。 したがって, この場合には, $|W|$ 個

の baby Verma 加群が定まる (ただしこれらのうちに互いに同型なものがある可能性がある).

任意の既約 U_ξ 加群は $Z_\xi[w \circ 1]$ の商加群と同型である.

$J \subset I$ に対応する G の放物型部分群を P_J とし, その簡約部分を L_J で表す. L_J の Weyl 群を $W_J \subset W$ で表す.

予想 5.2. $l \gg 1$ とする. また $t = h = 1$ で x は L_J の正則べき単元とする.

- (i) $Z_\xi[w \circ 1]$ はただ一つの既約商加群 $L_\xi[w \circ 1]$ をもつ.
- (ii) 任意の既約 U_ξ 加群は, ある $L_\xi[w \circ 1]$ と同型.
- (iii) $L_\xi[w \circ 1] \cong L_\xi[w' \circ 1] \Leftrightarrow w' \in wW_J$.

予想 5.2 が正しいとすると, 予想 5.2 の仮定のもとで

$$\#\{\text{既約 } U_{\chi_x} \text{ 加群}\} = \#(W/W_J).$$

6 次数付け

以下 $t = h = 1$ とする. 必要なら, $x \in N^+$ を $\text{Ad}(G)(x) \cap N^+$ の別の元で取り替えて, $T' := Z_T(x)^0$ が $Z_G(x)$ の極大トーラスであるとしてよい.

U は $P = \text{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$ で次数づけられた次数環であった.

$$U = \bigoplus_{\gamma \in P} U(\gamma), \quad k_\lambda \in U(0), \quad e_i \in U(\alpha_i), \quad f_i \in U(-\alpha_i).$$

U の商 U_ξ には P による次数付けは入らないが, P の商 $P_x := \text{Hom}(T', \mathbb{C}^\times)$ による次数付け

$$U_\xi = \bigoplus_{\gamma \in P_x} U_\xi(\gamma)$$

が自然に定まる. 以下, 有限次元 U_ξ 加群のなす圏, および有限次元次数付き U_ξ 加群のなす圏を, それぞれ $\text{Mod}(U_\xi)$, $\text{Mod}_{\text{gr}}(U_\xi)$ で表す. また, アーベル圏 \mathcal{A} の Grothendieck 群を $K(\mathcal{A})$ で表す. 次数付けを忘れることにより, 完全関手 $\text{For} : \text{Mod}_{\text{gr}}(U_\xi) \rightarrow \text{Mod}(U_\xi)$ が定まる.

さて, $K(\text{Mod}(U_\xi))$ は $\mathbb{I} = \{\text{既約 } U_\xi \text{ 加群}\}$ を基底とする自由 \mathbb{Z} 加群である. また $K(\text{Mod}_{\text{gr}}(U_\xi))$ は $\tilde{\mathbb{I}} = \{\text{既約次数付き } U_\xi \text{ 加群}\}$ を基底とする自由 \mathbb{Z} 加群である. 次数付き U_ξ 加群における次数のずらしにより, $K(\text{Mod}_{\text{gr}}(U_\xi))$ は自然に P_x 加群となる. 実

は, Jantzen [9, Section 1.4/5] の論法により, 既約 U_ξ 加群は (次数のずらしを除いて一意的に) 既約次数付き U_ξ 加群に持ち上がる事がわかる. したがって

$$\text{For} : K(\text{Mod}_{\text{gr}}(U_\xi)) \rightarrow K(\text{Mod}(U_\xi))$$

は全射で, 自然な対応 $\tilde{\mathbb{I}}/P_x \cong \mathbb{I}$ を導く.

7 Lusztig の予想

$\mathcal{B} = G/B^+$ の部分代数多様体 \mathcal{B}_x を

$$\mathcal{B}_x = \{gB^+ \in G/B^+ \mid x \in gB^+g^{-1}\} \quad (\text{Springer ファイバー})$$

により定める. これには前節で定義したトーラス T' が自然に作用している. 連接 $\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x}$ 加群のなす圏, および T' 同変連接 $\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x}$ 加群のなす圏をそれぞれ $\text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x})$, $\text{Mod}_{T'}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x})$ で表す. Grothendieck 群 $K(\text{Mod}_{T'}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x}))$ は自然に P_x 加群となる. T' の作用を忘れることにより自然な写像

$$\text{For} : K(\text{Mod}_{T'}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x})) \rightarrow K(\text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x}))$$

が定まる.

Lusztig [12] は $K(\text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x}))$ の基底 \mathbb{B} および $K(\text{Mod}_{T'}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x}))$ の基底 $\tilde{\mathbb{B}}$ であって $\tilde{\mathbb{B}}/P_x \cong \mathbb{B}$ となるものを定め, 次の予想を与えた.

予想 7.1 ([12]). ℓ は十分大きいとする.

- (i) $K(\text{Mod}(U_\xi)) \cong K(\text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x}))$, $K(\text{Mod}_{\text{gr}}(U_\xi)) \cong K(\text{Mod}_{T'}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x}))$.
- (ii) (i) において $\mathbb{I} \leftrightarrow \mathbb{B}$, $\tilde{\mathbb{I}} \leftrightarrow \tilde{\mathbb{B}}$.
- (iii) $\tilde{\mathbb{I}} \leftrightarrow \tilde{\mathbb{B}}$ において $b \in \tilde{\mathbb{B}}$ に対応する次数付き既約 U_ξ 加群を L_b とし, その projective cover を P_b とするとき, 重複度 $[P_b : L_{b'}]$ の幾何的記述がある. \square

注意 7.2. 予想 7.1 (i) が正しければ,

$$\#\{\text{既約 } U_\xi \text{ 加群}\} = \text{rank}(K(\text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x})) = \dim H^*(\mathcal{B}_x).$$

となつて, 既約表現の数がわかる ($\dim H^*(\mathcal{B}_x)$ は, いわゆる Green 多項式を用いて計算することができる). \square

注意 7.3. x が L_J の正則ベキ単元であるとする. この場合には, $K(\text{Mod}_{T'}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x})) \supset \tilde{\mathbb{B}}$ の組合せ論的記述が知られており, 予想 7.1 (iii) における重複度 $[P_b : L_{b'}]$ を与える筈の

幾何的数は組合せ論的に計算可能である。また、このことと、baby Verma 加群を仲立ちとする相互律（圏 \mathcal{O} における BGG 相互律の類似）を用いると、予想 7.1 を書き換えて、 $[Z_\xi[w \circ 1] : L_\xi[w' \circ 1]]$ の組合せ論的記述を与える予想が得られる（ $x = 1$ の場合には、最高ウェイト加群に対する Lusztig 予想（Kazhdan-Lusztig と Kashiwara-Tanisaki により証明済み）と同値になる）。 \square

8 Lusztig 予想の証明に向けて

Lusztig は、正標数での単純リー代数についても、予想 7.1 と全く同様の予想を定式化した。実はこちらのほうは解決済みであり、その証明には、正標数における旗多様体 \mathcal{B}_k 上の D 加群が用いられる。

まず、Bezrukavnikov-Mirković-Rumynin [1] は、 \mathfrak{g}_k のべき零元 e について

$$(14) \quad D^b(\text{Mod}(U(\mathfrak{g}_k)_{\chi_e})) \cong D^b(\text{Mod}(\mathcal{O}_{(\mathcal{B}_k)_e}))$$

を示した。これから、Lusztig の予想のうちの (i) に対応する事実

$$K(\text{Mod}(U(\mathfrak{g}_k)_{\chi_e})) \cong K(\text{Mod}(\mathcal{O}_{(\mathcal{B}_k)_e}))$$

が従う。

(14) は 2 つのアーベル圏 $\text{Mod}(U(\mathfrak{g}_k)_{\chi_e})$, $\text{Mod}(\mathcal{O}_{(\mathcal{B}_k)_e})$ の同値を与えるわけではない。しかし $D^b(\text{Mod}(\mathcal{O}_{(\mathcal{B}_k)_e}))$ のほうで、いわゆるエキゾチック t 構造から定まるアーベル圏を考えると、アーベル圏の同値が得られることが、Bezrukavnikov-Mirković [2] により示された。このことをもとに、Lusztig の予想 (ii), (iii) の正標数での類似の証明が、[2] においてなされた。

そこで、[1], [2] のマネをして、ベキ根での量子群に対する Lusztig の予想を証明したい。その場合、ベキ根での量子旗多様体 $\mathcal{B}_{q=\zeta}$ 上の D 加群を用いることになる。筆者は、非可換スキームであるところの量子旗多様体を用いて、[1] の結果の類似を与えた ([14], [15])。ただし、一部未解決の部分が残っている（ $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ のときは解決）。[2] のマネのほうは、ほぼ同様にできる筈だと思っている。これらに関して簡単に述べておこう。 U の部分代数 U_{even} を

$$U_{\text{even}} = \langle e_i, S(f_i), k_{2\lambda} \mid i \in I, \lambda \in P \rangle \subset U$$

により定める。

$$V = U_{\text{even}} / \sum_{i \in I} U_{\text{even}} f_i$$

とおく.

予想 8.1 ([15]). $\ell \gg 1$ ならば $R\mathrm{Ind}_{B_q}^{G_q} V \cong U_{\mathrm{even}} \otimes_{Z_{\mathrm{Har}}(U)} \mathbb{C}[P]$. □

定理 8.2. 予想 8.1 が正しいとする. ℓ はさらに次の条件を満たすとする.

- $\ell \gg 1$.
- \mathfrak{g} が例外型なら, $(\ell, 3) = 1$.

このとき

$$D^b(\mathrm{Mod}(U_\xi)) \cong D^b(\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x})).$$

□

9 その他の問題

定理 9.1 (Kac-Weisfeiler 予想, Premet の定理). $e \in \mathfrak{g}_k^*$ をベキ零元とする. L を既約 $U(\mathfrak{g}_k)_{\chi_e}$ 加群とすると, $p^{\mathrm{codim}(\mathcal{B}_k)_e} \mid \dim L$.

ベキ根での量子群についても同様の予想が定式化される.

予想 9.2 (De Concini-Kac-Procesi 予想). L を既約 U_ξ 加群とすると, $\ell^{\mathrm{codim} \mathcal{B}_x} \mid \dim L$.

予想 9.2 に関しては, Sevostyanov の preprint があるが, 私にはよく分からない点が多くつかある.

本稿では, ℓ が奇数の場合のみ扱ってきたが, ℓ が偶数のとき, U の表現論はどうなるのかも, 余り考えられていない問題である. なお, ℓ が偶数のときの中心 $Z(U)$ の構造は [16] で調べられている. 場合によっては, \mathfrak{g} の Langlands dual ${}^L\mathfrak{g}$ から決まる代数群 ${}^L K$ が出てきたりして, もう少し複雑になる.

参考文献

- [1] Bezrukavnikov, R., Mirković, I., Rumynin, D., Localization of modules for a semisimple Lie algebra in prime characteristic. With an appendix by Bezrukavnikov and Simon Riche. Ann. of Math. (2) 167 (2008), no. 3, 945–991.

- [2] Bezrukavnikov, R., Mirković, I., Representations of semisimple Lie algebras in prime characteristic and the noncommutative Springer resolution. With an appendix by Eric Sommers. *Ann. of Math. (2)* 178 (2013), no. 3, 835–919.
- [3] Brown, K., Gordon, I., The ramification of centres: Lie algebras in positive characteristic and quantised enveloping algebras. *Math. Z.* 238 (2001), no. 4, 733–779.
- [4] De Concini, C., Kac, V., Representations of quantum groups at roots of 1. Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris, 1989), 471–506, *Progr. Math.*, 92, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [5] De Concini, C., Kac, V., Representations of quantum groups at roots of 1: reduction to the exceptional case. *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, 141–149, *Adv. Ser. Math. Phys.*, 16, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.
- [6] De Concini, C., Kac, V., Procesi, C., Quantum coadjoint action. *J. Amer. Math. Soc.* 5 (1992), no. 1, 151–189.
- [7] De Concini, C., Procesi, C., Quantum groups. D-modules, representation theory, and quantum groups (Venice, 1992), 31–140, *Lecture Notes in Math.*, 1565, Springer, Berlin, 1993.
- [8] Gavarini, F., Quantization of Poisson groups. *Pacific J. Math.* 186 (1998), no. 2, 217–266.
- [9] Jantzen, J. C., Modular representations of reductive Lie algebras. *Commutative algebra, homological algebra and representation theory (Catania/Genoa/Rome, 1998)*. *J. Pure Appl. Algebra* 152 (2000), no. 1–3, 133–185.
- [10] Kac, V., Weisfeiler, B., Coadjoint action of a semi-simple algebraic group and the center of the enveloping algebra in characteristic p . *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 79, *Indag. Math.* 38 (1976), no. 2, 136–151.
- [11] Lusztig, G., Bases in equivariant K-theory. *Represent. Theory* 2 (1998), 298–369.
- [12] Lusztig, G., Bases in equivariant K-theory. II. *Represent. Theory* 3 (1999), 281–353.
- [13] Tanisaki, T., Killing forms, Harish-Chandra isomorphisms, and universal R-matrices for quantum algebras. *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, 941–961, *Adv. Ser. Math. Phys.*, 16, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.
- [14] Tanisaki, T., Differential operators on quantized flag manifolds at roots of unity, *Adv. Math.* (2012), 2235–2294.

- [15] Tanisaki, T., Differential operators on quantized flag manifolds at roots of unity II, Nagoya. Math. J.(2014), 1–52.
- [16] Tanisaki, T., The center of a quantized enveloping algebra at an even root of unity, Osaka J. Math. (2016), 47–81.
- [17] Veldkamp, F. D., The center of the universal enveloping algebra of a Lie algebra in characteristic p . Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 5 (1972), 217–240.

セルバーグゼータ関数と素測地線定理の現在

権 寧魯 (九州大学 数理学研究院)

はじめに

このノートは、2018年9月に東京工業大学に於て開催された第63回代数学シンポジウムにおける筆者の講演の発表資料に加筆，修正を行ったものです．これらのテーマに関心を持たれる方にとって何かのお役に立てば幸いです．講演の機会を与えてくださった上智大学の都築正男さんをはじめシンポジウムの関係者皆様に深く感謝致します．

目次

1	序	2
2	リーマンゼータ関数と素数定理	2
3	コンパクトリーマン面に対するセルバーグゼータ関数	3
4	階数1の局所対称空間に対するセルバーグゼータ関数	6
5	ヒルベルトモジュラー曲面に対するセルバーグ型ゼータ関数	8
6	$SL(2, \mathbb{Z})$ に対する素測地線定理	13
7	$SL(3, \mathbb{Z})$ に対する素測地線定理	14

1 序

1950年代中頃に A. Selberg がリーマン面の閉測地線の集合（または、その基本群の双曲共役類の集合）から定義した“セルバーグゼータ関数”は、複素平面全体に有理型に解析接続されて、関数等式やリーマン予想の類似を満たす。また、このゼータ関数の非零領域を調べることにより、素数定理の類似である“素測地線定理”も証明される。1970年代後半に、R. Gangoli, G. Warner 等により、セルバーグゼータ関数は、階数1の（コンパクト、そのあと非コンパクト体積有限な）局所対称空間の場合に拡張された。しかしながら、現在に至るまで階数2以上の場合にはあまり研究されてこなかった。この小論では、上記の階数1の場合を概観し、階数2のいくつかの場合：(i) ヒルベルトモジュラー曲面、(ii) $SL(3, \mathbf{Z}) \backslash SL(3, \mathbf{R}) / SO(3)$, 等について、最近得られた“セルバーグ型ゼータ”や“素測地線定理”についての結果を紹介する。特に、(ii) から総実3次整環全体に渡る類数和の漸近公式が得られる。(ii) は、A. Deitmar 氏、P. Spilioti 氏との共同研究である。

2 リーマンゼータ関数と素数定理

リーマンゼータ関数は、 $\operatorname{Re}(s) > 1$ において絶対収束する下記の級数、またはオイラー積で定義される。

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p: \text{素数}} (1 - p^{-s})^{-1} \quad \text{for } \operatorname{Re}(s) > 1.$$

以下の事実が知られている。

- (1) $\zeta(s)$ は \mathbb{C} 全体に有理型関数として解析接続されて、 $s = 1$ における一位の極を除いて正則となる。
- (2) 関数等式： $\hat{\zeta}(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s) = \hat{\zeta}(1-s)$ を満たす。
- (3) $\forall s \in \mathbb{C}, s \neq 1$ かつ $\operatorname{Re}(s) = 1$ ならば、 $\zeta(s) \neq 0$ が成り立つ。

特に、(3) の事実から下記の素数定理が導かれる。

定理 2.1 (素数定理). 以下の漸近公式が成り立つ。

- (a) $\pi(x) := \#\{p: \text{素数} \mid p < x\} \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} \quad (x \rightarrow \infty)$
- (b) $\vartheta(x) := \sum_{p: \text{素数}, p < x} \log p \sim x \quad (x \rightarrow \infty)$
- (c) $\psi(x) := \sum_{n < x} \Lambda(n) \sim x \quad (x \rightarrow \infty)$, $\Lambda(p^k) = \log p$, (素数べき以外では0)

- セルバーグゼータ関数, 素測地線定理とは?

X を双曲多様体とする. 非常に荒っぽく言えば, リーマンゼータ関数のオイラー積による定義で, 集合 $\{p \mid \text{素数}\}$ を集合 $\{c \mid X \text{ の素測地線}\}$ で置き換えて定義されたものがセルバーグゼータ関数である. その際に, “素数の長さ: $\log p$ ” を “素測地線の長さ: $l(c)$ ” で置き換える. (つまり, p^{-s} が $e^{-l(c)s}$ に置き換わる.) リーマンゼータ関数の非零領域を調べることによって素数定理が得られたように, セルバーグゼータ関数の非零領域を調べることによって得られるのが “素測地線定理” である.

問題: X がより一般のリーマン多様体で, 素数の類似物である “素測地線” がない (もしくは少ない) とき, どうしたらよいか?

3 コンパクトリーマン面に対するセルバーグゼータ関数

3.1 記号

$G := \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ とする. G は上半平面 \mathbb{H} に一次分数変換 $g.z := \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}$ で作用する. ここで, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ とおいた.

$\Gamma \subset G$ を離散部分群とする. 単位元と異なる $\gamma \in \Gamma$ は以下のように分類される.

- γ が双曲的 $\Leftrightarrow |\text{tr}(\gamma)| > 2 \Leftrightarrow \text{Fix}(\gamma) = \{\alpha, \alpha^{-1}\} \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
- γ が楕円的 $\Leftrightarrow |\text{tr}(\gamma)| < 2 \Leftrightarrow \text{Fix}(\gamma) = \{\alpha, \bar{\alpha}\} \subset \mathbb{C}$ with $\alpha \in \mathbb{H}$
- γ が放物的 $\Leftrightarrow |\text{tr}(\gamma)| = 2 \Leftrightarrow \text{Fix}(\gamma) = \{\alpha\} \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Gamma \backslash \mathbb{H}$ がコンパクトなら, Γ は放物元を持たないことが知られている. この節では, さらに以下を仮定する:

仮定 3.1. $\Gamma \subset G$ を余コンパクトでトーシヨンのない離散部分群とする.

このとき, $X := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ は, 種数 $g \geq 2$ のコンパクトリーマン面となる.

$\gamma \in \Gamma$ が双曲的なら, γ の Γ における中心化群が無限巡回群となる. また, γ は G において対角行列と共役で, $\gamma \sim \pm \begin{pmatrix} N(\gamma)^{1/2} & 0 \\ 0 & N(\gamma)^{-1/2} \end{pmatrix}$, ここで, $N(\gamma) > 1$ である.

3.2 Γ (または X) に対するセルバーグゼータ関数

$N(\gamma) > 1$ を双曲元 $\gamma \in \Gamma$ のノルムと呼ぶ. また, $N(\gamma) = e^{l(c_\gamma)}$ である. ここで, $l(c_\gamma)$ は双曲元 γ から決まる閉測地線 c_γ の長さである. $\text{Prim}(\Gamma)$ を Γ の原始的双曲元の Γ -共

役類の集合とする.

定義 3.2 (Γ に対するセルバーグゼータ関数). セルバーグゼータ関数は, $\operatorname{Re}(s) > 1$ において絶対収束する下記のオイラー積で定義される.

$$Z_{\Gamma}(s) := \prod_{[p] \in \operatorname{Prim}(\Gamma)} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - N(p)^{-(k+s)}\right).$$

定義 3.3 (Γ に対するルエルゼータ関数). ルエルゼータ関数は, $\operatorname{Re}(s) > 1$ において絶対収束する下記のオイラー積で定義される.

$$R_{\Gamma}(s) := \prod_{[p] \in \operatorname{Prim}(\Gamma)} \left(1 - N(p)^{-s}\right)^{-1}.$$

補題 3.4.

$$R_{\Gamma}(s) = \frac{Z_{\Gamma}(s+1)}{Z_{\Gamma}(s)}.$$

上記の補題より, $R_{\Gamma}(s)$ の解析的性質は $Z_{\Gamma}(s)$ の解析的性質より導かれる.

セルバーグは下記の定理を証明した.

定理 3.5 (Selberg [15], 1956). 1. $\operatorname{Re}(s) > 1$ で定義されていた $Z_{\Gamma}(s)$ は, \mathbb{C} 全体に有理型に解析接続される. (実際は整型となる.)

2. $Z_{\Gamma}(s)$ は $s = -k$ ($k \in \mathbb{N}$) に位数 $(2g-2)(2k+1)$ の零点,

$s = 0$ に位数 $(2g-1)$ の零点, $s = 1$ に一位の零点を持つ. : 自明零点

3. $Z_{\Gamma}(s)$ は $s = \frac{1}{2} \pm ir_n$ に零点を持つ. : 非自明零点 (“リーマン予想の類似”)

ここで, $\{\lambda_n = 1/4 + r_n^2\}$ は $L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$ に作用するラプラシアン $\Delta := -y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ の固有値の集合で, 下記のように番号づけられている.

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \rightarrow \infty$$

また, $\{\phi_n\} \subset L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$ は固有関数系で, $\Delta \phi_n = \lambda_n \phi_n$ なるものとする.

3.3 セルバーグ跡公式

f を G 上の“試験関数”, F を f の“フーリエ変換”とする. セルバーグ跡公式とは下記のような等式で, 左辺はラプラシアンの固有値に渡る和でスペクトル辺と呼ばれ, 右辺は Γ の共役類に渡る和で幾何学的辺と呼ばれる. 右辺に現れる $I_{\gamma}(f)$ は軌道積分と呼ば

れている.

$$\sum_{\lambda \in \text{Spec}(\Delta)} F(\lambda) = \sum_{\gamma \in \text{Conj}(\Gamma)} \text{vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) I_f(\gamma), \quad I_f(\gamma) := \int_{G_\gamma \backslash G} f(x^{-1}\gamma x) d\dot{x}.$$

Γ が余コンパクトでトーションがないときは, Γ の共役類の集合 $\text{Conj}(\Gamma) = \{e\} \cup \Gamma_{hyp}$ となり, セルバーグ跡公式はより具体的に書ける.

定理 3.6 (セルバーグ跡公式 (Γ : 余コンパクト, トーションなし)). 下記の等式が成立する. 両辺は絶対収束する.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h(r_n) &= \frac{\text{vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r h(r) \tanh(\pi r) dr \\ &+ \sum_{\gamma \in \Gamma_{hyp}} \frac{\log N(\gamma_0)}{N(\gamma)^{1/2} - N(\gamma)^{-1/2}} g(\log N(\gamma)). \end{aligned}$$

ここで,

- $h(r) = h(-r)$: 複素数値試験関数, $|\text{Im}(r)| < \frac{1}{2} + \delta$ で解析的 ($\exists \delta > 0$) かつ増大度条件 $|h(r)| \leq A[1 + |r|]^{-2-\delta}$ を満たす ($\exists A > 0$).
- $g(u) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(r) e^{-iru} dr$: フーリエ変換

注意 モジュラー群 $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ は余コンパクトでなく楕円元も含むので, それに対する跡公式は上記より複雑になる. 実際, 楕円元・放物元やアイゼンスタイン級数の寄与が現れる.

3.4 $Z_\Gamma(s)$ に関するセルバーグの定理の証明

実数 $\beta > 2$ を固定し, $h(r) = \frac{1}{r^2 + (s - \frac{1}{2})^2} - \frac{1}{r^2 + \beta^2}$ とおくと, これは試験関数の条件を満たす. またそのフーリエ変換は $g(u) = \frac{1}{2s-1} e^{-(s-\frac{1}{2})|u|} - \frac{1}{2\beta} e^{-\beta|u|}$ となる. この試験関数 $h(r)$ に対してセルバーグ跡公式を書き下すと, 下記の命題を得る. (双曲共役類の寄与が $Z_\Gamma(s)$ の対数微分で書けることがポイントである.)

命題 3.7 (上記 $h(r)$ に対する跡公式).

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{r_n^2 + (s - \frac{1}{2})^2} - \frac{1}{r_n^2 + \beta^2} \right] &= \frac{\text{vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{s+k} - \frac{1}{\beta + \frac{1}{2} + k} \right] \\ &+ \frac{1}{2s-1} \frac{Z'_\Gamma(s)}{Z_\Gamma(s)} - \frac{1}{2\beta} \frac{Z'_\Gamma(\frac{1}{2} + \beta)}{Z_\Gamma(\frac{1}{2} + \beta)}. \end{aligned}$$

この命題より, $Z_\Gamma(s)$ の対数微分の \mathbb{C} 全体への解析接続が導かれ, その極がすべて一位で留数がすべて整数であることから, $Z_\Gamma(s)$ 自身の \mathbb{C} 全体への有理型解析接続が証明される. また命題の等式の左辺は $s \rightarrow 1-s$ で不変なので差を取って下記の関数等式を得る:

$$\frac{Z'_\Gamma(s)}{Z_\Gamma(s)} + \frac{Z'_\Gamma(1-s)}{Z_\Gamma(1-s)} = -(2s-1) \frac{4\pi(g-1)}{2\pi} \pi \cot(\pi s).$$

3.5 セルバーグゼータ関数の関数等式

定理 3.8 (Selberg, 1956).

$$Z_\Gamma(1-s) = Z_\Gamma(s) \exp\left(-4(g-1)\pi \int_0^{s-\frac{1}{2}} r \tan(\pi r) dr\right).$$

上記のセルバーグによって示された関数等式は, 二重ガンマ関数 $\Gamma_2(s)$ と二重サイン関数 $S_2(s) = \Gamma_2(2-s)\Gamma_2(s)^{-1}$ を用いて対称な関数等式に書き換えられる. 上記関数等式の右辺に現れる $\exp(\text{積分})$ の部分が二重サイン関数を用いて表示できるところがポイントである:

$$\begin{aligned} Z_\Gamma(1-s) &= Z_\Gamma(s) (S_2(s)^{-1} S_2(s+1)^{-1})^{2g-2} \\ &\Rightarrow Z_\Gamma(1-s) (\Gamma_2(1-s)\Gamma_2(2-s))^{2g-2} = Z_\Gamma(s) (\Gamma_2(s)\Gamma_2(s+1))^{2g-2} \end{aligned}$$

ここで, $\Gamma_2(z) := \exp(\zeta'_2(0, z))$ で定義されて, $\zeta_2(s, z) := \sum_{n, m \geq 0} (n+m+z)^{-s}$ は二重フルビッツゼータ関数である. (一般の多重ガンマ関数, 多重サイン関数については [13] を参照.)

定理 3.9. 以下の関数等式が成り立つ.

- $\hat{Z}_\Gamma(1-s) = \hat{Z}_\Gamma(s)$.
- $R_\Gamma(s)R_\Gamma(-s) = (2 \sin(\pi s))^{2(2-2g)}$.

ここで, $\hat{Z}_\Gamma(s) := Z_\Gamma(s) (\Gamma_2(s)\Gamma_2(s+1))^{2g-2}$ は完備セルバーグゼータ関数である.

4 階数 1 の局所対称空間に対するセルバーグゼータ関数

4.1 記号

G を階数 1 の連結, 非コンパクト半単純リー群で中心が有限なもの, K を G の極大コンパクト部分群とする. $G = NAK$ を岩澤分解とすると, 仮定より $\dim_{\mathbb{R}} A = 1$ となる.

$M := Z_K(A)$ を中心化群とし, $P := MAN$ を放物型部分群とする. Γ を G の離散部分群とし, 局所対称空間 $X := \Gamma \backslash G/K$ とする.

• $\gamma \in \Gamma$ が双曲的 $\Leftrightarrow \gamma$ が G において, 元 $m_\gamma a_\gamma \in MA^+$ と共役とし, $\text{Prim}(\Gamma)$ を Γ の原始的双曲元の Γ -共役類の集合とする.

このとき, 階数 1 の局所対称空間 $X = \Gamma \backslash G/K$ と有限次既約表現 $\sigma \in \widehat{M}$ に対するセルバーグゼータ関数 $Z_\sigma(s)$ は, 以下で定義される.

定義 4.1 (Γ (または X) に対する $\sigma \in \widehat{M}$ 付きセルバーグゼータ関数).

$$Z_\sigma(s) := \prod_{[p] \in \text{Prim}(\Gamma)} \prod_{k=0}^{\infty} \det \left(\text{Id} - \overline{\sigma(m_p)} \otimes S^k(\text{Ad}(m_p a_p)|_{\bar{\mathfrak{n}}}) e^{-sl(c_p)} \right) \quad (\text{Re}(s) \gg 0).$$

ここで, $l(c_p)$ は双曲元 p から定まる閉測地線の長さ. $S^k(A)$ は A の k 次対称積, $\bar{\mathfrak{n}} = \theta(\text{Lie}(N))$, θ はカルタン対合である.

4.2 セルバーグゼータ関数に対する問題

上で定義されたセルバーグゼータ関数 $Z_\sigma(s)$ に対して, 以下の“良い解析的性質”が成立するかどうか問題となる.

1. $\rho_0 > 0$ が存在して, $Z_\sigma(s)$ が右半平面 $\text{Re}(s) > 2\rho_0$ で絶対収束し, そこで正則関数を定義する.
2. $Z_\sigma(s)$ が \mathbb{C} 全体に有理型関数に解析接続される.
3. “リーマン予想の類似”を満たす: 非自明零点の集合 $\{s = \rho_0 \pm ir_n\}$ とすると, 有限個を除いて $\text{Re}(s) = \rho_0$ 上に非自明零点が並ぶ. (ここで, $\{\rho_0^2 + r_n^2\}$ はラプラシアン固有値の集合である.)
4. $s \leftrightarrow 2\rho_0 - s$ に関する関数等式をみたす.

上記の良い性質を持つことが知られている場合:

- (1) Γ : 余コンパクト, σ : 自明表現 (Gangolli [6], 1977)
- (2) Γ : 余有限, σ : 自明表現 (Gangolli and Warner [7], 1980)
- (3) Γ : 余コンパクト, σ : 一般 (Wakayama [17], 1985)
- (4) $G = \text{SO}(1, n)$, Γ : 余有限, σ : 基本表現 (G and Park [8], 2010)
(特に, ルエルゼータ関数 $R_\Gamma(s)$ の解析的性質が導かれる.)

G の階数が 1 で Γ が余有限なときでも, 表現 σ 付きの場合は $Z_\sigma(s)$ の解析的性質は部

分的にしかわかっていない。さらなる問題としては以下の場合が考えられる。

- G が階数 1, Γ が非余有限 (Patterson, Guillopé, Borthwick による geometrically finite, convex co-compact な場合の研究など)
- G の階数が 2 以上 (Deitmar による Γ が余コンパクトな場合の研究 [3] など)

次節以降では、階数 2 で余有限な場合であるヒルベルトモジュラー曲面のセルバーグ型ゼータ関数に関する結果 ([9, 10, 11]) や、階数 2 で“二次元の平坦部分多様体”を数える $SL(3, \mathbb{Z})$ に対する“素測地線定理” ([5]) について紹介する。

5 ヒルベルトモジュラー曲面に対するセルバーグ型ゼータ関数

5.1 ヒルベルトモジュラー曲面に対するセルバーグ型ゼータ関数

K/\mathbb{Q} を類数 1 の実二次体とし、 \mathcal{O}_K を K の整数環、 $\varepsilon > 1$ を K の基本単数とする。
(例: $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ は類数 1 で、 $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, $\varepsilon = 2 + \sqrt{3}$ となる.)

K の元 a の \mathbb{Q} 上の共役を a' とおき、 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_K)$ に対して、 $\gamma' := \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ とおく。

$$\Gamma_K := \{(\gamma, \gamma') \mid \gamma \in \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_K)\}$$

を K のヒルベルトモジュラー群と呼ぶ。このとき、

- $\Gamma_K \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})^2$ は既約な離散部分群となる。(余コンパクトでないが、余有限)
- Γ_K は $\mathbb{H}^2 = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ に成分ごとの一次分数変換で作用する。
- Γ_K はただ一つのカスプ (∞, ∞) を持つ。(Γ_K -同値でない放物的固定点)
- $X_K := \Gamma_K \backslash \mathbb{H}^2$ を K のヒルベルトモジュラー曲面と呼ぶ。

問題: Γ_K の共役類の集合は下記のような部分集合の和に分割されるが、どの共役類の部分集合から“セルバーグゼータ関数”が構成できるだろうか?

$$\mathrm{Conj}(\Gamma_K) = \{e\} \cup \Gamma_H \cup \Gamma_E \cup \Gamma_{HE} \cup \Gamma_{EH} \cup \Gamma_P$$

ここで、 $\Gamma_H, \Gamma_E, \Gamma_P$ は双曲-双曲, 楕円-楕円, 放物-放物的な共役類の集合であり、 Γ_{HE}, Γ_{EH} は双曲-楕円, 楕円-双曲的な共役類の集合である。

ひとつの解答として、共役類の部分集合として Γ_{HE} を取ると、セルバーグゼータ関数が構成できることを紹介する。ポイントは、 $(\gamma, \gamma') \in \Gamma_K$ を双曲-楕円元とすると (つま

り, $|\operatorname{tr}(\gamma)| > 2$ かつ $|\operatorname{tr}(\gamma')| < 2$), 双曲-楕円的 (γ, γ') の Γ_K における中心化群は無限巡回群となることである.

偶数 $m \geq 2$ を固定する.

定義 5.1 (Γ_K に対する重さ $(0, m)$ のセルバーグゼータ関数, [10]).

$$Z_K(s; m) := \prod_{(p, p')} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - e^{i(m-2)\omega} N(p)^{-(k+s)}\right)^{-1} \quad \text{for } \operatorname{Re}(s) > 1.$$

ここで, (p, p') は Γ_K の原始的 双曲-楕円元の Γ_K -共役類全体の集合を動き, (p, p') は $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})^2$ において以下と共役とする.

$$(p, p') \sim \left(\left(\begin{array}{cc} N(p)^{1/2} & 0 \\ 0 & N(p)^{-1/2} \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{array} \right) \right).$$

また, $N(p) > 1$, $\omega \in (0, \pi)$ かつ $\omega \notin \pi\mathbb{Q}$ となるようにとる.

注意 : Selberg ([16], 未出版) と Deitmar ([3], 2006) も同様なゼータ関数を余コンパクトな Γ に対して考察している.

5.2 $Z_K(s; m)$ の解析的性質

定理 5.2 ([10]). $m \in 2\mathbb{N}$ とする. $\operatorname{Re}(s) > 1$ において定義されていた $Z_K(s; m)$ は複素平面全体に有理型に解析接続される.

我々のセルバーグゼータ関数 $Z_K(s; m)$ もまた “非自明” 零点や極を持ち, それらは下記の二つのラプラシアン固有値たちと関係がある.

$(z_1, z_2) \in \mathbb{H}^2$ に対する, 重さ 0 と m のラプラシアンを

$$\Delta_0^{(1)} := -y_1^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right), \quad \Delta_m^{(2)} := -y_2^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) + im y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

とする. $\Delta_0^{(1)}$ と $\Delta_m^{(2)}$ は, 重さ $(0, m)$ のヒルベルト-マース形式の空間 :

$$L^2(m) := L_{\text{dis}}^2(\Gamma_K \backslash \mathbb{H}^2; (0, m)) \ni f(z_1, z_2)$$

に作用する. この空間の元 $f(z_1, z_2)$ は, ラプラシアン $\Delta_0^{(1)}$ の $\Delta_m^{(2)}$ の共通の固有関数で, 保型性 : $f(\gamma z_1, \gamma' z_2) = \left(\frac{c' z_2 + d'}{|c' z_2 + d'|} \right)^m f(z_1, z_2) \quad \forall (\gamma, \gamma') \in \Gamma_K$ を満たす.

さて, 偶数 m に対して, 下記で定義される $L^2(m)$ の部分空間 $V_m^{(2)}$ を考える.

$$V_m^{(2)} := \left\{ f \in L^2(m) \mid \Delta_m^{(2)} f = \frac{m}{2} \left(1 - \frac{m}{2}\right) f \right\}.$$

定理 5.3 ([10], $Z_K(s; 2)$ の零点と極 : 重さ $(0, 2)$). $Z_K(s; 2)$ の零点と極は以下で与えられる.

- $Z_K(s; 2)$ は $s = 1$ に二位の零点を持つ.
- $Z_K(s; 2)$ は $\Delta_0^{(1)}$ の $V_2^{(2)}$ における固有値 $\frac{1}{4} + \rho_j(2)^2$ の重複度の 2 倍を位数とする零点を $s = \frac{1}{2} \pm i\rho_j(2)$ に持つ. : “非自明零点”
- $Z_K(s; 2)$ は $s = \pm \frac{k\pi i}{\log \varepsilon}$ ($k \in \mathbb{N}$) に二位の零点を持つ.
- $Z_K(s; 2)$ は $s = 0$ に位数 $E(X_K)$ の零点を持つ.
- $Z_K(s; 2)$ は $s = -k$ に ($k \in \mathbb{N}$) 位数 $(2k + 1)E(X_K) + 2 \sum_{j=1}^N [k/\nu_j] - 2kN$ である零点 (位数が負のときは極) を持つ.

注意 : オイラー標数 $E(X_K)$ は偶数なので, すべての零点と極の位数は偶数となる. また, 二つの零点・極の位置が一致するときは, それらの位数を合計する.

定理 5.4 ([10], $Z_K(s; m)$ の零点と極 : 重さ $(0, m)$, $m \geq 4$). $m \geq 4$ を偶数とする. $Z_K(s; m)$ の零点と極は以下で与えられる.

- $Z_K(s; m)$ は $\Delta_0^{(1)}$ の $V_m^{(2)}$ における固有値 $\frac{1}{4} + \rho_j(m)^2$ の重複度を位数とする零点を $s = \frac{1}{2} \pm i\rho_j(m)$ に持ち : “非自明零点” ,
一位の零点を $s = 1 - \frac{m}{2} + \frac{\pi i k}{\log \varepsilon}$ ($k \in \mathbb{Z}$) に持つ.
- $Z_K(s; m)$ は $\Delta_0^{(1)}$ の $V_{m-2}^{(2)}$ における固有値 $\frac{1}{4} + \rho_j(m-2)^2$ の重複度を位数とする極を $s = \frac{1}{2} \pm i\rho_j(m-2)$ に持ち : “非自明極” ,
一位の極を $s = 2 - \frac{m}{2} + \frac{\pi i k}{\log \varepsilon}$ ($k \in \mathbb{Z}$) に持つ.
- $Z_K(s; m)$ は $s = -k$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) に位数 $(2k + 1)E(X_K) + 2 \sum_{j=1}^N [k/\nu_j] - \sum_{j=1}^N \beta_{k,j}(m)$ の零点 (位数が負のときは極) を持つ.
- $m = 4$ のときは, $Z_K(s, m)$ は一位の零点を $s = 0$ と $s = 1$ に持つ.

ここで, $E(X_K)$ はヒルベルトモジュラー曲面 X_K のオイラー標数であり, 自然数 $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N$ は Γ_K の原始的楕円固定点の位数とする. また, $\beta_{j,k}(m)$ は明示的に与えられる整数であり, 二つの零点・極の位置が一致するときは, それらの位数を合計する.

注意 : 定理 5.2 から 5.4 と $Z_K(s; m)$ の関数等式は Γ_K に対するセルバーグ跡公式とその“差分公式”を用いて証明される. (詳細は [10] を参照.)

5.3 $Z_m(s)$ と $\sqrt{Z_2(s)}$

K/\mathbb{Q} を類数 1 の実二次体, $m \in 2\mathbb{N}$ とし, セルバーグ型ゼータ関数 $Z_K(s; m)$ を導入した. 以降簡単のため, これを $Z_m(s)$ と書く. つまり,

$$Z_m(s) = \prod_{(p,p') \in \text{P}\Gamma_{\text{HE}}} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - e^{i(m-2)\omega} N(p)^{-(k+s)}\right)^{-1} \quad \text{for } \text{Re}(s) > 1$$

である.

補題 5.5 (Hirzebruch-Zagier [12]). オイラー標数 $E(X_K)$ は正の偶数である.

上記補題より, $\frac{d}{ds} \log Z_2(s)$ の留数がすべて偶数であることがわかるので, $Z_2(s)$ の“平方根”が定義できる.

$$\begin{aligned} \sqrt{Z_2(s)} &:= \prod_{(p,p') \in \text{P}\Gamma_{\text{HE}}} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - N(p)^{-(n+s)}\right)^{-1/2} \\ &= \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{(p,p')} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{N(p)^{-ks}}{1 - N(p)^{-k}}\right) \quad \text{for } \text{Re}(s) > 1. \end{aligned}$$

$\sqrt{Z_2(s)}$ も複素平面全体に有理型に解析接続できることがわかる.

5.4 完備セルバーグゼータ関数 ($s \mapsto 1-s$ で不変)

$Z_m(s)$ の関数等式に現れる局所因子を調べることにより, $s \mapsto 1-s$ で不変な完備セルバーグゼータ関数が定義される

定義 5.6 ([10], 完備セルバーグゼータ関数).

$$\begin{aligned} \widehat{Z}_2^{\frac{1}{2}}(s) &:= \sqrt{Z_2(s)} \cdot (\Gamma_2(s)\Gamma_2(s+1))^{\zeta_K(-1)} \prod_{j=1}^N \prod_{l=0}^{\nu_j-1} \Gamma\left(\frac{s+l}{\nu_j}\right)^{\frac{\nu_j-1-2l}{2\nu_j}} \\ &\quad \cdot \varepsilon^{-s} (1 - \varepsilon^{-2s})^{-1}, \\ \widehat{Z}_m(s) &:= Z_m(s) \cdot (\Gamma_2(s)\Gamma_2(s+1))^{2\zeta_K(-1)} \prod_{j=1}^N \prod_{l=0}^{\nu_j-1} \Gamma\left(\frac{s+l}{\nu_j}\right)^{\frac{\nu_j-1-\alpha_l(m,j)-\bar{\alpha}_l(m,j)}{\nu_j}} \\ &\quad \cdot \zeta_\varepsilon\left(s + \frac{m}{2} - 1\right) \zeta_\varepsilon\left(s + \frac{m}{2} - 2\right)^{-1} \quad (m \geq 4). \end{aligned}$$

ここで、 $\Gamma_2(s)$ は二重ガンマ関数、自然数 $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N$ は X_K の楕円的固定点の位数、 $\alpha_l(m, j), \bar{\alpha}_l(m, j) \in \{0, 1, \dots, \nu_j - 1\}$ は明示的に与えられる整数である。また、 $\zeta_K(s)$ は K のデデキントゼータ関数、 $\zeta_\varepsilon(s) := (1 - \varepsilon^{-2s})^{-1}$ であり、 ε は K の基本単数である。

5.5 完備セルバーグゼータ関数の行列式表示

m を正の偶数とする。第一ラプラシアン⁽¹⁾の制限 $\square_m := \Delta_0^{(1)}|_{V_m^{(2)}}$ とおき、その固有値の集合を下記のように番号づけておく。

$$0 < \lambda_0(m) \leq \lambda_1(m) \leq \dots \leq \lambda_n(m) \leq \dots$$

これを用いて、正規化行列式を以下で定義する。

$$\text{Det}(\square_m + s(s-1)) := \exp\left(-\frac{\partial}{\partial w}\Big|_{w=0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n(m) + s(s-1))^w}\right).$$

このとき、以下が成り立つ。

定理 5.7 ([11]).

- $\widehat{Z}_2^{\frac{1}{2}}(s) = e^{(s-\frac{1}{2})^2 \zeta_K(-1) + C_2} \frac{\text{Det}(\square_2 + s(s-1))}{s(s-1)}$.
- $\widehat{Z}_4(s) = e^{2(s-\frac{1}{2})^2 \zeta_K(-1) + C_4} \frac{s(s-1) \cdot \text{Det}(\square_4 + s(s-1))}{\text{Det}(\square_2 + s(s-1))}$.
- $m \geq 6$ のとき、 $\widehat{Z}_m(s) = e^{2(s-\frac{1}{2})^2 \zeta_K(-1) + C_m} \frac{\text{Det}(\square_m + s(s-1))}{\text{Det}(\square_{m-2} + s(s-1))}$.

ここで、定数 C_m ($m \in 2\mathbb{N}$) は以下のように明示的に与えられる。

$$C_2 = -\frac{1}{2} \log \varepsilon + \sum_{j=1}^N \frac{\nu_j^2 - 1}{12\nu_j} \log \nu_j,$$

$$C_m = \sum_{j=1}^N \frac{\nu_j^2 - 1 - 12\alpha_0(m, j)\{\nu_j - \alpha_0(m, j)\}}{6\nu_j} \log \nu_j \quad (m \geq 4).$$

注意： Γ_K に対するセルバーグ跡公式の“二重差分公式”を用いると、ワイルの法則：

$$N_m^+(T) := \#\{j \mid \lambda_j(m) \leq T\} \sim \frac{(m-1)}{2} \cdot \zeta_K(-1) \cdot T \quad (T \rightarrow \infty).$$

が示せる。これより、 $m \geq 4$ のとき、 $Z_m(s)$ は極より零点を“多く”持つと言える。

6 $SL(2, \mathbb{Z})$ に対する素測地線定理

6.1 代数体の整環

F を $[F : \mathbb{Q}] = n$ なる代数体とする。このとき、

- $\mathcal{O} \subset F$: 整環, i.e. 階数 n の自由 \mathbb{Z} -加群で F の 1 を含む部分環となるもの
- $I(\mathcal{O})$: F の有限生成 \mathcal{O} -部分加群の集合
- $[I(\mathcal{O})]$: $I(\mathcal{O})$ の元の同型類の集合
- $h(\mathcal{O}) < \infty$: \mathcal{O} の類数, i.e. $[I(\mathcal{O})]$ の濃度
- $R(\mathcal{O})$: \mathcal{O} の単数基準

とおく。 \mathcal{O} の無限集合に対して、下記のタイプの無限和の漸近挙動を考察したい。

$$\sum_{\mathcal{O}} h(\mathcal{O}) R(\mathcal{O})$$

6.2 実二次整環

- $\mathcal{D} := \{d \in \mathbb{N} \mid d \equiv 0, 1 \pmod{4}, \text{ not a square}\}$
- $d \in \mathcal{D}$ に対して, $\mathcal{O}_d := \left\{ \frac{x+y\sqrt{d}}{2} \mid x, y \in \mathbb{Z}, x \equiv yd \pmod{2} \right\} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ とおくと \mathcal{O}_d は実二次整環となり, これらで実二次整環は尽くされる。
例 $\mathcal{O}_8 = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ は極大な整環, $\mathcal{O}_{32} = \mathbb{Z} + 2\sqrt{2}\mathbb{Z}$ は極大でない整環
- $\varepsilon_d > 1$ を \mathcal{O}_d の基本単数とすると, 単数基準 $R(\mathcal{O}_d) = \log \varepsilon_d$ となる。
- $h(\mathcal{O}_d)$: \mathcal{O}_d の類数

実二次整環に渡る類数和に関して、ガウスによって予想されて、ジーゲルによって証明された下記の漸近公式が有名である。

定理 6.1 (Gauss/Siegel).

$$\sum_{d \leq x} h(\mathcal{O}_d) \log \varepsilon_d = \frac{\pi^2}{18\zeta(3)} x^{3/2} + O(x \log x) \quad (x \rightarrow \infty).$$

$\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ に対するセルバーグゼータ関数の“数論的表示”を用いて、Sarnak は上記とは異なるタイプの漸近公式を与えた。

定理 6.2 (Sarnak [14], 1982).

$$\sum_{\varepsilon_d \leq x} h(\mathcal{O}_d) \log \varepsilon_d = \frac{x^2}{2} + O(x^{3/2}(\log x)^3) \quad (x \rightarrow \infty),$$

$$\sum_{\varepsilon_d \leq x} h(\mathcal{O}_d) = \text{Li}(x^2) + O(x^{3/2}(\log x)^2) \quad (x \rightarrow \infty).$$

ここで, $\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ である.

注意: $\sum_{d \leq x}$ ではなくて, $\sum_{\varepsilon_d \leq x}$ であることに注意せよ.

(証明の概略) 実二次整環のゼータ関数を以下で定義する.

$$\zeta_{\mathcal{D}}(s) := \prod_{d \in \mathcal{D}} (1 - \varepsilon_d^{-2s})^{-h(\mathcal{O}_d)}.$$

このとき, $\zeta_{\mathcal{D}}(s)$ は $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ に対するセルバーグゼータ関数を用いて, $\zeta_{\mathcal{D}}(s) = Z_{\Gamma}(s+1)/Z_{\Gamma}(s)$ のように書ける. これから, $\zeta_{\mathcal{D}}(s)$ は \mathbb{C} 全体に有理型に解析接続されて, $s=1$ に一位の極を持ち $\text{Re}(s) \geq 1$ で非零になることがわかる. \square

7 $\text{SL}(3, \mathbb{Z})$ に対する素測地線定理

7.1 類数を含む形の $\text{SL}(3, \mathbb{Z})$ に対する素測地線定理

$O_{\mathbb{R}}(3)$ を総実三次整環 \mathcal{O} すべての集合とする. (i.e. $\mathcal{O} \subset \exists F$: 総実三次体)

- $\mathcal{O} \in O_{\mathbb{R}}(3)$ に対して, $h(\mathcal{O})$ を類数, $R(\mathcal{O})$ を単数基準とする.
- $\lambda \in \mathcal{O}^{\times}$ に対して, ρ_1, ρ_2, ρ_3 を F の \mathbb{R} への埋め込みで $|\rho_1(\lambda)| \geq |\rho_2(\lambda)| \geq |\rho_3(\lambda)|$ なるように番号づける.

このとき, $\alpha_1(\lambda) = \frac{|\rho_1(\lambda)\rho_3(\lambda)|}{|\rho_2(\lambda)|^2}$, $\alpha_2(\lambda) = \left(\frac{|\rho_2(\lambda)|}{|\rho_3(\lambda)|}\right)^2$ とおく.

定理 7.1 ($\text{SL}(3, \mathbb{Z})$ に対する素測地線定理, [5]). $T_1, T_2 > 0$ に対して

$$\psi(T_1, T_2) := \sum_{\substack{\mathcal{O} \in O_{\mathbb{R}}(3), \lambda \in \mathcal{O}^{\times}/\{\pm 1\} \\ 1 < \alpha_1(\lambda) \leq T_1 \\ 1 < \alpha_2(\lambda) \leq T_2}} h(\mathcal{O}) R(\mathcal{O})$$

とおく.

$T_1, T_2 \rightarrow \infty$ のとき, 以下の漸近公式が成り立つ.

$$\psi(T_1, T_2) \sim \frac{16}{\sqrt{3}} T_1 T_2.$$

7.2 $SL(3, \mathbb{Z}) \backslash SL(3, \mathbb{R}) / SO(3)$ における素測地線

以下では, $G := SL(3, \mathbb{R})$ とし, $K := SO(3)$ を G の極大コンパクト部分群とする.
 $\Gamma := SL(3, \mathbb{Z})$ は G の (余コンパクトでない) 余有限な離散部分群となる. Γ の共役類の集合は下記のように分割される:

$$\text{Conj}(\Gamma) = \{e\} \cup \Gamma_{\text{ell}} \cup \Gamma_{\text{unip}} \cup \Gamma_{\text{sp}} \cup \Gamma_1.$$

ここで, $\Gamma_{\text{ell}}, \Gamma_{\text{unip}}$ は, それぞれ Γ の楕円元, ユニポテント元の共役類からなる集合.
 $\Gamma_{\text{sp}}, \Gamma_1$ は, 下記のカルタン部分群 H_{sp}, H_1 の元に共役な元の共役類の集合である.

- $H_{\text{sp}} = A_{\text{sp}} T_{\text{sp}}$: 分裂カルタン部分群,
 ここで, $A_{\text{sp}} = \{\text{diag}(u, v, w) \mid u, v, w > 0, uvw = 1\}$,
 $T_{\text{sp}} = \{\text{diag}(\pm 1, \pm 1, \pm 1) \mid \det = 1\}$ である.
- $H_1 = A_1 T_1$: 基本カルタン部分群,
 ここで, $A_1 = \{\text{diag}(y, y, y^{-2}) \mid y > 0\}$, $T_1 = \{\text{diag}(k, 1) \mid k \in SO(2)\}$ である.

単純ルート $\alpha, \beta \in \mathfrak{a}_{\text{sp}}^*$ を下記で定義されるものとする.

$$\alpha(\text{diag}(x, y, z)) = x - y, \quad \beta(\text{diag}(x, y, z)) = y - z.$$

このとき,

- $A_{\text{sp}}^+ := \{\text{diag}(u, v, w) \mid u, v, w > 0, uvw = 1, u > v > w\}$
 : the open positive Weyl chamber
- $A_{\text{sp}}^{++} := \{a \in A_{\text{sp}}^+ \mid a^\alpha > a^\beta\} = \{\text{diag}(u, v, w) \in A_{\text{sp}}^+ \mid v < 1\}$

とおく.

測地線を考察するために, $\text{Conj}(\Gamma)$ の下記の部分集合を導入する.

- $\mathcal{E}_1(\Gamma) := \{[\gamma] \in \text{Conj}(\Gamma) \mid \gamma \sim_G a_\gamma t_\gamma \text{ with } a_\gamma t_\gamma \in A_1^+ T_1\}$ ($\dim A_1^+ = 1$)
- $\mathcal{E}_{\text{sp}}(\Gamma) := \{[\gamma] \in \text{Conj}(\Gamma) \mid \gamma \sim_G a_\gamma t_\gamma \text{ with } a_\gamma t_\gamma \in A_{\text{sp}}^{++} T_{\text{sp}}\}$ ($\dim A_{\text{sp}}^{++} = 2$)

$X := G/K$ を対称空間とすると, 測地線に関して以下の事実が知られている.

1. $[\gamma] \in \mathcal{E}_1(\Gamma)$ に対して, 元 γ から決まる $\Gamma \backslash X$ における測地線 c_γ は一意である.
2. $[\gamma] \in \mathcal{E}_{sp}(\Gamma)$ に対して, 元 γ から決まる $\Gamma \backslash X$ における測地線 c_γ は一意でないが, 測地線 c_γ は $\Gamma \backslash X$ のある一意に決まる平坦な二次元部分多様体 X_γ にある.

特に, $[\gamma] \in \mathcal{E}_{sp}(\Gamma)$ に対して, $X_\gamma \simeq \Gamma_\gamma \backslash G_\gamma / K_\gamma$ であることが知られている. このとき, $\lambda_\gamma := \text{vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma / K_\gamma) = \text{vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma)$ とおく.

7.3 $\text{SL}(3, \mathbb{R})$ とその離散部分群 Γ に対する既知の素測地線定理

閉測地線と共役類が必ずしも対応する訳ではなく, 閉測地線または平坦二次元部分多様体と対応する共役類が存在する. そこで, 閉測地線の代わりに, 共役類の元の個数を“数える”ことにする. 下記の共役類の集合を考え, 共役類の元の個数を数える“漸近公式”も“素測地線定理”と呼ぶことにする.

- $\mathcal{E}_1(\Gamma) = \{[\gamma] \in \text{Conj}(\Gamma) \mid \gamma \sim_G a_\gamma t_\gamma \text{ with } a_\gamma t_\gamma \in A_1^+ T_1\}$ ($\dim A_1^+ = 1$)
- $\mathcal{E}_{sp}(\Gamma) = \{[\gamma] \in \text{Conj}(\Gamma) \mid \gamma \sim_G a_\gamma t_\gamma \text{ with } a_\gamma t_\gamma \in A_{sp}^{++} T_{sp}\}$ ($\dim A_{sp}^{++} = 2$)

以下の3つの場合に, 素測地線定理が知られている.

(1) (閉測地線): Γ が余コンパクト, $\mathcal{E}_1(\Gamma)$. (Deitmar [1], 2002)

$T > 0$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\Lambda(T) := \sum_{\substack{[\gamma] \in \mathcal{E}_1(\Gamma) \\ a_\gamma^\beta \leq T}} l(c_\gamma) \sim T \quad (T \rightarrow \infty).$$

ここで, $l(c_\gamma)$ は閉測地線 c_γ の長さである.

(2) (閉測地線): $\Gamma = \text{SL}(3, \mathbb{Z})$, $\mathcal{E}_1(\Gamma)$. (Deitmar-Hoffmann [4], 2005)

\mathcal{O} を複素三次体に含まれる三次整環の同型類の集合とする.

$x > 0$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\sum_{\mathcal{O} \in \mathcal{O}, R(\mathcal{O}) \leq x} h(\mathcal{O}) \sim \frac{e^{3x}}{3x} \quad (x \rightarrow \infty).$$

(3) (二次元平坦部分多様体): Γ が余コンパクト, $\mathcal{E}_{sp}(\Gamma)$. (Deitmar [2], 2004)

7.4 分裂カルタン共役類に対応する二次元平坦部分多様体を数える

上記で扱われていない場合: $\Gamma = \text{SL}(3, \mathbb{Z})$, $\mathcal{E}_{sp}(\Gamma)$ を考えよう. (非余コンパクトな離散部分群に対して, 二次元平坦部分多様体を数える.)

- $A_{sp}^{++} = \{\text{diag}(u, v, w) \mid u, v, w > 0, uvw = 1, u > v > w, v < 1\} \subset H_{sp}$
- $\mathcal{E}_{sp}(\Gamma) := \{[\gamma] \in \text{Conj}(\Gamma) \mid \gamma \sim_G a_\gamma t_\gamma \text{ with } a_\gamma t_\gamma \in A_{sp}^{++} T_{sp}\}$
- $\lambda_\gamma := \text{vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma)$

定理 7.2 (素測地線定理, [5]). $T_1, T_2 > 0$ に対して, $\Lambda(T_1, T_2)$ を以下で定義する.

$$\Lambda(T_1, T_2) := \sum_{\substack{[\gamma] \in \mathcal{E}_{sp}(\Gamma) \\ a_\gamma^{\alpha-\beta} \leq T_1 \\ a_\gamma^{2\beta} \leq T_2}} \lambda_\gamma.$$

$T_1, T_2 \rightarrow \infty$ のとき, 以下が成り立つ.

$$\Lambda(T_1, T_2) \sim T_1 T_2.$$

注意: この定理 7.2 から定理 7.1 が従う.

7.5 跡公式の擬尖点形式を用いた単純化

大雑把に言えば, (G, Γ) に対する跡公式は下記の等式 (\star) である. f を G 上の試験関数, $L^2(\Gamma \backslash G)$ の離散部分が $L^2(\Gamma \backslash G)_{\text{dis}} = \bigoplus_{\pi \in \widehat{G}} m_\Gamma(\pi) H_\pi$ と G のユニタリ表現 π たちの有限重複度 $m_\Gamma(\pi)$ の離散直和でかけているとする.

$$\sum_{\pi \in \widehat{G}} m_\Gamma(\pi) \text{tr } \pi(f) = \sum_{\gamma \in \text{Conj}(\Gamma) \backslash \Gamma_{\text{unip}}} \text{vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \mathcal{O}_\gamma(f) + (\text{unipotent contributions}). \quad (\star)$$

ここで, 軌道積分は以下で定義される.

$$\mathcal{O}_\gamma(f) := \int_{G_\gamma \backslash G} f(x^{-1} \gamma x) dx.$$

また, $(\pi, H_\pi) \in \widehat{G}$ に対して, $\pi(f) \in \text{End}(H_\pi)$ は, $\pi(f)v = \int_G f(g)\pi(g)v dg$, ($v \in H_\pi$) で定義される.

上記の跡公式 (\star) に適用する試験関数 f の“候補”として, 下記を満たすものを考える.

- 定義 7.3 (トレースクラス関数, 擬尖点形式). 1. $f \in L^1(G)$ が K -有限で, すべての $\pi \in \widehat{G}$ に対して $\pi(f)$ がトレースクラス作用素となるとき, f をトレースクラス関数という.
2. トレースクラス関数 f が, 極小放物型部分群 P_{sp} から誘導されるすべての $\pi \in \widehat{G}$ に対して $\text{tr } \pi(f) = 0$ となるとき, f を擬尖点形式という.

跡公式を“単純化する”ための一つの方法として、跡公式 (★) に適用する G 上の試験関数 f として下記の条件をみたすものを擬尖点形式を用いて構成する。

- $f|_{A_{sp}} = g$ with $g \in \mathcal{C}_N(A_{sp})^W$ (分解 $G = KP_{sp} = KM_{sp}A_{sp}N_{sp}$ を用いる.)
- 跡公式の右辺において, $\mathcal{E}_1(\Gamma)$ からの寄与が消える. (擬尖点形式を用いる.)

ここで, $\mathcal{C}_N(A_{sp})^W$ は A_{sp} 上の N 回連続微分可能な関数で, ワイル群 $W = W(G, A_{sp})$ 不変なもの空間である. さらに, 跡公式の右辺において, ユニポレント元の寄与を消すために, 捻り指標 η を導入する.

- $\eta := (\Lambda + st + 2) \otimes (\Lambda - st) \in \text{Rep}(G)$ with $\Lambda = \bigwedge^2 st$.

u, v, w が $x \in G$ の複素固有値なら, $uvw = 1$ で $\text{tr } \eta(x) = (u^2 - 1)(v^2 - 1)(w^2 - 1)$ となることが確かめられる.

上記の試験関数 f と捻り指標 η について, 以下の命題が示せる.

命題 7.4. $\mathcal{C}_N(A_{sp})^W$ の元 g が A_{sp}^{+-} 上消えていると仮定する. Γ を $\text{SL}_3(\mathbb{Q})$ の合同部分群とし, K_Γ を Γ の $\text{SL}_3(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ における閉包とする. ここで, \mathbb{A}_{fin} は有限 \mathbb{Q} -アデールの環とする. f_{fin} を K_Γ の特性関数とし, アデール上の関数として $f_{\mathbb{A}} = f_{\text{fin}} \otimes f \text{tr } \eta$ とおく. (f, η は命題の前で“定義”したもの) このとき, $f_{\mathbb{A}}$ に対するアーサー跡公式の右辺は

$$J_{\text{geom}}(f_{\mathbb{A}}) = \sum_{[\gamma] \in \mathcal{E}_{sp}(\Gamma)} \text{vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \frac{g(a_\gamma) \text{tr } \eta(\gamma)}{a_\gamma^\rho \det(1 - (a_\gamma t_\gamma)^{-1} | \mathfrak{n}_{sp})}$$

となる.

7.6 二変数のディリクレ級数と定理 7.2 の証明の概略

まず, 下記を定義する.

- $\text{ind}(\gamma) := \frac{\lambda_\gamma}{\det(1 - (a_\gamma t_\gamma)^{-1} | \mathfrak{n}_{sp})} > 0$.
- $a \in A_{sp}^{++}$ に対して, $l(a) := 2(\alpha - \beta)(\log a) \cdot \beta(\log a)$.
- $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$ と $a \in A_{sp}^{++}$ に対して, $a^{-s} := a^{-s_1(\alpha - \beta) - 2s_2\beta}$.

$j \in \mathbb{N}$ に対して, 以下のディリクレ級数を考える.

$$L^j(s) = \sum_{[\gamma] \in \mathcal{E}_{sp}(\Gamma)} \text{ind}(\gamma) \text{tr } \eta(\gamma) l(a_\gamma)^{j+1} a_\gamma^{-s} a_\gamma^{-\frac{4}{3}(\alpha - \beta) - 2\beta}$$

跡公式のスペクトル辺（左辺）を調べることにより，

$$L^j(s) = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \right)^{j+1} \left(\frac{1}{(s_1 - 1)(s_2 - 1)} - \frac{1}{(s_1 - \frac{1}{3})(s_2 - 1)} \right) + R(s)$$

となることが示せる．ここで， $R(s)$ は，ある $\varepsilon > 0$ に対する領域 $\{\operatorname{Re}(s_1), \operatorname{Re}(s_2) > 1 - \varepsilon\}$ において正則な関数である．ところで，

$$\operatorname{tr} \eta(a) = \left(a^{\frac{4}{3}(\alpha - \beta) + 2\beta} - 1 \right) \left(a^{-\frac{2}{3}(\alpha - \beta)} - 1 \right) \left(a^{-\frac{2}{3}(\alpha - \beta) - 2\beta} - 1 \right)$$

より，独立に $a_\gamma^{\alpha - \beta}, a_\gamma^{2\beta} \rightarrow \infty$ のとき，

$$\operatorname{tr} \eta(\gamma) a_\gamma^{-\frac{4}{3}(\alpha - \beta) - 2\beta} \rightarrow 1$$

が成り立つ．“高次元版 ウィーナー-池原の定理”（例えば [2, Theorem 3.2]）より

$$\tilde{\Lambda}(T_1, T_2) = \sum_{\substack{[\gamma] \in \mathcal{E}_{sp}(\Gamma) \\ a_\gamma^{\alpha - \beta} \leq T_1 \\ a_\gamma^{2\beta} \leq T_2}} \operatorname{ind}(\gamma) \operatorname{tr} \eta(\gamma) a_\gamma^{-\frac{4}{3}(\alpha - \beta) - 2\beta} \sim T_1 T_2 \quad (T_1, T_2 \rightarrow \infty)$$

が成り立つ．また， $a_\gamma^{\alpha - \beta}, a_\gamma^{2\beta} \rightarrow \infty$ のとき， $\frac{\operatorname{ind}(\gamma) \operatorname{tr} \eta(\gamma) a_\gamma^{-\frac{4}{3}(\alpha - \beta) - 2\beta}}{\lambda_\gamma} \rightarrow 1$ となる．

よって，[2, Lemma 3.5] より定理 7.2（素測地線定理）は従う． \square

参考文献

- [1] A. Deitmar, Class numbers of orders in cubic fields. *J. Number Theory* **95** (2002), no. 2, 150–166.
- [2] A. Deitmar, A prime geodesic theorem for higher rank spaces. *Geom. Funct. Anal.*, **14** (2004), 1238–1266.
- [3] A. Deitmar, Generalised Selberg zeta functions and a conjectural Lefschetz formula. *Multiple Dirichlet series, automorphic forms, and analytic number theory*, 177–190, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [4] A. Deitmar and W. Hoffmann, Asymptotics of class numbers. *Invent. Math.* **160** (2005), no. 3, 647–675.
- [5] A. Deitmar, Y. Gon and P. Spilioti, A prime Geodesic Theorem for $\operatorname{SL}_3(\mathbb{Z})$. arXiv:1711.05361.

- [6] R. Gangolli, Zeta functions of Selberg's type for compact space forms of symmetric spaces of rank one. *Illinois J. Math.* **21** (1977), no. 1, 1–41.
- [7] R. Gangolli and G. Warner, Zeta functions of Selberg's type for some noncompact quotients of symmetric spaces of rank one. *Nagoya Math. J.* **78** (1980), 1–44.
- [8] Y. Gon and J. Park, The zeta functions of Ruelle and Selberg for hyperbolic manifolds with cusps. *Math. Ann.* **346** (2010), no. 3, 719–767.
- [9] Y. Gon, Selberg type zeta function for the Hilbert modular group of a real quadratic field. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **88**(9) (2012), 145–148.
- [10] Y. Gon, Differences of the Selberg trace formula and Selberg type zeta functions for Hilbert modular surfaces. *J. Number Theory* **147** (2015), 396–453.
- [11] Y. Gon, Determinants of Laplacians on Hilbert modular surfaces. *Publ. Mat.* **62** (2018), 615–639.
- [12] F. Hirzebruch and D. Zagier, Classification of Hilbert modular surfaces, *Complex analysis and algebraic geometry*, 43–77. Iwanami Shoten, Tokyo, 1977.
- [13] N. Kurokawa and S. Koyama, Multiple sine functions. *Forum Math.* **15** (2003), no. 6, 839–876.
- [14] P. Sarnak, Class numbers of indefinite binary quadratic forms. *J. Number Theory* **15** (1982), no. 2, 229–247.
- [15] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* **20** (1956), 47–87.
- [16] A. Selberg, Hybrid trace formulae and related zeta- and L-functions, available at <http://publications.ias.edu/selberg>
- [17] M. Wakayama, Zeta functions of Selberg's type associated with homogeneous vector bundles. *Hiroshima Math. J.* **15** (1985), no. 2, 235–295.

Yasuro Gon

Faculty of Mathematics, Kyushu University

744 Motooka, Fukuoka 819-0395, Japan

E-mail: ygon@math.kyushu-u.ac.jp

グロタンディーク・タイヒミュラー理論の話題から

中村博昭（大阪大学理学研究科）

CONTENTS

1. Introduction	1
1.1. 円分指標	2
1.2. 道草 (復元の話)	2
2. 伊原ベータ関数とその楕円類似	3
2.1. $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$	3
2.2. $G_{\mathbb{Q}}$ の組合せモデルとしての GT	4
2.3. 楕円曲線版	5
3. エル進ガロア・ポリログ関数	6
3.1. ガロア・ポリログ	6
3.2. 白谷ゼータ関数	8
References	8

1. Introduction

代数曲線やそのモジュライ空間のエタール基本群を通じて、数体の絶対ガロア群の数論幾何的な働きが大きく映し出される現象が、1980年代に Belyi, Grothendieck, Ihara 等により指摘されて以来、数論的基本群を中心に、遠アーベル幾何学、ガロアの逆問題などの問題群の理解も深められてきた。こうした研究の中で重要な役を務める対象として、いくつか個性的なガロア群上の数論的関数たちがモジュライ空間の数論的基本群の群論的構造の中に棲息している。それぞれの関数の持つ数論的な特徴や相互関係を見極めること、そして岩澤理論や虚数乗法論など周辺の数論分野との関連性を確立すること、なども豊穡な研究テーマとして少しずつ理解が進んでいる昨今である。本稿では、これまで筆者が親しんできたいくつかの実例（伊原ベータ関数やその楕円類似、エル進ガロアポリログ関数など）を中心に、そうした側面の一端を紹介したい。

有理数体 \mathbb{Q} 上定義された代数多様体 X/\mathbb{Q} が与えられると、3種類の副有限 (profinite) 群

- (i) $\pi_{\mathbb{Q}}$: 数論的基本群 $\pi_1(X_{\mathbb{Q}})$,
- (ii) π_1 : 幾何的基本群 $\pi_1(X_{\overline{\mathbb{Q}}}) \cong \pi_1(X(\mathbb{C}))$ の profinite 完備化,
- (iii) 絶対ガロア群 $G_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$

と、それらをつなぐ基本完全系列 $1 \rightarrow \pi_1 \rightarrow \pi_{\mathbb{Q}} \rightarrow G_{\mathbb{Q}} \rightarrow 1$ が現れる。 \mathbb{Q} -射 $X \rightarrow Y$ があれば、関手的に $G_{\mathbb{Q}}$ -整合な群準同形写像 $\pi_{\mathbb{Q}}(X) \rightarrow \pi_{\mathbb{Q}}(Y)$ が (π_1 -共役を除いて) 付随して生じる。グロタンディーク・タイヒミュラー理論は、代数曲線（とくに双曲型代数曲線）やそのモジュライ空間たちがこの単純な構図をめぐる巻き起こすドラマということができよう。もちろん \mathbb{Q} は、代数体 $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{C}$ や他の数論的な体で置き換えてよいし、代数体の場合には、 $\overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ は固定して考えることにする。

1980年頃に、出発点となる $X = \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の場合に、Belyi [3] がガロアの逆問題への応用を目的とする短い論文の中で、基本完全系列から生じる外ガロア表現の忠実性 $G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \text{Out}(\pi_1)$ の証明と、基本完全系列の標準分裂（のちに \mathbb{Q} -有理的な接基点 $\overline{01}$

に対応すると言われる半直積構造) $\pi_{\mathbb{Q}} = \pi_1 \rtimes G_{\mathbb{Q}}$ を指摘した. Grothendieck [12] は, この発見に着目し, $X = M_{g,n}/\mathbb{Q}$ (種数 g , マーク点 n 個 (順序付き) の完備代数曲線のモジュライ空間) に拡張することを提唱する, 幾何的基本群 π_1 は副有限タイヒミュラーモジュラー群 (向き付け可能な曲面の写像類群の profinite 完備化) となる. 全射の族 $\{\pi_{\mathbb{Q}}(M_{g,n}) \rightarrow G_{\mathbb{Q}}\}_{2-2g-n < 0}$ は, マーク点の忘却射や曲線の退化に伴う接合射などで相互関係が想定される「ガロア・タイヒミュラー塔」をなす. その組合せ構造を $G_{\mathbb{Q}}$ 整合性のもとで探求するプロジェクト “Lego” of G.T. の哲学は, Belyi の定理に端を発する考察を起点として, 一気に考察対象を代数曲線のモジュライ空間をめぐる広大な研究原野に拡張して多くの研究者を魅惑したと思われるが, そのプログラムを記した文書 [12] (1984 Esquisse d'un programme) は研究論文として発表することを意図されていなかったこともあり文献として公刊されるまで 13 年の年月を要したという歴史をもつ.

さて, ガロア・タイヒミュラー塔を積み上げるための “fundamental blocks” としてモジュライ次元が 2 以下となる次の 5 つの場合がとくに大切である:

- (i) $M_{0,3} = \text{Spec } \mathbb{Q}$
- (ii) $M_{0,4} = \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$
- (iii) $M_{0,5} = \mathbf{P}^2 - \text{完全四角形}$
- (iv) $M_{1,1} = \text{the “fine } J\text{-line” (of elliptic moduli)}$
- (v) $M_{1,2} = \text{affine part of the universal elliptic curve } /M_{1,1}$

これらの数論的基本群を詳細に考察するさまざまな研究が開いたが, 記述する努力過程では, 取扱い可能なガロア群の上の数論関数が有用な役割を果たす. 本稿では, そうした関数のいくつかを紹介したい.

1.1. 円分指標. 最初の重要な関数は 円分指標 $\chi: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}^{\times}$ と呼ばれるもので, 1 の冪根 $\zeta_n = e^{2\pi i/n} \in \overline{\mathbb{Q}}$ への $G_{\mathbb{Q}}$ の作用を体現する: より正確には, 各 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対して $\chi(\sigma) \in \hat{\mathbb{Z}}^{\times}$ を, $\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^{\chi(\sigma) \bmod n}$ ($n \geq 1$) によって定める. $G_{\mathbb{Q}}$ が円分指標倍で作用する加群 $\hat{\mathbb{Z}}$ を 1 階の Tate 加群といい, $\hat{\mathbb{Z}}(1)$ とかく. 円分指標は, 数論的基本群においては, 代数多様体から因子を取り除いた状況でいたるところで現れる. その理由は典型的な場合 $X = \mathbf{G}_m = \mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}$ をモデルとして説明できる: その数論的基本群 $\pi_{\mathbb{Q}}$ は, ローラン級数体 $\cup_n \overline{\mathbb{Q}}((t^{1/n}))$ の自己同型のうち, 係数への $G_{\mathbb{Q}}$ 作用と, 穴の周りを一周するループに対応する元 $x: t^{1/n} \mapsto t^{1/n} \zeta_n^{-1}$ ($n \geq 1$) とで生成される半直積群 $\pi_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{Q}} \rtimes \langle x \rangle$ と同一視され, 幾何的基本群 $\pi_1 = \langle x \rangle \cong \hat{\mathbb{Z}}$ への $G_{\mathbb{Q}}$ の作用は円分 (指標倍による) 作用に他ならないことが確かめられる (Branch cycle argument). すなわち $\pi_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{Q}} \rtimes \hat{\mathbb{Z}}(1)$.

1.2. 道草 (復元の話). 筆者が最初に代数学シンポジウムで話をさせて頂いたのは, 北大で 1989 年に開催された第 35 回代数学シンポジウムであった. 代数学シンポジウム報告集は, 現時点で電子的に 2004 年以降のものは代数分科会のホームページで入手可能だが, それ以前のは紙媒体で大学毎の数学図書室に所蔵されているものが (ただし所蔵状態は所によりまちまちのようである. 幸いにして, 筆者の上記の報告集の記事は英訳を [29] として出版する機会を得た (20 年後の 2009 年にケンブリッジの Newton 研究所で行った遠アーベル幾何の入門講義の報告を兼ねている). このときの主な内容は Grothendieck の遠アーベル幾何の基本予想「数論的基本群の純群論的構造から双曲型代数曲線を復元する」を, 種数 0 の場合と, 楕円曲線ひく 1 点の場合に解決したことの報告であった. 円分指標の有用性を理解するのに好適な題材であるので, ここで簡単に種数 0 の 4 点抜き射影直線の場合に素描しよう. 問題は, $U_{\lambda} := \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \lambda, \infty\}$ ($\lambda \in \mathbb{Q}, \lambda \neq 0, 1$) とするとき, $G_{\mathbb{Q}}$ への全射つき数論的基本群 $p_{\lambda}: \pi_1(U_{\lambda}) \rightarrow G_{\mathbb{Q}}$ から U_{λ} の \mathbb{Q} -同型類 \Leftrightarrow 複比集合 $J(\lambda) := \{\lambda, 1 - \lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{1}{\lambda-1}, \frac{\lambda-1}{\lambda}\}$ を復元すること, つまり, $\iota: \pi_1(U_{\lambda}) \cong \pi_1(U_{\lambda'})$ なる群同型が $p_{\lambda} = p_{\lambda'} \circ \iota$ となるように与えられた場合に, $J(\lambda) = J(\lambda')$ を導けるかという問題である. ポイントは, \mathbf{P}^1 ひく 4 点の数論的基本群のなかに 4 つの穴の周りの局所基本群

($\cong G_{\mathbb{Q}} \times \hat{\mathbb{Z}}(1)$) として内在している4つの部分群共役類の和集合を、無数の幾何的な開部分群 (有限次被覆曲線の数論的基本群) たちのアーベル化におけるガロア表現の重みフィルター付け (Riemann-Weil 作用と円分作用の差) を利用することで、他の部分群から差別化する。これができると、アーベル被覆における抜いた点の上の剰余体の系列が個々の穴の識別つきで復元でき、Kummer 理論の簡単な議論で、 $J(\lambda)$ の各元が基礎体の中で乗法的に生成する巡回部分群の三本セットが復元され、続いて穴の座標そのものを (数として) 復元できることが分かる ([25]).

Lego との関係 (cf. [26] §3): スキーム論的には、 $X = \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ 上の有理点 $\lambda \in X(\mathbb{Q})$ を選ぶことは、構造射 $X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Q}$ の切断 $\lambda: \text{Spec } \mathbb{Q} \rightarrow X$ を取ることに相当するから、数論的基本群の分裂切断 $s_{\lambda}: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \pi_{\mathbb{Q}}(X)$ を与える (これは、Belyi が与えた $s_{\vec{01}}$ のような X の無限遠に由来するタイプの分裂とは群論的に区別できることがやはり上の議論から従う). $X = M_{0,4}$ とみなすとき、その上には $M_{0,5}$ からの全射 (5番目のマーク点を忘れる) が「 \mathbf{P}^1 ひく4点の普遍族」を与える様で載っており、この構図は下のように $\pi_{\mathbb{Q}}$ 側に移行する.

$$\begin{array}{ccc}
 M_{0,5} \longleftarrow \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \lambda, \infty\} & & \pi_{\mathbb{Q}}(M_{0,5}) \xleftarrow{\tilde{s}_{\lambda}} \pi_{\mathbb{Q}}(U_{\lambda}) \xrightarrow{\quad} \pi_{\mathbb{Q}}(U_{\lambda'}) \\
 \downarrow & & \downarrow p_{\lambda} \quad \downarrow \tilde{s}_{\lambda'} \quad \downarrow p_{\lambda'} \\
 X = M_{0,4} \xleftarrow{\lambda} \text{Spec } \mathbb{Q} & \Rightarrow & \pi_{\mathbb{Q}}(M_{0,4}) \xleftarrow{s_{\lambda}} G_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\quad} G_{\mathbb{Q}} \\
 & & \downarrow \tilde{s}_{\lambda'} \\
 & & G_{\mathbb{Q}}
 \end{array}$$

よって切断 λ を決めることは、部分群 $s_{\lambda}(G_{\mathbb{Q}}) \subset \pi_{\mathbb{Q}}(X)$ だけではなく、必然として $\pi_{\mathbb{Q}}(M_{0,5})$ のなかにある $s_{\lambda}(G_{\mathbb{Q}})$ の逆像を切り出してきて上部構造 $\pi_{\mathbb{Q}}(U_{\lambda}) \rightarrow s_{\lambda}(G_{\mathbb{Q}}) = G_{\mathbb{Q}}$ をも決める. ここで上で議論した復元の問題と関係が付く. $G_{\mathbb{Q}}$ の拡大群として $\pi_{\mathbb{Q}}(U_{\lambda}) \cong_{G_{\mathbb{Q}}} \pi_{\mathbb{Q}}(U_{\lambda'})$ ならば、(局所基本部分群の識別により最初の3点を $0, 1, \infty$ と正規化したうえで4点目の座標について) $\lambda = \lambda'$ が成り立つというのが復元問題の帰結である. このことから λ と λ' が異なるならば、それぞれに対する上部構造群が同型であり得ない. よって $s_{\lambda}(G_{\mathbb{Q}})$ と $s_{\lambda'}(G_{\mathbb{Q}})$ が $\pi_{\mathbb{Q}}(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$ のなかの分裂部分群としても共役でない. つまり,

$$X(\mathbb{Q}) \ni \lambda \mapsto s_{\lambda} \in \text{Section}(\pi_{\mathbb{Q}}(X)/G_{\mathbb{Q}})$$

が単射であることを導く. 遠アーベル幾何の基本予想の中で、現時点で未解決とされる **Section 予想** は、この対応が、右辺を Belyi 型以外の切断準同形たちに制限した場合に全単射を与えることを主張している. Section 予想は、一般の双曲型曲線や \mathbb{Q} 以外の数論的体への拡張も研究されている (cf. 星 [14]). Esnault-Hai [8] は、 $X = \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の場合が肯定的に解決するだけでも、一般の場合に条件付きで帰結があること示している. 最近の進展としては J. Stix の仕事 [43] が目覚ましい.

2. 伊原ベータ関数とその楕円類似

2.1. $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$. 射影直線ひく3点の数論的基本群につながる研究は、(Grothendieck とは別の数論的観点から) 伊原による研究 (1960年代に遡る [15]) があり、1984年の Chicago での講義が論文 [16] として出版されたのを契機に、Anderson, Coleman, Deligne など加わり国際的な研究活動が活発に展開された.

この節では Anderson-Ihara theory といわれる一連の研究の中で導入されたアデリック・ベータ関数とよばれる関数を紹介する.

射影直線ひく3点の幾何的基本群を

$$\pi = \pi_1(\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{01}) = \langle x, y, z \mid xyz = 1 \rangle \cong \hat{F}_2$$

とあらわす. ここに x, y, z は、穴 0 から発する単位接ベクトル $\vec{01}$ を基点とし $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$ の穴 $0, 1, \infty$ を回って戻る標準的なループを表す. π は、 x, y を生成元とする副

有限自由群 \hat{F}_2 と同型である。ガロア群 $G_{\mathbb{Q}}$ の Belyi 作用 $\varphi_{\vec{0}\vec{1}} : G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \text{Aut}(\hat{F}_2)$ は、数論的に複雑な構造をもつガロア群 $G_{\mathbb{Q}}$ を、組合せ群論的な自己同型群 $\text{Aut}(\hat{F}_2)$ のなかに忠実に映し出していると考えられるので、その様子を記述できれば数論への応用が期待できる。位相群としての導来列を $\pi \supset \pi' \supset \pi'' \supset \dots$ と書いたとき、アデリック・ベータ関数は、商表現のうち最初に非自明な情報を期待できるメタ・アーベル還元 $\varphi''_{\vec{0}\vec{1}} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Aut}(\pi/\pi'')$ を、一本の $G_{\mathbb{Q}}$ 上の $\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]]^\times$ 値関数

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B} : G_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]]^\times \\ \cup & & \cup \\ \sigma & \longrightarrow & \mathbb{B}_\sigma(\bar{x}, \bar{y}) \end{array}$$

に集約したものである。ここで π の生成元 x, y の π のアーベル化における像を \bar{x}, \bar{y} としたとき、

$$\pi^{\text{ab}} := \pi/\pi' = \hat{\mathbb{Z}}\bar{x} \oplus \hat{\mathbb{Z}}\bar{y} \cong \hat{\mathbb{Z}}^2$$

の完備群環が $\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]]$ である。 $\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]] = \varprojlim_n \hat{\mathbb{Z}}[\bar{x}, \bar{y}]/(\bar{x}^n - 1, \bar{y}^n - 1)$ であり、 \bar{x}, \bar{y} に 1 の冪根を代入したときの $\hat{\mathbb{Z}}[\mu_\infty]$ 値が意味を持つことに注意する。ガロア表現 $\varphi_{\vec{0}\vec{1}}$ からアデリック・ベータ関数 $\mathbb{B} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]]^\times$ を構成する仕方として、 $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ 上のフェルマー曲線による被覆を利用する方法と、完備群環 $\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{F}_2]]$ における Fox 微分とアーベル化の合成

$$\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{F}_2]] \xrightarrow{\partial_y} \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{F}_2]] \xrightarrow{\text{ab}} \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]]$$

を用いる方法がある。ここでは後者を紹介する。まず、 $G_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^1 - \{0, 1, \infty\}$ 上で、 0 を $\vec{0}\vec{1}$ にそって出発し、 $\vec{1}\vec{0}$ にそって 1 に到達するエタール道類集合 $\text{Path}(\vec{0}\vec{1} \rightsquigarrow \vec{1}\vec{0})$ にも作用する。 $p : 0 \rightarrow 1$ を実区間 $(0, 1)$ に沿った標準的な道とするととき $f_\sigma(x, y) = p \cdot \sigma(p)^{-1} \in \pi$ が定まる。[本稿では、道の合成は「左を先、右を後」とする。(公式などに微妙に影響する場合がある)] このときアデリック・ベータ関数は

$$\mathbb{B}_\sigma(\bar{x}, \bar{y}) := \left(1 + (\partial_y f_\sigma(x, y)) \cdot (y - 1) \right)^{\text{ab}} \in \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]]^\times$$

と定義され、さまざまな性質が知られている。ここでは、網羅的に述べることは避けるが、 $\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]] = \hat{\mathbb{Z}}[[\pi_1^{\text{ab}}]]$ は、 \mathbf{P}^1 上の n 次フェルマー曲線被覆 $F_n : X^n + Y^n = Z^n$ の $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ 対称性の射影極限、 π'/π'' は、そのヤコビ多様体 $\text{Jac}(F_n)$ の Tate 加群の射影極限 $\varprojlim_n \hat{T}(\text{Jac}(F_n))$ とみなすことができ、このとき後者への $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ のガロア作用は、 $\frac{(\bar{x}^{\chi(\sigma)} - 1)(\bar{y}^{\chi(\sigma)} - 1)}{(\bar{x} - 1)(\bar{y} - 1)} \mathbb{B}_\sigma$ 倍乗法で実現される；古典的なベータ関数との類似がある；1 の冪根における特殊値がヤコビ和の系列を補間する； l 進テイラー係数が Soulé 指標で記述される、等等が続く(詳細は、伊原による原典(とくに [16], [18], [19]) を参照するのがいちばんであるが、本稿の姉妹記事ともいえる [34] にもいくらか特徴的な性質を挙げた)。

2.2. $G_{\mathbb{Q}}$ の組合せモデルとしての GT. 記号は前節の通りとして、再び Belyi による $G_{\mathbb{Q}}$ の $\pi = \pi_1(\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{0}\vec{1})$ への忠実作用 $\varphi_{\vec{0}\vec{1}} : G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \text{Aut}(\pi)$ を考える。基本完全系列 $1 \rightarrow \pi \rightarrow \pi_{\mathbb{Q}} \rightarrow G_{\mathbb{Q}} \rightarrow 1$ から引きおこる外ガロア表現 $\varphi : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Out}(\pi)$ の $\text{Aut}(\pi)$ への持ちあげとして、 $\varphi_{\vec{0}\vec{1}}$ は、次のように群論的に像を制限することで特徴づけられる。

$$\varphi_{\vec{0}\vec{1}} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \left\{ \alpha : \pi \xrightarrow{\sim} \pi \left| \begin{array}{l} \alpha(x) = x^{\chi(\sigma)} \\ \alpha(y) = \pi'\text{-conjugate of } y^{\chi(\sigma)} \\ \alpha(z) = \pi\text{-conjugate of } z^{\chi(\sigma)} \end{array} \right. \right\} \subset \text{Aut}(\pi).$$

ここに、各 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対して、 $\chi_\sigma = \chi(\sigma) \in \mathbb{Z}^\times$ は円分指標の値であるが、 $\alpha_\sigma := \varphi_{\vec{0}\vec{1}}(\sigma)$ による y の像 $\alpha_\sigma(y) = f_\sigma^{-1} y^{\chi(\sigma)} f_\sigma$ の共役因子 $f_\sigma \in \pi'_1$ は σ に対して一意的に定まる。 $f_\sigma(x, y)$

を文字 x, y で生成される自由副有限群 $\hat{F}(x, y)$ の (副有限) free word とみなすと, 絶対ガロア群 $G_{\mathbb{Q}}$ の各元 σ は, 二つのパラメータ $\chi(\sigma) \in (\hat{\mathbb{Z}}^{\times} \subset \hat{\mathbb{Z}})$, $f_{\sigma} \in (\hat{F}_2' \subset \hat{F}_2)$ でパラメトライズされる. このことを利用して, いわゆるグロタンディーク・タイヒミュラー群とは, 二つのパラメータをもつ直積集合 $\{(\chi, f)\} = \hat{\mathbb{Z}} \times \hat{F}_2$ の画布に描かれたガロア像 $\varphi_{\widehat{GT}}(G_{\mathbb{Q}})$ を近似する外枠の組合せモデル (viz. $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対するパラメータ $(\chi(\sigma), f_{\sigma})$ の振る舞いを群論的に限定してデザインしたモデル) といえる. Drinfeld, Ihara による最初のモデルは

$$\widehat{GT} := \left\{ \alpha \in \text{Aut}(\pi) \left| \begin{array}{l} \alpha(x) = x^{\chi} \quad (\exists \chi \in \hat{\mathbb{Z}}^{\times}) \quad , \\ \alpha(y) = f^{-1}y^{\chi}f \quad (\exists f \in \pi'), \\ \alpha(z) \sim z^{\chi} \quad (\pi\text{-共役}), \\ \text{s.t.} \\ (\chi, f) \text{ は条件 “(I),(II),(III)” をみたす. ここに} \\ \text{(I),(II)} \Leftrightarrow S_3\text{-対称性 of } \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\} \\ \text{(III)} \Leftrightarrow \text{“ペンタゴン関係式” on } M_{0,5} \end{array} \right. \right\}$$

であるが, 様々な拡張・変形・精密化が研究されている (cf.[9],[10],[11],[22] やその文献表).

2.3. 楕円曲線版. 筆者が2回目に代数学シンポジウムで話をさせて頂いたのは, 2002年に室蘭工科大学にて開催された第47回代数学シンポジウムするときであり, 「楕円曲線に付随して生じる Magnus 表現と Eisenstein 級数について」というタイトルで発表した. このときの報告集も電子公開に至っておらないので閲覧しにくいかもしれないが, 同時期に数理研講究録 1281 (2002), 176–183 に書いた姉妹記事「楕円曲線に附随する外モノドロミー表現とある種の Eisenstein 測度関数について」との合併英訳拡張版を2年前にまとめて [31] として筆者のホームページにおいてある. 楕円曲線ひく1点の基本群は, 射影直線ひく3点の基本群と同様にトポロジカルには階数2の自由群であるが, 穴の周りの局所基本群の入り方に大きな違いがあり, アデリック・ベータ関数の類似の構成は紆余曲折をきわめている ([34]). ここでは, 現状で最良と思われるヴァージョンが, 以下のように得られていることを簡単に報告するにとどめる. 基本設定は $\pi_{\mathbb{Q}}(M_{1,2}) \twoheadrightarrow \pi_{\mathbb{Q}}(M_{1,1})$ をリフトした楕円曲線の Weierstrass ファイバー空間 $E \setminus \{O\} := \{y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\}$ と, 下部パラメータ空間 $\mathfrak{M} := \{(g_2, g_3) \mid \Delta := g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0\}$ である. 双方の空間 $E \setminus \{O\}$, \mathfrak{M} は \mathbb{Q} 上のアフィン代数多様体として考える. 自然な射影 $E \setminus \{O\} \rightarrow \mathfrak{M}$ において, 数論的基本群の標準的な半直積分解と幾何的基本群の標準的な生成系を設定するのに多少骨折りが必要である ([30, §5]) が, ともかくゼロ切断に接する無限小切断 $\tilde{w} : \mathfrak{M} \dashrightarrow E \setminus \{O\}$ を, 局所座標 $t := -2x/y$ について単位ベクトルをとること, および, (原点ぬき) 退化 Tate 楕円曲線の無限小埋め込み $\text{Tate}(q) \dashrightarrow E \setminus \{O\}$ を導入することで舞台設定ができる:

$$\begin{array}{ccc} E \setminus \{O\} := \{y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\} & \dashrightarrow & \text{Tate}(q) \\ \Downarrow \tilde{w} & & \Downarrow \\ \mathfrak{M} := \{(g_2, g_3) \mid \Delta := g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0\} & \dashrightarrow & \text{Spec } \mathbb{Q}((q)). \end{array}$$

(穴あき)Tate 楕円曲線の数論的基本群を, 射影直線ひく3点の数論的基本群からファンカンペン構成で復元することで, 全射準同形 $\pi_{\mathbb{Q}}(E \setminus O) \twoheadrightarrow \pi_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{M})$ の核にあたる Tate 曲線の幾何的基本群 π_1 の標準的生成系 x_1, x_2, z を $\text{Im}(\tilde{w}) \cap \text{Tate}(q)$ を基点とするループとして導入し, 穴あきトーラスの基本群の関係式 $[x_1, x_2]z = 1$ ($[x_1, x_2] := x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}$) をみたし, かつそれらへのガロア群の作用が $(\chi(\sigma), f_{\sigma}) \in \widehat{GT}$ の言葉で記述される形にとれる ([28] に遡る). ここでの π_1 は x_1, x_2 で生成される副有限自由群である.

問題: 上の設定で定義される数論的モノドロミー表現 $\varphi_{\tilde{w}} : \pi_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{M}) \rightarrow \text{Aut}(\pi_1)$ に対して, そのメタ・アーベル還元 $\varphi_{\tilde{w}}'' : \pi_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{M}) \rightarrow \text{Aut}(\pi_1/\pi_1'')$ を一本の関数であらわすこと.

この問題に対し、アーベル化 π_1^{ab} への作用が自明の部分 $\pi_1(\mathfrak{M}_\infty) := \text{Ker}(\pi_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{M}) \rightarrow \text{GL}(\pi_1^{\text{ab}}) = \text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}))$ に限ればうまく $\mathcal{E} : \pi_1(\mathfrak{M}_\infty) \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}]]$ が定義できることは依然から知られていた (Bloch, Tsunogai) が、それを $\pi_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{M})$ に、数論性を壊さない形で自然に延ばすことが長年にわたり課題として残った。2009年のケンブリッジ滞在中にひとまず、関数の系列 $\{\mathbb{E}_m : \pi_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{M}) \times \hat{\mathbb{Z}}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}\}_{m \in \mathbb{N}}$ にまとめることに成功し ([30])、その後、幸運にも改良して一本の関数

$$\mathbb{E} : \pi_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{M}) \times \mathbb{Q}_f^2 \rightarrow \hat{\mathbb{Z}} \quad (\mathbb{Q}_f := \mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})$$

にまとまった ([33])。さらに、定義域の $\pi_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{M})$ の部分は、モノドロミー表現 $\varphi_{\bar{w}} : \pi_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{M}) \rightarrow \text{Aut}(\pi_1)$ の像の組合せモデルとして、2012年に B.Enriquez により導入された楕円グロタンディーク・タイヒミュラー群 \widehat{GT}_{ell} に伸ばせることが最近判明した (論文 [32] 準備中)。応用もいくつかの方向で存在しているが、本稿では省略する。

3. エル進ガロア・ポリログ関数

各 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対して、アデリック・ベータ関数の $(\bar{x}, 1)$ での偏微分係数に相当する $\frac{\mathbb{B}_\sigma(\bar{x}, \bar{y})-1}{\bar{y}-1} \in \varprojlim_n \hat{\mathbb{Z}}[\bar{x}, \bar{y}]/(\bar{x}^n - 1, \bar{y}^n - 1)$ に $\bar{y} = 1$ を代入して $\varprojlim_n \hat{\mathbb{Z}}[\bar{x}]/(\bar{x}^n - 1)$ に射影した像 (の反転) を $\kappa_\sigma(\bar{x}) \in \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}]]$ とおく。 \widehat{GT} のパラメータ f_σ の言葉では

$$\kappa_\sigma(\bar{x}) := -[\partial_y(f_\sigma)]^{\text{ab}}(\bar{x}^{-1}, 1) \in \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}]]$$

と書くことができる (cf. [19] Prop.1.8.3; [35] p.290)。以下、素数 p を固定し、 $\chi = \chi^{p\text{-cyclo}} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ を p -進円分指標 (1 の p べき乗根へのガロア作用だけを取り出したもの) とする。また、上の $\kappa_\sigma \in \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}]]$ の p -image を $\kappa_\sigma^{(p)} \in \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p]]$ とし、対応する p -進空間 \mathbb{Z}_p 上の \mathbb{Z}_p 値測度 $d\kappa_\sigma^{(p)}$ とするとき、 m 次の p -進 Soulé 指標 ([42]) $\chi_m : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Z}_p(m)$ に対して次の積分公式

$$\frac{\chi_{2k-1}(\sigma)}{1-p^{2k-1}} = \frac{1}{1-p^{2k-1}} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{2k-1} d\kappa_\sigma^{(p)}(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} x^{2k-1} d\kappa_\sigma^{(p)}(x) = \frac{B_{2k}}{2 \cdot 2k} (\chi(\sigma)^{2k} - 1)$$

が成り立つ (文献 [18], [48], [36] Prop.5.13)。この式を、 $\chi(\sigma)^{2k} \neq 1$ となる $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ をとって

$$\frac{-2}{\chi(\sigma)^{2k} - 1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{2k-1} d\kappa_\sigma^{(p)}(x) = (1-p^{2k-1}) \left(-\frac{B_{2k}}{2 \cdot 2k} \right) = (1-p^{2k-1}) \zeta(1-2k)$$

と書き直すことで、偶数の j ($2 \leq j \leq p-1$) に対する Kubota-Leopoldt の p -進 L 関数 $L_p(s, \omega^j)$ が復元できること、したがって $\sigma \in \bigcap_p G_{\mathbb{Q}(\mu_p)} \setminus \bigcup_p G_{\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})}$ に対するもとの $\kappa_\sigma \in \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}]]$ は、すべての素数 p に対する p -進ゼータ関数をあらゆる種をもっているとなせる (Wojtkowiak [48])。

3.1. ガロア・ポリログ。古典的なポリログ関数は

$$(3.1) \quad Li_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$$

の収束円 $|z| < 1$ から解析接続して $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ 上の複素多価関数になるが、 $\overrightarrow{01}$ と z を結ぶ道 γ に対する一価関数ともみなせる。ポリログ関数はさまざまな関数等式をもつことが知られている。たとえば、関数等式

$$(3.2) \quad Li_2(z) + Li_2(1-z) + \log z \log(1-z) = \frac{\pi^2}{6}$$

は, $\overrightarrow{01}$ を出発して $z, 1-z$ に至る道の組を適切に定義することで, 道に対する一価関数の関数等式となる. 以下, ベルヌイ多項式 $B_k(T)$ ($k \in \mathbb{N}$) を母関数 $\sum_{k=0}^{\infty} B_k(T) \frac{w^k}{k!} = \frac{we^{Tw}}{e^w - 1}$ で定義し, ベルヌイ数を $B_k := B_k(0)$ とおく. Roger 正規化と呼ばれる変換

$$(3.3) \quad li_n(z) := \frac{(-1)^{n+1}}{(2\pi i)^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!} (\log z)^k Li_{n-k}(z)$$

により, Li-ポリログ系列 $\{Li_k\}_k$ から li-ポリログ系列 $\{li_k\}_k$ へ移行すると, 冪単基本群の Lie 理論と相性がよくなることが知られている (li_k は対数アソシエーターの Lie 展開係数と解釈される). 以上を踏まえて, 素数 p におけるエル進ガロアポリログ (のエル= p の場合) を以下のように導入する. $K \subset \bar{K} \subset \mathbb{C}$ を固定し, $X = \mathbf{P}_K^1 - \{0, 1, \infty\}$ に対する幾何的基本群, 数論的基本群をそれぞれ π_1, π_K とする. まずエタールパス $\gamma : \overrightarrow{01} \rightsquigarrow z$ ($z \in K - \{0, 1\}$) および $\sigma \in G_K$ に対して

$$(3.4) \quad f_\sigma(\gamma) := \gamma \cdot \sigma(\gamma)^{-1} \in \pi_1$$

とおき, クンマー・ハイゼンベルグ測度 (cf. [35] p.290) を

$$(3.5) \quad \kappa_{z,\sigma}(\bar{x}) = -[\partial_y x^{\rho_z(\sigma)} f_\sigma(\gamma)]^{\text{ab}}(\bar{x}^{-1}, 1) \in \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}]]$$

で定義する. (ここに, $\rho_z : G_K \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ は \sqrt{z} へのガロア作用をあらわすクンマーコサイクルで γ から決まるものを表す). 自然な射影 $\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}]] \rightarrow \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p]]$ による $\kappa_{z,\sigma}$ の像を $\kappa_{z,\sigma}^{(p)}$ とし, 対応する \mathbb{Z}_p 上の \mathbb{Z}_p 値測度 $d\kappa_{z,\sigma}^{(p)}$ をもちいて

$$(3.6) \quad \tilde{\chi}_m^z(\sigma) = \int_{\mathbb{Z}_p} x^{m-1} d\kappa_{z,\sigma}^{(p)}(x) \in \mathbb{Z}_p$$

と定義する. $\tilde{\chi}_m^z : G_K \rightarrow \mathbb{Z}_p$ は, 一般化された Soulé 指標の “ z -版” に相当するものである. これを用いてエル進ガロアポリログ関数 (のエル= p の場合) の Li-ポリログ系列 $\{Li_k\}_k$ と li-ポリログ系列 $\{li_k\}_k$ を,

$$(3.7) \quad Li_m(z, \gamma)(\sigma) := \frac{\tilde{\chi}_m^z(\sigma)}{(m-1)!},$$

$$(3.8) \quad li_m(z, \gamma)(\sigma) := (-1)^{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{B_k}{k!} (-\rho_z(\sigma))^k Li_{m-k}(z, \gamma)$$

により定める. これらは分母がつくので G_K 上の関数としては $G_K \rightarrow \mathbb{Q}_p$ の形である. エル進ガロアポリログについても古典的なポリログの類似としていくつか関数等式が得られている [36]-[37] 例えば: 古典的な「反転公式」

$$(3.9) \quad Li_n(z) + (-1)^n Li_n\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{(2\pi i)^n}{n!} B_n\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right) \quad (n \geq 2)$$

に対して, そのエル進ガロア版は

$$(3.10) \quad Li_n(z, \gamma)(\sigma) + (-1)^n Li_n\left(\frac{1}{z}, \gamma'\right)(\sigma) = \frac{-1}{n!} \{B_n(-\rho_z(\sigma)) - B_n \cdot \chi(\sigma)^n\} \quad (\sigma \in G_K)$$

となる. ここにパス $\gamma : \overrightarrow{01} \rightsquigarrow z$ に対し $\gamma' : \overrightarrow{01} \rightsquigarrow 1/z$ は, 自己同型 $j \in \text{Aut}(\mathbf{P}_t^1)$ を $j(t) = t^{-1}$ とするとき, $j(\gamma) : \overrightarrow{\infty 1} \rightsquigarrow z^{-1}$ と $\delta : \overrightarrow{01} \rightsquigarrow \overrightarrow{\infty 1} := (0, 1)_{\sqrt{\cdot}} \rightarrow (1, \infty)$ との合成として $\gamma' = \delta \cdot j(\gamma)$ が成り立つように定めている.

ポリログ関数等式の研究とポリログ特殊値の研究は容易に想像できるように密接である. たとえば, 古典的な等式 $Li_2(-1) = -\pi^2/12$ に対しても, そのエル進ガロア版として

$$(3.11) \quad Li_2(-1)(\sigma) = -\frac{1}{48}(\chi(\sigma)^2 - 1) \mp \frac{\chi(\sigma)}{2} \rho_2(\sigma) \quad (\sigma \in G_{\mathbb{Q}})$$

を示すことができる ([36], Remark 5.14). ここで, 右辺の符号 \mp は, 左辺の $Li_2(-1)$ を定義する際の道として, $\overline{01}$ からどちら向きに方向転換して点 -1 に進むかによってきまる.

古典ポリログ関数等式の世界は, 歴史も長く, Lewin の著作 [21] などにもみられるように広汎であり, 多重ポリログ関数に一般化され Zagier, Gangl, Goncharov, 奥田・上野 [40] 等を含む多くの研究者により質・量ともに凄まじいほどの論文が出版されている. エル進ガロアポリログで類似を示せたものは, いくつか典型的なものに過ぎず, リストの追加については今後の取り組みを待たなければならない余地が大きい.

3.2. 白谷ゼータ関数. フルヴィッツ・ゼータ関数

$$\zeta(s, b) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(b+i)^s} \quad (0 < b \leq 1)$$

は解析接続すると負の整数点での値がベルヌイ多項式の分数点での値として, 等式

$$\zeta(1-n, \frac{a}{m}) = -\frac{1}{n} B_n(\frac{a}{m})$$

で与えられる. 簡単のため p を奇素数とし, 正の整数 $0 < a < m$, $(a, m) = 1$ なるものに対して, 白谷 [41] は, 高木貞治生誕 100 年記念論文集の中で,

$$\zeta_p^{Sh}(1-k; a, m) = -\frac{m^{k-1}}{k} \left(B_k(\frac{a}{m}) - \delta_{p \nmid m} \cdot p^{k-1} B_k(\frac{a_1}{m}) \right)$$

が $k > 0$, $k \equiv 0 \pmod{p-1}$ になりたつような p 進ゼータ関数 $\zeta_p^{Sh}(s)$ ($s \in \mathbb{Z}_p - \{1\}$) を構成した. ここに $\delta_{p \nmid m} \in \{0, 1\}$ は $p \nmid m$ のときに 1, そうでないとき 0 を表し, 前者の場合, $0 < a_1 < m$ は $pa_1 \equiv a \pmod{m}$ となるものを取る. この白谷の論文は短く難解であり, とくに ' $a, a_1 \in (0, m)$ ' の条件がどこで必要となるかなどの詳細が省略されていて判然としないところがある. また Math Reviews 誌での L.Washington のコメントでは, 白谷 [41] が扱った関数に対する明示公式は "can be obtained by the methods of the reviewer [J. Number Theory 8 (1976), no. 2, 245–250; MR0406982]" と書かれているが, $p \nmid m$ の場合が Washington の論文で扱われておらず, どのように導かれるのか筆者には不明であった. 最近の Wojtkowiak と筆者の共著論文 [38] では, エル進ガロアポリログ関数を応用して, \mathbb{Z}_p 上の \mathbb{Z}_p 値測度 $d\hat{\zeta}_{p,a,m}(\sigma)$ ($\sigma \in G_{\mathbb{Q}(\mu_m)}$) を構成して, つぎのような補間等式

$$\frac{1}{\chi(\sigma)^k - 1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1} d\hat{\zeta}_{p,a,m}(\sigma)(x) = \frac{m^{k-1}}{k} \left(B_k(\frac{a}{m}) - \delta_{p \nmid m} \cdot p^{k-1} B_k(\frac{a_1}{m}) \right)$$

を $\sigma \in G_{\mathbb{Q}(\mu_m)}$ (ただし $\chi(\sigma)^k = \chi^{p\text{-cyclo}}(\sigma)^k \neq 1$) に対して示すことにより, 白谷の結果の別証明と若干の拡張を与えることができた. 我々の方法では, 条件 ' $a, a_1 \in (0, m)$ ' は, 0 の周り と ∞ の周りに巻きつく道と前節で紹介した反転公式で用いた道 δ とのトポロジカルな位置関係から必要性が明確になる. また, ここで構成した測度 $\hat{\zeta}_{p,a,m}(\sigma) \in \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p]]$ は, $\iota \kappa_{\bar{z}}(\sigma) - \kappa_z(\sigma) \in \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}]]$ の p -進像とあわせ (ここに, $z = \zeta_m^a$, $\bar{z} = \zeta_m^{-a}$; ι は $\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}]]$ の空間側の (-1) 倍に対応する対合), Deligne の論文 [6, Proposition 3.14, Lemme 18.5] に現れる μ_m 上の $\mathbb{Z}(k)$ -torsor " $P_{m,k} + (-1)^k \epsilon P_{m,k}$ " の ζ_m^a -成分になる捻じれ類を与えるガロア・コサイクルに相当すると考えられる.

References

- [1] G. Anderson, *The hyperadelic gamma function*, Invent. Math., **95** (1989), 63–131.
- [2] M. Asada, *The faithfulness of the monodromy representations associated with certain families of algebraic curves*, J. Pure and Applied Alg. **159** (2001), 123–147.
- [3] G. V. Belyi, *Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), 267–276; English translation, Math. USSR-Izv. **14** (1980), 247–256.
- [4] F. Brown, *Mixed Tate motives over \mathbb{Z}* . Ann. of Math. (2) **175** (2012), 949–976.

- [5] R. Coleman, *Anderson-Ihara theory: Gauss sums and circular units*, in “Algebraic number theory – in honor of K.Iwasawa” (J.Coates, R.Greenberg, B.Mazur, I.Satake eds.), Adv. Studies in Pure Math., **17** (1989), 55–72.
- [6] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, in “Galois groups over \mathbb{Q} ” (Y.Ihara, K.Ribet, J.-P.Serre eds.), Math. Sci. Res. Inst. Publ., **16** (1989), 79–297.
- [7] V. G. Drinfeld, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , Algebra i Analiz **2** (1990); English translation Leningrad Math. J. **2** (1991), 829–860
- [8] H. Esnault, P.-H. Hai, *Packets in Grothendieck’s section conjecture*, Adv. Math. **218** (2008), no. 2, 395–416.
- [9] B. Enriquez, *Elliptic associators*, Selecta Math. New Series, **20** (2014), 491–584.
- [10] H. Furusho, *Pentagon and hexagon equations*, Ann. of Math. (2) **171** (2010), 545–556.
- [11] H. Furusho, *The pentagon equation and the confluence relations*, arXiv:1809.00789.
- [12] A. Grothendieck, *Esquisse d’un programme*, in “Geometric Galois actions, 1”, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **242**, (1997) 5–48.
- [13] R. Hain, M. Matsumoto, *Weighted completion of Galois groups and Galois actions on the fundamental group of $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$* , Compositio Math. **139** (2003), 119–167.
- [14] 星裕一郎, Grothendieck による遠アーベルセクション予想について, 第 56 回代数学シンポジウム (2011 @岡山) 報告集 (15p.)
- [15] Y. Ihara, *On congruence monodromy problems. Reproduction of the Lecture Notes: Volume 1 (1968), Volume 2 (1969) with author’s notes (2008)*. MSJ Memoirs, **18** Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2008.
- [16] Y. Ihara, *Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications*, Ann. of Math. (2) **123** (1986), 43–106.
- [17] Y. Ihara, *On Galois representations arising from towers of coverings of $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$* , Invent. math. **86** (1986), 427–459.
- [18] Y. Ihara, *Braids, Galois groups, and some arithmetic functions*, Proc. Intern. Congress of Math. Kyoto 1990, 99–120.
- [19] Y. Ihara, *On beta and gamma functions associated with the Grothendieck-Teichmüller group*, in “Aspects of Galois Theory” (H. Voelklein et.al (eds.)), London Math. Soc. Lect. Note Ser. **256** (1999) 144–179; Part II, J. reine angew. Math. **527** (2000) 1–11.
- [20] Y. Ihara, *Some arithmetic aspects of Galois actions in the pro- p fundamental group of $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$* , in “Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra”, Proc. Sympos. Pure Math., **70**, 247–273,
- [21] L. Lewin, *Polylogarithms and associated functions*, North-Holland Publishing Co., New York-Amsterdam, 1981.
- [22] A. Minamide, *The Grothendieck-Teichmüller group as an open subgroup of the outer automorphism group of the étale fundamental group of a configuration space*, RIMS workshop “Profinite monodromy, Galois representations, and Complex functions” 報告集, 数理解析研究所講究録 to appear.
- [23] M. Matsumoto, A. Tamagawa, *Mapping-class-group action versus Galois action on profinite fundamental groups*, Amer. J. Math. **122** (2000), 1017–1026.
- [24] S. Mochizuki, *The local pro- p anabelian geometry of curves*, Invent. Math. **138** (1999), 319–423.
- [25] H. Nakamura, *Galois rigidity of the étale fundamental groups of punctured projective lines*, J. Reine Angew. Math. **411** (1990), 205–216.
- [26] H. Nakamura, *Galois rigidity of algebraic mappings into some hyperbolic varieties*, Internat. J. Math. **4** (1993), 421–438.
- [27] H. Nakamura, *On exterior Galois representations associated with open elliptic curves*, J. Math. Sci., Univ. Tokyo **2** (1995), 197–231.
- [28] H. Nakamura, *Tangential base points and Eisenstein power series*, in “Aspects of Galois Theory” (H. Völkein, D.Harbater, P.Müller, J.G.Thompson, eds.) London Math. Soc. Lect. Note Ser. **256** (1999), 202–217.
- [29] H. Nakamura, *On Galois rigidity of fundamental groups of algebraic curve*, in “Nonabelian Fundamental Groups and Iwasawa Theory” (J.Coates, M.Kim, F.Pop, M.Saidi, P.Schneider eds.) London Math. Soc. Lecture Note Series, 393 (2012), 56–71 (Cambridge UP): This is a translation into English of an old Japanese article published in “Report Collection of the 35th Algebra Symposium held at Hokkaido University in 1989” plus 8 complementary notes newly added in English.
- [30] H. Nakamura, *On arithmetic monodromy representations of Eisenstein type in fundamental groups of once punctured elliptic curves*, Publ. RIMS, Kyoto University. **49** (2013), 413–496.

- [31] H. Nakamura, *On profinite Eisenstein periods in the monodromy of universal elliptic curves*, Preprint based on two Japanese articles in 2002.
- [32] H. Nakamura, *Variations of Eisenstein invariants for elliptic actions on a free profinite group*, Preprint under revision.
- [33] H. Nakamura, *Moving frames and Eisenstein invariants*, in “Various Aspects of Multiple Zeta Values 2016” (H.Furusko ed.) RIMS Kokyuroku, Vol.2015, (2017), pp.162–169.
- [34] H. Nakamura, *Arithmetic and Combinatorics in Galois fundamental groups*, RIMS workshop “Profinite monodromy, Galois representations, and Complex functions” 報告集, 数理解析研究所講究録 to appear.
- [35] H. Nakamura, Z. Wojtkowiak, *On explicit formulae for l -adic polylogarithms*, Proc. Symp. Pure Math. (AMS) **70** (2002) 285–294.
- [36] H. Nakamura, Z. Wojtkowiak, *Tensor and homotopy crieterions for functional equations of l -adic and classical iterated integrals*, in “Non-abelian Fundamental Groups and Iwasawa Theory” (J.Coates et.al. eds.), London Math. Soc. Lect. Note Ser., **393** (2012), 258–310.
- [37] H. Nakamura, Z. Wojtkowiak, *On distribution formula for complex and l -adic polylogarithms*, to appear in “Periods in Quantum Field Theory and Arithmetic” (J. Burgos, K. Ebrahimi-Fard and H. Gangl eds). ArXiv:1711.03501
- [38] H.Nakamura, Z.Wojtkowiak ”On adelic Hurwitz zeta measures” Preprint November 2017: ArXiv:1711.03505
- [39] H. Nakamura, A. Tamagawa, S. Mochizuki “The Grothendieck conjecture on the fundamental groups of algebraic curves” [translation of Sugaku 50 (1998), 113–129] Sugaku Expositions **14** (2001), 31–53.
- [40] J. Okuda, K. Ueno, *The sum formula for multiple zeta values and connection problem of the formal Knizhnik-Zamolodchikov equation*, in “Zeta functions, topology and quantum physics”, Dev. Math., (2005) **14**, 145–170, Springer.
- [41] K. Shiratani, *On a kind of p -adic zeta functions*, in “Algebraic number theory”, (Kyoto Internat. Sympos., Res. Inst. Math. Sci., Univ. Kyoto, Kyoto, 1976), 213–217. Japan Soc. Promotion Sci., Tokyo, 1977.
- [42] C. Soulé, *On higher p -adic regulators*, Lecture Notes in Mathematics, **854** (1981), 372–401.
- [43] J. Stix, *On the birational section conjecture with local conditions*, Invent. Math. **199** (2015), 239–265.
- [44] A. Tamagawa, *The Grothendieck conjecture for affine curves*, Compositio Math. **109** (1997), 135–194.
- [45] 玉川安騎男, 代数曲線の数論的基本群に関する Grothendieck 予想, 第 41 回代数学シンポジウム報告集
- [46] 玉川安騎男, Galois 群や基本群から元の対象を復元する問題に関する歴史と最近の発展, 数理解析研究所講究録 998.
- [47] 玉川安騎男, 代数曲線の数論的基本群に関する Grothendieck 予想 その後, 第 49 回代数学シンポジウム報告集
- [48] Z. Wojtkowiak, *On $\hat{\mathbb{Z}}$ -zeta function*, in “Iwasawa Theory 2012” (A.Bouganis, O.Venjakob eds.), Contributions in Mathematical and Computational Sciences **7** (2014), pp. 471–483, Springer.
- [49] Z. Wojtkowiak, *On l -adic Galois L -functions*, Algebraic geometry and number theory, 161–209, Progr. Math., **321**, Birkhuser/Springer, 2017.

HIROAKI NAKAMURA: DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA UNIVERSITY, TOYONAKA, OSAKA 560-0043, JAPAN

E-mail address: nakamura@math.sci.osaka-u.ac.jp

半安定還元の場合の A_{inf} コホモロジー

越川 皓永 *

素数 p に対し, p 進体上の多様体のコホモロジーの関係を調べるのが p 進 Hodge 理論であり, 整構造も込めて調べる場合は整 p 進 Hodge 理論と呼ばれる. p が“大きく”, 分岐がない場合などは比較的よく分かっていた. より一般的な状況において, Bhatt-Morrow-Scholze は整 p 進 Hodge 理論の新しい枠組みとして, A_{inf} 加群となるコホモロジー (以下, 単に A_{inf} コホモロジーと呼ぶ) を良還元の場合に導入した [3]. [4] では [3] の多くの結果を半安定還元の場合に拡張したので, これを報告する.

以下では次の設定を考えることにする. ([4] ではもう少し一般的な場合も扱っている.) K を \mathbb{Q}_p の有限次拡大とし, O_K をその整数環, k を剰余体とする. C を K の代数閉包 \bar{K} の p 進完備化とし, \bar{k} をその剰余体とする. \mathcal{X} を O_K 上の半安定スキームとする. すなわち, \mathcal{X} はエタール局所的に次の O_K スキーム上エタールである:

$$\text{Spec } O_K[T_0, \dots, T_r, \dots, T_d]/(T_0 \cdots T_r - \pi).$$

ここで, 整数 r は $0 \leq r \leq d$ を満たし, π は O_K の素元である. (π は固定してはいない.) この条件は上記のアフィンスキームを

$$\text{Spec } O_K[T_0, \dots, T_r, T_{r+1}^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}]/(T_0 \cdots T_r - \pi).$$

で置き換えたものと同値であり, 以下ではこちらの条件を念頭に議論することにする.

形式スキーム \mathfrak{X} を \mathcal{X}_{O_C} の p 進完備化とする. (O_C は Noether でないことに注意. このような理論の基礎付けについては例えば最近出版された [5] がある.) C 上の adic 空間 (あるいはリジッド解析空間) X を \mathfrak{X} の一般ファイバーとする.

謝辞 講演の機会を与えてくださった今井直毅さん, 都築正男さん, シンポジウム責任者の藏野和彦さんら関係者の方々, 原稿にコメントしていただいた伊藤哲史さんと松本雄也さんに感謝いたします.

*京都大学数理解析研究所 teruhisa@kurims.kyoto-u.ac.jp

1 様々なコホモロジーと p 進 Hodge 理論

スキーム \mathcal{X} から定まるコホモロジーをまず 3 つ紹介する. この 3 つのコホモロジーとその付加構造の関係を調べるのが p 進 Hodge 理論の主な目的である.

1.1 p 進エタールコホモロジー

\mathcal{X} が O_K 上有限型であるとする. $\mathcal{X}_{\overline{K}}$ のエタールコホモロジー $H_{\text{ét}}^i(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)$ はエタール景を用いて定義される有限生成 \mathbb{Z}_p 加群であり, K の絶対 Galois 群が作用する. (p 進 Hodge 理論において Galois 作用は重要であるが, [3, 4] の設定において一般には Galois 作用はない.) また, Huber の結果により, $H_{\text{ét}}^i(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)$ は adic 空間のエタールコホモロジー $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}_p)$ に (Galois 作用付きで) 同型である.

各次数のコホモロジーの代わりに \mathbb{Z}_p 加群の導来圏の対象 $R\Gamma_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)$ および $R\Gamma_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_p)$ も存在し, これらは同型となる.

1.2 対数的 de Rham コホモロジー

対数的 de Rham コホモロジー $H_{\text{logdR}}^i(\mathcal{X}/O_K)$ は \mathcal{X} の対数的 de Rham 複体のコホモロジーとして定義される O_K 加群である. K をテンソルして得られる K ベクトル空間は一般ファイバーの de Rham コホモロジーと同型になり, Hodge フィルトレーションが定まる. (整な Hodge フィルトレーションも考えることができるがここでは扱わない.) \mathcal{X} が O_K 上固有ならば有限生成 O_K 加群になり, $H_{\text{logdR}}^i(\mathcal{X}/O_K) \otimes O_C$ は \mathfrak{X} のコホモロジーとして書くこともできる.

エタールコホモロジーのときと同様, O_K 加群の導来圏の対象 $R\Gamma_{\text{logdR}}(\mathcal{X}/O_K)$ も存在する.

1.3 対数的クリスタリンコホモロジー

対数的スキームの構造を \mathcal{X} および $\text{Spec } O_K$ に自然に定める. (上記の対数的 de Rham コホモロジーはこの対数的構造について定まるものである.) その特殊ファイバー \mathcal{X}_k の対数的クリスタリンコホモロジー (兵頭加藤コホモロジーとも呼ばれる) $H_{\text{logcrys}}^i(\mathcal{X}_k/W(k))$ を $W(k)$ 係数で考えることができる. ただし, ここで $W(k)$ は k の Witt ベクトルの環であり, $\mathbb{N} \rightarrow W(k); 1 \mapsto 0$ で定まる対数的構造を入れている. Witt ベクトルの環 $W(k)$ には関手性により自然な Frobenius 持ち上げ φ が定まるが, $H_{\text{logcrys}}^i(\mathcal{X}_k/W(k))$ には φ について半線形な自己写像 (これも φ で書くことにする) が定まる. \mathcal{X} が O_K 上固有な

らば, $H_{\log\text{crys}}^i(\mathcal{X}_k/W(k))$ は有限生成 $W(k)$ 加群であり, $\varphi[1/p]$ は全単射になる. また, 有限次元 $K_0(= W(k)[1/p])$ ベクトル空間 $H_{\log\text{crys}}^i(\mathcal{X}_k/W(k))[1/p]$ には冪零 K_0 線形自己写像 N であって, $N\varphi = p\varphi N$ を満たすものが定まる. $H_{\log\text{crys}}^i(\mathcal{X}_k/W(k)) \otimes W(\bar{k})$ は $\mathfrak{X}_{\bar{k}}$ (に対数的構造を与えたもの) を用いても書ける.

兵頭加藤同型により, p を可逆にすると, 対数的クリスタリンコホモロジーと対数的 de Rham コホモロジーは結びつく. この関係は p 進 Hodge 理論で大事ではあるが, 詳細は省略する.

上と同様 $W(k)$ 加群の導来圏の対象 $R\Gamma_{\log\text{crys}}(\mathcal{X}_k/W(k))$ が存在する.

1.4 比較定理

p 進 Hodge 理論の重要な結果 (いわゆる C_{st} 予想) を主張だけ紹介する. \mathcal{X} が固有ならば, 付加構造を保つ同型

$$H_{\text{ét}}^i(\mathcal{X}_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{\text{st}} \cong H_{\log\text{crys}}^i(\mathcal{X}_k/W(k)) \otimes_{W(k)} B_{\text{st}}$$

が存在する. 特に, Galois 表現 $H_{\text{ét}}^i(\mathcal{X}_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p)[1/p]$ は半安定と呼ばれる性質を持つことになる. B_{st} は Fontaine の p 進周期環 (付加構造を持つ) の 1 つであるが, 説明しない. ただし, p は B_{st} で可逆になることを強調しておく.

[9] による最初の証明をはじめ, 色々な証明が今では知られており, [4] でも (形式スキームへの一般化も含めた) 別証明を与えた. (なお証明ごとに構成している同型が同じかどうかは非自明であり, 知られているケースも多いものの注意する必要がある.)

整 p 進 Hodge 理論はコホモロジーの整構造も比較しようというものである. しかし, 比較定理の写像は一般には両辺の整構造を保たず, 整レベルで直接比較するのは難しい. (後で言及するように, そもそも捩れの大きさも一般には異なる.)

2 主定理

前節で与えた 3 つのコホモロジーの整レベルでの比較を, 間接的にはありながらも, 可能にするのが A_{inf} コホモロジーである. まず, 環 A_{inf} の基本的性質を復習する.

2.1 p 進周期環 A_{inf}

まず, 次の標数 p の完全環を考える:

$$O_C^{\flat} = \varprojlim_{x \rightarrow x^p} O_C/p \cong \varprojlim_{x \rightarrow x^p} O_C.$$

括弧内の同型は乗法モノイドとしてのみの同型である。 O_C^b は自然に (\bar{k} を剰余体とする) 付値環になり, C^b をその商体とする。 パーフェクトイド環の言葉では, O_C^b および C^b はそれぞれ O_C, C の tilt と呼ばれる。

Fontaine の環 A_{inf} は O_C^b の Witt ベクトルの環 $W(O_C^b)$ のことである。 次の 3 つの写像がある:

$$A_{\text{inf}} \rightarrow W(C^b), \quad A_{\text{inf}} \rightarrow W(\bar{k}), \quad \theta: A_{\text{inf}} \rightarrow O_C.$$

最初の 2 つは, Witt ベクトルの環の関手性により定まるものである。最後の写像は Fontaine の定義した写像であり, $x = (x_0, x_1, \dots) \in \varprojlim_{x \mapsto x^p} O_C$ の Teichmüller 持ち上げ $[x]$ を x_0 に送るような写像である。 $\text{Ker } \theta$ は単項イデアルであることが知られており, その生成元はしばしば ξ で書かれる。 また, A_{inf} のような Witt ベクトルの環は自然な Frobenius 持ち上げ φ を持ち, 最初の 2 つはこれを保つ。 (θ にはこのような主張は当然できないが, [3] では θ を φ で捻った写像も考えている。)

A_{inf} は Noether でない環であるため, 環論的には少し扱いにくいところもあるが, (p 進 Hodge 理論の文脈では) おおむね 2 次元局所環と似たような振る舞いをするものが多く, 最終的には問題にならないことも多い。上の 3 つの写像の存在もそれを反映しているようなものである。(最初の 2 つの写像が 2 次元分であり, θ は対角的な方向となっている。)

後のために, A_{inf} の特別な元 μ を紹介する。1 の原始 p 冪根の整合的な列 $1, \zeta_p, \zeta_{p^2}, \dots$ を固定する。この列に対応する $\varprojlim_{x \mapsto x^p} O_C$ の元を ϵ と書くことにすると, $\mu = [\epsilon] - 1$ で定義される。 μ は $\text{Ker } \theta$ の元である。また, μ は $\varphi^{-1}(\mu) = [\epsilon^{1/p}] - 1$ で割り切れ,

$$\xi = \mu/\varphi^{-1}(\mu) = 1 + [\epsilon^{1/p}] + \dots + [\epsilon^{(p-1)/p}]$$

が $\text{Ker } \theta$ の生成元となることが確かめられる。最後に, μ が $W(C^b)$ で逆元を持つことを注意しておく。

2.2 A_{inf} コホモロジー

以下の定理は \mathcal{X} が O_K 上滑らかな場合 [3] で示され, [4] で不安定の場合に拡張された。

定理 2.1. \mathcal{X} が O_K 上固有とする。このとき, A_{inf} 加群の完全複体 $R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathcal{X})$ と φ 半線形な自己写像の組であって, 以下を満たすものが関手的に構成できる。ただし, 以下で $\otimes^{\mathbb{L}}$ はテンソル積の導来関手である。

1. 同型 $R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathcal{X}) \otimes^{\mathbb{L}} W(C^b) \cong R\Gamma_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p) \otimes^{\mathbb{L}} W(C^b)$ が存在する。さらに, 右辺で $R\Gamma_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p)$ は (適切な意味で) φ 不変部分となる。

2. 同型 $R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathcal{X}) \otimes^{\mathbb{L}} W(\bar{k}) \cong R\Gamma_{\text{logcrys}}(\mathcal{X}_k/W(k)) \otimes^{\mathbb{L}} W(\bar{k})$ が存在し, φ 半線形な自己写像を保つ.
3. θ での特殊化について, 同型 $R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathcal{X}) \otimes^{\mathbb{L}} O_C \cong R\Gamma_{\text{logdR}}(\mathcal{X}/O_K) \otimes^{\mathbb{L}} O_C$ が存在する.

注意 2.2. • $R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathcal{X})$ は \mathfrak{A} のみに依るよう構成され, 上の主張はそのように構成されたものの持つ性質を \mathcal{X} で書き換えたものである.

- φ 半線形な自己写像は $\xi \mapsto \varphi(\xi)$ を始域と終域でそれぞれ可逆にすることで全単射を導くという性質も示せる. 3. では φ が現れていないが, 実際には Hodge フィルトレーションと関係がある.
- $R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathcal{X})$ が完全複体になることは, 本質的に対数的 de Rham コホモロジーの有限性から導かれる.
- エタールコホモロジーが φ 不変部分であるという部分については [2] を参照. (良還元の場合だが半安定の場合も同様である.) 特に, この議論 (および 1. の証明) に必要なのは $R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathcal{X})$ が完全複体であるということであり, [4] のように (リジッド解析空間 X の) エタールコホモロジーの有限性を用いる必要があるわけではない. (一般の固有半安定形式スキームの場合, この議論により, X のエタールコホモロジーの有限性を導くこともできる.)
- この定理の証明については, あとで紹介する方針以外にも (少なくとも良還元の場合には) 複数考えられる. 例えば, [3] では他の写像による特殊化について (3. の一般化として) Langer-Zink の相対 de Rham-Witt 複体との比較も示し, そこから 2. を導くということもしている. これらの対数的版というのも考えられるはずだが [4] では 3. と直接関わる部分を除いて扱っていない.

2.3 主定理の帰結や応用

1. 比較的すぐに導けるのが次の不等式である:

$$\dim_k H_{\text{logdR}}^i(\mathcal{X}_k/k) \geq \dim_{\mathbb{F}_p} H_{\text{ét}}^i(\mathcal{X}_{\bar{K}}, \mathbb{F}_p).$$

この不等式はより精密な次の不等式 (の i と $i+1$ の場合) からくる:

$$\dim_k H_{\text{logcrys}}^i(\mathcal{X}_k/W(k))_{\text{tors}}/p \geq \dim_{\mathbb{F}_p} H_{\text{ét}}^i(\mathcal{X}_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p)_{\text{tors}}/p.$$

(両辺の自由部分の階数は同じなので, “tors” なしでもこの不等式は成立する.) 実際, 短完全系列

$$0 \rightarrow H_{\text{ét}}^i(\mathcal{X}_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p)/p \rightarrow H_{\text{ét}}^i(\mathcal{X}_{\bar{K}}, \mathbb{F}_p) \rightarrow H_{\text{ét}}^{i+1}(\mathcal{X}_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p)[p] \rightarrow 0$$

と $\dim_{\mathbb{F}_p} H_{\text{ét}}^{i+1}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)[p] = \dim_{\mathbb{F}_p} H_{\text{ét}}^{i+1}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)_{\text{tors}}/p$ およびこれらの対数的クリスタリンコホモロジー版があることに注意すればよい。

例えば $p = 2$ で Enriques 曲面を考えると, $H_{\text{ét}}^3(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{F}_p)$ が 1 次元となつて, K から k へ退化するときに特殊ファイバーの (対数的) de Rham コホモロジーに振れが必ず現れることが分かる. なお, Enriques 曲面の場合では上の不等式はいずれも等号になってしまうものの, 真の不等号になる例が [3] では与えられている.

2. 1. の不等式の対数的 de Rham コホモロジー版もあるが, 左辺の次元を O_K 加群としての length で置き換え, さらに (K の分岐により) 適切に正規化する必要がある.
3. 1. と 2. から, $H_{\text{logcrys}}^i(\mathcal{X}_k/W(k))$ あるいは $H_{\text{logdR}}^i(\mathcal{X}/O_K)$ が自由加群のときに, $H_{\text{ét}}^i(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)$ が自由加群であることが分かる. さらに実は, $H_{\text{logcrys}}^i(\mathcal{X}_k/W(k))$ が自由加群になることと $H_{\text{logdR}}^i(\mathcal{X}/O_K)$ が自由加群になることが同値であることも証明できる.
4. $H_{\text{logdR}}^i(\mathcal{X}/O_K)$ および $H_{\text{logdR}}^{i+1}(\mathcal{X}/O_K)$ が自由加群ならば, $H_{\text{ét}}^i(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)$ に対応する Breuil-Kisin 加群を用いて $H_{\text{logcrys}}^i(\mathcal{X}_k/W(k))$ を記述することができる. ([4] には書いていないが, [3] にある良還元の場合とほぼ同様である.)

有限生成体上の $K3$ 曲面の Tate 予想の証明は Madapusi Pera によりされたが, 標数 2 の場合にギャップがある. それをこの Breuil-Kisin 加群による記述を用いて修正することができる [6]. (これは \mathcal{X} が O_K 上滑らかな場合のみで十分である.)

5. Colmez-Dospinescu-Niziol の研究によると, Drinfeld 上半空間のコホモロジーに応用があるとのことである.

2.4 絶対クリスタリン比較定理

主定理より強い主張を証明することができる. このために, \mathcal{X} のコホモロジーをもう 1 つ導入する. まず, $A_{\text{inf}}[(\xi^i/i!)_{i=0,1,\dots}] \subset A_{\text{inf}}[1/p]$ の p 進完備化を A_{crys} とする. θ および φ は A_{crys} にのびる. A_{crys} に適切な対数的構造を入れることで, 対数的クリスタリンコホモロジー $H_{\text{logcrys}}^i(\mathcal{X}_{O_C/p}/A_{\text{crys}})$ を考えることができる. (絶対対数的クリスタリンコホモロジーとも呼ばれる [1].) φ 半線形な自己写像が付加構造として定まる. また, 対応する A_{crys} 加群の導来圏の対象 $R\Gamma_{\text{logcrys}}(\mathcal{X}_{O_C/p}/A_{\text{crys}})$ も存在する.

定理 2.3. \mathcal{X} が O_K 上固有とする. A_{inf} コホモロジーは φ 半線形な自己写像を保つ同型

$$R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathcal{X}) \otimes^{\mathbb{L}} A_{\text{crys}} \cong R\Gamma_{\text{logcrys}}(\mathcal{X}_{O_C/p}/A_{\text{crys}})$$

が存在するように構成できる.

注意 2.4. • $R\Gamma_{\text{logcrys}}(\mathcal{X}_{O_C/p}/A_{\text{crys}})$ を $W(\bar{k}), O_C$ に特殊化することでそれぞれ $R\Gamma_{\text{logcrys}}(\mathcal{X}_k/W(k)) \otimes^{\mathbb{L}} W(\bar{k}), R\Gamma_{\text{logdR}}(\mathcal{X}/O_K) \otimes^{\mathbb{L}} O_C$ が得られるので, 上の定理から定理 2.1 の 2. と 3. を導くことができる.

- 比較定理 (C_{st}) をこの定理から示すことができる. より正確には, B_{dR}^+ コホモロジーと呼ばれる [3] で導入された X のコホモロジーとの比較をさらに行い, [7] の結果を用いることでできる. さらなる比較をするのはフィルトレーションを調べるためである. モノドロミー N は, 上の定理では K の絶対 Galois 群の右辺への半線形な作用により捉えられているといえる [1].

3 A_{inf} コホモロジーの構成

簡単に A_{inf} コホモロジーの構成と絶対クリスタリン比較定理の証明に触れる. 以下では \mathcal{X} ではなく, \mathfrak{X} と X のみで記述することにする. まず大事となるのが Scholze [8] により導入された副エタール景 $X_{\text{proét}}$ である. アイデアだけ説明すると, 有限エタール射の無限列 (とエタール射) で書けるような対象を許して, 通常のエタール景を拡げたものである. 副エタール局所的に, X はパーフェクトイド空間になるのだが, これを次の例で説明する: \mathfrak{X} がエタール射

$$\mathfrak{X} \rightarrow \text{Spf } O_C\{T_0, \dots, T_r, T_{r+1}^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\}/(T_0 \cdots T_r - \pi)$$

を持つアフィン形式スキームと仮定し, これに対応する環の射を $R^{\square} \rightarrow R$ と書くことにする. また, π の p 冪根の整合的な列 $\pi_0 = \pi, \pi^{1/p}, \pi^{1/p^2}, \dots$ を固定する. このとき, R_{∞}^{\square} を

$$\bigcup_m O_C\{T_0^{1/p^m}, \dots, T_r^{1/p^m}, T_{r+1}^{\pm 1/p^m}, \dots, T_d^{\pm 1/p^m}\}/(T_0^{1/p^m} \cdots T_r^{1/p^m} - \pi^{1/p^m})$$

の p 進完備化として定義すると, $R_{\infty}^{\square}[1/p]$ は $R^{\square}[1/p]$ 上副エタールなパーフェクトイド環である. さらに, $R_{\infty} = \widehat{R \otimes_{R^{\square}} R_{\infty}^{\square}}$ を完備テンソル積とすると, $R_{\infty}[1/p]$ は $R[1/p]$ 上副エタールなパーフェクトイド環となる.

パーフェクトイド環に対して, A_{inf} や A_{crys} の構成を一般化し, $\mathbb{A}_{\text{inf}}(R_{\infty})$ や $\mathbb{A}_{\text{crys}}(R_{\infty})$ を定義することができる. (A_{inf} や A_{crys} はパーフェクトイド環 O_C から決まったものである.) これにより, $X_{\text{proét}}$ 上の層 $\mathbb{A}_{\text{inf}, X}$ や $\mathbb{A}_{\text{crys}, X}$ も定義される.

リジッド空間 X が C 上固有のとき, 副エタール景での $\mathbb{A}_{\text{inf}, X}$ のコホモロジーは, X の (\mathbb{Z}_p 係数) エタールコホモロジーに A_{inf} をテンソルしたものと (技術的な意味で) ほとんど同型になることが Scholze により示されていたので, これを基に A_{inf} コホモロジーの構成は $\mathbb{A}_{\text{inf}, X}$ を用いて行われる. 自然な

景の射 $\nu: X_{\text{proét}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\text{ét}}$ があるので, $R\nu_*\mathbb{A}_{\text{inf},X}$ のコホモロジーは (\mathfrak{X} が O_C 上固有ならば) ほとんどエタールコホモロジーを計算している. 構成の最大のポイントは $R\nu_*\mathbb{A}_{\text{inf},X}$ を (Deligne-)Berthelot-Ogus の décalage と呼ばれる関手 $L\eta_{(\mu)}$ を用いて修正することである. ここでは定義を省略するが, 例えば $R\nu_*\mathbb{A}_{\text{inf},X}$ のコホモロジー層の μ 振れが消えるような操作になっている. また, μ を可逆にすれば, $L\eta_{(\mu)}$ は恒等的な関手と同一視できる.

定義 3.1. $A\Omega_{\mathfrak{X}}$ を $L\eta_{(\mu)}R\nu_*\mathbb{A}_{\text{inf},X}$ で定め, \mathcal{X} および \mathfrak{X} の A_{inf} コホモロジーを

$$R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathcal{X}) = R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathfrak{X}) = R\Gamma(\mathfrak{X}_{\text{ét}}, A\Omega_{\mathfrak{X}})$$

で定義する.

$W(C^b)$ をテンソルすると μ は可逆になり, $L\eta_{(\mu)}$ は無視できる. また, エタールコホモロジーとほとんど同型になるという主張は μ を可逆にすると同型になるという主張に変えることができ, 定理 2.1 の 1. が得られる. (この議論では Scholze の結果 [7] を使っているが, 定理 2.1 の 3. を先に証明することで避けることもできる.)

絶対クリスタリン比較定理を証明するには, 以下で紹介する局所版を証明すれば十分であることが分かる. 自然なトポスの射 $u: (\mathfrak{X}_{O_C/p}/A_{\text{crys}})_{\text{logcrys}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\text{ét}}$ を考える.

定理 3.2.

$$R\lim_{\leftarrow n} (A\Omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{A_{\text{inf}}}^{\mathbb{L}} A_{\text{crys}}/p^n) \cong Ru_*\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{O_C/p}/A_{\text{crys}}}.$$

証明はおおまかにいって 2 つのステップに分けられ, 局所的な (座標に依存した) 同型の構成とその貼り合わせからなるが, 実際に議論を書き下すとかなり長く詳細も複雑になる部分が多い. いずれにせよ, 最も重要なのは前の例に出てきたような $R[1/p] \rightarrow R_{\infty}[1/p]$ という副エタール射に対し, 対応する $A_{\text{inf}}(R_{\infty})$ の連続な群コホモロジーあるいはそれに $L\eta_{(\mu)}$ を適用した結果や振る舞いを計算することにある. (ここで 1 つの非自明な現象は, $A\Omega_{\mathfrak{X}}$ の R での値は R_{∞} から完全に決まってしまうということである.) 半安定還元の場合, このような計算自体も良還元の場合より複雑になる他, 貼り合わせの議論も技術的に複雑になる.

参考文献

- [1] Alexander Beilinson, *On the crystalline period map*, Camb. J. Math. **1** (2013), no. 1, 1–51, DOI 10.4310/CJM.2013.v1.n1.a1. MR3272051
- [2] Bhargav Bhatt, *Specializing varieties and their cohomology from characteristic 0 to characteristic p*, Algebraic geometry: Salt Lake City 2015, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 97, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018, pp. 43–88. MR3821167

- [3] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze, *Integral p -adic Hodge theory*, preprint (2018). Available at <http://arxiv.org/abs/1602.03148>.
- [4] Kęstutis Česnavičius and Teruhisa Koshikawa, *The A_{inf} -cohomology in the semistable case*, to appear in *Compositio Mathematica*. Available at <https://arxiv.org/abs/1710.06145>.
- [5] Kazuhiro Fujiwara and Fumiharu Kato, *Foundations of rigid geometry. I*, EMS Monographs in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2018. MR3752648
- [6] Kazuhiro Ito, Tetsushi Ito, and Teruhisa Koshikawa, *CM liftings of K3 surfaces over finite fields and their applications to the Tate conjecture* (2018). Available at <https://arxiv.org/abs/1809.09604>.
- [7] Peter Scholze, *p -adic Hodge theory for rigid-analytic varieties*, *Forum Math. Pi* **1** (2013), e1, 77, DOI 10.1017/fmp.2013.1. MR3090230
- [8] ———, *p -adic Hodge theory for rigid-analytic varieties—corrigendum [MR3090230]*, *Forum Math. Pi* **4** (2016), e6, 4, DOI 10.1017/fmp.2016.4. MR3535697
- [9] Takeshi Tsuji, *p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, *Invent. Math.* **137** (1999), no. 2, 233–411, DOI 10.1007/s002220050330. MR1705837

K3、Enriques、Coble 曲面—無限自己同型群を中心として

向井 茂 (MUKAI, Shigeru)

次について講演した。原稿に沿って、少し加筆しながら説明する。

予想 Enriques、Coble、または楕円 K3 曲面 S の自己同型群の実質コホモロジー次元に対して

$$\mathrm{vcd}(\mathrm{Aut} S) = \max_f \mathrm{MW}\text{-rk}(f) \quad (1)$$

が成立するだろう。ただし、 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は S の種数 1 fibration を全て走る。また、大域切断のない場合の Mordell-Weil 階数は Jacobian fibration のそれと理解する。代数多様体は全て複素数体 \mathbb{C} 上で考える。

§1 実質コホモロジー次元

まず、これについて説明する。群 Γ のコホモロジー次元はその群環のコホモロジー次元

$$\mathrm{cd}(\Gamma) := \mathrm{cd}(\mathbb{Z}[\Gamma])$$

で定義される。すなわち、 Γ 自明な加群 \mathbb{Z} の極小自由分解の長さである。次の二つが基本的である。

例 1 階数 n の自由アーベル群 \mathbb{Z}^n のコホモロジー次元は n 変数多項式環 $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ のそれで、 n に等しい。

例 2 自由群 F_n のコホモロジー次元は非可換多項式環 $R = \mathbb{Z}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ のそれであるが、完全列

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow R \leftarrow R^{\oplus n} \leftarrow 0$$

により $\mathrm{cd}(F_n) = 1$ である。

後者は、生成元の個数によらないことに注意しよう。無限群にも次元があることを示唆しているが、このままでは、非自明な有限群やそれを含む群はコホモロジー次元が無限大となって、次元の実感に合わないのので、次に移行する。

定義・命題 指数有限で振れない部分群 Γ_{tf} のコホモロジー次元を Γ の実質コホモロジー次元 (virtual cohomology dimension) と呼び、

$$\text{vcd}(\Gamma) := \text{cd}(\Gamma_{tf})$$

で表す.

この well-defined 性については文献 [11] や [4] を見よ. 例 1, 2 の場合は、もともと振れないので、コホモロジー次元 $n, 1$ と一致する. 次の諸性質が成立する.

- 部分群 Γ' のコホモロジー次元は全体のそれ以下、

$$\text{vcd}(\Gamma') \leq \text{vcd}(\Gamma) \tag{2}$$

である.

- 部分群 Γ' が指数有限なら上で等号が成立する.
- $\text{vcd}(\Gamma) = 0$ は Γ が有限群であることと同値である.
- $\text{vcd}(\Gamma) = 1$ は Γ が実質的に自由 (virtually free)、すなわち、指数有限の自由部分群をもつことであることと同値である.

非自明な例が Borel-Serre[3] を用いて計算できる.

例 3 $L \simeq \mathbb{Z}^{1+n}$ は符号数 $(1, n)$ の格子

$$L \times L \rightarrow \mathbb{Z}$$

(整数値対称双線形形式) とする. L の直交群 $O_{\mathbb{Z}}^+(L)$ は n 次元 Lobachevsky 空間 H^n に作用する. ただし、 $+$ は直交変換のうちで $(x^2) > 0$ の二つの連結成分 (その一つが H^n) を入れ替えないもの全体を表す. このような、数論的部分群については、作用域の (実) 次元から \mathbb{Q} 階数を引いたものが実質コホモロジー次元に等しい. 我々の場合は、

$$\text{vcd}(O_{\mathbb{Z}}^+(L)) = \begin{cases} n-1 & \exists \text{ cusp} \\ n & \nexists \text{ cusp} \end{cases} \tag{3}$$

が成立する.

この例において、 H^2 は上半平面で、 $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \langle -2 \rangle$ の場合から、 $\text{vcd}(SL(2, \mathbb{Z})) = 2 - 1 = 1$ が導かれる. また、 H^3 は上半空間で、例えば、 $\text{vcd}(SL(2, \mathcal{O}_K)) = 3 - 1 = 2$ を導くことができる. ただし、 K は虚 2 次体で、 \mathcal{O}_K はその整環である. これらの群と commensurable な群は同じ実質的コホモロジー次元をもつ.

§2 Abel 曲面の自己同型群の場合

A を Abel 曲面とする。代数多様体としての自己同型群は半直積

$$\text{Aut } A = (\text{Aut}_0 A) \rtimes A$$

になる。ただし、前半は群多様体として自己同型群で、後半は A 自身が平行移動として作用する部分である。単位元の連結成分が後半なので、それによる剰余類群である $\text{Aut}_0 A$ のコホモロジー次元について考察する。

命題 1 予想 1 の Abel 曲面版は正しい。すなわち、 A が二つの楕円曲線の直積 $E_1 \times E_2$ と同種なら、

$$\text{vcd}(\text{Aut}_0 A) = \max_f \text{MW-rk}(f) \quad (4)$$

が成立する。ただし、 $f: A \rightarrow E$ は A の種数 1 fibration を全て走る。また、Mordell-Weil 階数は、連結成分で割った群（有限生成アーベル群）の階数を表す。

実際、 A の Picard 数 ρ に関するよく知られた場合分け

1. E_1, E_2 が同種でないとき、 $\rho = 2$.
2. E_1, E_2 が同種で、どちらも複素乗法をもたないとき、 $\rho = 3$.
3. E_1, E_2 が同種で、どちらも複素乗法をもつとき、 $\rho = 4$.

に従って、(3) を用いて自己同型群を計算すれば、 $\text{vcd} = \rho - 2$ をえる。一方、Mordell-Weil 階数も $\rho - 2$ である。

§3 Enriques 曲面

Enriques 曲面の歴史を振り返っておこう。

種数 $g \geq 0$ は代数曲線の最も重要な（離散的）不変量である。 $g = 0$ は射影直線 \mathbb{P}^1 （複素数体上で考えているので Riemann 球）を特徴付け、 $g = 1$ は楕円曲線 $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, $\text{Im } \tau > 0$, を特徴付ける。両者は曲線の中のエリートで、他の種数 $g \geq 2$ のもの全てを合わせたものよりも重要度が優っているように思える。よって、高次元代数多様体において $g = 0, 1$ に対応するクラスを見つけることは大いに意味のあることだろう。これを実際に 2次元で実行したのがイタリア学派と称される人達である。種数 g の一般化に相応しい双有理不変量（これらも非負整数）が二つ見つかる。

- 至る所で正則な標準形式の空間のなすベクトル空間の次元 p_g 。これは幾何的種数 (geometric genus) と呼ばれる。

- 多様体の Hilbert 多項式を $H(t)$ とするとき、 $p_a := 1 - H(0)$ で定まる算術的種数 (arithmetic genus)¹.

曲線の場合、 $p_g = p_a$ で両者は g に外ならないが、2変数以上では一般に両者は一致しない。曲面に限定すると常に $p_g \geq p_a$ が成立し、身近な例では等号が成立する。そこで、差 $q := p_g - p_a \geq 0$ が定義され、不正則数 (irregularity) と名付けられた。そして、 \mathbb{P}^1 の特徴付けを一般化する候補として、次が提出された。

問題 1 二つの種数が消える、すなわち、 $p_g = p_a = 0$ ($p_g = q = 0$ と同値) ならば、曲面は有理的か、すなわち、関数体は二つの元で生成されるか？

(逆が成立するのは比較的容易である。) この問題に対する挑戦から二つの結果が得られた。一つは、 $p_g = 0$ の部分を少し強めて得られる特徴付けである。標準形式全体のベクトル空間の替わりに、2重標準形式を使って p_g と同様に定義される不変量 P_2 が鍵になる。これは倍種数 (bigenus) と呼ばれ、1変数の場合には $\max\{g, 3g - 3\}$ と一致する。

定理 2 [Castelnuovo] 不正則数と倍種数が消える ($q = P_2 = 0$) 代数曲面は有理的である。(逆も正しい.)

では、もとの問題はどうかだろうか？ $p_g = q = 0$ が $P_2 = 0$ を導き、問題は肯定的に解かれるのだろうか？それとも $p_g = q = 0$ だが $P_2 \neq 0$ なる代数曲面が存在するのだろうか？これには二人の数学者 Castelnuovo と Enriques によって解答が与えられた。Castelnuovo は $P_2 = 2$ のものを、Enriques は $P_2 = 1$ の曲面で $p_g = q = 0$ のものをそれぞれ構成した。後者はその後 Enriques 曲面と呼ばれ、小平次元 $\kappa = 0$ のクラスに属する4種の曲面族の一つにおさまっている。4種は次のとおりで、楕円曲線の自然な2次元版であると考えられる。

p_g	0	0	1	1
q	0	1	0	2
曲面	Enriques	倍楕円	K3	Abel, $\mathbb{C}^2/\Gamma, \Gamma \simeq \mathbb{Z}^4$

Enriques 自身の与えた例を紹介しておこう。

例 4 [Enriques の6次曲面] 3次元射影空間 \mathbb{CP}^3 内の6次曲面 $f_6(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ で、4面体 $x_0x_1x_2x_3 = 0$ の6辺 ($x_1 = x_2 = 0$ 等) に沿って特異で、それ以外で穏やかな特異点しかもたないとする。このとき、3変数多項式関係 $f_6(1, x_1, x_2, x_3) = 0$ の定める2変数代数関数体は $q = p_g = 0$ をみたすが非有理的である。

¹現在この言葉は殆ど使われない。これ以降は専ら q (2変数の場合は $p_g - p_a$) を使って叙述を進める。

6辺に沿って特異という条件は、 $f_6(x_0, x_1, x_2, x_3)$ の4つの偏微分 $\partial f_6 / \partial x_i$, $i = 0, \dots, 3$, が6辺で消えるということに外ならない。より具体的に、4定数 a_0, \dots, a_3 と4変数斉次2次斉次式 $Q(x)$ を用いて

$$f_6(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 x_1^2 x_2^2 x_3^2 \left(\frac{a_0}{x_0^2} + \frac{a_1}{x_1^2} + \frac{a_2}{x_2^2} + \frac{a_3}{x_3^2} \right) + x_0 x_1 x_2 x_3 Q(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

と表せる。(これより、10次元族であることがわかる。)「穏やかな特異点」は、正規化をとったときに有理2重点しかもたないことを意味する。

現代的には、 $K3$ 曲面 X を固定点のない対合 ε (位数2の自己同型) で割ってえられる商曲面 $S = X/\varepsilon$ が Enriques 曲面であると説明されることが多い。(ただし、標数2は例外的で別の定義が必要となる。) 上の例4の $(K3)/\varepsilon$ としての表示については、例えば [8] を見よ。

今回は説明できなかつたが、固定点軌跡 $\text{Fix}(\varepsilon)$ が非特異有理曲線の疎な和集合 $\Pi_m(-2)\mathbb{P}^1$ であるとき、 $S = X/\varepsilon$ は Coble 曲面 (または、対数的 Enriques 曲面) であるという ([5]). $m \geq 1$ のとき、 S は m 個の $(-4)\mathbb{P}^1$ を境界とする有理曲面である。

§4 予想の成立する場合

Enriques 曲面は常に種数1 fibration $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ をもつ。これの Jacobian fibration $\text{Jac } f : S_f \rightarrow \mathbb{P}^1$ は有理楕円曲面で、その Mordell-Weil 階数を $\text{MW-rk}(f)$ で表す。有理楕円曲面 S_f は射影平面 \mathbb{P}^2 を9回爆発してえられるが、爆発中心の9点は二つの3次曲線の交点に重複度を込めて一致する。Jacobian fibration の定義より、 $\text{Jac } f$ の Mordell-Weil 群 $\text{MW}(f)$ は平行移動でもって S に作用する。よって、埋め込み

$$\text{MW}(f) \hookrightarrow \text{Aut } S$$

がえられる。特に、(2) より、予想1の自明な方向の不等式

$$\text{vcd}(\text{Aut } S) \leq \max_f \text{MW-rk}(f) \quad (5)$$

をえる。この反対方向の不等号 \geq が成立する理由は現時点では見つかってない。ここでは、それが成立する例をいくつか挙げよう。

例 5 (M.-Ohashi[9]) 座標点で4個の通常2重点をもつ対称4次曲面

$$\overline{X}_k: s_2^2 = k s_4, \quad k \neq 36, 4, 0 \quad (6)$$

の極小特異点解消 X_k ($K3$ 曲面である) を標準 Cremona 変換

$$\varepsilon: (x_1 : \dots : x_4) \mapsto \left(\frac{1}{x_1} : \dots : \frac{1}{x_4} \right) \quad (7)$$

の誘導する対合 ε で割ってえられる Enriques 曲面 $S_k = X_k/\varepsilon$ に対して予想 1 は正しい。ただし、 s_i は斉次座標 x_1, \dots, x_4 の i 次基本対称式である。より精密に自己同型群は半直積 $(C_2^{*4}) \rtimes \mathfrak{S}_4$ と同型で、完全列

$$1 \rightarrow F_3 \rightarrow \text{Aut } S_k \rightarrow \mathfrak{S}_4 \times C_2 \rightarrow 1$$

より、階数 3 の自由群を指数 48 の部分群に含む。(よって、実質的に自由で $\text{vcd} = 1$ である。)

注意 1 この Enriques 曲面は [7] で考察された E_7 型と呼ばれる 3 次元族の部分族をなしている。

簡単のために、予想 1 の右辺を (種数 1 fibration をもつ) 曲面 S の MW 階数と呼ぶことにする。

例 6 Nikulin[10]–金銅 [6] による分類より、MW 階数が 0 の Enriques 曲面に対して、予想 1 は正しい。

例 7 [9, Remark 5] 一般の Enriques 曲面 S は $(-2)\mathbb{P}^1$ を含まない。このとき、自己同型群は直交群 $O_{\mathbb{Z}}^+(H^2(S, \mathbb{Z})_f)$ の指数有限の部分群であるので、[3] より、実質コホモロジー次元は 8 に等しい。(これは、Barth-Peters[1] によるより精密な結果の系である。) ただし、 $H^2(S, \mathbb{Z})_f$ は第 2 コホモロジー群を捻れで割ってえられる符号数 $(1, 9)$ の格子である。一方、 $(-2)\mathbb{P}^1$ を含まないことより、全ての楕円 fibration の MW 階数が 8 である。よって、やはり予想 1 は正しい。

§5 Picard 数 20 の $K3$ 曲面

最後に楕円 $K3$ 曲面の場合を考えよう。と言っても一般の場合ではなく、標題のように塩田特異な場合である。楕円 fibration $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ をもつことはよく知られている。より精密に、塩田・猪瀬 [12, §5] では、MW 階数が正の楕円 fibration $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ が構成されている。そして、この系として自己同型群 $\text{Aut } X$ はいつも無限群であることを示している。

さて、塩田特異な $K3$ 曲面 X の同型類は超越格子 T_X の同型類で定まる。その判別式を $\text{disc } T_X$ を d で表す。類数が 1 の場合は、判別式 d でもって一意的に決まる塩田特異 $K3$ 曲面を X_d で表す。 T_X は偶で正定値なので、 $d \equiv 0, 3 \pmod{4}$ であることに注意しよう。

Vinberg[14] は「最も代数的な $K3$ 曲面」として X_3, X_4 を考察し、それらの自己同型群を決定した。その系として $\text{Aut } X_d, d = 3, 4$, は実質的に自由であることがわかる。(5) によって、予想 1 が成立する。

Vinberg 曲面の「次に代数的な $K3$ 曲面」が問題となるが、これに関して次が成立する。

定理 3 [M.-Ohashi] $d = 3, 4$ 以外の塩田特異 $K3$ 曲面の MW 階数はいつも 2 以上である。また、2 に等しいのは、判別式 $d = 7, 8$ と同値である。

次は予想 1 の特別な場合である。

問題 2 $\text{Aut } X_d$ ($d = 7, 8$) の実質的コホモロジー次元は 2 か？

塩田特異 $K3$ 曲面 X_7 の自己同型群の生成系は Ujikawa[13] によって求められている。また、 X_8 の楕円 fibration の ADE 型は Bertin-Lecacheux[2] によって分類されている。

参考文献

- [1] Barth, W. and Peters, C.: Automorphisms of Enriques surfaces, *Invent. Math.* **73** (1983), 383–411.
- [2] M.J. Bertin and O. Lecacheux, *Elliptic fibrations on the modular surface associated to $\Gamma_1(8)$* , in “Arithmetic geometry of $K3$ surfaces and Calabi-Yau threefolds”, *Fields Inst. Comm.* **67**(2013), 153–265.
- [3] Borel, A. and Serre, J.P.: Corners and arithmetic groups, *Comment. Math. Helv.* **48** (1973), 436–491.
- [4] Brown, K. S.: *Cohomology of groups*, Springer-Verlag, 1982.
- [5] Dolgachev, I. and Zhang, D.Q.: Coble rational surfaces, *Amer. J. Math.* **123**(2001), 79–114.
- [6] Kondo, S.: Enriques surfaces with finite automorphism groups, *Japan. J. Math.* **12** (1986), 191–282.
- [7] 向井 茂: Enriques surfaces and root systems — Enriques surfaces of type E_7 —, 2010 年度城崎代数幾何学シンポジウム報告集, 108–115.
- [8] Mukai, S. and Ohashi, H.: Enriques surfaces of Hutchinson-Göpel type and Mathieu automorphisms, in *Arithmetic and Geometry of $K3$ surfaces and Calabi-Yau threefolds*, *Fields Institute Communications* **67**, 2013, pp. 429–454.
- [9] Mukai, S. and Ohashi, H.: The automorphism groups of Enriques surfaces covered by symmetric quartic surfaces, in “Recent Advances in Algebraic Geometry”, A volume in honor of Rob Lazarsfeld’s 60th birthday, eds. Hacon, Mustata and Popa, Cambridge Univ. Press, 2015, 307–320.

- [10] Nikulin, V.V.: On the description of the groups of automorphisms of Enriques surfaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR **277**(1984), 1324–1327.
- [11] Serre, J.P. : Cohomologie des groupes discrets, in “Prospects in Mathematics”, Ann. of Math. Studies, **70**(1971), 77–169.
- [12] Shioda, T. and Inose, H.: On singular surfaces, in “Complex analysis and algebraic geometry”, Iwanami-Shoten, 1977.
- [13] Ujilkawa, M.: The automorphism group of the singular $K3$ surface of discriminant 7, Comment. Math. Univ. St. Pauli, **62** (2013), 11–29. MR3113614
- [14] Vinberg, E.B.: The two most algebraic $K3$ surfaces, Math. Ann. **265** (1983), 1–21.

平面代数曲線のトポロジーと2次被覆の“arithmetic”

徳永浩雄¹

イントロダクション

本稿で扱う対象は，“次数が(比較的)低い平面代数曲線”という代数幾何の中でも古典的かつ初等的な対象である．研究することはもうないのではないか？と思われる御仁もいると思う．本稿では，少し見方を変えればまだそれなりにすることがありそうだという人が一人でも増える事を願いつつ話を進めたい．

C は被約な射影平面曲線とする．表題の“平面曲線 C のトポロジー”という用語は C 自身のトポロジーではなく，射影平面 \mathbb{P}^2 と C の対 (\mathbb{P}^2, C) のトポロジーを指す．本稿で扱うような C のトポロジーの研究は Zariski の論文 [23]: On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve, Amer. J. Math. 51 (1929), 305–328, から始まる．[23] のイントロダクションでのべられているように‘与えられた曲線を分岐曲線としてもつ分岐被覆の存在’に関する問題はまず Enriques が考察した．Zariski の論文では問題をより明確に補空間 $\mathbb{P}^2 \setminus C$ の基本群の問題へと帰着させ，計算法²を与えるとともに，様々な例について計算した．Zariski の論文以降，“特異点として通常2重点しか持たない曲線の補空間の基本群は可換か”(Zariski 予想) など， C のトポロジーについては様々な研究がなされてきた．本稿で扱うテーマも論文 [23] で考察された例がその始まりである．まずその例を紹介することから始める．

Example 1. B_i ($i = 1, 2$) は既約な6次曲線で，その特異点は6個の(2,3)型 cusp のみとする．ただし， B_1 については，6個の cusp をとおる2次曲線が存在するが， B_2 については，そのようなそのような2次曲線は存在しないものとする．このとき，二つの基本群 $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_1, *)$ と $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_2, *)$ は同型ではない．

実際， $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_1, *) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ であり， $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_2, *) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ である．これらの計算の詳細については，岡による [14]，Degtyarev による6次曲線に関する一連の論文を参照されたい．

例1のような平面曲線の対は Zariski 対と呼ばれている．非常に大まかにいうと Zariski 対とは，被約な平面曲線の対 (B^1, B^2) であって，以下の2条件を満たすものである：

- (i) 各 i に対して， B^i の管状近傍 $T(B^i)$ で $(T(B^1), B^1)$ が $(T(B^2), B^2)$ に同相になるものが存在する，
- (ii) (\mathbb{P}^2, B^1) と (\mathbb{P}^2, B^2) は同相でない．

Zariski N 組は，Zariski 対の自然な一般化である．さて，第一の条件は組合せ論的な条件「 B^i の *the combinatorics* (もしくは *the combinatorial type*) が同じ」という条件で置き換えられる (combinatorics とは， B^i の既約成分の次数，既約成分を指定した上での交わり方，特異点の位相

¹この報告の内容は，白根竹人(徳島大学)，坂内真三(茨城高専)，山本桃果(首都大学東京)等との共同研究の成果を含んでいます．また，この研究で，筆者は基盤研究 C (17K05205, 代表：徳永浩雄) の補助を得ています．

²van Kampen[12] も参照．

型などを合わせたものである．正確な定義は [3] や [21] を参照されたい)．後者の条件は比較的扱いやすいため， B^i の combinatorics を考えることが多い．例 1 の場合なら，combinatorics は，既約成分の次数と特異点の位相型になる．また，直線配置なら，いわゆる「直線配置の組合わせ論的データ」となる．

Zariski 対については，[23] 以降，例 1 を除くとあまり知られていない状況がしばらく続いていたが，90 年代に入って様々なアプローチの下，数多くの例が見つかり現在に至っている（例えば，[3] 参照）．これらの研究は，曲線の構成法とトポロジーの違いの判定という二つのステップからなることが多い．「判定」の部分で用いられる不変量としては，曲線の補空間の基本群や結び目・絡み目では御馴染みの Alexander 不変量が用いられていた．基本群は braid monodromy と呼ばれる不変量により定まる．[2, 11, 9] では，braid monodromy が非常に強力な不変量であることが示されている．とりわけ，[2] では， B の一般の点 x を選び， x を通り B と横断的でない直線全てと B を合わせた曲線に関するトポロジーについては braid monodromy が等価な不変量であることが示されている．しかしながら，曲線の明示的な方程式がなく，combinatorics のみが与えられた場合は，これを計算するのは基本群の計算と同様な困難が生じる．

本稿では，まず， \mathbb{P}^2 の 2 次被覆での分解曲線（分解数）及び連結数を導入する．続いて分解数や連結数を用いた従来とは異なる Zariski 対研究のアプローチ³を紹介したい．

1 \mathbb{P}^2 の 2 次被覆と分解曲線，分解数と連結数

ここで述べる分解数や連結数は一般の曲面や Galois 被覆においても定式化されるが，話を簡単にするため，ここでは射影平面 \mathbb{P}^2 と被約平面曲線に限ることにする．一般の場合については，[17, 18] を参照されたい．

B は偶数次の被約平面曲線とし， $f'_B : S'_B \rightarrow \mathbb{P}^2$ は B で分岐する 2 次被覆とする．また， $\mu : S_B \rightarrow S'_B$ は以下の可換図式をもつ S'_B の標準特異点解消とする：

$$\begin{array}{ccc} S'_B & \xleftarrow{\mu} & S_B \\ f'_B \downarrow & & \downarrow f_B \\ \mathbb{P}^2 & \xleftarrow{q} & \widehat{\mathbb{P}^2}, \end{array}$$

ただし， $q : \widehat{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathbb{P}^2$ は 2 次被覆の分岐因子が非特異になるように有限回の blowing up の合成したもので， $f_B : S_B \rightarrow \widehat{\mathbb{P}^2}$ は，自然に誘導される 2 次被覆とする．

1.1 分解曲線，分解数

Definition 1.1. D は既約な平面曲線とする． D が， $(f'_B)^*D$ が可約，すなわち $(f'_B)^*D = D^+ + D^-$ ， D^\pm は相異なる既約な曲線，となるとき， D は f'_B に関する 分解曲線 という．

³これを 2 次被覆の arithmetic と見るのは，筆者の妄想かもしれない．

[17] では、より一般の Galois 被覆 $\phi : S \rightarrow \Sigma$ について既約な曲線 D の‘分解’について考察し、 D の分解数を $s_\phi(D) := \phi^*(D)$ の既約成分の数と定義した。2 次被覆 $f'_B : S'_B \rightarrow \mathbb{P}^2$ の場合は $s_{f'_B}(D)$ は 1 または 2 で、 D が分解曲線するとき、 $s_{f'_B}(D) = 2$ となる。曲線の分解・非分解という問題については、[19] で考察されたのが最初であるが、曲線の分解とそのタイプが Zariski 対の研究で最初に登場したのは、[4] と思われる。[4] では、曲線の分解・非分解から二面体被覆の存在・非存在に関する条件を導き、これを用いて曲線のトポロジーを区別している。[6] では、曲線の分解・非分解を直接的に曲線のトポロジーの区別に利用している。その後、以下の主張により Zariski 対の研究において、曲線の分解・非分解がより有効であることが示された。

Proposition 1.1. $B_i (i = 1, 2)$ は偶数次の被約平面曲線とし、 $f'_{B_i} : S'_{B_i} \rightarrow \mathbb{P}^2$ は B_i で分岐する 2 次被覆とする。 $D_i (i = 1, 2)$ は B_i に含まれない既約な曲線とする。もし \mathbb{P}^2 から \mathbb{P}^2 の homeomorphism h で (i) $h(B_1) = B_2$, (ii) $h(D_1) = D_2$ を満たすものは存在すれば、 $s_{f'_{B_1}}(D_1) = s_{f'_{B_2}}(D_2)$ である。

証明は、[18] を参照されたい。Proposition 1.1 からつぎの系を得る：

Corollary 1.1. Proposition 1.1 の設定のもとで、(i) $B_1 + D_1$ と $B_2 + D_2$ の combinatorics は等しい、(ii) 同相写像 $h : (\mathbb{P}^2, B_1 + D_1) \rightarrow (\mathbb{P}^2, B_2 + D_2)$ が存在すれば $h(B_1) = B_2$ をみたく、の 2 条件が満たされているとする。もし、 $s_{f'_{B_1}}(D_1) \neq s_{f'_{B_2}}(D_2)$ ならば、 $(B_1 + D_1, B_2 + D_2)$ は Zariski 対である。

[17] では、補空間の基本群が同型になるような Zariski N 組について考察している。曲線 D が分解する必要条件として、以下の補題は基本的である。

Lemma 1.1. $B, f'_B : S'_B \rightarrow \mathbb{P}^2$ は上記の通りとする。既約な曲線 D と B の交点 x において B 及び D は共に非特異とする。もし、 D が f'_B に関する分解曲線ならば x における B と D の交点数 $I_x(B, D)$ は偶数である。

実際、 $I_x(B, D)$ が奇数とすると、 $f'_B|_D$ は x で分岐する D の 2 次被覆となる。すなわち、 $(f'_B)^*(D)$ は既約でなければならない。

Definition 1.2. B と D について以下の 2 条件が成立するとき、 D を B の contact 曲線という：

$\forall x \in B \cap D$ に対し、

- B, D 共に x で非特異、
- $I_x(B, D)$ は偶数。

論文 [4, 19, 22] では、既約 4 次曲線とその contact conic について考察を行い、Zariski 対の例を得ている。次節で、その一部について述べる。

1.2 連結数

続いて連結数を定義する。なお、 B はこれまで同様、偶数次の被約な平面代数曲線とする。

Definition 1.3. [18] D は被約な平面代数曲線で,

- D の既約成分は B に含まれない,
- $D \setminus B$ は連結,

を満たしているものとする. このとき, D の連結数 $c_{f'_B}(D)$ を

$$c_{f'_B}(D) = (f'_B)^{-1}(D \setminus B) \text{ の連結成分の数}$$

と定義する.

分解数同様, 連結数についてもつぎの命題がなりたつ:

Proposition 1.2. $B_i (i = 1, 2)$ は偶数次の被約平面曲線とし, $f'_{B_i}; S'_{B_i} \rightarrow \mathbb{P}^2$ は B_i で分岐する 2 次被覆とする. $D_i (i = 1, 2)$ は Definition 1.3 にある条件を B_i に対してみたす平面曲線とするもし, \mathbb{P}^2 から \mathbb{P}^2 の同相写像 h で (i) $h(B_1) = B_2$, (ii) $h(D_1) = D_2$ を満たすものが存在すれば, $c_{f'_{B_1}}(D_1) = c_{f'_{B_2}}(D_2)$ となる.

証明は [18] を参照されたい.

2 分解数と Zariski 対: 2 次曲線と既約 4 次曲線

本節では, 曲線の分解に注目して得られた既約 4 次曲線と contact conic からなる Zariski 対について [4, 19, 22] で得られた結果について触れる. なお, [19] では, 既約曲線一般を扱っているが, ここでは, 特異点として高々 node しか持たない場合のみ述べる. まず, 次の主張が成立する:

Theorem 2.1. Q は特異点として高々 node しか持たない既約 4 次曲線, C は Q の contact conic とする. $f_C: S_C \rightarrow \mathbb{P}^2$ は C で分岐する 2 次被覆とする. このとき,

- (i) Q が非特異または, node を一つしか持たないとき, $s_{f_C}(Q) = 1$ である.
- (ii) Q の特異点が node 二つのとき, $s_{f_C}(Q)$ は C の取り方に依存する. 実際, contact conics C_1, C_2 で, $f_{C_1}(Q) = 2, f_{C_2}(Q) = 1$ を満たすものが存在する.
- (iii) Q の特異点が node 三つのとき, $s_{f_C}(Q) = 2$ である.

Theorem 2.1 について, 大まかに解説する.

S_C は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ なので, $\text{Pic}(S_C) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ であり, S_C 上の因子のクラスは, 整数の組 (a, b) で表される. f_C の被覆変換は $(a, b) \mapsto (b, a)$ を引き起こす. 従って, $f_C^*Q = Q^+ + Q^-$ と分解するとき, $Q^+ \sim (2, 2)$ か $(1, 3)$ であると仮定してよい (\sim は線形同値を表す). すると, Q^+ の非特異モデルの種数は 1 以下となり, これから, Theorem 2.1 (i) が従う.

また, Theorem 2.1 (iii) のとき, Q は有理曲線であり, f_C は Q の非特異モデルの不分岐な 2 次被覆を引き起こすので, $f_C^*Q = Q^+ + Q^-$ と分解することがわかる. Q^+ の $\text{Pic}(S_C)$ のクラスは, $(2, 2)$ と $(1, 3)$ の二つの可能性があるが, C の取り方によって, いずれの場合も起こる. [4]

では、このクラスの違いを利用して Zariski 対の例を構成している．[22] では、 Q の点 z_o をとり、そこで接する contact conic について、数え上げなど、より詳細な研究を行なっている．

残る Theorem 2.1(ii) について述べるには、少々準備が必要である：

S'_Q, S_Q は 1 節の始めに導入した Q に沿って分岐する 2 次被覆およびその標準特異点解消とする．さらに、 Q の非特異点 z_o を選ぶ． z_o を通る直線からなる pencil は S_Q 上種数 1 の曲線の pencil を与える． z_o の原像は、重複度 2 の base point となる．そこで、blow-up を 2 回行って base point を除去したものを $\nu_{z_o} : S_{Q,z_o} \rightarrow S_Q$ とおき、pencil から得られる射を $\varphi_{Q,z_o} : S_{Q,z_o} \rightarrow \mathbb{P}^1$ とおく．2 回目の blow-up の例外集合は φ_{Q,z_o} の切断になるので、これを O とおく． φ_{Q,z_o} は相対極小であり、こうして有理楕円曲面 S_{Q,z_o} が得られる．以下の図式は、 S_{Q,z_o} を得る手続きをまとめたものである：

$$\begin{array}{ccccc} S'_Q & \xleftarrow{\mu} & S_Q & \xleftarrow{\nu_{z_o}} & S_{Q,z_o} \\ f'_Q \downarrow & & \downarrow f_Q & & \downarrow f_{Q,z_o} \\ \mathbb{P}^2 & \xleftarrow{q} & \widehat{\mathbb{P}^2} & \xleftarrow{q_{z_o}} & (\widehat{\mathbb{P}^2})_{z_o}, \end{array}$$

ここで、 q_{z_o} は 2 回の blow up の合成、縦の射はすべて誘導された 2 次被覆である． $\varphi_{Q,z_o} : S_{Q,z_o} \rightarrow \mathbb{P}^1$ の生成ファイバーを E_{Q,z_o} で表す． φ_{Q,z_o} の切断全体からなる集合 $\text{MW}(S_{Q,z_o})$ は E_{Q,z_o} の $\mathbb{C}(t)$ - 有理点の集合 $E_{Q,z_o}(\mathbb{C}(t))$ と自然に同一視される．そこで、 $s \in \text{MW}(S_{Q,z_o})$ に対し、対応する有理点を P_s で表し、逆に $P \in E_{Q,z_o}(\mathbb{C}(t))$ に対し、対応する切断を s_P とおく．さて、 $s \in \text{MW}(S_{Q,z_o})$ はその像を考えることで S_{Q,z_o} 上の曲線と同一視できる．従って $q \circ q_{z_o} \circ f_{Q,z_o}(s)$ は平面曲線を与えている．

[19] で示しているように、contact conic C が与えられたとき、 z_o として、 Q と C の接点の一つを選ぶと、 C は S_{Q,z_o} で二つの曲線 C^\pm に分解し、共に、 $\text{MW}(S_{Q,z_o})$ の元を定める．これらの切断に対応する $E_{Q,z_o}(\mathbb{C}(t))$ の元 P_{C^\pm} とおく．このとき、次の主張が成立する ([19, Theorem 1.2])

Theorem 2.2.

$$s_{f_C}(Q) = 2 \Leftrightarrow P_{C^+} = 2P_o \text{ を満たす } P_o \in E_{Q,z_o}(\mathbb{C}(t)) \text{ が存在する.}$$

なお、 $P_{C^-} = -P_{C^+}$ であることに注意すると、 P_{C^-} に対しても同じ主張が得られる．Theorem 2.2 は、 f_C に関する曲線の分解の判定が、‘相方’である Q に沿って分岐する 2 次被覆上でなされている点が興味深い．

$$\begin{array}{ccc} S_C & & S_{Q,z_o} \\ & \searrow f_C & \swarrow q \circ q_{z_o} \circ f_{Q,z_o} \\ & \mathbb{P}^2 & \end{array}$$

Theorem 2.1(ii) を示すには、 z_o で接する contact conics C_1, C_2 で、

- $P_{C_1^+} = 2P_o$ を満たす $P_o \in E_{Q,z_o}(\mathbb{C}(t))$ が存在する、
- $P_{C_2^+} = 2P_o$ を満たす $P_o \in E_{Q,z_o}(\mathbb{C}(t))$ が存在しない、

をを満たすもの構成することで得られる．詳細は [19] を参照されたい．[19, 20] では, Corollary 1.1 と Theorem 2.1(ii) を用いて, 二つの node をもつ既約な 4 次曲線と contact conic からなる Zariski 対を構成している．

3 連結数と Zariski 対

この節では, 連結数の応用の一つとして, 非特異 4 次曲線 Q とその複数の 2 重接線を既約成分としてもつ平面曲線の Zariski 対について述べる．よく知られているように Q は 28 本の 2 重接線をもつ．これらの 28 本の 2 重接線については, 様々なことが知られている (例えば, [10] 参照), しかしながら, Zariski 対に関する結果は無いように思われる．ここでは, Q と 2 重接線 3 本からなる Zariski 対, Q と 2 重接線 4 本からなる Zariski 3 つ組について触れる⁴．

Zariski 対の構成については, 前節同様に Q 上の点 z_o を一つ選んで構成した有理楕円曲面 $\varphi_{Q,z_o} : S_{Q,z_o} \rightarrow \mathbb{P}^1$ が重要な役割をする．なお, Q は非特異なので, 前節の可換図式における S'_Q は非特異で S_Q に一致する．また, $f'_Q = f_Q$ である． $MW(S_{Q,z_o})$ 及び $E_{Q,z_o}(\mathbb{C}(t))$ についても前節と同様なものとする．このとき, S_{Q,z_o} の構成する手順および [15, 16] 等から, つぎの事実が従う:

- Q の 2 重接線 L の S_{Q,z_o} の preimage は 2 つの既約成分 L^\pm からなり, 各々 $MW(S_{Q,z_o})$ の元を定める．対応する元を P_{L^\pm} とおく ($P_{L^-} = -P_{L^+}$ であることに注意する) ．
- z_o における Q の接線を l_{z_o} とおく． l_{z_o} を以下の条件を満たすようにとる:
 - l_{z_o} は Q と z_o 以外の相異なる 2 点で交わる．
 - l_{z_o} は z_o で Q で 3 重に接する,

このとき, [15] で与えられる $E_{Q,z_o}(\mathbb{C}(t))$ の格子構造 (Mordell-Weil 格子) は E_7^* であり, その 56 個の minimal vector は 28 本の 2 重接線 L_i ($i = 1, \dots, 28$) を用いて $\pm P_i$ ($:= P_{L_i^\pm}$) ($i = 1, \dots, 28$) で与えられる．以下, Mordell-Weil 格子の pairing を \langle, \rangle で表す．

Q の 2 重接線 L_i, L_j, L_k を選び

$$\Delta_{ijk} = L_i + L_j + L_k$$

とおく． P_i, P_j, P_k の \langle, \rangle に関する Gram 行列を 2 倍した 3 次正方行列を $G(i, j, k)$ とおく．このとき, このとき, Δ_{ijk} の連結数 $c_{f_Q}(\Delta_{ijk})$ に関して次の補題が成立する:

Lemma 3.1. I_3 は 3 次の単位行列とする．このとき,

- (i) $c_{f_Q}(\Delta_{ijk}) = 1 \Leftrightarrow \det(G(i, j, k) - 3I_3) = 2$
- (ii) $c_{f_Q}(\Delta_{ijk}) = 2 \Leftrightarrow \det(G(i, j, k) - 3I_3) = -2$

証明については, [7] を参照されたい．

⁴ Q と 2 重接線 3 本からなる Zariski 対については Artal Barotolo と Vallès の両氏による共同研究 (現時点で未出版) がある．筆者は, この例について Artal Bartolo 氏から教わった．

3.1 Q と 3 本の 2 重接線からなる Zariski 対の構成

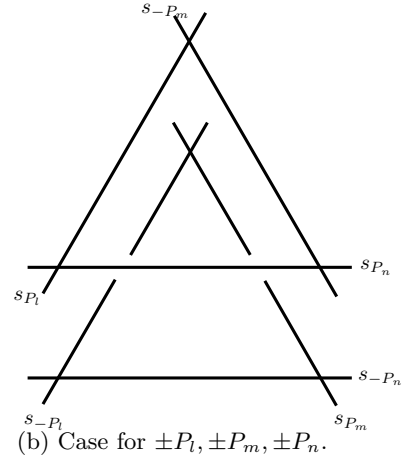
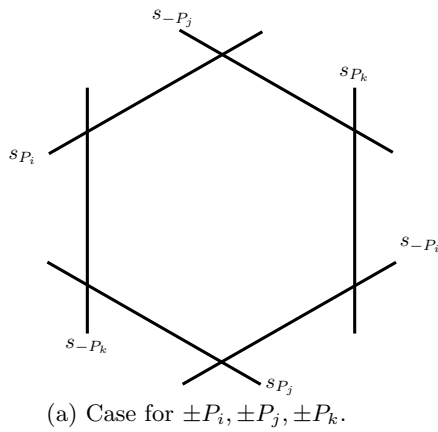
Proposition 1.2 と Lemma 3.1 を用いて Q と 3 本の 2 重接線からなる Zariski 対を構成することを考える． $E_{Q, z_0}(\mathbb{C}(t))$ の元 $P_i, P_j, P_k, P_l, P_m, P_n$ を

$$\det(G(i, j, k) - 3I_3) = 2, \quad \det(G(l, m, n) - 3I_3) = -2$$

を満たすように取り (このような $P_i, P_j, P_k, P_l, P_m, P_n$ が取れることは例えば [16] 参照),

$$\Delta_{ijk} = L_i + L_j + L_k, \quad \Delta_{lmn} = L_l + L_m + L_n,$$

とおく．すると, Lemma 3.1 より, $c_{f_Q}(\Delta_{ijk}) = 1, c_{f_Q}(\Delta_{lmn}) = 2$ を得る．従って, Proposition 1.2 より, \mathbb{P}^2 から \mathbb{P}^2 への同相写像で, $h(Q) = Q, h(\Delta_{ijk} = \Delta_{lmn})$ を満たすものは存在しない．特に, $h(Q + \Delta_{ijk}) = Q + \Delta_{lmn}$ を満たす同相写像は, 自動的に $h(Q) = Q$ を満たすので L_i, L_j, L_k 及び L_l, L_m, L_n がともに共点でなければ, $(Q + \Delta_{ijk}, Q + \Delta_{lmn})$ は Zariski 対となる．なお, この Zariski 対の明示的な例については [7] を参照されたい．



3.2 Q と 4 本の 2 重接線からなる Zariski 三つ組の構成

2 重接線を一本増やし, 4 本にした場合について考察する．選んだ 4 本の直線を $L_{i_1}, L_{i_2}, L_{i_3}, L_{i_4}$ とし,

$$\mathcal{L}_I = \sum_{j=1}^4 L_{i_j}, \quad I = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}, \quad \Delta_{jkl} = L_{i_j} + L_{i_k} + L_{i_l}, \{i_j, i_k, i_l\} \subset I$$

とおく．ここで, $\text{Sub}_\Delta(Q, \mathcal{L}_I)$ を以下のように定義する:

$$\text{Sub}_\Delta(Q, \mathcal{L}_I) := \{Q + \Delta_{i_j i_k i_l} \mid \forall \{i_j, i_k, i_l\} \subset I\}.$$

次に、写像 $c_I : \underline{\text{Sub}}_\Delta(Q, \mathcal{L}_I) \rightarrow \{1, 2\}$ を

$$c_I : \underline{\text{Sub}}_\Delta(Q, \mathcal{L}_I) \ni Q + \sum_{k=1}^3 L_{i_k} \mapsto c_{f_Q} \left(\sum_{k=1}^3 L_{i_k} \right) \in \{1, 2\}$$

と定義する。4つの元からなる集合 $I_1, I_2 \subseteq \{1, \dots, 28\}$ を選び $B_i := Q + \mathcal{L}_{I_i}$ とく。このとき、対の同相写像 $h : (\mathbb{P}^2, B_1) \rightarrow (\mathbb{P}^2, B_2)$ が存在すれば、 $h(Q) = Q$ 及び $h(\mathcal{L}_1) = \mathcal{L}_2$ が成立するので、写像 $h_{\natural} : \underline{\text{Sub}}_\Delta(Q, \mathcal{L}_{I_1}) \rightarrow \underline{\text{Sub}}_\Delta(Q, \mathcal{L}_{I_2})$ で、 $c_{I_2} = c_{I_1} \circ h_{\natural}$ を満たすものを誘導する：

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Sub}}_\Delta(Q, \mathcal{L}_{I_1}) & & \\ \downarrow h_{\natural} & \searrow c_{I_1} & \\ \underline{\text{Sub}}_\Delta(Q, \mathcal{L}_{I_2}) & \xrightarrow{c_{I_2}} & \{1, 2\} \end{array}$$

このとき、[5, Proposition 1.2] と同様な議論を用いて、次の Proposition を得る：

Proposition 3.1. 上記の設定の下、 B_1, B_2 の combnatorics が等しく、かつ、 $\#c_{I_1}^{-1}(1) \neq \#c_{I_2}^{-1}(1)$ ならば、 (B_1, B_2) は Zariski 対である。

$\#(\underline{\text{Sub}}_\Delta(Q, \mathcal{L}_I)) = 4$ であるから、5つの可能性

$$(\#c_I^{-1}(1), \#c_I^{-1}(2)) = (0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0),$$

があり、一見、Zariski 5つ組が存在するように思われる。しかしながら、次の補題が成立する：

Lemma 3.2. 上記の設定のもと、 $(\#c_I^{-1}(1), \#c_I^{-1}(2)) = (0, 4), (2, 2), (4, 0)$.

従って、上記のアプローチで構成可能なのは、高々 Zariski 3つ組である。実際、[7] では、Zariski 3つ組の明示的な例が与えられている。

Remark 3.1. 2重接線の数を、5本以上にした場合については、[8] で考察されている。

4 まとめ

低次の曲線配置 $B = B_o + D$ の埋め込み位相の研究において、

「 B_o に沿って分岐する2次被覆 S'_{B_o} をを構成し、 D の S'_B への引き戻しについて、組合わせ論的な構造考察し、 B のトポロジーの研究に応用する」、

というアプローチは素朴ではあるが、これまで述べたように（筆者にとっては）予想した以上に面白い例が構成でき、興味深いもののように見える。Theorem 2.2 が、2次曲線と4次曲線だけの特別な現象なのか、それとも、より一般に拡張されて2次被覆の相互法則(?)のようなものがあるのかは、これからの課題である。

参考文献

- [1] E. Artal Bartolo: *Sur les couples des Zariski*, J. Algebraic Geometry, **3** (1994) no. **2**, 223-247.
- [2] E. Artal Bartolo, J. Carmona Ruber and J.-I. Cogolludo: Braid monodromy and topology of plane curves, Duke Math. J. **118**(2003), 261-278.
- [3] E. Artal Bartolo, J.-I. Cogolludo and H. Tokunaga: *A survey on Zariski pairs*, Adv. Stud. Pure Math., **50** (2008), 1-100.
- [4] E. Artal Bartolo and H. Tokunaga: *Zariski k -plets of rational curve arrangements and dihedral covers*, Topology and its Applications **142**(2004), 227-233.
- [5] S. Bannai, B. Guerville-Ballé, T. Shirane and H. Tokunaga: *On the topology of arrangements of a cubic and its inflectional tangents*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **93** (2017), 50-53.
- [6] S. Bannai: *A note on splitting curves of plane quartics and multi-sections of rational elliptic surfaces*, Topology and its Applications **202** (2016), 428-439.
- [7] S. Bannai, H. Tokunaga and M. Yamamoto: *A note on the topology of arrangements for a smooth plane quartic and its bitangent lines*, arXiv: 1806.02982.
- [8] S. Bannai and M. Yamamoto: *Two-graphs and the embedded topology of smooth quartics and its bitangent lines*, in preparation.
- [9] J. Carmona Ruber: *Monodromia de trenzas de curvas algebraicas planas*, thesis, Universidad de Zaragoza, Spain
- [10] I. Dogachev: *Classical Algebraic Geometry, A Modern View*, Cambridge University Press.
- [11] Vik. S. Kulikov and M. Teicher: *Braid monodromy factorizations and diffeomorphism types*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **64**, no. 2 (2000), 89 -120.
- [12] E.R. van Kampen: *On the fundamental group of an algebraic curve*, Amer. J. Math. **55**(1933), 255-260.
- [13] K. Oguiso and T. Shioda: *The Mordell-Weil lattice of a Rational Elliptic surface*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **40** (1991), 83-99.
- [14] M. Oka: *Symmetric plane curves with nodes and cusps*, J. Math. Soc. Japan **44**(1992), 375-414.
- [15] T. Shioda: *On the Mordell-Weil lattices*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **39** (1990), 211-240.

- [16] T. Shioda: *Plane Quartics and Mordell-Weil Lattices of Type E_7* , Comment. Math. Univ. St. Pauli **42** (1993), 61–79.
- [17] T. Shirane: *A note on splitting numbers for Galois covers and π_1 -equivalent Zariski k -plets*, Proc. AMS **145**(2017), 1009-1017.
- [18] T. Shirane: *Connected numbers and the embedded topology of plane curves*, Canadian Math. Bull., 2017 **61**(2018), 650-658.
- [19] H. Tokunaga: *Geometry of irreducible plane quartics and their quadratic residue conics*, J. of Singularities(electric), **2** (2010), 170-190.
- [20] H. Tokunaga: *Some sections on rational elliptic surfaces and certain special conic-quartic configurations*, Kodai Math. J.**35** (2012), 78-104.
- [21] H. Tokunaga: *Sections of elliptic surfaces and Zariski pairs for conic-line arrangements via dihedral covers*, J. Math. Soc. Japan **66** (2014), 613-640.
- [22] K. Tumenbayar and H. Tokunaga: *Elliptic surfaces and contact conics for a 3-nodal quartic*, Hokkaido Math. J. **47** (2018), 223-244..
- [23] O. Zariski: *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve*, Amer. J. Math. **51** (1929), 305–328.

首都大学東京大学院理学研究科 数理科学専攻
tokunaga@tmu.ac.jp

有限次元 A_∞ 代数の表現論

梶浦宏成 (千葉大学・大学院理学研究院)

概要

A_∞ 代数はもともとはホモトピー論における H 空間の研究において導入された [23, 24] (例えば [17] などを見よ) が, この拡張として A_∞ 圏が, シンプレクティック多様体 M のラグランジュ部分多様体の成す深谷圏 $Fuk(M)$ の定式化として導入され ([4]), これがミラー対称性の圏論的定式化に応用されることとなった [16]. 複素 (代数) 多様体上の接続層の導来圏は三角圏であるので, A_∞ 圏 \mathcal{C} から三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ を構成する方法が提案され, ミラー対称なシンプレクティック多様体 M と複素多様体 \check{M} に対して三角圏同値 $Tr(Fuk(M)) \simeq D^b(coh(\check{M}))$ が成り立つというのが圏論的 (あるいはホモロジー的) ミラー対称性予想である.

現在 (状況によっては定式化をほどよく改良しつつ), この予想が成り立つような例が多数議論されている. 一方, A_∞ 圏 \mathcal{C} が幾何学由来のものであるかどうかに関わらず, それから三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ を構成することを具体的に実行すれば新しい三角圏の例が得られることが期待できる. (このような, A_∞ 代数の表現論への応用に関する解説として例えば [15] がある.) 本稿では特に, ある程度よいクラスの \mathcal{C} に対して, $Tr(\mathcal{C})$ を箭の表現論の次数付き, 高次積付き拡張のようなものとして構成できることについて, いくつかの具体例を使って紹介したい.

1 A_∞ 代数 (A_∞ -algebras)

定義 1 (A_∞ 代数 (Stasheff [23, 24])) $(A, \mathfrak{m} := \{m_k\}_{k \geq 1})$ が A_∞ 代数であるとは, $A = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} A^r$ は \mathbb{Z} 次数付きベクトル空間, $\mathfrak{m} := \{m_k : A^{\otimes k} \rightarrow A\}_{n \geq 1}$ が次数 $|m_k| = (2 - k)$ の線形写像であって, それらが $n = 1, 2, \dots$ について以下の A_∞ 関係式を満たすものである.

$$0 = \sum_{k+l=n+1} \sum_{j=0}^{k-1} \pm m_k(a_1, \dots, a_j, m_l(a_{j+1}, \dots, a_{j+l}), a_{j+l+1}, \dots, a_n).$$

ここで, 各 $i = 1, \dots, n$ について, a_i は次数 a_i の斉次の元である ($a_i \in A^{|a_i|}$) とし, $|m_k| = (2 - k)$ であるとは,

$$|m_k(a_1, \dots, a_k)| = (2 - k) + |a_1| + \dots + |a_k|$$

が成り立つことをいう.

A_∞ 関係式を $n = 1, 2, 3$ のときについてみてみると以下のようなになる. $m_1 = d,$

$m_2 = \cdot, x, y, z \in V$ と表すことにして

$$\begin{aligned} n = 1) \quad & d^2 = 0, \\ n = 2) \quad & d(x \cdot y) = d(x) \cdot y + (-1)^{|x|} x \cdot d(y), \\ n = 3) \quad & (x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z) = d(m_3)(x, y, z) \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

つまり、 $n = 1$ の条件より、 (A, d) が鎖複体を成し、 $n = 2$ の条件より d は積 \cdot に関してライプニッツ則を満たし、 $n = 3$ の条件より積 \cdot がホモトピー m_3 を込めて結合的である。¹ この意味で、 m_4, m_5, \dots はより高次のホモトピーを定めている。

$m_3 = 0$ のとき、積 \cdot は厳密に結合的となる。よってこのとき、 (A, \cdot) は次数付き代数、 (A, d, \cdot) は次数付き微分代数 (DG 代数) を成す。つまり、 A_∞ 代数 (A, \mathfrak{m}) で $m_3 = m_4 = \dots = 0$ となるものは DG 代数である。

一方、 A_∞ 代数 (A, \mathfrak{m}) で $m_1 = 0$ となるものを極小 A_∞ 代数という。

例 2 極小 A_∞ 代数 (A, \mathfrak{m}) で高次の積を持つものの例として以下がある。 A は $e^0 = id, e^2, e^5$ で生成させる次数付きベクトル空間とする。ただし e^r の次数は r とする。 id は積 m_2 に関する恒等元とする。つまり

$$m_2(id, e^*) = m_2(e^*, id) = e^*.$$

さらに非自明な A_∞ 積

$$m_3(e^2, e^2, e^2) = e^5$$

を入れる。これは A_∞ 代数を成す。特に m_1 を入れてない ($m_1 = 0$) ので極小である。 id (strictly unit) を成分に含む A_∞ 関係式は常に自動的に満たされることとなる。この例は、それ以外の非自明な A_∞ 関係式がないような簡単な例となっている。

A_∞ 代数において現れる符号を簡略化するためには、懸垂を考えるとよい。次数付きベクトル空間 A の懸垂

$$s : A \rightarrow s(A) = A[1]$$

とは、 $(A[1])^r := A^{r+1}$ で定められる $s(A)$ 、あるいは s のことである。

このとき、 A_∞ 代数 (A, \mathfrak{m}) から $A[1]$ 上に誘導される A_∞ 積

$$m_k^{A[1]} : (A[1])^{\otimes k} \rightarrow A[1]$$

は k によらずすべて $|m_k| = 1$ となり、 A_∞ 関係式における符号もとても簡単になる。特に、 A_∞ 代数を A_∞ 写像で移すようなことを考える際には懸垂したところで行うのがよい。以下 $m_k^{A[1]}$ のことも単に m_k と書くことにする。

¹ $d(m_3) := d \circ m_3 + m_3(d \otimes id \otimes id + id \otimes d \otimes id + id \otimes id \otimes d)$ とする。

定義 3 A_∞ 代数 (A, \mathbf{m}) , (A', \mathbf{m}') が与えられているとき, A_∞ 写像 $f: (A, \mathbf{m}) \rightarrow (A', \mathbf{m}')$ とは次数を保つ線形写像の集まり $f := \{f_k: (A[1])^{\otimes k} \rightarrow A'[1]\}_{k \geq 1}$ であって, $n = 1, 2, \dots$ について以下の関係式を満たすものである.

$$\begin{aligned} & \sum_{i \geq 1} \sum_{k_1 + \dots + k_n = n} m'_i(f_{k_1} \otimes \dots \otimes f_{k_i})(a_1, \dots, a_n) \\ &= \sum_{\substack{i+l+j=k \\ i+l+j=n}} f_k(\mathbf{1}^{\otimes i} \otimes m_l \otimes \mathbf{1}^{\otimes j})(a_1, \dots, a_n). \end{aligned}$$

この関係式の $n = 1$ の場合から, $m'_1 f_1 = f_1 m_1$, つまり $f_1: (A, m_1) \rightarrow (A', m'_1)$ は鎖写像を成す.

定義 4 A_∞ 写像 $f: (A, \mathbf{m}) \rightarrow (A', \mathbf{m}')$ で, $f_1: (A, m_1) \rightarrow (A', m'_1)$ が擬同型写像 (コホモロジーの間の同型を誘導する写像) であるものを, A_∞ 擬同型写像という. 特に, f_1 自体が同型写像であるとき, f を A_∞ 同型写像をいう.

A_∞ 代数 (A, \mathbf{m}) に対し, 次数付き微分テンソル余代数 $(T^c(A[1]), d := [\mathbf{m}, \cdot], \Delta)$ を構成することができる. これはバー構成と呼ばれている. このとき, A_∞ 写像は次数付き微分テンソル余代数の間の写像を定める. このことから, A_∞ 写像の合成が再び A_∞ 写像になることがわかる. さらに, A_∞ 擬同型写像の合成が A_∞ 擬同型写像となることもわかる.

一方, A_∞ 擬同型写像 $f: (A, \mathbf{m}) \rightarrow (A', \mathbf{m}')$ が存在するとき, 逆向きに A_∞ 擬同型写像 $g: (A', \mathbf{m}') \rightarrow (A, \mathbf{m})$ が存在することも知られている. つまり, A_∞ 代数 (A, \mathbf{m}) と (A', \mathbf{m}') の同値性を, A_∞ 擬同型写像 $f: (A, \mathbf{m}) \rightarrow (A', \mathbf{m}')$ が存在するということによって定めることができる.

A_∞ 代数に関して, 例えば以下の2つの重要な定理がある.

定理 5 (極小模型定理 (Kadeishvili [7])) A_∞ 代数 (A, \mathbf{m}) に対し, そのコホモロジー $H(A) := H(A; d)$ 上の A_∞ 代数 $(H(A), \mathbf{m}')$ と A_∞ 擬同型写像 $(H(A), \mathbf{m}') \rightarrow (A, \mathbf{m})$ が存在する.

このとき特に $m'_1 = 0$, つまり $(H(A), \mathbf{m}')$ は極小 A_∞ 代数を成す. このような $(H(A), \mathbf{m}')$ を (A, \mathbf{m}) の極小模型という. (A, \mathbf{m}) の極小模型は $H(A)$ 上の A_∞ 同型を除いて一意的である.

$m'_1 = 0$ なので, $H(A, \mathbf{m}) := (H(A), m'_2)$ は次数付き代数を成す. これを (A, \mathbf{m}) のコホモロジー代数という.

定理 6 (A_∞ 米田の補題 (Fukaya [5]) の系) 任意の恒等元を持つ A_∞ 代数 (A, \mathbf{m}) はある恒等元を持つ DG 代数と A_∞ 擬同型となる. つまり, A_∞ 擬同型写像

$$f: (A, \mathbf{m}) \rightarrow \text{ある DG 代数}$$

が存在する.

A_∞ 代数を A_∞ 擬同型で分類することを考えると、上の2つの定理より、恒等元を持つ A_∞ 代数 (A, \mathbf{m}) は、極小 A_∞ 代数にとりかえることも、DG 代数にとりかえることもできる。一方、DG 代数の間の同値関係は通常 DG 代数の擬同型写像 (= f_1 のみから成る A_∞ 写像) のジグザグの列によって定められる。

$$\text{DG 代数} \rightarrow \leftarrow \rightarrow \cdots \rightarrow \leftarrow \text{DG 代数}'$$

そして実は、2つの DG 代数が DG 代数として同値であることは、それらが A_∞ 代数として A_∞ 擬同型であることが必要十分である。それならば、恒等元を持つ A_∞ 代数は、それと A_∞ 擬同型な DG 代数にとりかえて議論すればよいということになる。それはその通りであるのだが、それらをむしろ A_∞ 代数の枠組みで扱うことの利点は以下の通りである。まず、DG 代数の同値はジグザグを考えなければならないが、 A_∞ 擬同型は逆が存在するという意味で扱いやすい。特に、 A_∞ 代数 (A, \mathbf{m}) に対し、その極小模型 $(H(A), \mathbf{m}')$ を具体的に構成する方法が存在し、 (A, \mathbf{m}) と A_∞ 擬同型な A_∞ 代数のうち $(H(A), \mathbf{m}')$ はベクトル空間としては一番小さくなる。逆に (A, \mathbf{m}) と A_∞ 擬同型な DG 代数をとると一般にベクトル空間としては巨大になる。例えばコホモロジーは有限次元であっても DG 代数は無次元になってしまったりするわけである。このような場合、DG 代数を DG 代数の枠組で具体的に分類等行うのは困難であるが、これらを A_∞ 代数の枠組で、極小 A_∞ 代数にして扱えば、有限次元ベクトル空間の線形代数の話に落ちるわけである。

A_∞ 代数のこのような有用性は有理ホモトピー論にも応用できる ([13] とその参考文献)。以下、同様の観点から A_∞ 圏について議論する。

2 A_∞ 圏 \mathcal{C} (A_∞ -categories)

A_∞ 代数の元を射に格上げしたものが A_∞ 圏である。

定義 7 (Fukaya[4]) A_∞ 圏 \mathcal{C} とは、対象の集まり $\text{Ob}(\mathcal{C}) = \{X_1, X_2, \dots\}$ と、各対象 X, Y に対して \mathbb{Z} 次数付きベクトル空間

$$\mathcal{C}(X, Y) := \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}^r(X, Y)$$

と、さらに $k = 1, 2, \dots$ に対して次数 $2 - k$ の線形写像

$$m_k : \mathcal{C}(X_1, X_2) \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}(X_k, X_{k+1}) \rightarrow \mathcal{C}(X_1, X_{k+1})$$

が与えられてそれらが A_∞ 代数の関係式を満たすものである。

特に $m_3 = m_4 = \dots = 0$ である A_∞ 圏 \mathcal{C} を DG 圏という。

例 8 4つの対象 X_1, \dots, X_4 から成る以下の \mathcal{C} は A_∞ 圏となる。

$$\mathcal{C} := \begin{array}{ccccccc} & & \xrightarrow{\rho_{14}} & & & & \\ & & \curvearrowright & & & & \\ X_1 & \xrightarrow{\rho_{12}} & X_2 & \xrightarrow{\rho_{23}} & X_3 & \xrightarrow{\rho_{34}} & X_4 \end{array}$$

ただし, ρ_{ij} は, 次数を

$$|\rho_{12}| = |\rho_{23}| = |\rho_{34}| = 1, \quad |\rho_{14}| = 2$$

とする $\mathcal{C}(X_i, X_j)$ の基底とし, 非自明な A_∞ 積

$$m_3(\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{34}) = \rho_{14}$$

入れる. (恒等射を入れても入れなくても \mathcal{C} は A_∞ 圏となる. つまり $\mathcal{C}(X_i, X_i) = 0$ 又は $\mathcal{C}(X_i, X_i) = K \cdot id_{X_i}$).

以下 A_∞ 圏というときには恒等射を持つもののことをいうことにする.

A_∞ 代数のときと同様, A_∞ 圏 \mathcal{C} のコホモロジー $H(\mathcal{C})$ が, 射についてコホモロジーをとってできる次数付き圏として定義される. 特に, ゼロ次のコホモロジーのみを考えると, \mathcal{C} が恒等射を持つ A_∞ 圏ならば $H^0(\mathcal{C})$ は普通の意味の圏となる.

2つの A_∞ 圏の間の A_∞ 関手が, A_∞ 写像の拡張として定義される. A_∞ 関手は, (その f_1 の部分によって) A_∞ 圏のコホモロジーの間の (次数を保つ) 関手を定める. A_∞ 圏の間の A_∞ 同値関手は, A_∞ 関手であって, そのコホモロジーの次数付き圏としての同値を与えるもののことをいう. (少し安直な定義に見えるが使ってみると妥当な定義であることが分かってくる.)

3 三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ の構成法

ホモロジー的ミラー対称性の定式化の際に A_∞ 圏 \mathcal{C} から三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ を構成する方法が Kontsevich [16] によって提案された. シンプレクティック多様体 M 上の深谷圏 $Fuk(M)$ は A_∞ 圏として定式化され, それとミラー双対な複素多様体 \check{M} 上の接続層の導来圏は三角圏であるが, この構成によって2つの圏を三角圏として比べることを可能にする. 実際, 三角圏同値

$$Tr(Fuk(M)) \simeq D^b(coh(\check{M}))$$

が存在するであろうというのがホモロジー的ミラー対称性予想である.

この $Tr(\mathcal{C})$ の構成法は, Bondal-Kapranov [3] による DG 圏から三角圏を構成する方法の自然な拡張であり, Fukaya [5] においてより明示的に定式化されているが, 以下の3ステップから成る. (解説が [22, 9] などにある.)

Step 1. A_∞ 圏 \mathcal{C} から次数シフトで閉じる加法的 A_∞ 圏 $\tilde{\mathcal{C}}$ を構成する.

Step 2. $\tilde{\mathcal{C}}$ における片側捻り複体の成す A_∞ 圏 $Tw(\mathcal{C})$ を構成する.

Step 3. $Tr(\mathcal{C}) := H^0(Tw(\mathcal{C}))$ と定める.

以下これらについて簡単に説明する.

Step 1. $\tilde{\mathcal{C}}$ は \mathcal{C} の形式的次数シフトの有限直和

$$\mathcal{X} := X_1[r_1] \oplus \cdots \oplus X_l[r_l], \quad X_* \in \mathcal{C}.$$

達を対象とする加法 A_∞ 圏 (つまり対象の直和が存在し, 射の空間が直和と両立している A_∞ 圏) とする. ここで, 射の空間は,

$$\tilde{\mathcal{C}}^r(X_i[r_i], X_j[r_j]) := \mathcal{C}^{r+r_j-r_i}(X_i, X_j)$$

によって (加法的に拡張することにより) 定める. $\tilde{\mathcal{C}}$ の A_∞ 構造 \tilde{m}_* としては m_* から自然に誘導されるものを考えたい. ただ, この \tilde{m}_* の決め方は (符号を除けば m_* そのものを加法的に拡張したものを考えるのであるが) 自然な符号の決め方はいくらかある. [12] をみよ.

Step 2. さて加法的 A_∞ 圏 \mathcal{C} が定まったとき, $\tilde{\mathcal{C}}$ における捻り複体 (\mathcal{X}, Φ) とは組

$$\mathcal{X} \in \tilde{\mathcal{C}}, \quad \Phi \in (s\tilde{\mathcal{C}})^0(\mathcal{X}, \mathcal{X})$$

であって以下 A_∞ モーラー・カルタン方程式

$$\tilde{m}_1(\Phi) + \tilde{m}_2(\Phi, \Phi) + \tilde{m}_3(\Phi, \Phi, \Phi) + \cdots = 0.$$

を満たすもののことである. $\mathcal{X} := X_1[n_1] \oplus \cdots \oplus X_l[n_l]$ に対し, Φ を

$$\Phi := \{\phi_{ij} \in s\tilde{\mathcal{C}}^0(X_i[n_i], X_j[n_j])\}_{i,j=1,\dots,l}$$

と行列表示しよう. 捻り複体 (\mathcal{X}, Φ) が片側捻り複体であるとは, $i \geq j$ のとき $\phi_{ij} = 0$ であるときをいう. つまり

$$\begin{pmatrix} 0 & \phi_{12} & \phi_{13} & \cdots & \phi_{1l} \\ 0 & 0 & \phi_{23} & \cdots & \phi_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \phi_{(l-1)l} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

となっている.

さて, A_∞ 圏 $Tw(\mathcal{C})$ を以下で定める.

- 対象は片側捻り複体 (\mathcal{X}, Φ) とする.
- 片側捻り複体 $(\mathcal{X}, \Phi), (\mathcal{Y}, \Psi)$ に対し, 射の空間は単に

$$Tw(\mathcal{C})((\mathcal{X}, \Phi), (\mathcal{Y}, \Psi)) := \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

とする.

- A_∞ 構造 m_n^{Tw} は, 各射 $\varphi_{i(i+1)} \in sTw(\mathcal{C})((\mathcal{X}_i, \Phi_i), (\mathcal{X}_{i+1}, \Phi_{i+1}))$ に対し

$$\begin{aligned} & m_n^{Tw}(\varphi_{12}, \dots, \varphi_{n(n+1)}) \\ & := \sum_{k_1, \dots, k_{n+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \tilde{m}_*((\Phi_1)^{k_1}, \varphi_{12}, (\Phi_2)^{k_2}, \dots, \varphi_{n(n+1)}, (\Phi_{n+1})^{k_{n+1}}) \end{aligned}$$

と定める. ただし $* = n + k_1 + \dots + k_{n+1}$ である.

この m_n^{Tw} が実際に A_∞ 関係式を満たすことを示すのは比較的簡単である [5].

Step 3. さて, $Tw(\mathcal{C})$ のゼロ次のコホモロジー $Tr(\mathcal{C}) = H^0(Tw(\mathcal{C}))$ をとると通常の意味の圏になることは明らかである. つまり, $Ob(Tw(\mathcal{C})) = Tr(\mathcal{C})$ であり, 射の空間 $Tr(\mathcal{C})((\mathcal{X}, \Phi), (\mathcal{Y}, \Psi))$ は $(Tw(\mathcal{C})((\mathcal{X}, \Phi), (\mathcal{Y}, \Psi)), m_1^{Tw})$ のゼロ次のコホモロジーであり, 圏 $Tr(\mathcal{C})$ の合成は m_2^{Tw} から誘導される. ($m_3^{Tw}, m_4^{Tw}, \dots$ は捨てられる.)

三角構造は以下のように入っている. まずシフト関手 $T: Tr(\mathcal{C}) \rightarrow Tr(\mathcal{C})$ は,

$$T(X) = X[1], \quad X \in \mathcal{C} \subset Tr(\mathcal{C})$$

を満たす加法的自己同型関手として自然に定められる (符号の問題について [12] をみよ).

そして, m_1^{Tw} -closed な射 $\Psi \in Tw(\mathcal{C})^0((\mathcal{X}, \Phi_x), (\mathcal{Y}, \Phi_y))$ の写像錘 $C(\Psi) \in Tw(\mathcal{C})$ が,

$$\begin{aligned} C(\Psi) & := (\mathcal{X}[1] \oplus \mathcal{Y}, \Phi), \\ \Phi & = \begin{pmatrix} \Phi_{\mathcal{X}[1]} & \Psi \\ 0 & \Phi_{\mathcal{Y}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

として定義される. ただし $T(\mathcal{X}, \Phi_x) =: (\mathcal{X}[1], \Phi_{\mathcal{X}[1]})$ とした. これより, $Tr(\mathcal{C})$ における完全三角系列が, 写像錘から定まる三角系列と同型なものとして定義される.

4 順序付き A_∞ 圏と例外的生成系

あとでいくらか説明するが, 順序付き A_∞ 圏から得られる三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ はかなり性質がよい.

定義 9 A_∞ 圏 \mathcal{C} が順序付き A_∞ 圏 (directed A_∞ -category) であるとは, \mathcal{C} が有限個の対象 X_1, \dots, X_n から成り, 各 $H(\mathcal{C}(X_i, X_j), m_1) =: H(\mathcal{C}(X_i, X_j))$ が有限次元であり, 特に

$$\begin{aligned} H(\mathcal{C}(X_i, X_i)) & = K \cdot id_{X_i}, \\ H(\mathcal{C}(X_i, X_j)) & = 0, \quad \text{if } i > j \end{aligned}$$

であるときをいう.

このとき, (X_1, \dots, X_n) は (それらを $Tr(\mathcal{C})$ の対象とみなして) 三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ の例外的生成系を成す.

定義 10 三角圏 \mathcal{T} の対象の列

$$\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$$

が三角圏 \mathcal{T} の例外的生成系 (full exceptional collection) であるとは、 \mathcal{E} が三角圏 \mathcal{T} を生成し、かつ

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(E_i, E_i[r]) &\simeq \delta_{r0} \cdot K, \\ \mathcal{T}(E_i, E_j[r]) &= 0 \quad (i > j, \text{ any } r). \end{aligned}$$

を満たすときをいう。例外的生成系 \mathcal{E} がさらに $r \neq 0$ について $\mathcal{T}(E_i, E_j[r]) = 0$ を満たすとき、 \mathcal{E} を強例外的生成系 (full strongly exceptional collection) という。

5 $Tr(\mathcal{C})$ の性質について

A_∞ 圏から得られる三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ について分かっていることをいくつか紹介しておく。

1. $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}'$ (A_∞ 圏同値) ならば $Tr(\mathcal{C}) \simeq Tr(\mathcal{C}')$ (三角圏同値) が成り立つ。(例えば [22].)

これより、三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ は極小 A_∞ 圏 \mathcal{C} について考えれば十分であることが分かる。

2. \mathcal{C} は対象 X_1, \dots, X_n からなる順序付き極小 A_∞ 圏とする。(極小なので $H(\mathcal{C}(X_i, X_j)) = \mathcal{C}(X_i, X_j)$ であることに注意する。) さらに $r \neq 0$ について

$$\mathcal{C}^r(X_i, X_j) = 0$$

であるとする。(このとき (X_1, \dots, X_n) は $Tr(\mathcal{C})$ の強例外的生成系を成す。) この射代数を

$$A := \tilde{\mathcal{C}}^0(\mathcal{X}, \mathcal{X}), \quad \mathcal{X} = X_1 \oplus \dots \oplus X_n$$

とおく。このとき

$$Tr(\mathcal{C}) \simeq D^b(\text{mod-}A)$$

が成り立つ。($D^b(\text{mod-}A)$ は有限生成右 A 加群の有界導来圏のことである。) 実際、この対応は関手 $\tilde{\mathcal{C}}^0(\cdot, \mathcal{X}) : Tr(\mathcal{C}) \rightarrow D^b(\text{mod-}A)$ によって与えられる。特にこれによって各 X_i は直既約射影 A 加群 P_i に移される。

$$\mathcal{C} \ni X_i \mapsto P_i = \tilde{\mathcal{C}}^0(X_i, \mathcal{X}) \in \text{mod-}A$$

(Bondal [2]).

3. 上の 2. の A_∞ 圏 \mathcal{C} について、三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ の A_∞ 増強は一意的である [10]。ただし、三角圏 \mathcal{T} の A_∞ 増強とは、 $\mathcal{T} \simeq Tr(\mathcal{C}') = H^0(Tw(\mathcal{C}'))$ となるようなある A_∞ 圏 \mathcal{C}' が存在するときの $Tw(\mathcal{C}')$ のことである。 A_∞ 増強の同値性についても [10] で適切に定義されている。

この証明において本質的なことは、 $H(\mathcal{C})$ の A_∞ 拡張 [11] (A_∞ -decoration [13]) が自明であるということだけである。つまり、 \mathcal{C} が、 $H(\mathcal{C})$ の A_∞ 拡張が自明な A_∞ 圏で

あるとき、三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ の A_∞ 増強は一意的 ($Tw(\mathcal{C})$ と同値なものしかない) であることがいえる [11]. このような \mathcal{C} の例として, 2. の例から「順序付き」という条件をはずしたもの, つまり有限個の対象と, 次数ゼロの射のみからなる極小 A_∞ 圏がある. 射が次数ゼロのもののみであるとき, 次数勘定から高次 A_∞ 積は自明になるしかないからである. ただし「順序付き」という条件をはずしているのでこの場合一般には $Tr(\mathcal{C}) \simeq D^b(\text{mod-}A)$ は成り立たない. 一般には $Tr(\mathcal{C})$ から, その対象の直和成分をすべて付け加えてできる三角圏 $Tr^\pi(\mathcal{C})$ のほうがよい概念であることがある.

4. A_∞ 増強の非一意性について:

三角圏 \mathcal{T} で, その A_∞ 増強が一意的でないようなものの例が Rizzardo-Van Den Bergh [20] において構成されている. [10] では例外的生成系を持つ三角圏でそのような例を構成したつもりであったが, 証明にギャップがあることが Van Den Bergh によって指摘され ([20]), いまだ修正されていない.

5. A_∞ 増強を持たない三角圏の例:

もともと Muro-Schwede-Strickland[18] において, A_∞ 増強を持たない ($\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 上の) 三角圏の例が構成されていたが, Rizzardo-Van Den Bergh [21] では, 体 K 上の三角圏で A_∞ 増強を持たないものの例が構成されている.

以上のことに加えて, 順序付き A_∞ 圏 \mathcal{C} から得られる三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ の持つよい性質のひとつとして以下がある.

定理 11 \mathcal{C} を順序付き A_∞ 圏とする. このとき, $\tilde{\mathcal{C}}$ の片側捻り複体 (\mathcal{X}, Φ) に対し, 必ずある $\tilde{\mathcal{C}}$ の片側捻り複体 (\mathcal{X}', Φ') で, $Tr(\mathcal{C})$ において (\mathcal{X}, Φ) と同型で, かつ恒等射を Φ' の成分に持たないものが存在する.

この事実は [10] でも触れられてはいるが, 証明は例えば [26] にある.

6 $Tr(\mathcal{C})$ の構成の具体例

定理 11 より, 順序付き A_∞ 圏 \mathcal{C} から得られる三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ の対象の分類問題は, Gabriel-Roiter [6] など解説されている籠の表現の分類の次数付き拡張のような線形代数的手法によって具体的に実行できる. (ただし, 籠の表現における「関係式」から来る制約条件は今の場合モラー・カルタン方程式にとってかわられる.) これについてはある程度 [10] において説明されている. ここではいくつかの簡単な例における具体的な実行例を紹介する.

例 12 \mathcal{C} を例 8 で扱った順序付き極小 A_∞ 圏 \mathcal{C} とする.

$$\mathcal{C} := X_1 \xrightarrow{\rho_{12}} X_2 \xrightarrow{\rho_{23}} X_3 \xrightarrow{\rho_{34}} X_4$$

つまり \mathcal{C} は X_1 から X_4 の 4 つの対象からなり, 射の空間 $\mathcal{C}(X_i, X_j)$ は $j = i, j = i + 1, (i, j) = (1, 4)$ のときのみ非自明であり, それらの次元 1 であり, $\mathcal{C}(X_i, X_i)$ の基底は恒等射 id_{X_i} , その他の場合の $\mathcal{C}(X_i, X_j)$ の基底を ρ_{ij} と表す. 特に ρ_{ij} の次数を

$$|\rho_{12}| = |\rho_{23}| = |\rho_{34}| = 1, \quad |\rho_{14}| = 2$$

と定め, A_∞ 積構造は恒等射を含む m_2 以外の非自明なものとして

$$m_3(\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{34}) = \rho_{14}$$

のみを入れる.

この \mathcal{C} に対し, 三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ の対象として例えば以下のようなものがある.

$$\begin{aligned} & (X_1, 0) \quad (X_2, 0) \quad (X_3, 0) \quad (X_4, 0) \\ & (X_1 \oplus X_2, \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \quad (X_2 \oplus X_3, \begin{pmatrix} 0 & \rho_{23} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \quad (X_3 \oplus X_4, \begin{pmatrix} 0 & \rho_{34} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \\ & \quad (X_1 \oplus X_4[1], \begin{pmatrix} 0 & \rho_{14} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \\ & (X_1 \oplus X_2 \oplus X_3, \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \quad (X_2 \oplus X_3 \oplus X_4, \begin{pmatrix} 0 & \rho_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{34} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \\ & (X_1 \oplus X_2 \oplus X_4[1], \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} & \rho_{14} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \quad (X_1[-1] \oplus X_3 \oplus X_4, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & 0 & \rho_{34} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

実は $Tr(\mathcal{C})$ の直既約対象の同型類はこれら 12 個の対象とその次数シフトでつきる [19].
まず, 例えば $(X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4, \Phi)$,

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

という対象は存在しない. なぜならば, これは以下のように A_∞ モーラー・カルタン方程式を満たさない.

$$\tilde{m}_1(\Phi) + \tilde{m}_2(\Phi, \Phi) + \tilde{m}_3(\Phi, \Phi, \Phi) = \tilde{m}_3(\Phi, \Phi, \Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

上の 12 個の対象の他に, 例えば

$$(X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4[1], \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} & 0 & \rho_{14} \\ 0 & 0 & \rho_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \quad (X_1[-1] \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & 0 & \rho_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

という対象があるが, 実はこれらは直既約でない. うまく同型で移すと

$$(X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4[1], \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} & 0 & \rho_{14} \\ 0 & 0 & \rho_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \simeq (X_1 \oplus X_2 \oplus X_3, \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \oplus (X_4[1], 0)$$

などとなっていることが分かる.

例 13 実は上の例において $Tr(\mathcal{C})$ は D_4 型箭の道代数 A_4 上の有限生成右加群の導来圏 $D^b(\text{mod-}A_4)$ と三角圏同値である. より一般に, 以下の順序付き極小 A_∞ 圏

$$\mathcal{C}_n := X_1 \xrightarrow{\rho_{12}} X_2 \xrightarrow{\rho_{23}} X_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{\rho_{(n-1)n}} X_n$$

$$|\rho_{i(i+1)}| = 1, \quad |\rho_{1n}| = 2$$

$$m_{n-1}(\rho_{12}, \dots, \rho_{(n-1)n}) = \rho_{1n}.$$

を考えると, 三角圏同値

$$Tr(\mathcal{C}_n) \simeq D^b(\text{mod-}A_n)$$

が存在する. ただし A_n は D_n 型箭の道代数である. [19] では, この事実を \mathcal{C}_n の成す例外的生成系を $D^b(\text{mod-}A_n)$ の強例外的生成系に変異で具体的に移すことによって示している.

例 14 以下のような次数付き圏を極小 A_∞ 圏 (あるいは微分の自明な DG 圏) とみなす.

$$\mathcal{C} := X \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} Y$$

ここで, 射の基底の次数は

$$|\alpha| = 0, \quad |\beta| = n \neq 0$$

とする. このとき, すべての直既約対象と既約射が具体的に [25] で分類されている. 直既約対象は図示すると

$$\begin{array}{ccc} \cdots & & \cdots \\ & \searrow \beta & \\ X[-n] & \xrightarrow{\alpha} & Y[-n] \\ & \searrow \beta & \\ X & \xrightarrow{\alpha} & Y \\ & \searrow \beta & \\ X[n] & \xrightarrow{\alpha} & Y[n] \\ & \searrow \beta & \\ \cdots & & \cdots \end{array}$$

というような形になる. 長さは有限であり, 始まりと終わりの頂点が $X[*]$ になっているか $Y[*]$ になっているかで種類が分かれる.

注意 15 この \mathcal{C} はクロネッカー箭の次数付き拡張である. つまり, $n=0$ のときの \mathcal{C} はクロネッカー箭と呼ばれているものである. このとき $Tr(\mathcal{C}) \simeq D^b(\text{coh}(\mathbb{CP}^1))$ であり, $Tr(\mathcal{C})$ の構造についてはよく研究されている [1, 6].

「新しい三角圏を具体的に構成したい」という目的からすれば、これらの例はまだ不十分である。実際、例 12, 13 は結果的には有限次元代数の有限生成加群の導来圏になっているし、例 14 の場合 \mathcal{C} はただの代数ではなく次数付き代数ではあるが、高次の A_∞ 積は存在しない。実はこの次数付き代数は、次数付き gentle 代数と呼ばれるもののうちの性質のよいものになっている。そのようなよいクラスの次数付き代数に付随する三角圏の構造が [14] で決定されていて、[25] の結果は [14] における結果の特別な場合とみることでもできるだろう。一方、三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ を具体的に構成可能（例えば直既約対象が加算個となるなど）なような A_∞ 圏 \mathcal{C} の例は、 \mathcal{C} が高次の A_∞ 積を持っていてもまだいくらかでもある。特にそのような極小順序付き A_∞ 圏 \mathcal{C} の中で、変異を行っても高次の A_∞ 積が消えないようなクラスのものがあるのか、そのようなものを今後探していきたいと思っている。

参考文献

- [1] A.A. Beilinson, Coherent sheaves on P^n and problems of linear algebras. *Func. Anal. Appl.* 12:214–216, 1978.
- [2] A. Bondal, Representations of associative algebras and coherent sheaves. (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 53:25–44, 1989; translation in *Math. USSR-Izv.* 34:23–42, 1990.
- [3] A. I. Bondal and M. M. Kapranov. Enhanced triangulated categories. *Math. USSR-Sb.*, 70:93–107, 1991.
- [4] K. Fukaya. Morse homotopy, A^∞ -category, and Floer homologies. In *Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology '93 (Seoul, 1993)*.
- [5] K. Fukaya. Floer homology and mirror symmetry. II. In *Minimal surfaces, geometric analysis and symplectic geometry*, volume 34 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 31–127. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002. (Baltimore, MD, 1999).
- [6] P. Gabriel and A. V. Roiter. *Representations of finite-dimensional algebras*. Springer, 1997.
- [7] T Kadeishvili. The algebraic structure in the homology of an $A(\infty)$ -algebra. *Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR (Russian)*, 108:249–252, 1982.
- [8] T. Kadeishvili. Cohomology C_∞ -algebra and rational homotopy type. arXiv:0811.1655.
- [9] 梶浦宏成. 数物系のための圏論：導来圏，三角圏， A_∞ 圏を中心に. 数理解析研究所講究ライブラリ 75, 2010.
- [10] H. Kajiura. On A_∞ -enhancements for triangulated categories. *Journal of Pure and Applied Algebra* 217.8:1476-1503, 2013.
- [11] 梶浦宏成. 三角圏の A_∞ 増強について (ミラー対称性の展望). 数理解析研究所講究録 1918: 42-58, 2014.

- [12] H. Kajiura. Comments on the shifts and the signs in A_∞ -categories, arXiv:1811.12664.
- [13] H. Kajiura. Cyclicity in homotopy algebras and rational homotopy theory. *Georgian mathematical journal*, 25.4:545-570, 2018.
- [14] M. Kalck and D. Yang. Derived categories of graded gentle one-cycle algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra* 222.10: 3005-3035, 2018.
- [15] B. Keller, Introduction to A -infinity algebras and modules. *Homology Homotopy Appl.* 3:1–35, 2001.
- [16] M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, (Zürich, 1994)*, 120–139, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [17] M. Markl, S. Shnider and J. Stasheff, *Operads in algebra, topology and physics*, Mathematical Surveys and Monographs, 96. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [18] F. Muro, S. Schwede, and N. Strickland, Triangulated categories without models. *Invent. Math.* 170: 231–241, 2007.
- [19] 野原康治. A_∞ 圏から三角圏を構成する方法と例外的対象系の変異について. 千葉大学大学院理学研究科修士論文, 2016年2月.
- [20] A. Rizzardo and M. Van den Bergh. A note on non-unique enhancements. arXiv:1701.00830.
- [21] A. Rizzardo and M. Van den Bergh. A k -linear triangulated category without a model. arXiv:1801.06344.
- [22] P. Seidel, *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*, *Zurich Lectures in Advanced Mathematics*, European Mathematical Society (EMS), Zurich, 2008.
- [23] J. Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:293–312, 1963.
- [24] J. Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces, II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:313–327, 1963.
- [25] 富岡啓介. ある DG 圏から得られる三角圏の構造について. 千葉大学大学院理学研究科修士論文, 2016年2月.
- [26] 安田圭人. 三角 A_∞ 圏における対象の性質について. 千葉大学大学院理学研究科修士論文, 2016年2月.

ON THE NOETHERIAN PROPERTY OF SYMBOLIC REES RINGS

Koji Nishida

1. DEFINITIONS OF SYMBOLIC POWERS AND SYMBOLIC REES RINGS

Throughout this section, we assume that R is a Noetherian ring and I is a proper ideal of R . Moreover, $\text{Min } I$ denotes the set of minimal prime ideals containing I . We put $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ and $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. For any $r \in \mathbb{Z}$, we set

$$\begin{aligned} I^{(r)} &= \bigcap_{P \in \text{Min } I} (I^r R_P \cap R) \\ &= \{a \in R \mid \text{There exists } s \in R \setminus \bigcup_{P \in \text{Min } I} P \text{ such that } sa \in I^r\} \end{aligned}$$

and call it the r -th symbolic power of I . Then we obviously have $I^{(r)} \supseteq I^r$ and $I^{(r)} \supseteq I^{(r+1)}$ for any $r \in \mathbb{Z}$.

Proposition 1.1. *The following assertions hold.*

- (1) *If R is Cohen-Macaulay and I is generated by a regular sequence, we have $I^{(r)} = I^r$ for any $r \in \mathbb{Z}$.*
- (2) *If $\sqrt{I} = I$, we have $I^{(r)} = \bigcap_{P \in \text{Min } I} P^{(r)}$ for any $r \in \mathbb{Z}$.*

Let t be an indeterminate. We put

$$\mathcal{R}_s(I) = \sum_{r \in \mathbb{N}_0} I^{(r)} t^r \subset R[t]$$

and call it the symbolic Rees ring of I . Since $I^{(r)} I^{(s)} \subseteq I^{(r+s)}$ for any $r, s \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{R}_s(I)$ is a graded subring of $R[t]$. Moreover, we set

$$\mathcal{R}'_s(I) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} I^{(r)} t^r \subset R[t, t^{-1}].$$

Theorem 1.2. *The following conditions are equivalent.*

- (1) $\mathcal{R}_s(I)$ is finitely generated.
- (2) $\mathcal{R}'_s(I)$ is finitely generated.
- (3) There exists $k \in \mathbb{N}$ such that $I^{(kr)} = (I^{(k)})^r$ for any $r \in \mathbb{Z}$.

2. HISTORICAL BACKGROUND

First, let us recall Nagata's counterexample to Hilbert's 14th problem. Let $R = K[x, y, z]$ be a polynomial ring over a field K . Let $\{(\alpha_i : \beta_i : \gamma_i)\}_{i=1, \dots, m}$ be a set of points in \mathbb{P}_K^2 . We set

$$P_i = I_2 \begin{pmatrix} x & y & z \\ \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \end{pmatrix} \in \text{Spec } R$$

and $I_H = \bigcap_{i=1}^m P_i$. Then we have $I_H^{(r)} = \bigcap_{i=1}^m P_i^r$ for all $r \in \mathbb{Z}$. Now, let $K = \mathbb{C}$, and assume that H is consisting of independent generic points, i.e., $\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}_{i=1, \dots, m}$ is algebraically independent over \mathbb{Q} .

Theorem 2.1. (Nagata [13], 1954) *The following assertions hold.*

- (1) *There exists a polynomial ring S and a group G acting on S such that*

$$S^G \cong \mathcal{R}'_s(I_H).$$

- (2) *$\mathcal{R}'_s(I_H)$ is not finitely generated if $m = 4^2, 5^2, 6^2, \dots$.*

Next, let us recall Cowsik's question. Let (R, \mathfrak{m}) be a local ring such that R/\mathfrak{m} is infinite and $\dim R = d > 0$. Let P be a prime ideal of R such that $\dim R/P = 1$.

Theorem 2.2. (Cowsik [2], 1984) *If $\mathcal{R}_s(P)$ is Noetherian, then P is a set theoretic complete intersection.*

Proof. As $\mathcal{R}_s(P)$ is Noetherian, there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $P^{(kr)} = (P^{(k)})^r$ for any $r \in \mathbb{Z}$. Let $I = P^{(k)}$. Then we have $\text{depth } R/I^r > 0$ for any $r \in \mathbb{N}$. Let

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}_0} I^r / \mathfrak{m}I^r$$

be the fiber cone of I . Then by Burch's inequality (cf. [1]),

$$\dim \mathcal{F} \leq \dim R - \inf\{\text{depth } R/I^r\}_{r=1,2,\dots} \leq d - 1.$$

Hence there exist $a_1, \dots, a_{d-1} \in I$ such that $I^{r+1} = (a_1, \dots, a_{d-1})I^r$ for $r \gg 0$. Thus we see $P = \sqrt{I} = \sqrt{(a_1, \dots, a_{d-1})R}$. \square

Question 2.3. (Cowsik [2], 1984) *Is $\mathcal{R}_s(P)$ Noetherian if R is a regular local ring and $P \in \text{Spec } R$?*

Example 2.4. *The following is a list of negative answers to Cowsik's question.*

- (1) (cf. [15], 1985) *Roberts gave the first counterexample in the case where $\dim R = 3$ using Nagata's counterexample to Hilbert's 14th problem. Unfortunately, in this example, \hat{P} is not a prime ideal in \hat{R} .*
- (2) (cf. [16], 1990) *Roberts gave another counterexample. In this example, R is complete, $\dim R = 7$ and $\dim R/P = 4$.*
- (3) (cf. [7], 1994) *Goto, Nishida and Watanabe found counterexamples among the ideals defining space monomial curves in the case where the base field has characteristic zero. In their examples, the minimum value of $e(R/P)$ is 25.*
- (4) (cf. [4], 2016) *González and Karu extended the class of ideals described in (3). In their examples, the minimum value of $e(R/P)$ is 7.*
- (5) (cf. [17], 2017) *Sannai and Tanaka constructed a counterexample in the polynomial ring with 12 variables over any field.*

3. REMARKS ON A SYSTEM OF PARAMETERS FOR A TWO DIMENSIONAL REGULAR LOCAL RING

In this section, we assume that (R, \mathfrak{m}) is a 2-dimensional regular local ring and a_1, a_2 is an sop for R such that $a_i \in \mathfrak{m}^{r_i}$ for $i = 1, 2$, where $r_i \in \mathbb{N}$. We set

$$\mathcal{R}(R) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathfrak{m}^r t^r,$$

which is a graded subring of $R[t]$. Let $\mathcal{R}(R)_+$ be the ideal generated by $\{\mathfrak{m}^r t^r\}_{r=1,2,\dots}$.

Lemma 3.1. *The following conditions are equivalent.*

- (1) $\mathcal{R}(R)_+ = \sqrt{(a_1 t^{r_1}, a_2 t^{r_2}) \mathcal{R}(R)}$.
- (2) $\mathfrak{m}^r = a_1 \mathfrak{m}^{r-r_1} + a_2 \mathfrak{m}^{r-r_2}$ for $r \gg 0$.
- (3) $\mathfrak{m}^{2r_1 r_2} = Q \mathfrak{m}^{r_1 r_2}$, where $Q = (a_1^{r_2}, a_2^{r_1})R \subset \mathfrak{m}^{r_1 r_2}$.

Proof. All implications (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1) can be verified directly. \square

The following fact plays a key role in this report.

Lemma 3.2. *We have $\ell_R(R/(a_1, a_2)R) \geq r_1 r_2$, where the equality holds if and only if*

$$\mathcal{R}(R)_+ = \sqrt{(a_1 t^{r_1}, a_2 t^{r_2}) \mathcal{R}(R)}.$$

Proof. We put $Q = (a_1^{r_2}, a_2^{r_1})R \subset \mathfrak{m}^{r_1 r_2}$. Then

$$r_1 r_2 \cdot \ell_R(R/(a_1, a_2)R) = \ell_R(R/Q) = e(Q) \geq e(\mathfrak{m}^{r_1 r_2}) = (r_1 r_2)^2 \cdot e(\mathfrak{m}) = r_1^2 r_2^2.$$

Therefore the required inequality follows. Moreover,

$$\begin{aligned} \ell_R(R/(a_1, a_2)R) = r_1 r_2 &\Leftrightarrow e(Q) = e(\mathfrak{m}^{r_1 r_2}) \\ &\Leftrightarrow Q \text{ is a reduction of } \mathfrak{m}^{r_1 r_2}. \end{aligned}$$

Consequently, we get the last assertion by 3.1. \square

4. RADICAL IDEALS OF REGULAR LOCAL RINGS OF DIMENSION THREE

Throughout this section, we assume that (R, \mathfrak{m}) is a 3-dimensional regular local ring. Moreover, I is an ideal of R such that $\sqrt{I} = I$ and $\dim R/I = 1$. Then $I = \bigcap_{P \in \text{Min } I} P$ and R/I is a CM ring. Furthermore, we have $\text{ht } P = 2$ and $IR_P = PR_P$ for any $P \in \text{Min } I$. Hence, for $f \in R$ and $r \in \mathbb{Z}$, we see that $f \in I^{(r)}$ if and only if $f \in P^r R_P$ for any $P \in \text{Min } I$.

Theorem 4.1. *Let $\xi_i \in I^{(r_i)}$ for $i = 1, 2$, where $r_i \in \mathbb{N}$. Let $u \in \mathfrak{m}$ be an sop for R/I such that $\sqrt{(x, \xi_1, \xi_2)R} = \mathfrak{m}$. Then*

$$e_{uR}(R/(\xi_1, \xi_2)R) \geq r_1 r_2 \cdot e_{uR}(R/I).$$

Proof. If $P \in \text{Min } I$, we have $\xi_i \in P^{r_i}R_P$ for $i = 1, 2$. We put $\mathcal{P} = \text{Min } (\xi_1, \xi_2)R \supseteq \text{Min } I$. Then, applying the additive formula of multiplicity and Lemma 3.2, we get

$$\begin{aligned}
e_{uR}(R/(\xi_1, \xi_2)R) &= \sum_{P \in \mathcal{P}} \ell(R_P/(\xi_1, \xi_2)R_P) \cdot e_{uR}(R/P) \\
&\geq \sum_{P \in \text{Min } I} \ell(R_P/(\xi_1, \xi_2)R_P) \cdot e_{uR}(R/P) \\
&\geq \sum_{P \in \text{Min } I} r_1 r_2 \cdot e_{uR}(R/P) \\
&= r_1 r_2 \cdot \sum_{P \in \text{Min } I} \ell(R_P/IR_P) \cdot e_{uR}(R/P) \\
&= r_1 r_2 \cdot e_{uR}(R/I).
\end{aligned}$$

□

Now we introduce Huneke's Condition. Let $\xi_i \in I^{(r_i)}$ for $i = 1, 2$, where $r_i \in \mathbb{N}$.

Definition 4.2. *If there exists an sop $u \in \mathfrak{m}$ for R/I such that $\sqrt{(u, \xi_1, \xi_2)R} = \mathfrak{m}$ and*

$$(*) \quad e_{uR}(R/(\xi_1, \xi_2)R) = r_1 r_2 \cdot e_{uR}(R/I),$$

*we say that ξ_1 and ξ_2 satisfy **HC** on I .*

Lemma 4.3. *The following conditions are equivalent.*

- (1) ξ_1 and ξ_2 satisfy **HC** on I .
- (2) $\mathfrak{m} = \sqrt{(u, \xi_1, \xi_2)R}$ for any sop $u \in \mathfrak{m}$ for R/I and $(*)$ holds.
- (3) $I = \sqrt{(\xi_1, \xi_2)R}$ and $\mathcal{R}(R_P)_+ = \sqrt{(\xi_1 t^{r_1}, \xi_2 t^{r_2})\mathcal{R}(R_P)}$ for any $P \in \text{Min } I$.

Proof. Let $u \in \mathfrak{m}$ be an sop for R/I such that $\sqrt{(u, \xi_1, \xi_2)R} = \mathfrak{m}$. From the proof of Theorem 4.1, we see that

$$e_{uR}(R/(\xi_1, \xi_2)R) = r_1 r_2 \cdot e_{uR}(R/I)$$

holds if and only if

$$\text{Min } (\xi_1, \xi_2)R = \text{Min } I \text{ and } \ell(R_P/(\xi_1, \xi_2)R_P) = r_1 r_2 \text{ for any } P \in \text{Min } I.$$

Of course, $\text{Min } (\xi_1, \xi_2)R = \text{Min } I$ holds if and only if $\sqrt{(\xi_1, \xi_2)R} = I$. Moreover, Lemma 3.2 implies that, for any $P \in \text{Min } I$, $\ell(R_P/(\xi_1, \xi_2)R_P) = r_1 r_2$ holds if and only if $\mathcal{R}(R_P)_+ = \sqrt{(\xi_1 t^{r_1}, \xi_2 t^{r_2})\mathcal{R}(R_P)}$. Therefore we get (1) \Rightarrow (3) and (3) \Rightarrow (2) of Lemma 4.3. The implication (2) \Rightarrow (1) holds obviously. □

The next result is called the Huneke's criterion.

Theorem 4.4. *(cf. [11, 12]) The following conditions are equivalent.*

- (1) $\mathcal{R}_s(I)$ is finitely generated.
- (2) There exist $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ for which we can choose elements $\xi_1 \in I^{(r_1)}$ and $\xi_2 \in I^{(r_2)}$ satisfying **HC** on I .

Huneke's criterion was first found by Huneke (cf. [11]) in the case where I is a prime ideal and R/\mathfrak{m} is infinite. Kurano and Nishida (cf. [12]) gave the generalized version together with a totally different proof for (2) \Rightarrow (1). The assumption that R is local is essential for (1) \Rightarrow (2). There exists a *graded version* for (2) \Rightarrow (1), which will be explained in the following. For that purpose, let us recall some basic facts on the localization by the irrelevant maximal ideal.

Let $S = K[x, y, z]$ be the polynomial ring over a field K . We regard S as an \mathbb{N}_0 -graded ring putting suitable weight on each variable, and set $\mathfrak{n} = (x, y, z)S$. Suppose that \mathfrak{a} is a homogeneous ideal of S such that $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$ and $\dim S/\mathfrak{a} = 1$. We put $R = S_{\mathfrak{n}}$ and $I = \mathfrak{a}R$. Then, the basic assumptions on R and I of this section are satisfied. It is easy to see that, for any homogeneous ideal \mathfrak{b} of S , we have $\ell(S/\mathfrak{b}) = \ell(R/\mathfrak{b}R)$. Moreover, the following assertions hold.

Proposition 4.5. *For any $r \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{a}^{(r)}$ is homogeneous and $\mathfrak{a}^{(r)}R = I^{(r)}$. Moreover, $\mathcal{R}_s(\mathfrak{a})$ is finitely generated if and only if so is $\mathcal{R}_s(I)$*

Let $\xi_i \in \mathfrak{a}^{(r_i)}$ for $i = 1, 2$, where $r_i \in \mathbb{N}$. Then the image of ξ_i in R is in $I^{(r_i)}$.

Definition 4.6. *We say that ξ_1 and ξ_2 satisfy **HC** on \mathfrak{a} , if the images of those elements in R satisfy **HC** on I .*

Proposition 4.7. *$\mathcal{R}_s(\mathfrak{a})$ is finitely generated if and only if there exist $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ for which we can choose elements $\xi_1 \in \mathfrak{a}^{(r_1)}$ and $\xi_2 \in \mathfrak{a}^{(r_2)}$ satisfying **HC** on \mathfrak{a} .*

Let us notice that the elements ξ_1 and ξ_2 satisfying **HC** on \mathfrak{a} are not necessarily homogeneous.

5. RADICAL IDEALS OF $K[x, y, z]$ GENERATED BY HOMOGENEOUS POLYNOMIALS

Throughout this section, we assume that $R = K[x, y, z]$ is a polynomial ring over a field K . We put $\mathfrak{m} = (x, y, z)R$ and regard R as an \mathbb{N}_0 -graded ring setting $\deg x = \deg y = \deg z = 1$. Let I be a homogeneous ideal of R such that $\sqrt{I} = I$ and $\dim R/I = 1$. We put $e = e(R/I)$. Then $I = \bigcap_{P \in \text{Min } I} P$ and R/I is a homogeneous Cohen-Macaulay ring. Let us regard $\mathcal{R}_s(I)$ as an \mathbb{N}^2 -graded ring. If $f \in [I^{(r)}]_d$, then the degree of $ft^r \in \mathcal{R}_s(I)$ is (r, d) .

It is obvious that any $P \in \text{Min } I$ is homogeneous and $\text{ht } P = 2$. Hence, for any $P \in \text{Min } I$, we have $IR_P = PR_P$, so

$$\ell_{R_P}(R_P/I^{(r)}R_P) = \ell_{R_P}(R_P/P^rR_P) = 1 + 2 + \cdots + r = \frac{r(r+1)}{2}.$$

Then, by additive formula of multiplicity, we see

$$e(R/I^{(r)}) = \sum_{P \in \text{Min } I} \ell(R_P/I^{(r)}R_P) e(R/P) = \frac{r(r+1)}{2} \sum_{P \in \text{Min } I} e(R/P).$$

Thus we get the following result.

Proposition 5.1. $e(R/I^{(r)}) = \frac{r(r+1)}{2} \cdot e$ for any $r \in \mathbb{N}$.

Let us notice that $R/I^{(r)}$ is a 1-dimensional graded Cohen-Macaulay ring. Hence $R/I^{(r)}$ has a homogeneous non-zero-divisor of degree one. Therefore

$$[R/I^{(r)}]_d \hookrightarrow [R/I^{(r)}]_{d+1}$$

for any $d \in \mathbb{N}$. By Proposition 5.1, we see

$$\dim_K [R/I^{(r)}]_d = \frac{r(r+1)}{2} \cdot e$$

for $d \gg 0$, and so

$$\begin{aligned} \dim_K [I^{(r)}]_d &= \dim_K R_d - \dim_K [R/I^{(r)}]_d \\ &\geq \binom{d+2}{2} - e \cdot \frac{r(r+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \{(d+2)(d+1) - er(r+1)\} \\ &= \frac{1}{2} \{d^2 + 3d + 2 - er(r+1)\}. \end{aligned}$$

If $d \geq \sqrt{e}(r+1)$, then $d^2 \geq e(r+1)^2 > er(r+1)$, so $\dim_K [I^{(r)}]_d > 0$. Consequently, we get the following result.

Proposition 5.2. $[I^{(r)}]_d \neq 0$ for any $(r, d) \in \mathbb{N}^2$ satisfying $d \geq \sqrt{e} \cdot r + \sqrt{e}$.

Here, let us introduce the condition **NC** as follows.

Definition 5.3. We say that I satisfies **NC** if $[I^{(r)}]_d = 0$ for any $(r, d) \in \mathbb{N}^2$ satisfying $d/r \leq \sqrt{e}$.

As is well known, if e is not a square number, then $\sqrt{e} \notin \mathbb{Q}$, and so we may replace the inequality $d/r \leq \sqrt{e}$ in Definition 5.3 with $d/r < \sqrt{e}$.

Conjecture 5.4. (Nagata's conjecture) Let $K = \mathbb{C}$ and let H be a set of independent generic m points in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. If $m \geq 10$, then I_H satisfies **NC**.

Nagata himself proved that his conjecture is true if $m = 4^2, 5^2, 6^2, \dots$ (cf. [13]).

Theorem 5.5. If I satisfies **NC**, then $\mathcal{R}_s(I)$ is not finitely generated.

Proof. Suppose that I satisfies **NC**. Let us take finitely many non zero homogeneous elements $f_1 \in [I^{(r_1)}]_{d_1}, f_2 \in [I^{(r_2)}]_{d_2}, \dots, f_n \in [I^{(r_n)}]_{d_n}$ arbitrarily, where $r_i, d_i \in \mathbb{N}$ for $i = 1, \dots, n$. Setting $T = R[f_1 t^{r_1}, f_2 t^{r_2}, \dots, f_n t^{r_n}]$, We aim to show $T \subsetneq \mathcal{R}_s(I)$.

Let $a = \min\{d_1/r_1, d_2/r_2, \dots, d_n/r_n\}$. Since I satisfies **NC**, we have $a > \sqrt{e}$. On the other hand, if $T_{(r,d)} \neq 0$, it follows that $d/r \geq a$. Let us notice that there exists $(r', d') \in \mathbb{N}^2$ such that $a > d'/r' > \sqrt{e}$ and $d' \geq \sqrt{e} \cdot r' + \sqrt{e}$. Then we have $T_{(r',d')} = 0$ and $[I^{(r')}]_{d'} \neq 0$ by Proposition 5.2. Therefore we see $T \subsetneq \mathcal{R}_s(I)$ \square

The next result is the homogeneous version of Theorem 4.1.

Theorem 5.6. *Suppose $\xi_i \in [I^{(r_i)}]_{d_i}$ for $i = 1, 2$, where $r_i, d_i \in \mathbb{N}$. Assume that ξ_1, ξ_2 is an R -regular sequence. Then we have*

$$\frac{d_1}{r_1} \cdot \frac{d_2}{r_2} \geq e$$

Proof. We may assume that K is infinite. Let us choose sufficiently general element $u \in R_1$. Since $\xi_i \in (IR_{\mathfrak{m}})^{(r_i)}$ for $i = 1, 2$ and u is an sop for $R_{\mathfrak{m}}/(\xi_1, \xi_2)R_{\mathfrak{m}}$, by Theorem 4.1 we get

$$e_{uR_{\mathfrak{m}}}(R_{\mathfrak{m}}/(\xi_1, \xi_2)R_{\mathfrak{m}}) \geq r_1 r_2 \cdot e_{uR_{\mathfrak{m}}}(R_{\mathfrak{m}}/IR_{\mathfrak{m}}).$$

The left hand side coincides with $e(R/(\xi_1, \xi_2)R) = d_1 d_2$. Moreover, we have

$$e_{uR_{\mathfrak{m}}}(R_{\mathfrak{m}}/IR_{\mathfrak{m}}) = e(R/I) = e.$$

Hence we get the required inequality. \square

Here, let us review the condition **HC**.

Lemma 5.7. *Let $\xi_i \in [I^{(r_i)}]_{d_i}$ for $i = 1, 2$, where $r_i, d_i \in \mathbb{N}$. We assume that ξ_1, ξ_2 is an R -regular sequence. Then ξ_1 and ξ_2 satisfy **HC** on I if and only if*

$$(*) \quad \frac{d_1}{r_1} \cdot \frac{d_2}{r_2} = e.$$

Therefore, by Huneke's criterion we get the next result.

Theorem 5.8. *$\mathcal{R}_s(I)$ is finitely generated if there exist $r_1, d_1, r_2, d_2 \in \mathbb{N}$ satisfying the following conditions ;*

- (1) *the equality (*) holds, and*
- (2) *there exist $\xi_i \in [I^{(r_i)}]_{d_i}$ for $i = 1, 2$ such that ξ_1, ξ_2 is an R -regular sequence.*

Remark 5.9. *Let $\xi_i \in [I^{(r_i)}]_{d_i}$ for $i = 1, 2$, where $r_i, d_i \in \mathbb{N}$. We assume that ξ_1 and ξ_2 satisfy **HC** on I , i.e.,*

$$\frac{d_1}{r_1} \cdot \frac{d_2}{r_2} = e.$$

Then the following two cases can not happen;

- (i) $\frac{d_i}{r_i} > \sqrt{e}$ for $i = 1, 2$;
- (ii) $\frac{d_i}{r_i} < \sqrt{e}$ for $i = 1, 2$.

Hence, replacing the subscripts 1 and 2 with each other if necessary, we have

$$\frac{d_1}{r_1} \leq \sqrt{e} \quad \text{and} \quad \frac{d_2}{r_2} \geq \sqrt{e}.$$

6. FERMAT IDEALS

Throughout this section, we assume that $R = K[x, y, z]$ is a polynomial ring over a field K . We set $\mathfrak{m} = (x, y, z)R$ and regard R as an \mathbb{N}_0 -graded ring setting $\deg x = \deg y = \deg z = 1$. Let $3 \leq n \in \mathbb{N}$. We assume that $\text{ch } K \nmid n$ if $\text{ch } K > 0$ and there exists a primitive n -th root of unity θ in K .

Let H be the set of the following $n^2 + 3$ points in \mathbb{P}_K^2 ;

$$\{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\} \cup \{(1 : \theta^i : \theta^j) \mid i, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Then we have

$$I_H = (y, z) \cap (z, x) \cap (x, y) \cap \bigcap_{i,j=1}^n P_{ij},$$

where $P_{ij} = (y - \theta^i x, z - \theta^j x)$. Here we set $f = y^n - z^n$, $g = z^n - x^n$ and $h = x^n - y^n$. Since $f + g + h = 0$, we have $(f, g) = (g, h) = (h, f)$. Moreover, we can prove

$$I_H = (xf, yg, zh) \quad \text{and} \quad (f, g) = \bigcap_{i,j=1}^n P_{i,j}.$$

Therefore, the following assertion holds.

Lemma 6.1. $I_H^{(r)} = (y, z)^r \cap (z, x)^r \cap (x, y)^r \cap (f, g)^r$ for any $r \in \mathbb{Z}$.

Harbourne and Seceleanu proved that $\mathcal{R}_s(I_H)$ is finitely generated if $n = 3$ (cf. [9]). Moreover, Nagel and Seceleanu proved that $\mathcal{R}_s(I_H)$ is still finitely generated even if $n \geq 4$ (cf. [14]). Here, we would like to give another proof using Huneke's criterion.

First, let us consider the case where $n = 3$. We set

$$\xi_1 = fgh \in [I_H^{(3)}]_9 \quad \text{and} \quad \xi_2 = xf \cdot yg + yg \cdot zh + zh \cdot xf \in [I_H^2]_8.$$

Since $(9/3) \cdot (8/2) = 12 = e(R/I_H)$, it follows that ξ_1 and ξ_2 satisfies **HC** on I_H by Lemma 5.7. Next, we consider the case where $n \geq 4$. Choosing $\alpha \in K \setminus \{0, 1\}$, we set

$$\xi_1 = (fgh)(\alpha f + g)^{n-3} \quad \text{and} \quad \xi_2 = (xf)^2(yg)^{n-2} + (yg)^2(zh)^{n-2} + (zh)^2(xf)^{n-2} + f^{n-2}gh.$$

Then $\xi_1 \in I_H^{(n)}$ and $\xi_2 \in I_H^n$. Although ξ_2 is not homogeneous, we can prove that ξ_1 and ξ_2 satisfy **HC** on I_H using Lemma 4.3.

7. IDEALS OF $\mathbb{Z}[x, y, z]$ GENERATED BY QUASIHOMOGENEOUS POLYNOMIALS OF TYPE (a, b, c)

Throughout this section, we assume that $S = \mathbb{Z}[x, y, z]$ is a polynomial ring over \mathbb{Z} . We put $\mathfrak{n} = (x, y, z)S$. Let K be a field. We set $S_K = K \otimes_{\mathbb{Z}} S = K[x, y, z]$, and for an ideal J of S , we denote JS_K by J_K . Moreover, for an element $\xi \in S$, we denote its image in S_K by ξ_K . Let us regard S and S_K as \mathbb{N}_0 -graded rings setting $\deg x = a$, $\deg y = b$, $\deg z = c$, where $a, b, c \in \mathbb{N}$. We assume that I is a homogeneous ideal of S such that $\sqrt{xS + I} = \mathfrak{n}$, $\sqrt{I_K} = I_K$ and $\dim S_K/I_K = 1$ for any field K . Finally, throughout this section p denotes a prime number.

Definition 7.1. Let K be a field, $k \in \mathbb{N}$ and $f \in I_K^{(k)}$. We define

$$\text{HC}(I_K; k, f) := \{ \ell \in \mathbb{N} \mid \text{There exists } g \in I_K^{(\ell)} \text{ such that } f \text{ and } g \text{ satisfy } \mathbf{HC} \text{ on } I_K \}.$$

Proposition 7.2. *Let $k = 1$ or 2 , and let $f \in I_K^{(k)}$. We assume that there exists $i \in \mathbb{N}$ such that $f \equiv y^i \pmod{xS_K}$ and $\text{HC}(I_K; k, f) \neq \phi$. We set $m = \min \text{HC}(I_K; k, f)$. Then the following assertions hold.*

- (1) $\text{HC}(I_K; k, f) = \{m, 2m, 3m, \dots\}$.
- (2) $S_K[I_K t, I_K^{(2)} t^2, \dots, I_K^{(m-1)} t^{m-1}] \subsetneq \mathcal{R}_s(I_K)$.

Definition 7.3. *For any $r \in \mathbb{Z}$, we set $I^{(r, x)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (I^r :_R x^i)$.*

If $\xi \in I^{(r, x)}$, it is easy to see $\xi_K \in I_K^{(r)}$ for any field K .

Proposition 7.4. *The following assertions hold.*

- (1) $(I_{\mathbb{Q}})^{(r)} = (I^{(r, x)})_{\mathbb{Q}}$ and $(I_{\mathbb{F}_p})^{(r)} = (I^{(r, x)})_{\mathbb{F}_p}$ for $p \gg 0$.
- (2) Let $\xi \in I^{(k, x)}$ and $\eta \in I^{(\ell, x)}$, where $k, \ell \in \mathbb{N}$. Suppose that $\xi_{\mathbb{Q}}$ and $\eta_{\mathbb{Q}}$ satisfy **HC** on $I_{\mathbb{Q}}$. Then $\xi_{\mathbb{F}_p}$ and $\eta_{\mathbb{F}_p}$ satisfy **HC** on $I_{\mathbb{F}_p}$ for $p \gg 0$.
- (3) Suppose that $k \in \mathbb{N}$, $\xi \in I^{(k, x)}$ and $\xi \equiv y^i \pmod{xS}$ for some $i \in \mathbb{N}$. Then we have $\text{HC}(I_{\mathbb{Q}}; k, \xi_{\mathbb{Q}}) = \text{HC}(I_{\mathbb{F}_p}; k, \xi_{\mathbb{F}_p})$ for $p \gg 0$.

Theorem 7.5. *Let $k = 1$ or 2 . Let $\xi \in I^{(k, x)}$ and $\xi \equiv y^i \pmod{xS}$ for some $i \in \mathbb{N}$. Suppose that there exists $r \in \mathbb{N}$ such that, for any $p \gg 0$, $rp^{e_p} \in \text{HC}(I_{\mathbb{F}_p}; k, \xi_{\mathbb{F}_p})$ holds for some $e_p \in \mathbb{N}$. Then the following conditions are equivalent.*

- (1) $\mathcal{R}_s(I_{\mathbb{Q}})$ is finitely generated.
- (2) $\text{HC}(I_{\mathbb{Q}}; k, \xi_{\mathbb{Q}}) \neq \phi$.
- (3) $r \in \text{HC}(I_{\mathbb{Q}}; k, \xi_{\mathbb{Q}})$.
- (4) $r \in \text{HC}(I_{\mathbb{F}_p}; k, \xi_{\mathbb{F}_p})$ for $p \gg 0$.

Under the assumption of Theorem 7.5, it follows that $\mathcal{R}_s(I_{\mathbb{Q}})$ is not finitely generated if $r \notin \text{HC}(I_{\mathbb{Q}}; k, \xi_{\mathbb{Q}})$.

8. IDEALS DEFINING SPACE MONOMIAL CURVES

Throughout this section we assume that $S = \mathbb{Z}[x, y, z]$ is a polynomial ring over \mathbb{Z} . We put $\mathfrak{n} = (x, y, z)S$. Let K be a field. We set $S_K = K \otimes_{\mathbb{Z}} S = K[x, y, z]$. Moreover, for an element $\xi \in S$, we denote its image in S_K by ξ_K . Let us regard S and S_K as \mathbb{N}_0 -graded rings setting $\deg x = a$, $\deg y = b$, $\deg z = c$, where $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Let $\varphi : S_K \rightarrow K[t]$ be the homomorphism of K -algebras such that $\varphi(x) = t^a$, $\varphi(y) = t^b$ and $\varphi(z) = t^c$. We set

$$\mathfrak{p}_K(a, b, c) = \text{Ker } \varphi,$$

which is a homogeneous prime ideal of S_K of height 2. If $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ is not a complete intersection, then it is generated by the maximal minors of a matrix of the following form;

$$(\#) \quad \begin{pmatrix} y^{t_3} & z^{u_1} & x^{s_2} \\ z^{u_2} & x^{s_3} & y^{t_1} \end{pmatrix},$$

where $s_2, s_3, t_1, t_3, u_1, u_2$ are positive integers which are determined without depending on the field K (cf. [10]). Let $\mathfrak{p}(a, b, c)$ be the ideal of S generated by the maximal minors of $(\#)$. Then we have $\sqrt{xS + \mathfrak{p}(a, b, c)} = \mathfrak{n}$ and $\mathfrak{p}(a, b, c)S_K = \mathfrak{p}_K(a, b, c)$ for any field K .

The ideals defining space monomial curves explained above are deeply related to the defining ideals of certain finite set of points in \mathbb{P}_K^2 . Let us verify this fact in the case where $K = \mathbb{C}$. We put $\theta_n = e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$ for $n \in \mathbb{N}$. Let $H(a, b, c)$ be the set of the following points in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$;

$$\{(\theta_a^i : \theta_b^j : \theta_c^k) \mid i = 1, \dots, a ; j = 1, \dots, b ; k = 1, \dots, c\}.$$

Taking new variables X, Y, Z , we set $T = \mathbb{C}[X, Y, Z]$. We consider the defining ideal of $H(a, b, c)$ in T , i.e.,

$$I_{H(a,b,c)} = \bigcap_{i,j,k} I_2 \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ \theta_a^i & \theta_b^j & \theta_c^k \end{pmatrix}.$$

Let us regard $S_{\mathbb{C}}$ as a subring of T setting $x = X^a, y = Y^b, z = Z^c$. Then the equality

$$I_{H(a,b,c)}^{(r)} = \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}(a, b, c)^{(r)}T$$

holds for any $r \in \mathbb{Z}$ and we have the following.

Proposition 8.1. $\mathcal{R}_s(I_{H(a,b,c)})$ is finitely generated if and only if so is $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}(a, b, c))$.

It is not so difficult to find concrete examples of $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ whose symbolic Rees algebras are finitely generated by using Huneke's criterion. For example, Huneke himself proved that $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ is finitely generated if $\min\{a, b, c\} \leq 4$ and $\text{ch } K \neq 2$ (cf. [11]). On the other hand, constructing infinitely generated $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ is hard. Goto, Nishida and Watanabe found concrete examples of $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ with infinitely generated symbolic Rees rings for the first time (cf. [7]), and later González and Karu extended such class of ideals much wider (cf. [4]). In the following, we give examples of infinitely generated $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p}(a, b, c))$ of new type.

First, we choose $\alpha \in \mathbb{Q}$ with $1 < \alpha < 5/4$ arbitrary. Then, as $2 < (17 - 10\alpha)/(6 - 3\alpha)$, we can choose $\beta \in \mathbb{Q}$ so that $2 < \beta < (17 - 10\alpha)/(6 - 3\alpha)$. Next, we write $\alpha = u_2/u_1$ and $\beta = s_2/s_3$, taking $u_2, u_1, s_2, s_3 \in \mathbb{N}$ suitably. Let $t_1 = t_3 = 1$ and $a = 2u_1 + u_2$, $b = s_3u_2 + s_2u_1 + s_2u_2$, $c = s_2 + 2s_3t_1$.

Example 8.2. ([12]) If $\text{GCD}\{a, b, c\} = 1$, then $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ is minimally generated by the maximal minors of the matrix (\sharp) stated above for any field K . We can find $\xi \in \mathfrak{p}(a, b, c)^{(2,x)}$ satisfying the following conditions ;

- (i) $\xi \equiv y^3 \pmod{xS}$,
- (ii) for any prime number p , $3p^{e_p} \in \text{HC}(\mathfrak{p}_{\mathbb{F}_p}(a, b, c); 2, \xi_{\mathbb{F}_p})$ if $e_p \gg 0$, and
- (iii) $3 \notin \text{HC}(I_{\mathbb{Q}}; 2, \xi_{\mathbb{Q}})$.

Consequently, it follows that $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p}_{\mathbb{Q}}(a, b, c))$ is not Noetherian.

The simplest case is $\alpha = 6/5$ and $\beta = 49/24$. In this case $a = 16$, $b = 683$ and $c = 97$. In order to explain what is new about the example stated above, let us recall the notion of negative curve (cf. [3]). First, we have to consider the irreducible decomposition of elements in $[\mathfrak{p}_K(a, b, c)^{(r)}]_d$, where $r, d \in \mathbb{N}$. We put $R = S_K$ and $P = \mathfrak{p}_K(a, b, c)$. Let $\xi \in [P^{(r)}]_d \setminus P^{(r+1)}$.

Lemma 8.3. Let $\xi = \xi_1\xi_2 \cdots \xi_s$, where $\xi_i \in [R]_{d_i}$ for $i = 1, 2, \dots, s$. We set $r_i = \max\{\ell \mid \xi_i \in P^\ell R_P\}$. Then the following assertions hold.

- (1) $\xi_i \in [P^{(r_i)}]_{d_i}$ for $i = 1, 2, \dots, s$.
- (2) $r_1 + r_2 + \dots + r_s = r$ and $d_1 + d_2 + \dots + d_s = d$.
- (3) If $d/r < \alpha \in \mathbb{R}$, then $d_i/r_i < \alpha$ for some $i = 1, 2, \dots, s$.

Proof. The assertion (1) and $d_1 + d_2 + \dots + d_s = d$ is obvious. We get $r_1 + r_2 + \dots + r_s = r$ by considering the initial forms of ξ_1, \dots, ξ_s in the associated graded ring of R_P , which is an integral domain. Suppose that $d_i/r_i \geq \alpha$ for any $i = 1, 2, \dots, s$. Then we have

$$d = d_1 + d_2 + \dots + d_s \geq \alpha(r_1 + r_2 + \dots + r_s) = \alpha r,$$

which means $d/r \geq \alpha$. □

Definition 8.4. Let $\xi \in [\mathfrak{p}_K(a, b, c)^{(r)}]_d$, where $r, d \in \mathbb{N}$. If ξ is irreducible and

$$\frac{d}{r} < \sqrt{abc},$$

ξ is called a negative curve.

Theorem 8.5. Assume that a, b, c are pairwise coprime and abc is not a square number. Then there exists a negative curve if $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ is finitely generated.

Proof. Let us give an algebraic proof in the case where $K = \mathbb{C}$. We put $R = S_{\mathbb{C}}$, $P = \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}(a, b, c)$ and $H = H(a, b, c) \subset P_{\mathbb{C}}^2$. Let us define I_H to be an ideal of $T = \mathbb{C}[X, Y, Z]$. We assume that $\mathcal{R}_s(P)$ is Noetherian. Then $\mathcal{R}_s(I_H)$ is also Noetherian. Hence I_H does not satisfy **NC** by Theorem 5.5. This means that there exist $r, \delta \in \mathbb{N}$ such that $[I_H^{(r)}]_{\delta} \neq 0$ and $\delta/r < \sqrt{abc}$ ($\delta/r = \sqrt{abc}$ can not happen as abc is not a square number). Since $I_H^{(r)} = P^{(r)}T$, we have $[P^{(r)}]_d \neq 0$ for some $d \in \mathbb{N}$ with $d \leq \delta$. Let us notice $d/r \leq \delta/r < \sqrt{abc}$.

Now we take an element $0 \neq \xi \in [P^{(r)}]_d$. Let $\xi = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_s$ be the irreducible decomposition, where $\xi_i \in [R]_{d_i}$. We set $r_i = \max\{\ell \mid \xi \in P^{\ell} R_P\}$ for $i = 1, 2, \dots, s$. By Lemma 8.3, we have $d_i/r_i < \sqrt{abc}$ for some $i = 1, 2, \dots, s$. Then ξ_i is a negative curve as $\xi_i \in [P^{(r_i)}]_{d_i}$. □

Cutkosky proved that the converse of Theorem 8.5 holds if $\text{ch } K > 0$.

Theorem 8.6. We assume that a, b, c are pairwise coprime. Let $\xi_i \in [\mathfrak{p}_K(a, b, c)^{(r_i)}]_{d_i}$ for $i = 1, 2$, where $r_i, d_i \in \mathbb{N}$. Let ξ_1, ξ_2 be an S_K -regular sequence. Then the following assertions hold.

- (1) $\frac{d_1}{r_1} \cdot \frac{d_2}{r_2} \geq abc$.
- (2) The equality holds in (1) if and only if ξ_1 and ξ_2 satisfies **HC** on $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$.

If $K = \mathbb{C}$, Theorem 8.6 follows from Theorem 5.5, Lemma 5.6 and Proposition 8.3 as $e(T/I_{H(a,b,c)}) = \sharp H(a, b, c) = abc$.

The following result explains the uniqueness of negative curve.

Theorem 8.7. We assume that a, b, c are pairwise coprime. Let $\xi_i \in [\mathfrak{p}_K(a, b, c)^{(r_i)}]_{d_i}$ for $i = 1, 2$, where $r_i, d_i \in \mathbb{N}$. If both ξ_1 and ξ_2 are negative curves, then $\xi_1 \sim \xi_2$.

Proof. Suppose that ξ_i is a negative curve for $i = 1, 2$ and $\xi_1 \not\sim \xi_2$. Then, as $d_i/r_i < \sqrt{abc}$ for $i = 1, 2$, we have $(d_1/r_1)(d_2/r_2) < abc$. On the other hand, ξ_1, ξ_2 is S_K -regular as ξ_i is irreducible for $i = 1, 2$. So, by TheoremrefT8.7 we have $(d_1/r_1)(d_2/r_2) \geq abc$, which is impossible. Therefore the required assertion follows. \square

Let $\mathfrak{p}_{\mathbb{Q}}(a, b, c)$ be one of the examples found by Goto, Nishida, Watanabe (cf. [7]) and González, Karu (cf. [4]). Then it has a negative curve in the first symbolic power.

Example 8.8. (cf. [12]) *Let $\mathfrak{p}_{\mathbb{Q}}(a, b, c)$ be the example given in Example 8.2. Let ξ be the element in $\mathfrak{p}(a, b, c)^{(2, x)}$ used for proving that $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p}_{\mathbb{Q}}(a, b, c))$ is infinitely generated. Then, for any field K , $\xi_K \in \mathfrak{p}_K(a, b, c)^{(2)}$ and it is a negative curve.*

For example, if $P = \mathfrak{p}_K(16, 683, 97)$, then $\xi_K \in [P^{(2)}]_{2049}$. One can check $2049/2 < \sqrt{16 \cdot 683 \cdot 97}$ directly.

Recently, for any $k \in \mathbb{N}$, González and Karu found examples of $\mathfrak{p}_{\mathbb{Q}}(a, b, c)$ such that $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p}_{\mathbb{Q}}(a, b, c))$ is infinitely generated and there exists a negative curve in $\mathfrak{p}_{\mathbb{Q}}(a, b, c)^{(k)}$ (cf. [5]).

REFERENCES

- [1] L. BURCH, *Codimension and analytic spread*, Proc. Camb. Phil. Soc. **72** (1972), 369–373.
- [2] R. C. COWSIK, *Symbolic powers and number of defining equations*, Algebra and its applications (New Delhi, 1981), Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **91**, Dekker, New York, 1984, 13–14.
- [3] S. D. CUTKOSKY, *Symbolic algebras of monomial primes*, J. reine angew. Math. **416** (1991), 71–89.
- [4] J. L. GONZÁLEZ AND K. KARU, *Some non-finitely generated Cox rings*, Compos. Math. **152** (2016), 984–996.
- [5] J. G. GONZÁLEZ, J. L. GONZÁLEZ AND K. KARU, *On a family of negative curves*, arXiv:1712.04635v1.
- [6] S. GOTO, K. NISHIDA AND Y. SHIMODA, *The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space curves*, J. Math. Soc. Japan **43** (1991), 465–481.
- [7] S. GOTO, K. NISHIDA AND K.-I. WATANABE, *Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves and counterexamples to Cowsik’s question*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 383–392.
- [8] S. GOTO AND Y. SHIMODA, *On the Rees algebras of Cohen-Macaulay local rings*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **68** (1982), 201–231.
- [9] B. HARBOURNE AND A. SECELEANU, *Containment counter examples for ideals of various configurations of points in \mathbf{P}^N* , J. Pure Appl. Algebra **219** (2015), 1062–1072.
- [10] J. HERZOG, *Generators and relations of Abelian semigroups and semigroup rings*, Manuscripta Math. **3** (1970), 175–193.
- [11] C. HUNEKE, *Hilbert functions and symbolic powers*, Michigan Math. J. **34** (1987), 293–318.
- [12] K. KURANO AND K. NISHIDA, *Infinitely generated symbolic Rees rings of space monomial curves having negative curves*, to appear in Michigan Math. J., arXiv:1705.09865.
- [13] M. NAGATA, *On the 14-th problem of Hilbert*, Amer. J. Math. **81** (1959), 766–772.
- [14] U. NAGEL AND A. SECELEANU, *Ordinary and symbolic Rees algebras for ideals of Fermat point configurations*, J. Algebra **468** (2016), 80–102.
- [15] P. ROBERTS, *A prime ideal in a polynomial ring whose symbolic blow-up is not Noetherian*, Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 589–592.
- [16] P. ROBERTS, *An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert’s fourteenth problem*, J. Algebra **132** (1990), 461–473.
- [17] A. SANNAI AND H. TANAKA, *Infinitely generated symbolic Rees algebras over finite fields*, arXiv:1703.09121.

COHEN-MACAULAYNESS OF KLT SINGULARITIES IN POSITIVE CHARACTERISTICS

TAKEHIKO YASUDA

Arguably klt singularities form the most important class of singularities from the viewpoint of birational geometry. It is well-known that in characteristic zero, klt singularities are Cohen-Macaulay. Recently many counterexamples to this fact in positive characteristics were constructed. In this note, we review them.

1. KLT, CM AND RATIONAL

Throughout the note, we work over an algebraically closed field k of characteristic $p \geq 0$.

Let us first recall basic classes of singularities. Let X be a normal variety. We say that X is \mathbb{Q} -Gorenstein if its canonical divisor K_X is \mathbb{Q} -Cartier. For a normal modification $f: Y \rightarrow X$ (a proper birational morphism with Y normal), we can define the relative canonical divisor $K_{Y/X} = K_Y - f^*K_X$, which is a \mathbb{Q} -divisor with support contained in the exceptional locus of f . Let us write $K_{Y/X} = \sum_E a_E E$, where E runs over exceptional prime divisors and $a_E \in \mathbb{Q}$.

Definition 1.1. We say that X is terminal (resp. canonical, klt, log canonical) if for every normal modification $f: Y \rightarrow X$ and for every exceptional prime divisor E on Y , we have $a_E > 0$ (resp. ≥ 0 , > -1 , ≥ -1).

We also consider klt singularities of pairs and potentially klt singularities which does make sense even if X is not \mathbb{Q} -Gorenstein.

Definition 1.2. Let X be a normal variety and D an effective \mathbb{Q} -divisor on X . Suppose that $K_X + D$ is \mathbb{Q} -Cartier. We say that (X, D) is klt if for any normal modification $f: Y \rightarrow X$, $K_{Y/(X,D)} = K_Y - f^*(K_X + D)$ has coefficients > -1 . We say that a normal variety X is potentially klt if there exists an effective \mathbb{Q} -divisor D such that (X, D) is klt.

Definition 1.3. We say that X is Cohen-Macaulay (for short, CM) if for every point $x \in X$, the local ring $\mathcal{O}_{X,x}$ is CM.

Definition 1.4. In characteristic zero, we say that a normal variety X has rational singularities if for any resolution $f: Y \rightarrow X$ and for $i > 0$, $R^i f_* \mathcal{O}_Y = 0$.

In characteristic zero, potentially klt singularities are rational [Elk81, KMM87] and rational singularities are CM [KKMSD73]. Thus:

Theorem 1.5. *In characteristic zero, potentially klt singularities are CM.*

In characteristic $p > 0$, being CM is often included in the definition of rational singularities rather than it is a property. Let us adopt the following definition by Kovács.

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers JP18H01112 and JP18K18710.

Definition 1.6 ([Kov17]). In characteristic $p > 0$, we say that a normal variety X has rational singularities if for any modification $f: Y \rightarrow X$ such that Y is CM and for $i > 0$, $R^i f_* \mathcal{O}_Y = 0$.

Theorem 1.7 ([Kov17]). *Potentially klt singularities which are CM are rational. Namely, for potentially klt singularities, being CM is equivalent to being rational.*

2. NON-CM KLT SINGULARITIES

In positive characteristics, potentially klt singularities are not necessarily CM. The existence of non-CM potentially klt singularities had not appeared in the literature until recently, however some specialists had known that such singularities of dimension 7 and characteristic 2 can be constructed from examples of Fano varieties violating Kodaira vanishing from [HL93, LR97]. In the last 6 years, many examples of such singularities appeared in the literature, some in lower dimensions and some in arbitrary characteristics. We now briefly review them in the chronological order.

- (1) Yasuda [Yas14] constructed canonical singularities which are not Cohen-Macaulay in arbitrary characteristic. His examples are quotient varieties of affine spaces by linear actions of the cyclic group of order p . The lowest dimension of such examples is 6 in characteristic 2, 5 in characteristic 3 and $\left\lceil \sqrt{2p + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} \right\rceil$ in characteristic $p \geq 5$.
- (2) Gongyo, Nakamura and Tanaka [GNT15] constructed a 4-dimensional potentially klt variety X in characteristic 2 such that for a resolution $f: Y \rightarrow X$, $R^1 f_* \mathcal{O}_Y \neq 0$. (From Kovács' result, X is not CM.)
- (3) Cascini and Tanaka [CT16] constructed 3-dimensional non-CM klt singularities in characteristic two.
- (4) Kovács [Kov] constructed 7-dimensional non-CM canonical singularities in characteristic two.
- (5) Bernasconi [Ber] constructed a 3-dimensional non-CM klt singularity in characteristic 3.
- (6) Totaro [Tot] constructed an isolated non-CM terminal singularity in characteristic $p \geq 3$ of dimension $2p + 2$.
- (7) Yasuda [Yas] showed that quotients of affine spaces by the cyclic group of order p are often even terminal (and non-CM). The lowest dimension of non-CM terminal singularities by this construction is 6 in characteristic 2, 5 in characteristic 3 and $\left\lceil \sqrt{2p + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} \right\rceil + 1$ in characteristic $p \geq 5$.
- (8) Totaro [Tot] constructed an isolated 3-dimensional terminal singularity in characteristic 2. This is the quotient of a smooth 3-fold by a non-linear action of the cyclic group of order 2.

Note that normal surface singularities are always CM. Thus dimension 3 is the lowest possible for non-CM singularities. In the above list, constructions 1, 7 and 8 are by taking quotients of smooth varieties by the cyclic group of order p . The others are constructed from counterexamples of Kodaira or Kawamata-Viehweg vanishing theorem.

On the opposite direction, Hacon-Witaszek proved:

Theorem 2.1 ([HW]). *There exists $p_0 \in \mathbb{N}$ such that in characteristic $p \geq p_0$, every klt 3-fold is CM.*

Problem 2.2. (1) Can we generalize the theorem of Hacon-Witaszek to higher dimensions?

(2) If we could do so, determine the lowest possible p_0 for each dimension.

Results of Totaro and Yasuda mentioned above seem to suggest that the answer to the first problem would be positive.

3. FAILURE OF KODAIRA VANISHING AND CONE CONSTRUCTION

For a normal projective variety X and an ample line bundle L on X , let $C_a(X, L) := \text{Spec} \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, L^n)$ be the associated affine cone. Whether $C_a(X, L)$ is CM or not is characterized as follows (for instance, see [Kol13]):

Proposition 3.1. *Suppose that X is CM. Then $C_a(X, L)$ is CM if and only if $H^0(X, L^n) = 0$ for every $n \in \mathbb{Z}$ and every $i \in \mathbb{Z}$ with $0 < i < \dim X$.*

Proposition 3.2. *Let D be an effective \mathbb{Q} -divisor on X and \tilde{D} be the corresponding \mathbb{Q} -divisor on $C_a(X, L)$. Suppose that $-(K_X + D) \sim_{\mathbb{Q}} rL$ for some $r \in \mathbb{Q}$. Then $(C_a(X, L), \tilde{D})$ is terminal (resp. canonical, klt) if and only if (X, D) is terminal (resp. canonical, klt) and $r > -1$ (resp. $\geq -1, > 0$).*

In particular, if X is a smooth Fano variety and L is a line bundle with $rL \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ for some integer $r > 1$ (resp. $\geq 1, > 0$), then $C_a(X, L)$ is terminal (resp. canonical, klt). If $H^i(L^n) \neq 0$ for some $n \in \mathbb{Z}$ and $i \in \mathbb{Z}$ with $0 < i < \dim X$, then $C_a(X, L)$ is non-CM. Note that $H^i(L^n) \neq 0$ for some $n \in \mathbb{Z}$ violates the Kodaira vanishing.

If X is a smooth Fano variety and L is an ample line bundle some power of which violates Kodaira vanishing, then $C_a(X, L)$ is non-CM and potentially klt.

Constructions 2, 3, 4, 5 and 6 in Section 2 are based on Fano type varieties violating Kodaira or Kawamata-Viehweg vanishing and take the

4. QUOTIENT SINGULARITIES I

An alternative construction of non-CM klt singularities is by means of quotient singularities. Note that in characteristic zero, quotient singularities are klt and hence CM. For the construction, it is enough to consider the case of cyclic group of order p . We first recall construction by Yasuda.

Let $G = \langle g \rangle \cong \mathbb{Z}/p$ be the cyclic group of order p with a generator g . Suppose that G acts on an affine space $V = \mathbb{A}_k^d$ linearly. Considering the Jordan normal form of the action of a generator $g \in G$, we see that the action is determined by sizes of Jordan blocks. Note that the only eigenvalue of g is 1 and a Jordan block is determined by its size. Moreover sizes do not exceed p because of the order of g .

We say that g is a pseudo-reflection if the fixed point locus V^G has codimension one. This is the case exactly when there is one Jordan block of size 2 and all the other blocks have size 1. In this case, we can easily see that the quotient variety V/G is again isomorphic to \mathbb{A}_k^d . If g is not a pseudo-reflection, then V/G is singular.

Proposition 4.1 ([ES80]). *Suppose that g is not a pseudo-reflection. Then V/G is CM if and only if V^G has codimension 2.*

This holds only if either

- (1) there are 2 Jordan blocks of size 2 and all the other blocks have size 1, or
- (2) there is 1 Jordan block of size 3 and all the other blocks have size 1.

Thus V/G is almost always non-CM. Let d_1, \dots, d_l be the sizes of Jordan blocks of g and let $D := \sum_i d_i(d_i - 1)/2$.

Proposition 4.2 ([Yas14, Yas]). *Suppose that g is not a pseudo-reflection. Then V/G is terminal (resp. canonical, log canonical) if and only if $D > p$ (resp. $\geq p$, $\geq p - 1$).*

The outline of the proof is as follows. We can determine if V/G is terminal, canonical or log canonical by looking at the convergence/divergence of the stringy invariant of V/G , which is defined as a certain motivic integral on the arc space of V/G . By the wild McKay correspondence, this is equivalent to the convergence/divergence of weighted counts of Artin-Schreier extensions of $k((t))$. We can compute the latter quite explicitly thanks to the Artin-Schreier theory and determine whether the weighted count converges or diverges.

Example 4.3. (1) Suppose $p = 2$. If $G = \mathbb{Z}/2$ acts on $V = \mathbb{A}_k^6$ by 3 Jordan blocks of size 2, then $D = 3 > 2$ and $\text{codim } V^G = 3$. Thus V/G is non-CM and terminal.
 (2) Suppose $p = 3$. If $G = \mathbb{Z}/3$ acts on $V = \mathbb{A}_k^5$ by one block of size 3 and one of size 2, then $D = 4 > 3$ and $\text{codim } V^G = 3$. Thus V/G is non-CM and terminal.
 (3) For $p \geq 5$, suppose that $G = \mathbb{Z}/p$ acts on $V = \mathbb{A}_k^d$ with $d \leq p$ by a single Jordan block. If $d \geq \lfloor \sqrt{2p + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} \rfloor + 1$, then $D \geq p + 1$ and $\text{codim } V^G = d - 1 \geq 3$. Thus V/G is non-CM and terminal.

5. QUOTIENT SINGULARITIES II

Lastly we briefly review Totaro's construction of 3-dimensional non-CM terminal singularity in characteristic 2. Let $G = \mathbb{Z}/2$ be the cyclic group of order 2 and let G act on \mathbb{G}_m^3 by the involution $(x, y, z) \mapsto (1/x, 1/y, 1/z)$. The only fixed point is $(1, 1, 1)$. From [Fog81] (a result similar to one in [ES80] for (necessarily non-linear) actions which are free outside a unique fixed point), the quotient variety \mathbb{G}_m^3/G is non-CM.

Theorem 5.1 ([Tot]). *The variety \mathbb{G}_m^3/G is terminal.*

To prove this, he takes equivariant blowups of \mathbb{G}_m^3 until the associated quotient variety becomes smooth. When the quotient variety is smooth is determined by the following criterion.

Proposition 5.2 ([KL13]). *Suppose that $G = \mathbb{Z}/p$ acts on a smooth variety X . Then X/G is smooth if and only if the fixed point scheme X^G is a Cartier divisor of X .*

Remark 5.3. We have a $\mathbb{Z}/2$ -equivariant embedding $\mathbb{G}_m^3 \hookrightarrow \mathbb{A}_k^6$, where $\mathbb{Z}/2$ acts on \mathbb{A}_k^6 by three Jordan blocks of size two. Thus $\mathbb{G}_m^3/(\mathbb{Z}/2)$ is a closed subvariety of the quotient variety $\mathbb{A}_k^6/(\mathbb{Z}/2)$ in Example 4.3, (1). The author expects that we can similarly construct 3-dimensional non-CM terminal singularities in characteristics 3 and 5 as closed subvarieties of $\mathbb{A}_k^5/(\mathbb{Z}/3)$ and $\mathbb{A}_k^4/(\mathbb{Z}/4)$ respectively.

REFERENCES

- [Ber] Fabio Bernasconi. Kawamata-Viehweg vanishing fails for log del Pezzo surfaces in char. 3. arXiv:1709.09238.

- [CT16] Paolo Cascini and Hiromu Tanaka. Purely log terminal threefolds with non-normal centres in characteristic two. 07 2016.
- [Elk81] René Elkik. Rationalité des singularités canoniques. *Invent. Math.*, 64(1):1–6, 1981.
- [ES80] Geir Ellingsrud and Tor Skjelbred. Profondeur d’anneaux d’invariants en caractéristique p . *Compositio Math.*, 41(2):233–244, 1980.
- [Fog81] John Fogarty. On the depth of local rings of invariants of cyclic groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 83(3):448–452, 1981.
- [GNT15] Yoshinori Gongyo, Yusuke Nakamura, and Hiromu Tanaka. Rational points on log fano threefolds over a finite field. 12 2015.
- [HL93] William Haboush and Niels Lauritzen. Varieties of unseparated flags. In *Linear algebraic groups and their representations (Los Angeles, CA, 1992)*, volume 153 of *Contemp. Math.*, pages 35–57. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [HW] Christopher Hacon and Jakub Witaszek. On the rationality of Kawamata log terminal singularities in positive characteristic. arXiv:1706.03204.
- [KKMSD73] G. Kempf, Finn Faye Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat. *Toroidal embeddings. I*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 339. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.
- [KL13] Franz Király and Werner Lütkebohmert. Group actions of prime order on local normal rings. *Algebra Number Theory*, 7(1):63–74, 2013.
- [KMM87] Yujiro Kawamata, Katsumi Matsuda, and Kenji Matsuki. Introduction to the minimal model problem. In *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, volume 10 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 283–360. North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [Kol13] János Kollár. *Singularities of the minimal model program*, volume 200 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013. With a collaboration of Sándor Kovács.
- [Kov] Sándor Kovács. Non-Cohen-Macaulay canonical singularities. arXiv:1703.02080.
- [Kov17] Sándor J Kovács. Rational singularities, 2017.
- [LR97] N. Lauritzen and A. P. Rao. Elementary counterexamples to Kodaira vanishing in prime characteristic. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 107(1):21–25, 1997.
- [Tot] Burt Totaro. The failure of Kodaira vanishing for Fano varieties, and terminal singularities that are not Cohen-Macaulay. arXiv:1710.04364.
- [Yas] Takehiko Yasuda. Discrepancies of p -cyclic quotient varieties. arXiv:1710.06044.
- [Yas14] Takehiko Yasuda. The p -cyclic McKay correspondence via motivic integration. *Compos. Math.*, 150(7):1125–1168, 2014.

MATHEMATICAL INSTITUTE, TOHOKU UNIVERSITY, AOBA, SENDAI, 980-8578, JAPAN
E-mail address: takehiko.yasuda.a5@tohoku.ac.jp

非可換代数幾何における周期写像について

岩成勇

1. 局所周期写像

X を複素数体 \mathbb{C} 上に定義された滑らかでコンパクトな代数多様体とする.

$$f: \mathcal{X} \rightarrow S$$

を X の変形とする. 即ち S を複素多様体, f はスムーズな固有全射で基点 $0 \in S$ 上のファイバー $f^{-1}(0)$ と X との間に同型 $f^{-1}(0) \simeq X$ が定まっているものとする. このとき局所周期写像を考えよう. いくつかの構成方法があるが次のように構成することができた. S を可縮とする. Ehresmann ファイブレーション定理から, f は可微分多様体として自明な変形である: 以下を可換図式にするような微分同相写像 $h: \mathcal{X} \rightarrow X \times S$ がある

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{h} & X \times S \\ & \searrow f & \nearrow \text{pr} \\ & S & \end{array}$$

従って, i と n を固定すると, $s \in S$ 上のファイバー X_s の Hodge フィルトレーション

$$F^i H_{DR}^n(X_s) \subset H_{DR}^n(X_s)$$

と比較同型と h により誘導される同型

$$H_{DR}^n(X_s) \simeq H^n(X_s, \mathbb{C}) \simeq H^n(X, \mathbb{C})$$

を組み合わせると $F^i H_{DR}^n(X_s)$ は $H^n(X, \mathbb{C})$ の部分空間 W_s を定める. $s \in S$ に対し部分空間 $W_s \subset V := H^n(X, \mathbb{C})$ が定まった. r を $F^i H_{DR}^n(X_s)$ の次元, $\text{Grass}(r, V)$ をグラスマン多様体とすると, $s \mapsto [W_s \subset V]$ から周期写像

$$P: S \rightarrow \text{Grass}(r, V)$$

が定義される. これは正則であり Griffiths 横断性を満たすのであった.

2. FROM E_∞ TO E_1

上記の局所周期写像を非可換代数幾何の設定で考えたい. これについての筆者の研究とバックグラウンドの概要を紹介するのが本稿の主目的の1つである.

どのように非可換への拡張を考えるかということの説明するため最初に次のことに注意する. 前節で紹介した周期写像はモジュライ理論的な意味で大局的には

$$\{ \text{数学的对象 } X \text{ の変形} \} \mapsto \{ X \text{ の不変量 } I(X) \text{ の変形} \}$$

Date: 2018.

2018年9月に東京工業大学で行われた代数学シンポジウムの筆者の講演に関するノートです.

所属: 東北大学理学研究科数学専攻

e-mail: iwanari@math.tohoku.ac.jp.

の対応を表し, X の変形にしたがってどれだけ不変量を変形するかを測っているといえる. そこでこの節では非可換代数幾何における数学的対象 X とその変形に対して変形を誘導するような Hodge 構造に類似した不変量を紹介する.

2.1. 非可換代数幾何での空間. いきなりではあるが圏を空間とすることにする. 一口に圏といっても, ガロア圏, 淡中圏, アーベル圏, 三角圏など様々なタイプの圏がある. ここでは Bondal, Orlov, Kontsevich, Drinfeld らに従って三角圏を考える. k を体とし (簡単のため以下では全て k は標数 0 の体とする), 三角圏に k -線形構造もいれておくことにする. 三角圏ではいくつかの理由でうまく振舞わないことがあるので, k 上の pretriangulated differential graded 圏¹あるいは k -線形安定 ∞ -圏 (cf. [13]) を主たる空間と思う対象とし, 圏同値で同一視していく. 三角圏は DG 圏あるいは k -線形安定 ∞ -圏のホモトピー圏として現れる. DG 圏の圏と k -線形安定 ∞ -圏の圏に標準的な圏同値があるので両者は同じものの異なるモデルとおもってもらってよい (詳しくは [1] 参照)².

いくつか例を挙げる.

例 2.1. (i) 簡単のため本稿ではスキームといえばネータースキームを指すことにする. スキームに対して, X 上の準連接複体の圏を擬同型で局所化することにより, 擬同型を同値とするような DG 圏あるいは安定 ∞ -圏 $\mathcal{D}(X)$ が定義される. そのホモトピー圏は従来の導来圏 $D_{qc}(X)$ である. これにより X を非可換代数幾何の空間 $\mathcal{D}(X)$ に移行することが出来る. $\mathcal{D}(X)$ から X の様々な不変量を構成できる. 例えば K 理論や Hochschild 不変量を $\mathcal{D}(X)$ から直接取り出すことが出来る. 一方で一般に $\mathcal{D}(X)$ は X 全ての情報は持っていない. A をアーベル多様体, \hat{A} を双対アーベル多様体とすると, 向井の定理により, 同値 $\mathcal{D}(A) \simeq \mathcal{D}(\hat{A})$ がある.

(ii) A を k 上 DG 代数とする. 即ち, A は k -ベクトル空間のコチェイン複体で代数構造として, (可換とは限らない) 結合的な積写像

$$m : A \otimes A \rightarrow A$$

と標準的な単位元の公理を満たす単位元 $1_A \in A^0$ をもつものである. つまりテンソルで標準的な対称モノイダル構造をいれたコチェイン複体の圏での単位的結合的代数対象である. 左 DG A -加群 M とは, コチェイン複体 M で A の左作用 $A \otimes M \rightarrow M$ をもつものである. $\text{LMod}^{dg}(A)$ を左 DG A -加群のなす圏とすると, この圏を適当に局所化することにより擬同型を同値とするような左 DG A -加群のなす DG 圏あるいは安定 ∞ 圏 $\text{LMod}(A)$ を得る. 同様に右 DG 加群の場合も DG 圏あるいは安定 ∞ 圏 $\text{RMod}(A)$ を得る.

(iii) Landau-Ginzberg 模型 $f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ の行列因子化の圏 $\text{MF}((X, f))$ は $k[u, u^{-1}]$ -線形な DG 圏あるいは安定 ∞ 圏をなす³. 但し $k[u, u^{-1}]$ は可換な DG 代数で u はコホモロジカルに次数 2 の元である. いくつかの構成法やヴァージョンがある. ここでは $\text{MF}((X, f))$ を特異性の圏 $\mathcal{D}_{coh}^b(X_0)/\text{Perf}(X_0)$ として与えておく⁴. ここで $X_0 = f^{-1}(0)$,

$$\text{Perf}(X_0) \subset \mathcal{D}_{coh}^b(X_0) \subset \mathcal{D}(X_0)$$

¹以下では特に断らない限り k 上の pretriangulated differential graded 圏を単に DG 圏と呼ぶことにする.

²三角圏は知っているがこれらに詳しくない読者はこれらを「よい三角圏」と読み替えてもらっても以下直感的な理解には困らない

³ミラー対称性のシンプレクティック側として深谷-Seidel 圏や深谷圏も例として紹介すべきであるが筆者の不勉強により文献 [3], [15] を挙げるにとどめる

⁴商は idempotent-complete なものとしてとっておくことにする

は左から perfect 複体のなす部分圏, 連続なホモロジー層をもつ有界複体のなす部分圏である.

圏を空間と思うことで様々な異なる出自の分野を統一的に考えることができる. DG 代数または A_∞ 代数を非可換代数幾何の空間とみなすという見方もあるが, それは DG 圏や安定 ∞ 圏を空間とみなす方針と関係し, あとで説明する周期写像の設定にもかかわるのでここで DG 代数と DG 圏或いは k -線形安定 ∞ 圏の関係について説明する.

DG 代数 A があたえられると

$$A \mapsto \text{LMod}(A) \text{ または } \text{RMod}(A)$$

の対応によって DG 圏或いは安定 ∞ 圏を得る. 逆に presentable な k -線形安定 ∞ 圏 \mathcal{C} は, コンパクト生成対象 C を持てば, 自己準同型 DG 代数 $\text{End}_{\mathcal{C}}(C)$ を構成することで, $S \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, S)$ の対応により圏同値

$$\mathcal{C} \simeq \text{RMod}(\text{End}_{\mathcal{C}}(C))$$

を作ることが出来る (Keller, Schwede-Shipley, Bondal). 従ってコンパクト生成対象を持つ場合は全て上記の例の (ii) の形にできる. 実は (i) の $\mathcal{C} = \mathcal{D}(X)$ や (iii) の $\text{MF}((X, f))$ の場合もマイルドな仮定の下にコンパクト生成対象の存在が示されている (Bondal-Van den Bergh, Dyckerhoff). 例えば, ネーター性のもとで $\mathcal{D}(X)$ はコンパクト生成対象をもつ. さて DG 代数を擬同型で同一視することを考えてみよう. $f: A \rightarrow B$ という DG 代数の射が擬同型るとき圏同値 $f^*: \text{RMod}(B) \simeq \text{RMod}(A)$ を誘導する. 一方圏同値 $\text{RMod}(B) \simeq \text{RMod}(A)$ は, A と B が森田同値であることを言っているだけなので擬同型と $\text{RMod}(B) \simeq \text{RMod}(A)$ には大きな差がある. 次の命題は森田理論を使って容易に示すことが出来るがその差を見やすくあらわしている:

命題 2.2. St_∞^* を presentable な安定 ∞ 圏とそのコンパクト生成対象の組 (\mathcal{C}, C) のなす ∞ 圏とする. ここで射 $(\mathcal{C}, C) \rightarrow (\mathcal{C}', C')$ は余極限を保つ (正確には k -線形な) 関手 $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ と同値 $f(C) \simeq C'$ である. DGA_k を k 上の DG 代数のなす ∞ 圏とすると ∞ 圏の圏同値

$$DGA_k \simeq St_\infty^*$$

で A を $(\text{RMod}(A), A)$ に送るものがある.

これを見ると DG 代数は安定 ∞ 圏のコンパクト生成対象の選定に対応することが分かる. 幾何的な類似で言うと多様体に対して何か層を用意するようなものであるが, もっと分かりやすい見方は次の辞書である:

代数幾何	非可換代数幾何
代数多様体	DG 圏または安定 ∞ 圏
豊富束	コンパクト生成対象
偏極代数多様体	DG 代数

これは対応 $X \mapsto \mathcal{D}(X)$ に対して両者の概念が対応していることまで言っているわけでない. 例えば $\mathcal{D}(X)$ は X が準射影的でなくてもコンパクト生成対象をもつ.

DG 圏或いは安定 ∞ 圏を主たる空間としての対象とし, その変形を考え周期写像を考えたい. しかしいくつかの理由により (Hochschild コホモロジーと圏の変形の関係等), 表面上 DG 代数 A を主たる空間としての対象と考える. ただしその変形の定式

⁵この概念を初見の人は無視してよい. 小さなダイアグラムに関する余極限をもち, 小さなある種の生成系を持つという意味. 詳しくは [12] 参照

化では DG 代数 A の代数としての変形より $\mathrm{RMod}(A)$ の変形に対応するようなより広いクラスの変形を考えることで変形の定式化を行うので、 A が前面に出てきても舞台裏では $\mathrm{RMod}(A) \simeq \mathcal{C}$ となるような圏 \mathcal{C} を空間だと思いたいんだと読んでもらいたい。

以下の概念はスキームのスムーズ (smooth)、固有 (proper)⁶ の類似である。

定義 2.3. \mathcal{C} を k -線形な安定 ∞ 圏とする。ここで \mathcal{C} は compactly generated であると仮定する。つまり小さな (small) な集合 Λ で添え字付けられたコンパクト生成系 $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在すると仮定する。このとき

- (i) 任意の二つのコンパクト対象 $C, C' \in \mathcal{C}$ に対して Hom コチェイン複体 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ が $\mathrm{RMod}(k)$ のコンパクト対象である。つまり $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ のホモロジーは k 上有限次元で、さらに有限個の次数を除いてホモロジーは 0 になっている。このとき、 \mathcal{C} は k 上固有 (proper) という。
- (ii) $\mathrm{Fun}_k(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ を k -線形な ($\mathrm{RMod}(k)$ 上加群としての) 関手のなす安定 ∞ 圏とする。恒等関手 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が $\mathrm{Fun}_k(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ においてコンパクト対象であるとき、 \mathcal{C} は k 上スムーズという。

注 2.4. 固有性もスムーズ性も圏 \mathcal{C} だけでなく k 上の構造 (つまりモノイダル圏 $\mathrm{Mod}(k)$ 上⁷ の加群構造 $\mathrm{Mod}(k) \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$) に依拠した概念である。なお上の定義は k は体でなくとも一般の可換環スペクトラ k に対して適用できる。

例 2.5. X をスキームとする。 X が k 上スムーズのとき、 $\mathcal{D}(X)$ は k 上スムーズである。 X が k 上固有 (proper) とすると、 $\mathcal{D}(X)$ は k 上固有である。

$\mathcal{C} = \mathrm{RMod}(A)$ のとき上の概念は次の条件に翻訳される。

命題 2.6. A を k 上 DG 代数とし、 $\mathcal{C} = \mathrm{RMod}(A)$ とおく。

- (i) \mathcal{C} が k 上固有である必要十分条件は A の各ホモロジー群が有限次元でさらに有限個の次数を除いて 0 になっていることである。
- (ii) \mathcal{C} が k 上スムーズである必要十分条件は A を $A - A$ 両側加群とみなしたときコンパクト対象であることである。 A が $A - A$ 両側加群の ∞ 圏でコンパクトであるとは、言い換えると、有限階数自由 $A - A$ 両側加群から有限余極限をとる、シフトをとる、レトラクトをとる操作を有限回繰り返すことで A を構成することができることである。

2.2. Hodge 構造. DG 代数 A から定義される Hodge 構造の類似について説明する。いくつか異なる側面からの文献として [9], [5], [17] を挙げる。 Hodge 構造を考えるために最初に考えたいのは de Rham コホモロジーの類似物である。周期的巡回ホモロジー (periodic cyclic homology) $HP_*(A)$ を de Rham コホモロジーの対応物とみなすことができる。というのも、 X を k 上スムーズなスキームとし、DG 代数 A を $\mathcal{D}(X) \simeq \mathrm{RMod}(A)$ となるようにとると

$$HP_n(A) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} H_{DR}^{2i-n}(X/k)$$

という同型がある。ここで右辺は代数的 de Rham コホモロジーである。以下順番に Hochschild 系の複体を定義していきたいが、周期的巡回ホモロジーは最後に定義され

⁶proper を固有と訳すのはいい訳語ではないと思う

⁷ k は可換なので $\mathrm{LMod}(k) \simeq \mathrm{RMod}(k)$ であるから、以下両者は区別せず $\mathrm{Mod}(k)$ と書くことにする。 k の可換性から自然に対称モノイダル構造が入る。有態に $\mathrm{Mod}(k)$ は k -ベクトル空間の複体のなす導来 ∞ 圏であり、対称モノイダル構造はテンソル積ではいる。

るものなので Hochschild チェイン複体から定義していく. A を k 上 DG 代数とすると, derived なテンソル

$$HH_{\bullet}(A) = A \otimes_{A \otimes A^{op}}^{\mathbb{L}} A$$

で Hochschild チェイン複体を定義する. このテンソルを計算する複体のとり方はいくつかあるが⁸, 以下の説明にその明示的なモデルを使うわけではないので省略する (詳しくは [7] 参照). なお $HH_{\bullet}(-)$ は複体, $HH_{*}(-)$ はそのホモロジー群をとった \mathbb{Z} -次数付きベクトル空間を表すことにする. ここで重要なのは $HH_{\bullet}(A)$ は (適切なモデルをとると) DG 代数

$$\Lambda = k[\epsilon]/(\epsilon^2), \quad (|\epsilon| = -1)$$

上の加群を持つということである. ここで $|-|$ はコホモロジカルな次数で $k[-]$ は DG 代数として自由代数である. (標数 0 なので Koszul サインルールから, もし $k[-]$ を可換 DG 代数としての自由代数としてあらわすことにすれば $k[\epsilon]/(\epsilon^2) = k[\epsilon]$ であり [7] ではその流儀にしている.) この作用

$$k[\epsilon]/(\epsilon^2) \otimes HH_{\bullet}(A) \rightarrow HH_{\bullet}(A)$$

を考えると ϵ をかけることで複体の射 $B : HH_{\bullet}(A) \rightarrow HH_{\bullet}(A)[-1]$ で $B^2 = 0$ となるものが誘導されていることが分かる. B は Connes 作用素とよばれるものと与えられる. ∂_{Hoch} を $HH_{\bullet}(A)$ の微分とすると, Λ -加群の構造は,

$$B^2 = 0, \quad \partial_{Hoch} B + B \partial_{Hoch} = 0$$

をみたく B にほかならない. このような微分をもつ複体は混合複体 (mixed complex) と呼ばれる. 混合複体は複体への S^1 -作用と見ることが出来る. S^1 は可換な位相群であるから特異チェイン複体 $C_*(S^1, k)$ に可換 DG 代数構造が入る. ここでは簡単のためチェイン複体 C への S^1 -作用を自己準同型 DG 代数への

$$C_*(S^1, k) \rightarrow \text{End}_k(C)$$

射とする⁹. 実は (Sullivan の意味の) 形式性 (formality) があり $C_*(S^1, k)$ は DG 代数として $k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ と擬同型であり

$$k[\epsilon]/(\epsilon^2) \rightarrow \text{End}_k(C)$$

と同一視できる. これは左 $\Lambda = k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ 加群構造を C に与えることに対応する. 可換な世界と比較すると, $HH_{\bullet}(A)$ が微分形式 (代数幾何的には Hodge コホモロジー), B が de Rham 微分の役割をする.

いま Connes 作用素 B によって Λ -加群になった (S^1 -作用のはいった) $HH_{\bullet}(A)$ がある. そこから負巡回ホモロジー (negative cyclic homology) と周期的巡回ホモロジーを定義しよう. 負巡回ホモロジーは, $HH_{\bullet}(A)$ からそのホモトピー S^1 -固定点をとることで得られるが, ホモロジー代数的には k を $k[\epsilon]/(\epsilon^2) \rightarrow k[\epsilon]/(\epsilon) \simeq k$ によって Λ -加群と見ることによって derived Hom 複体 $\mathcal{R}Hom_{\Lambda}(k, -)$ をとることになる. K を k の Λ -加群としての cofibrant な resolution

$$K := \cdots \xrightarrow{\epsilon} k\epsilon \xrightarrow{0} k \xrightarrow{\epsilon} k\epsilon \xrightarrow{0} k.$$

⁸ 1つの標準的なとり方: 片側の A を $A \otimes A^{op}$ -加群として bar resolution をとり, つまり自由 $A \otimes A^{op}$ -加群の単体的なダイアグラム (simplicial diagram) をつくり, $\otimes_{A \otimes A^{op}} A$ をとってから totalization をとる. Connes 作用素は simplicial diagram に更に円周的な対称性があり cyclic 圏でパラメトライズされるダイアグラムに伸ばせることから入る. 例えば [11] 参照

⁹ 正確には DGA_k での射とみるべきである.

とする. 一番右端が次数0次である. $\mathcal{R}Hom_\Lambda(k, -)$ をとるには Hom 複体 $\text{Hom}_\Lambda(K, -)$ をとればよい. 負巡回ホモロジー $HN_*(A)$ を与える複体を

$$HN_\bullet(A) := \text{Hom}_\Lambda(K, HH_\bullet(A))$$

で定義する. K の次数 $-2i$ にある k のなかの $1 \in k$ を 1_{2i} とかくと, $f: K \rightarrow HH_\bullet(A)$ は, $\{1_{2i}\}_{i \geq 0}$ の行き先で一意的に決まり, 計算すると複体としての同型

$$HN_\bullet(A) = \text{Hom}_\Lambda(K, HH_\bullet(A)) \simeq (HH_\bullet(A)[[t]], \partial_{Hoch} + tB)$$

があることがわかる. ここで t は (コホモロジー的に) 次数2の元で, $HH_\bullet(A)[[t]]$ の次数 r は, $\prod_{i \geq 0, 2i-l=r} HH_l(A) \cdot t^i$ で与えられ, 微分は $\partial_{Hoch} + tB$ で与えられる (この $HH_l(A)$ はホモロジーではなく次数 l 部分である). 特に, 注意したいのは $k[t]$ を t で生成される DG 代数とすると¹⁰, $HN_\bullet(A)$ は $k[t]$ -加群である. $k[t] = \text{Hom}_\Lambda(K, k) = \mathcal{R}Hom_\Lambda(k, k)$ の合成による作用と見てよい.

周期的巡回ホモロジー $HP_*(A)$ を与える複体 $HP_\bullet(A)$ を

$$HP_\bullet(A) := (HH_\bullet(A)[[t]] \otimes_{k[t]} k[t, t^{-1}], \partial_{Hoch} + tB)$$

で定める. $HH_\bullet(A)((t)) = HH_\bullet(A)[[t]] \otimes_{k[t]} k[t, t^{-1}]$ とおく. $HP_\bullet(A)$ は特に $k[t, t^{-1}]$ -加群である. さて, $HP_*(A)$ は de Rham コホモロジーの類似だと述べた.

$$HN_\bullet(A) = HH_\bullet(A)[[t]] \subset HH_\bullet(A)((t)) = HP_\bullet(A)$$

を考える. これは Hodge 複体の (Rees 構成) の非可換版の対応物である. このデータで Hodge フィルトレーションとみなす. 以上 DG 代数に対して Hochschild 不変量を定義してきたが, これらは森田同値で保たれる. 従って $A \mapsto \text{RMod}(A)$ という構成を経由していると考えてよい. 実際, 上記の定義の拡張として DG 圏や安定 ∞ 圏に対しても Hochschild 不変量が定義できる.

一般の DG 代数 A に対して, Hodge フィルトレーション (の Rees 構成) の類似物 $HN_\bullet(A) \subset HP_\bullet(A)$ が定義できたが, A がスムーズかつ固有の場合にはペアリングも定義することが出来る. この Hodge 構造のペアリングは次節の局所周期写像には関係はないが, ついでに説明する. A に対して, $\text{RMod}(A)$ を考えよう. このとき (実は) $\text{RMod}(A)$ がスムーズかつ固有であることの必要十分条件は compactly generated な k -線形安定 ∞ 圏のなす対称モノイダル ∞ 圏において (射はコンパクト対象を保つもののみを考える. 対称モノイダル構造については [13] 参照), 双対象が存在することである (dualizable). さらに双対象 (dual object) は $\text{RMod}(A^{op}) \simeq \text{LMod}(A)$ で与えられる. evaluation 写像は,

$$\eta: \text{RMod}(A) \times \text{LMod}(A) \rightarrow \text{Mod}(k), \quad (M, N) \mapsto M \otimes_A N$$

で与えられる. 安定 ∞ 圏のなす ∞ 圏から $HH_\bullet(-)$ をとる関手は対称モノイダルであり, $HH_\bullet(A) = HH_\bullet(\text{RMod}(A))$ は双対象 $HH_\bullet(A^{op}) = HH_\bullet(\text{LMod}(A))$ を持つ. つまり上の η は

$$HH_\bullet(A) \otimes HH_\bullet(A^{op}) \rightarrow HH_\bullet(k) \simeq k$$

を誘導する. ここで $HH_\bullet(A^{op}) = A \otimes_{A^{op} \otimes A}^{\mathbb{L}} A \simeq A \otimes_{A \otimes A^{op}}^{\mathbb{L}} A = HH_\bullet(A)$ を用いるとペアリングができる

$$HH_\bullet(A) \otimes_k HH_\bullet(A) \rightarrow HH_\bullet(k) \simeq k.$$

これらは Λ -加群とみなすことができ, $\text{Hom}_\Lambda(K, -)$ をとることで

$$HH_\bullet(A)[[t]] \otimes_{k[t]} HH_\bullet(A)[[t]] \rightarrow k[t]$$

¹⁰ホモトピー論的には $k[t]$ は $BS^1 = BB\mathbb{Z}$ のコホモロジー環と見てよい

をえる. $\otimes_{k[t]} k[t, t^{-1}]$ をとると,

$$HH_{\bullet}(A)((t)) \otimes_{k[t, t^{-1}]} HH_{\bullet}(A)((t)) \rightarrow k[t, t^{-1}]$$

が誘導される. なおこの構成は A を k -上スムーズかつ固有な安定 ∞ 圏 \mathcal{C} にしてもそのまま適用できる. ここで今まで出てきたものの類似を辞書としてまとめておくと

可換	非可換
微分形式又は Hodge コホモロジー	$HH_{\bullet}(A)$
de Rham 微分	Connes 作用素
de Rham 複体	$HP_{\bullet}(A)$
Hodge フィルトレーション	$HN_{\bullet}(A) \subset HP_{\bullet}(A)$
交叉ペアリング	$HN_{\bullet}(\mathrm{RMod}(A)) \times \mathrm{LMod}(A) \rightarrow \mathrm{Mod}_k$

Kaledin による Hodge-to-de Rham スペクトル系列の退化を紹介しよう. ここで $HH_l(A)$ を $HH_{\bullet}(A)$ のホモロジカルに次数 l 部分とする.

$$F^i HH_{\bullet}(A)((t))_n = \prod_{r \geq i} HH_{n+2r}(A) \cdot t^r \subset HH_{\bullet}((t))_n = \prod_{r \in \mathbb{Z}} HH_{n+2r}(A) \cdot t^r$$

とおくことでフィルトレーションを $HP_{\bullet}(A)$ にいれる. 部分商

$$F^i HH_{\bullet}(A)((t))/F^{i+1} HH_{\bullet}(A)((t))$$

は $HH_{\bullet}(A) \cdot t^i$ と同型であり, このフィルトレーションから得られるスペクトル系列を

$$HH_{*}(A)((t)) \Rightarrow HP_{*}(A).$$

とかく. 各 E_1 -stage は $HH_j(A) \cdot t^i$ の形をしており Hodge-to-de Rham スペクトル系列の非可換類代数幾何における対応物とみなせる. このスペクトル系列は孤立特異点から生まれる Hodge 構造 ([16] 参照) などに退化を支持する例があり, 実際 A がスムーズかつ固有のとき Kontsevich-Soibelman によって E_1 -退化が予想されていた. その退化は Kaledin によって示された:

定理 2.7 ([10]). DG 代数 A が k 上スムーズかつ固有であるとする. このとき

$$HH_{*}(A)((t)) \Rightarrow HP_{*}(A)$$

は E_1 -stage で退化する.

3. DG Lie 代数と変形理論

3.1. DG Lie 代数. この節では DG Lie 代数を用いた変形理論を論じる. 我々の周期写像は DG Lie 代数の写像として構成される.

DG Lie 代数と変形理論の関係について説明する方法は理論的な説明と例示による説明が考えられるが, ここでは後者をとる. 代数多様体の変形を思い出す. X を \mathbb{C} 上スムーズな代数多様体とするとその変形についての局所モジュライの接ベクトル空間は接束 T_X のコホモロジー

$$H^1(X, T_X)$$

と (non-canonical) 同一視できた. これは X の $\mathrm{Spec} k[x]/(x^2)$ への変形の同値類と対応する. では X の $\mathrm{Spec} \mathbb{C}[x]/(x^{n+1})$ ($n \geq 2$) への変形はどうかというとこれはコホモロジーであらわすことが出来ない. しかし T_X が Lie 代数の層の構造をもっている.

これを使うと $\text{Spec } \mathbb{C}[x]/(x^{n+1})$ への変形も記述できる. T_X が Lie 代数の層であることから, derived な大域切断を DG Lie 代数¹¹として

$$\mathcal{R}\Gamma(X, T_X)$$

とすることが出来る. (そのようにとる方法はいくつかあるが解析的な状況であれば Dolbeault resolution をとって大域切断をとれば明示的な DG Lie 代数を得ることが出来る.) 一般に局所 Artin k -代数 R に対して X の $\text{Spec } R$ への変形同値類は DG Lie 代数 $\mathcal{R}\Gamma(X, T_X)$ を用いて記述できる (大雑把に言えば $\mathcal{R}\Gamma(X, T_X)$ が局所モジュライの役割をしていると思ってよい¹²). 一般の nilpotent DG Lie 代数 L に対して関手を定義する (例えば [7] 参照).

定義 3.1. $\text{MC}(L) = \{\alpha \in L^1 \mid d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0\}$ を Maurer-Cartan 元の集合とする. $\exp(L^0)$ を nilpotent Lie 代数 L^0 から Baker-Campbell-Hausdorff 積で得られる群とする. L^0 は L^1 に $L^0 \rightarrow \text{End}_k(L^1)$, $\alpha \mapsto [\alpha, -] - d\alpha$ で作用する. この作用から $\exp(L^0)$ が L^1 に作用する:

$$\mu \mapsto e^\alpha \bullet \mu := e^{ad(\alpha)}\mu - \int_0^1 (e^{ad(s\alpha)}d\alpha)ds$$

(μ in L^1). この作用は Maurer-Cartan 元をたもつので, $\overline{\text{MC}}(L) = \text{MC}(L)/\exp(L^0)$ とおく.

Art_k を剰余体を k とする局所 Artin k -代数の圏, Set を集合の圏とする. V を DG Lie 代数とすると, $R \mapsto \overline{\text{MC}}(V \otimes_k m_R)$ によって関手

$$\text{Spf}(V) : \text{Art}_k \rightarrow \text{Set}$$

を定義する. m_R は R の極大イデアルで $V \otimes_k m_R$ は $[s \otimes m, s' \otimes m'] = [s, s'] \otimes mm'$ によって nilpotent DG Lie 代数になっているものとする.

注 3.2. DG Lie 代数の擬同型な写像 $V \rightarrow V'$ があれば自然同値 $\text{Spf}(V) \xrightarrow{\sim} \text{Spf}(V')$ が誘導されることが示されている.

X の $\text{Spec } R$ への変形同値類の集合は, $\text{Spf}(\mathcal{R}\Gamma(X, T_X))(R)$ と同一視できる¹³. このような基本的な例の結果から, 一般の状況で DG Lie 代数が変形理論を (局所モジュライの形式近傍のレベルで) 統制することが期待されてきた¹⁴. このアプローチのよいところは

1. 変形理論にホモロジー代数の手法を取り入れることができる
2. 導来代数幾何 (derived algebraic geometry) の局所版である
3. 導来代数幾何では, DG Lie 代数の ∞ 圏と導来変形問題の ∞ 圏が圏同値になるという DG Lie 代数と変形問題の綺麗な対応がある [14]

といった点である. 1 では, 例えば Goldman-Millson の representation variety の特異点の研究や Poisson 多様体の変形量子化 (Kontsevich) は古典的かつ代表的な応用である. 3 では, 大雑把に

$$\{\text{DG Lie 代数}\} \quad \Leftrightarrow \quad \{\text{DG Artin 環上に定義された形式 } \infty\text{-スタック}\}$$

の対応が示されていてこのアプローチの基本定理といってよい. これは, DG Lie 代数と可換 DG 代数との間の Koszul 双対性の幾何学的な表れとも思える. また変形問題

¹¹チェイン複体 L にブラケット $[-, -] : L \times L \rightarrow L$ が入っていて Lie 代数の関係式 (Jacobi 恒等式等) を満たすもの (参考文献参照)

¹²局所モジュライを基点付き形式スキーム (又はスタック) と思うと導来代数幾何の枠組みではそのループ空間をとる事が出来る. 正確に言えば DG Lie 代数はそのループ空間の接束のなす Lie 代数に対応している

¹³同一視はある意味自然である

¹⁴これを derived 変形理論の哲学と呼ぶ人もいる

を導来代数幾何の設定で定式化することが自然であることを言っているのであるが、ここではそのことに深く突っ込んでいかず先に進もう。

3.2. Curved A_∞ -変形と Hochschild コチェイン. 再び A を標数 0 の体 k 上の DG 代数とする. これの変形を考えたいのであるが, DG 代数としての変形ではなく curved A_∞ -代数として変形する. そこで curved A_∞ -代数をインフォーマルに復習する. 正確な定義は [7] やそこにある参考文献等を参照してほしい. DG 代数には結合律をみたく積 $A \otimes A \rightarrow A$ が入っていたが, A_∞ -代数ではその結合律を等号ではなくホモトピーで関係付ける形にする¹⁵. Curved A_∞ -代数とは, データとしては \mathbb{Z} -次数付き k -ベクトル空間 V と次数付きベクトル空間の写像の族 $\{b_i\}_{i \geq 0}$

- $b_0 : k \rightarrow V[2]$
- $b_1 : V \rightarrow V[1]$
- $b_2 : V^{\otimes 2} \rightarrow V$
- $b_3 : V^{\otimes 3} \rightarrow V[-1]$
- $b_4 : V^{\otimes 4} \rightarrow V[-2]$
- ...

で適当な A_∞ -関係式と呼ばれる合成に関する条件をみたすものである. $b_0 = 0$ のとき A_∞ -代数と呼ばれ, このとき b_1 が V の微分 ($b_1^2 = 0$), $b_2 : V \otimes V \rightarrow V$ が積, $b_3 : V^{\otimes 3} \rightarrow V[-1]$ が b_2 の積の結合律に関するホモトピー, b_4 はそのホモトピーの結合律に関する... というデータになっている (従って $b_i = 0$ ($i > 2$) ならば DG 代数である). $b_0 \neq 0$ の場合が A_∞ -代数でない curved A_∞ -代数で, このとき一般には $b_1^2 = 0$ が成立しないためホモロジーをとることすら出来ない. 従ってホモロジー代数的な取り扱いがよくない¹⁶.

定義 3.3. A を k 上 DG 代数とする. $R \in \text{Art}_k$ とする. A の R 上 curved A_∞ -変形とは, curved A_∞ -代数 $A \otimes_k R$ (次数付き R -加群 $A \otimes_k R$ に curved A_∞ -構造をいれたもの) で, $A \otimes_k R/m_R$ がもとの DG 代数の構造になるものとする ($1_A \otimes 1_R \in A \otimes_k R$ が単位元であることも課す). $R \in \text{Art}_k$ に対して $\text{DAlg}_A(R)$ を A の R 上 curved A_∞ -変形の同型類の集合とする (変形の同型は自然に定義しておく). $R \mapsto \text{DAlg}_A(R)$ で変形問題に関する関手

$$\text{DAlg}_A : \text{Art}_k \rightarrow \text{Set}$$

を定義する.

$HH^*(A)$ を Hochschild コチェイン複体とする. そのホモロジー $HH^*(A)$ をとると, Hochschild cohomology $\text{Ext}_{A \otimes A^{\text{op}}}^i(A, A) = HH^i(A)$ になっている. よく知られているように $HH^*(A)$ は Gerstenhaber 代数になる. $HH^*(A)$ の代数構造のうち Lie 代数構造は, 適切な複体をとると $HH^*(A)[1]$ の Lie 代数構造にまでもちあがり, $HH^*(A)[1]$ は DG Lie 代数になる. これと変形との関係は次で示される:

命題 3.4 ([7]). 自然な同値

$$\text{DAlg}_A \simeq \text{Spf}(HH^*(A)[1])$$

がある.

この同値はかなり簡単な対応で示される.

¹⁵ トポロジーから生まれた概念で, 位相空間の基点付きループ空間 $\Omega_* S$ にモノイドの構造をループの連結で入れようとする strict な結合律を満たさないことから高次のホモトピーをとり入れることで派生した代数の概念である

¹⁶ curved A_∞ -代数はもっと洗練された概念によって置き換わるべきであると思う

例 3.5. ここで DAlg_A の雰囲気を古典的な場合を通して考えておく. $\mathrm{DAlg}_A(k[x]/(x^2)) \simeq \mathrm{Spf}(HH^\bullet(A)[1])(k[x]/(x^2))$ であるから,

$$\mathrm{DAlg}_A(k[x]/(x^2)) \simeq \mathrm{Spf}(HH^\bullet(A)[1])(k[x]/(x^2)) \simeq HH^2(A)$$

である. X が k 上スムーズな代数多様体で $\mathrm{RMod}(A) = \mathcal{D}(X)$ となっているとき, Hochschild-Kostant-Rosenberg の定理から, 同型

$$HH^2(A) \simeq H^0(X, \wedge^2 T_X) \oplus H^1(X, T_X) \oplus H^2(X, \mathcal{O}_X)$$

がある. $H^1(X, T_X)$ はスキームの変形空間, $H^0(X, \wedge^2 T_X)$ は非可換方向の変形空間, $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ は \mathcal{O}_X を twisted 層に変形する空間に対応していると見なすことができる¹⁷.

例 3.6. $X \subset \mathbb{P}^5$ を 3 次 4-fold とする. $\mathrm{Perf}(X)$ を perfect 複体のなす圏とする.

$$\mathcal{A}_X = \{F \in \mathrm{Perf}(X) \mid \mathcal{R}Hom_{\mathrm{Perf}(X)}(\mathcal{O}_X(i), F) \simeq 0 \text{ for } i = 0, 1, 2\}$$

とおくと \mathcal{A}_X はスムーズかつ固有な Calabi-Yau 圏になり, コンパクト生成対象を取ることで, \mathcal{A}_X はスムーズかつ固有な 2 次元 Calabi-Yau 代数 A 上の perfect DG 加群の圏と同値になる. Hochschild ホモロジー $HH_*(\mathcal{A}_X) = HH_*(A)$ の各次元が K3 曲面の場合のそれと同じになり,

$$\dim HH_0(A) = 22, \quad \dim HH_{-2}(A) = \dim HH_2(A) = 1$$

で残りは 0 となる (このような圏を K3 圏という). 2 次元 Calabi-Yau 構造から, $HH^2(A) \simeq HH_0(A)$ である. 従って A の変形空間 (の接空間) は 22 次元である.

3.3. Hodge フィルトレーションの変形. 次に Hodge 複体の対応物として, 我々は

$$HN_\bullet(A) \subset HP_\bullet(A)$$

を採用していた¹⁸. ここで (コ) ホモロジーをとらずに複体で考えることは非常に重要な点である. この変形に対する局所モジュライを DG Lie 代数として与えたい. そこで, いきなりフィルトレーションの変形を考えずに, 複体 $HN_\bullet(A)$, $HP_\bullet(A)$ 各々の変形問題を考える.

代数多様体 X 上のベクトル束 \mathcal{E} の変形を考えると,

$$H^1(X, \mathcal{E}nd(\mathcal{E}))$$

と局所モジュライの接空間が同一視できた. スキームの例を考えると DG Lie 代数としては $\mathcal{E}nd(\mathcal{E})$ を次数付き交換子 (graded commutator) で Lie 代数の層とみなして $\mathcal{R}\Gamma(X, \mathcal{E}nd(\mathcal{E}))$ に DG Lie 代数 (或いは L_∞ -代数) の構造を入れれば \mathcal{E} の変形を ($\mathrm{Spf}(-)$ を通して) 記述するであろうと容易に想像できる. 複体の場合にもどる. (C, d) を微分 d をもつ k -ベクトル空間のコチェイン複体として, 変形問題の関手

$$\mathrm{D}_{C/k} : \mathbf{Art}_k \rightarrow \mathbf{Set}, \quad R \mapsto \{C \text{ の } R \text{ への変形の同型類}\}$$

但し $\{C \text{ の } R \text{ への変形の同型類}\} = \{\mathbf{R}\text{-加群のコチェイン複体 } (C \otimes_k R, \tilde{d}, \tilde{d} \otimes_R k = d)\} / \sim$ を考える. このとき $\mathrm{End}_k(C)$ を自己準同型 Lie 代数とすると,

$$\mathrm{D}_{C/k} \simeq \mathrm{Spf}(\mathrm{End}_k(C))$$

と表すことが出来る. $k[t]$ -加群 $HN_\bullet(A)$ の変形問題を考える. R への変形を $R[t]$ -加群 $(HN_\bullet(A) \otimes_k R, \tilde{d} \text{ with } \tilde{d} \otimes_R k = \partial_{\mathrm{Hoch}} + tB)$ とする. R への変形同型類の集合を

¹⁷最後の twisted 層への変形が現れることと変形問題に curved をこめた A_∞ -変形を考えなければならぬことは対応している

¹⁸以下 k は簡単のため複素数体とする

$D_{HN_\bullet(A)/k[t]}(R)$ とかくと (変形の同型は適当に定義する), $R \mapsto D_{HN_\bullet(A)/k[t]}(R)$ で関手

$$D_{HN_\bullet(A)/k[t]} : \mathbf{Art}_k \rightarrow \mathbf{Set}$$

を定める. これは, DG Lie 代数 $\mathrm{End}_{k[t]}(HN_\bullet(A))$ で記述され, つまり同型

$$D_{HN_\bullet(A)/k[t]} \simeq \mathrm{Spf}(\mathrm{End}_{k[t]}(HN_\bullet(A)))$$

がある. 同様に, $k[t, t^{-1}]$ -加群 $HP_\bullet(A)$ の変形同値類を与える変形問題の関手

$$D_{HP_\bullet(A)/k[t, t^{-1}]} : \mathbf{Art}_k \rightarrow \mathbf{Set}$$

を考えると, それは $\mathrm{End}_{k[t, t^{-1}]}(HP_\bullet(A))$ で記述される:

$$D_{HP_\bullet(A)/k[t, t^{-1}]} \simeq \mathrm{Spf}(\mathrm{End}_{k[t, t^{-1}]}(HP_\bullet(A))).$$

以下 $k[t, t^{-1}]$ を $k[t^\pm]$ と書く.

次に, DG Lie 代数の図式

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{End}_{k[t]}(HN_\bullet(A)) & \\ & \downarrow \iota & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{End}_{k[t^\pm]}(HP_\bullet(A)) \end{array}$$

を考える. 右縦の射は基底変換 $\otimes_{k[t]} k[t^\pm]$ で誘導されるものである. この図式の本トピーファイバーを \mathbb{F} とおく. \mathbb{F} は DG Lie 代数の ∞ 圏で, ファイバー積 $0 \times_{\mathrm{End}_{k[t^\pm]}(HP_\bullet(A))} \mathrm{End}_{k[t]}(HN_\bullet(A))$ であり, 実際の DG Lie 代数としても明示的なモデルをとることが出来る¹⁹.

$$\widehat{\mathrm{Gr}} := \mathrm{Spf} \mathbb{F}$$

とおく. ここで, \mathbb{F} と $\widehat{\mathrm{Gr}}$ は, $HN_\bullet(A) \subset HP_\bullet(A)$ に依存しているがそれを示す記号を省略する. $\widehat{\mathrm{Gr}}$ はアファイン・グラスマン多様体と類似していることに注意する. 構成から次のモジュライ解釈がある: W が $HN_\bullet(A)$ の R への変形であり, f が基底変換 $W \otimes_{R[t]} R[t^\pm]$ から自明な変形 $HP_\bullet(A) \otimes_k R^{triv}$ への変形 ($R[t^\pm]$ 上での) 同型であるような組

$$(W, f : W \otimes_{R[t]} R[t^\pm] \xrightarrow{\sim} HP_\bullet(A) \otimes_k R^{triv})$$

を考える. このような組の (自然に定義した同型についての) 同型類の集合と $\widehat{\mathrm{Gr}}(R)$ の間に (R について関手的な) 同型がある. この組 (W, f) は, $HN_\bullet(A) \subset HP_\bullet(A)$ の変形をみなせることに注意しよう. つまり, $HN_\bullet(A)$ は W へ変形しているが, f を通して全空間の自明な変形 $HP_\bullet(A) \otimes_k R^{triv}$ のなかへ埋め込まれていると考えられる²⁰.

別の見方をする. A をスムーズかつ固有な DG 代数とする. このとき $\widehat{\mathrm{Gr}}$ は簡単な構造を持っている. Hodge-to-de Rham スペクトル系列の退化 (定理 2.7) を用いると

$$\mathbb{F} \simeq (\mathrm{End}_{k[t^\pm]}(HH_*(A)((t))) / \mathrm{End}_{k[t]}(HH_*(A)[[t]]))[-1]$$

¹⁹ ι の mapping cocone に適当に Lie 代数の構造を入れたものと考えても十分である.

²⁰ ホモトピー論的には部分複体 $HN_\bullet(A) \subset HP_\bullet(A)$ というのは意味を成さないからこれを複体の射とみなすほうが正確である

がわかる. ここで $HH_*(A)(HH_*(A)[[t]], HH_*(A)((t)))$ は次数付きベクトル空間を微分のない複体とみなしたものである. 右辺はアーベル DG Lie 代数である. GL_n のアファイン・グラスマン多様体の点集合 (k -valued points) が

$$GL_n(k((x)))/GL_n(k[[x]])$$

とかけることを思い出すと, $\widehat{Gr} = \text{Spf}(\mathbb{F})$ は,

$$\text{“}GL(HH_*(A))\text{ の形式的アファイン・グラスマン”}$$

と思うことができる.

4.

この節の結果については [7] を参照. 周期写像のモジュライ的意味を思い出すと,

$$\{A \text{ の curved } A_\infty\text{-変形}\} \mapsto \{HN_\bullet(A) \subset HP_\bullet(A) \text{ の変形}\}$$

を考えたい. 左辺は命題 3.4, 右辺は 3.3 節参照. 上のモジュライ理論的意味をもつ DG Lie 代数の写像 $HH^\bullet(A) \rightarrow \mathbb{F}$ を構成することを指導原理に掲げて考えていく. まず, \tilde{A} を A の R 上 curved A_∞ -変形としたとき, その Hochschild チェイン $HH_\bullet(\tilde{A})$ を定義でき, これは DG Λ -加群 $HH_\bullet(A)$ の R への変形になっている. そこから $HN_\bullet(A)$ の変形 $HN_\bullet(\tilde{A})$ が誘導される. 基底変換 $\otimes_{k[t]} k[t^\pm]$ により, $HP_\bullet(A)$ の変形 $HP_\bullet(\tilde{A})$ も得られる. したがって,

$$\tilde{A} \mapsto HN_\bullet(\tilde{A}) \mapsto HP_\bullet(\tilde{A})$$

によって

$$D\text{Alg}_A \xrightarrow{p} D_{HN_\bullet(A)/k[t]} \xrightarrow{q} D_{HP_\bullet(A)/k[t, t^{-1}]}$$

が誘導される. 射 $D\text{Alg}_A \rightarrow D_{HN_\bullet(A)/k[t]}$ を $D\text{Alg}_A \rightarrow \widehat{Gr} = \text{Spf}(\mathbb{F})$ へ持ち上げたい. そのためには合成 $D\text{Alg}_A \rightarrow D_{HP_\bullet(A)/k[t, t^{-1}]}$ が $\text{Spf}(0) = *$ を経由している必要がある. ここで $*$ は 1 点集合を値にとる定値関手である. これは任意の変形 \tilde{A} に対して $HP_\bullet(\tilde{A})$ が $HP_\bullet(A)$ の自明な変形になっていることを要求している. この問題/困難は, その (ナイーブなモジュライの) 意味を考えているだけで解消できるものではない. この問題は,

$$(HH^\bullet(A), HH_\bullet(A)) \text{ に入る代数構造と上の } p, q \text{ を関係付ける}$$

ことによって理解・解消される. そこで, $(HH^\bullet(A), HH_\bullet(A))$ に入る代数構造を一旦説明する. $HH^\bullet(A)[1]$ には Lie 代数の構造, $HH_\bullet(A)$ には S^1 -作用が入っていた. 実はこれ以外にも代数構造が入っていて, これら以外に

- 積 $\cdot : HH^\bullet(A) \otimes HH^\bullet(A) \rightarrow HH^\bullet(A)$
- Lie 代数作用 $L : HH^\bullet(A)[1] \otimes HH_\bullet(A) \rightarrow HH_\bullet(A)$
- 上の積 \cdot に関する加群構造 $I : HH^\bullet(A) \otimes HH_\bullet(A) \rightarrow HH_\bullet(A)$

の代数作用素があり,

$$(\cdot, [-, -], L, I, B)$$

がいくつかの関係を満たすような代数構造を定めている. $(HH^\bullet(A), HH_\bullet(A))$ は, 可微分多様体 M の

$$(T_M^\bullet, \Omega_M^\bullet) = (\oplus_{p \geq 0} T_M^{\wedge p}, \oplus_{q \geq 0} \Omega_M^q)$$

の対応物とみなせるが, $(\cdot, [-, -], L, I, B)$ は $(T_M^\bullet, \Omega_M^\bullet)$ における T_M^\bullet の wedge 積, Schouten Lie 括弧, Lie 微分, contraction, de Rham 微分の類似にそれぞれなっている. ただ, $(T_M^\bullet, \Omega_M^\bullet)$ の場合のように代数構造の構成は単純ではない. 代数構造

$(\cdot, [-, -], L, I, B)$ は、2つのカラーを持つカラー付きオペラッド（色付作用団）により記述される．例えば、 $HH^\bullet(A)$ にはいる $(\cdot, [-, -])$ の構造は正確には $HH^\bullet(A)$ 上の E_2 -代数構造のことであり、これは Deligne 予想（現在は解決されている）である．これらや Connes 作用素 B の拡張として、 $(HH^\bullet(A), HH_\bullet(A))$ に上記の代数構造が Kontsevich-Soibelman [6], Dolgushev-Tamarkin-Tsygan [2], Horel [4] により構成されている（次説も参照）．

次は $(HH^\bullet(A), HH_\bullet(A))$ の代数構造との関係をつくる第一歩である．

命題 4.1. $HH^\bullet(A)[1]$ の $HH_\bullet(A)$ への Lie 代数作用は $HN_\bullet(A)$ への作用を誘導し、 $L[[t]] : HH^\bullet(A)[1] \rightarrow \text{End}_{k[[t]]}(HN_\bullet(A))$ を誘導された DG Lie 代数の射とすると、

$$p : \text{DAlg}_A \rightarrow \text{D}_{HN_\bullet(A)/k[[t]]}$$

は

$$\text{Spf}(L[[t]]) : \text{Spf}(HH^\bullet(A)[1]) \rightarrow \text{Spf}(\text{End}_{k[[t]]}(HN_\bullet(A)))$$

と同一視される．さらに、合成 $q \circ p : \text{DAlg}_A \rightarrow \text{D}_{HP_\bullet(A)/k[[t^\pm]]}$ は

$$L((t)) : HH^\bullet(A)[1] \rightarrow \text{End}_{k[[t]]}(HN_\bullet(A)) \xrightarrow{\iota} \text{End}_{k[[t^\pm]]}(HP_\bullet(A))$$

と $\text{Spf}(-)$ をとることで同一視される．

さらに L だけでなく全ての構造をフルに使うことで次が示される：

定理 4.2 (非可換 Ehresmann ファイブレーション定理). DG Lie 代数の射

$$L((t)) : HH^\bullet(A)[1] \rightarrow \text{End}_{k[[t^\pm]]}(HP_\bullet(A))$$

は、ヌル-ホモトピック．つまり 0-写像と（写像空間の中で）ホモトピー同値．特に、 A の curved A_∞ -変形で引き起こされる $HP_\bullet(A)$ の変形は自明である．

周期的巡回ホモロジーは de Rham コホモロジーの対応物であった．これを「位相的不変量」とみなすと、 A は変形してもその位相不変量を変形しないという 1 節でてきた Ehresmann ファイブレーション定理型の結果とみなせる．Ehresmann ファイブレーション定理は古典的周期写像の構成でも肝であった．

上の結果を用いると次の可換図式を得る²¹

$$\begin{array}{ccc} HH^\bullet(A)[1] & & \\ \mathcal{P} \searrow & \xrightarrow{L[[t]]} & \\ \mathbb{F} & \longrightarrow & \text{End}_{k[[t]]}(HN_\bullet(A)) \\ \downarrow & & \downarrow \iota \\ 0 & \longrightarrow & \text{End}_{k[[t^\pm]]}(HP_\bullet(A)) \end{array}$$

四角は引き戻し図式（ホモトピーファイバー）である．図式中の $\mathcal{P} : HH^\bullet(A)[1] \rightarrow \mathbb{F}$ が所望の DG Lie 代数の射としての周期写像である．定理としてまとめると：

定理 4.3. DG Lie 代数の射

$$\mathcal{P} : HH^\bullet(A)[1] \rightarrow \mathbb{F}$$

は、局所周期写像というべきもので、

²¹DG Lie 代数の ∞ 圏のなかの可換図式をみなさないといけない所もあるがここでは無視する

- $\mathrm{Spf}(\mathcal{P}) : \mathrm{DAlg}_A \simeq \mathrm{Spf}(HH^\bullet(A)[1]) \rightarrow \mathrm{Spf}(\mathbb{F}) = \widehat{\mathrm{Gr}}$ は、この節の最初で述べたようなモジュライ理論的解釈が出来る。つまり、変形 \tilde{A} を

$$(HN_\bullet(\tilde{A}), HN_\bullet(\tilde{A}) \otimes_{R[t]} R[t^\pm]) \simeq HP_\bullet(A) \otimes_k R^{triv}$$

に送る。

- *Griffiths* 横断性を満たす、
- *Calabi-Yau* (スムーズかつ固有) のとき局所トレリ定理を満たす。

周期写像を使った応用を紹介する。次は、非可換代数幾何の Bogomolov-Tian-Todorov の定理というべきものであり、Katzarkov-Kontsevich-Pantev [5] によりアノウンスされていたものの証明は現れていないものである。

定理 4.4 ([5], [7]). A をスムーズで固有な *Calabi-Yau DG* 代数とする。このとき、 $HH^\bullet(A)[1]$ はアーベルな *DG Lie* 代数と擬同型。特に、 A の *curved* A_∞ -変形は、非障害 (*unobstructed*)。

(我々の) 証明であるが、3.3 で述べたように、 A がスムーズかつ固有であれば \mathbb{F} はアーベル *DG Lie* 代数 (と擬同型) であった。Calabi-Yau のときその性質が周期写像 $\mathcal{P} : HH^\bullet(A)[1] \rightarrow \mathbb{F}$ を通して $HH^\bullet(A)[1]$ に伝播することを示すことで証明される。

次にこれを用いて変形量子化について考える。 $k[-1]$ をコホモロジカル次数 1 のところに k があるアーベル *DG Lie* 代数とみなすと、 $\mathrm{Spf}(k[-1]) : \mathrm{Art}_k \rightarrow \mathrm{Set}$ は (本当の) 形式スキーム $\mathrm{Spf}(k[[x]])$ で表現される。ここで $k[[x]]$ は形式べき級数環で x -進位相を入れている。アーベル *DG Lie* 代数 L に対して、*Lie* 代数の射 $k[-1] \rightarrow L$ を与えることは、ホモトピーを除いて $H^1(L)$ 分ある。これから $\mathrm{Spf}(k[[x]]) \rightarrow \mathrm{Spf}(L)$ が定まり、これは、射影極限 $\lim_n \mathrm{Spf}(L)(k[x]/(x^{n+1}))$ の元とみなせる。この簡単な考察と *DG* 圏の変形の最近の結果から

定理 4.5. \mathcal{C} を *DG* 圏で、スムーズ、固有かつ *Calabi-Yau* とする。1 個のコンパクト生成対象を持つとする。このとき、 $\alpha \in HH^2(\mathcal{C})$ を与えると、それに対して \mathcal{C} の変形量子化 $\widehat{\mathcal{C}} = \{\mathcal{C}_n\}_{n \geq 0}$ が決まる。ここで \mathcal{C}_n は、 \mathcal{C} の $k[x]/(x^{n+1})$ 上 *DG* 圏への変形で、族 $\{\mathcal{C}_n\}_{n \geq 0}$ は \mathcal{C} の $k[[x]]$ 上への形式的変形をあらわす。

5.

前節で説明した周期写像の構成やその性質には、

$$(HH^\bullet(A), HH_\bullet(A))$$

のもつ代数構造が重要であった。ここで $HH^\bullet(A)$, $HH_\bullet(A)$ は (コ) ホモロジーをとっていない複体であること、そのレベルでの構造が重要であることを再度強調しておきたい。その代数構造の構成について、[8] において最近得られた簡明な構成法も踏まえつつ説明する。この構造は、[6] や [4] では位相的オペラッド (から得られた *DG* オペラッド)、[2] では *calculus* オペラッドとよばれる生成元と関係式で定義される *DG* オペラッドとして扱われている。これらのオペラッドは擬同型 (のジグザグ) で *DG* オペラッドとして同一視できることが示されている Willwacher [18] 参照。特に前者の位相的オペラッドは形式性を持つ。ここで繰り返しを恐れずにどのような代数構造であったかをインフォーマルに記述する。 $HH^\bullet(A)$ には E_2 -代数の構造が入っている。この事実は Deligne 予想と呼ばれていた (様々な方法で解決されているが、現在でもそう呼ばれることが多い)。 E_n -代数とは、多重ループ空間の研究の過程で生まれた概念で、 n -重ループ空間 $\Omega^n S$ (の特異チェーン複体) は、 E_n -代数になっている。直感的には、 E_2 -代数は 2 重ループ空間が持っているような代数構造ということになる。2 重ループ空間 $\Omega^2 S$ をみると、2 回ループを取っているの、「最初のループ」による結合的積構造と「2 個目のループ」による結合的積構造の二つがあり、

その二つの演算が互いに整合性を持っていることが分かる。この整合性の部分を（オペラッドレベルでよくみると） E_2 -代数 A は、1つシフトすれば $A[1]$ に DG Lie 代数（正確には L_∞ -代数というべきかもしれない）の構造がはいる。（複体における） E_2 -代数は、(コ) ホモロジーをとると Gerstenhaber 代数になることが知られており、Hochschild コホモロジー $HH^*(A)$ は Gerstenhaber 代数であったことから $HH^\bullet(A)$ が E_2 -代数になることが予想されていた。一方 $HH_\bullet(A)$ は Connes 作用素由来の S^1 -作用（混合複体になっているともいえる）をもっていた。この E_2 -代数 $HH^\bullet(A)$ が、 $HH_\bullet(A)$ に S^1 -作用とある意味整合性を持つように作用する。これら全ての構造は上記のオペラッド上の代数として記述される。位相的なオペラッド上の代数のことを導入者の名前をとって KS -代数と呼ぶことにする。この代数構造の構成は、(この周辺のオペラッド関連の論文を読んだことがある人はご存知かもしれないが) 大変複雑で、オペラッドの様々な resolution や様々なモデル、複雑な式によるチェーン写像を繰り返しているものであった。[4] では、factorization ホモロジーを用いて見通しがよくなったがそれでも Hochschild コホモロジーのスイス・チーズオペラッド代数作用の複雑な構成に依拠している。 KS -代数構造は、前節みた周期写像のみならず非可換代数幾何に重要なものである。[8] では $(HH^\bullet(A), HH_\bullet(A))$ を KS -代数構造をコンセプト的に明快な構成を与えた。その構成では、どうしてそのような構造が入るのかも分かる仕組みになっており、拡張として安定 ∞ 圏やその同変版（つまり位相群作用付き安定 ∞ 圏）、非加法性版など様々な設定に適用できる方法を与えている。例えば、位相群作用付き安定 ∞ 圏は Landau-Ginzberg 模型の設定に適用する際重要になってくる。構成のポイントを何点か挙げると

- KS -代数のデータを簡単な代数構造の組み合わせ (A, B, M) に分解する。ここで A は、結合代数の圏の結合代数、 B は S^1 作用付き結合代数で A の Hochschild チェーン、 M は S^1 -作用のついた同変左 B -加群。
- 安定 ∞ 圏 \mathcal{C} にその Hochschild コチェインの左加群作用を圏化された意味でいれ、Hochschild チェーンをとる。

定理の形でまとめると

定理 5.1 ([8]). R を可換環スペクトラムとする。 \mathcal{C} を小さな R -線形安定 ∞ 圏とする。このとき、コンセプト的な構成方法で（特にモデルに依拠しない方法で） $(HH^\bullet(\mathcal{C}), HH_\bullet(\mathcal{C}))$ に KS -代数構造が入る。

REFERENCES

- [1] L. Cohn, Differential graded categories are K -linear stable ∞ -categories, arXiv:1308.2587
- [2] V. Dolgushev, D. Tamarkin and B. Tsygan, Formality of the homotopy calculus algebra of Hochschild (co)chains, available at arXiv:0807.5117.
- [3] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian Intersection Floer Theory: Anomaly and Obstruction American Mathematical Society (2009)
- [4] G. Horel, Factorization homology and Kontsevich Soibelman calculus, J. Noncomm. Geom. Vol 11. (2017) pp. 703–740
- [5] L.Katzarkov, M.Kontsevich and T.Pantev, Hodge theoretic aspects of mirror symmetry, available at arxiv:0806.0107
- [6] M. Kontsevich and Y. Soibelman, Notes on A_∞ -algebras, A_∞ -categories and non-commutative geometry. I, “Homological Mirror Symmetry: New Developments and Perspectives” (A.Kapustin et al. (Eds.)), Lect. Notes in Physics 757 (Springer, Berlin Heidelberg 2009) pp. 153–219.
- [7] I. Iwanari, Period mappings for noncommutative algebras, preprint
- [8] I. Iwanari, Differential calculus of infinity-categories, preprint
- [9] D. Kaledin, Motivic structures in non-commutative geometry, Proc. ICM 2010, available at arXiv:1003.3210
- [10] D. Kaledin, Spectral sequences for cyclic homology, available at arXiv:1601.00637
- [11] J.-L. Loday, Cyclic Homology, Springer-Verlag (1992).

- [12] J. Lurie, Higher Topos Theory, Annals of Mathematics Studies, 170. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.
- [13] J. Lurie, Higher Algebra, draft 2017.
- [14] J. Lurie, Spectral algebraic geometry, draft under construction 2017
- [15] P. Seidel, Fukaya categories and Picard-Lefschetz Theory, European Math. Soc., 2008.
- [16] K. Saito and A. Takahashi, From primitive forms to Frobenius manifolds, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 78 (2008), 31–48.
- [17] C. Weibel, The Hodge filtrations and cyclic homology, K-theory 12 (1997), 145–164.
- [18] T. Willwacher, The homotopy braces formality morphism, Duke Math. J. Vol.165, (2016), 1815–1964.

E-mail address: `iwanari@math.tohoku.ac.jp`

対数的 CALABI-YAU 多様体の変形

佐野 太郎

1. はじめに

本稿では Calabi-Yau 多様体とは、標準因子 K_X が自明な compact Kähler 多様体 X のこととする。Calabi-Yau 多様体は代数幾何のみならず微分幾何、数理物理においてもよく研究されている対象である。Calabi-Yau 多様体の変形には障害がないことが知られている。Tian, Todorov の論法は解析的なもので $SU(n)$ なる仮定がついていたが、Ran, 川又により代数的な証明が得られ、その仮定も外れた。これにより Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間は局所的には滑らかということになる。

本稿ではその“対数的”一般化について論じる。対数的 Calabi-Yau 多様体という、双有理幾何学においては正規射影多様体 X とその上の \mathbb{Q} -因子 B のペアであって $K_X + B \sim_{\mathbb{Q}} 0$ かつ (X, B) が lc 対となるものをいうことが多い。Calabi-Yau 対とも呼ばれる。滑らかな (弱)Fano 多様体 X に対し十分大きな $m > 0$ に対して多重反標準系 $|-mK_X|$ は滑らかな元 D_m を持つが、 $(X, \frac{1}{m}D_m)$ は Calabi-Yau 対の典型例となる。 X と因子のペアの変形を考えることで、非障害性の対数的一般化が得られる。またその応用として弱 Fano 多様体の変形の非障害性が得られる。

本稿ではさらに、正規交差多様体であって双対化層 ω_X が自明である正規交差 Calabi-Yau 多様体も考える。川又-並河は正規交差 Calabi-Yau 多様体の対数変形理論を展開し、マイルドな条件のもとでそれらが滑らかな Calabi-Yau 多様体に変形できることを示した。本稿では川又-並河の理論の応用により非ケーラー Calabi-Yau 3-fold でピカルル数が任意に大きくなる例が構成できることについて論じる。

本稿では複素数体 \mathbb{C} 上の代数スキーム、および複素解析空間の変形を考える。

2. CALABI-YAU 多様体の変形と T^1 -LIFTING

まずは Calabi-Yau 多様体の変形の非障害性が T^1 -lifting property によって示されることを復習する (cf. [Nam96]). そのため変形関手やその非障害性などの定義を準備する。

定義 2.1. X を代数スキーム (または複素解析空間) とする。 \mathcal{A} を Artin 局所 \mathbb{C} -代数 A で剰余体が \mathbb{C} となるもののなす圏, $(Sets)$ を集合のなす圏とする。このとき X の変形関手 $\text{Def}_X: \mathcal{A} \rightarrow (Sets)$ を $A \in \mathcal{A}$ に対し

$$\text{Def}_X(A) := \{(X \hookrightarrow X_A) \mid X_A \rightarrow \text{Spec } A : \text{平坦}, X_A \times_A \mathbb{C} \simeq X\} / \simeq$$

とすることで定める。ここで二つのデータ $(X \hookrightarrow X_A)$ と $(X \hookrightarrow X'_A)$ が同値であるとは、ある A -同型 $\Phi: X_A \rightarrow X'_A$ であって X の埋め込みと compatible になるものが存在することとする。

Def_X が非障害 (unobstructed) であるとは任意の $A, A' \in \mathcal{A}$ とその間の全射 $A' \rightarrow A$ に対して, 変形の制限写像

$$r_{A'A}: \text{Def}_X(A') \rightarrow \text{Def}_X(A)$$

が全射であることとする.

X がコンパクト解析空間であるとき, 半普遍変形 $\phi: \mathcal{X} \rightarrow \text{Def}(X) \ni 0$, つまり次の性質を持つ変形があることが知られている: X の任意の小変形は底変換により ϕ から誘導され, 誘導の仕方は接空間のレベルで一意的である. (底点 0 は $X \simeq \phi^{-1}(0)$ を満たす点のことである.) この ϕ は倉西族とよばれ, 底空間 $\text{Def}(X)$ は倉西空間と呼ばれる. 倉西空間の底点での局所環の完備化 $\hat{\mathcal{O}}_{\text{Def}(X),0}$ の環としての同型類は一意的であることがわかる. また次の事実がある.

事実 2.2. コンパクト解析空間 X に対し, 倉西空間 $\text{Def}(X)$ が底点 0 で滑らかであることと, 変形関手 Def_X が非障害であることは同値である.

よって倉西空間の特異性を調べるには, Artin 環上の無限小変形を考えれば十分であることがわかる. また次のように特別な Artin 環のみ調べれば非障害性は判定できる.

事実 2.3. Def_X が非障害であることと, 任意の $n \geq 0$ と $A_n := \mathbb{C}[t]/(t^{n+1})$ に対して制限写像 $\text{Def}_X(A_{n+1}) \rightarrow \text{Def}_X(A_n)$ が全射であることは同値である.

X がコンパクト複素多様体の時には, 変形の障害空間は $H^2(X, \mathcal{T}_X)$ により与えられた (\mathcal{T}_X は X の接束). つまり, Artin 環 $A, A' \in \mathcal{A}$ が完全列

$$\xi := (0 \rightarrow J \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow 0)$$

をなし $\mathfrak{m}_{A'}J = 0$ を満たす時 (このような ξ を Artin 環の拡大という), 障害写像 $o_\xi: \text{Def}_X(A) \rightarrow H^2(X, \mathcal{T}_X) \otimes_{\mathbb{C}} J$ が存在し, 列

$$\text{Def}_X(A') \xrightarrow{r_{A'A}} \text{Def}_X(A) \xrightarrow{o_\xi} H^2(X, \mathcal{T}_X) \otimes J$$

が完全となって ($\eta_A \in \text{Def}_X(A)$ に対し, $o_\xi(\eta_A) = 0$ であることと $\eta_{A'} \in \text{Def}_X(A')$ であって $r_{A'A}(\eta_{A'}) = \eta_A$ となることは同値.) さらに“関手性”を持つ. 特に $H^2(X, \mathcal{T}_X) = 0$ の時には Def_X は非障害である.

例 2.4. X を滑らかな射影多様体とする. 次の場合には倉西空間 $\text{Def}(X)$ は滑らかである.

- (i) $\dim X = 1$.
- (ii) X が Fano 多様体, つまり反標準因子 $-K_X$ が豊富.
- (iii) X がアーベル多様体 (複素トーラスでも良い).

(i), (ii) においては共に $H^2(X, \mathcal{T}_X) = 0$ であることが, (i) では 1 次元であること, (ii) では小平–中野消滅定理から従う.

(iii) では $\dim X \geq 2$ の時には $H^2(X, \mathcal{T}_X) \neq 0$ であるが, 複素トーラスの普遍変形族は具体的に構成できる. 変形 $\phi_X: \mathcal{X} \rightarrow \Delta^{\tau_X}$ を一つ構成し, 小平–Spencer 写像が全単射であることがチェックできれば半普遍性が従う. (詳細は小平–Spencer の論文 [KS58, 14 (γ)] にて.)

一般には複素多様体 X の倉西空間は特異点を持つことが多い. 例えば Vakil は次の結果を示した: \mathbb{Z} 上定義された有限型 \mathbb{C} -スキーム T に対し, 射影平面 S であってその倉西空間 $\text{Def}(S)$ が T と滑らかな射を通じて同値になるようなものが存在する. 例えば K_S が豊富になるような例が構成されている.

にも関わらず標準因子が自明の時には, Bogomolov, Tian, Todorov, Ran ([Ran92]), 川又 ([Kaw92]) らにより次の定理が示された.

定理 2.5. X を Calabi-Yau 多様体とする (つまり X はコンパクト Kähler 多様体で $K_X \sim 0$ なるもの). このとき Def_X は非障害である.

注意 2.6. Todorov の論文 ([Tod89]) を見ると, $SU(n)$ -多様体なるものの変形が扱われている. これは $H^0(X, \Omega_X^i) = 0$ ($0 < i < \dim X$) をみたすので定理における Calabi-Yau 多様体よりは狭いクラスである. 例えばアーベル多様体やハイパーケーラー多様体は含まれないが, これが分類論的には最も難しい場合かもしれない. Ran による代数的な証明では K_X が torsion かつ X がコンパクト Kähler という条件のみから非障害性が示されている. 簡略化された代数的証明は川又により得られた.

上の定理の証明では T^1 -lifting property という性質が有効に使われた.

定義 2.7. $A_n := \mathbb{C}[t]/(t^{n+1})$, $B_n := A_n \otimes_{\mathbb{C}} A_1 \simeq \mathbb{C}[t, u]/(t^{n+1}, u^2) \in \mathcal{A}$ とおく. またコンパクト解析空間 X と $X_n \in \text{Def}_X(A_n)$ に対して,

$T^1(X_n/A_n) := \{(X_n \hookrightarrow Y_n) : (X \hookrightarrow Y_n) \in \text{Def}_X(B_n), Y_n \times_{B_n} A_n \simeq X_n\} / \simeq$ とおく. ($(X_n \hookrightarrow Y_n) \simeq (X_n \hookrightarrow Y'_n)$ は $\Phi: Y_n \rightarrow Y'_n$ で $\Phi(X_n) = X_n$ を満たすこととする.)

コンパクト解析空間 X の変形関手 Def_X が T^1 -lifting property を満たすとは, 任意の $n \geq 0$ に対して

$$T^1(X_n/A_n) \rightarrow T^1(X_{n-1}/A_{n-1})$$

が全射となることである.

次の命題が重要である.

定理 2.8. ([Ran92], [Kaw92], [FM99]) コンパクト解析空間 X に対し, Def_X が非障害であることと T^1 -lifting property をみたすことは同値である.

また次の命題が基盤となる.

命題 2.9. ([Del68, Théorème 5.5]) X をコンパクト複素多様体で Hodge to de Rham スペクトル系列

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega_X^p) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, \Omega_X^\bullet) \simeq H^{p+q}(X, \mathbb{C})$$

が E_1 -退化するものとする. この時, $A \in \mathcal{A}$ と $X_A \in \text{Def}_X(A)$ に対してスペクトル系列

$$H^q(X_A, \Omega_{X_A/A}^p) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X_A, \Omega_{X_A/A}^\bullet) \simeq H^{p+q}(X, A)$$

も E_1 -退化する. また $H^q(X_A, \Omega_{X_A/A}^p)$ は自由 A 加群となり, Artin 環の底変換と可換になる.

定理 2.5 の証明のスケッチ. 一般に $(X \hookrightarrow X_n) \in \text{Def}_X(A_n)$ に対して,

$$T^1(X_n/A_n) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X_n}}^1(\Omega_{X_n/A_n}^1, \mathcal{O}_{X_n})$$

となる. 命題 2.9 より相対標準束 ω_{X_n/A_n} は自明となるので

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_{X_n}}^1(\Omega_{X_n/A_n}^1, \mathcal{O}_{X_n}) \simeq H^1(X_n, \Omega_{X_n/A_n}^{d-1})$$

を得る ($d := \dim X$). よって T^1 -lifting property は底変換写像

$$H^1(X_n, \Omega_{X_n/A_n}^{d-1}) \rightarrow H^1(X_{n-1}, \Omega_{X_{n-1}/A_{n-1}}^{d-1})$$

の全射性と同値になり, これは命題 2.9 から従う. \square

注意 2.10. 定理の証明から, X をコンパクト複素多様体で $K_X \sim 0$ をみたし Hodge to de Rham スペクトル系列が E_1 -退化するものとする, その倉西空間 $\text{Def}(X)$ は滑らかである. しかしスペクトル系列が退化しない場合には標準束が自明でも倉西空間が特異点を持つ例がある ([Ghy95]).

3. CALABI-YAU 対, 弱 FANO 多様体の変形

この節では Calabi-Yau 対の変形について述べる. まず, 閉部分空間との対 (X, D) の変形を導入する.

定義 3.1. X を \mathbb{C} -代数スキーム (または複素解析空間), $D \subset X$ をその閉部分スキーム (解析空間) とする. 変形関手 $\text{Def}_{(X,D)}: \mathcal{A} \rightarrow (\text{Sets})$ を

$$\begin{aligned} \text{Def}_{(X,D)}(\mathcal{A}) := \{ & (X \hookrightarrow X_A, D \hookrightarrow D_A, D_A \hookrightarrow X_A) \mid \\ & (X \hookrightarrow X_A) \in \text{Def}_X(\mathcal{A}), (D \hookrightarrow D_A) \in \text{Def}_D(\mathcal{A}) \} / \simeq \end{aligned}$$

により定める. 二つのデータ $(X \hookrightarrow X_A, D \hookrightarrow D_A, D_A \hookrightarrow X_A)$ と $(X \hookrightarrow X'_A, D \hookrightarrow D'_A, D'_A \hookrightarrow X'_A)$ が同値とは, A -同型 $\Phi: X_A \xrightarrow{\simeq} X'_A$ と $\Psi: D_A \rightarrow D'_A$ であって D, X の埋め込みと compatible になるものが存在することとする.

$\text{Def}_{(X,D)}$ の非障害性は Def_X の場合と同様に定義される.

Def_X や $\text{Def}_{(X,D)}$ は次で定義される “変形関手” の一種である.

定義 3.2. 共変関手 $F: \mathcal{A} \rightarrow (\text{Sets})$ が $F(\mathbb{C}) = \{*\}$ をみたし, $f: A \rightarrow B$ と $f': A' \rightarrow B$ とそこから自然に誘導される写像 $\phi: F(A \times_B A') \rightarrow F(A) \times_{F(B)} F(A')$ が次の “Schlessinger の条件” (H1), (H2), (H3) を満たすとする:

- (H1) f が全射のとき ϕ も全射.
- (H2) $A = A_1 := \mathbb{C}[t]/(t^2)$ のとき ϕ は全単射.
- (H3) $T_F^1 := F(A_1)$ は有限次元 \mathbb{C} -線形空間.

F が変形関手であるとは Artin 環の拡大 $e := (0 \rightarrow J \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow 0)$ に対して “障害写像” $o_e: F(A) \rightarrow T_F^2 \otimes J$ が定義され次を満たすこととする:

- (i) $F(A') \rightarrow F(A)$ の像が $o_e^{-1}(0)$ と一致.
- (ii) o_e は Artin 環の拡大に対し関手的.

変形関手 F が非障害とは、上のような Artin 環の拡大に対し $F(A') \rightarrow F(A)$ が全射であることとする。また、 F が T^1 -lifting property を満たすとは、自然に誘導される写像

$$F(B_n) \rightarrow F(A_n) \times_{F(A_{n-1})} F(B_{n-1})$$

が任意の $n \geq 1$ に対して全射になることとする。

Fantechi–Manetti は次の事実を示した。

事実 3.3. ([FM99]) 変形関手 F が非障害であることと、 T^1 -lifting property を満たすことは同値である。

注意 3.4. F が表現可能であるときには川又による証明が機能する。実は X が Calabi–Yau の時には Def_X は表現可能である。($X \hookrightarrow X_A$) $\in \text{Def}_X(A)$ に対し、相対標準層 $\omega_{X_A/A}$ が命題 2.9 から自明となる。また $H^0(X_A, \mathcal{T}_{X_A/A}) \simeq H^0(X_A, \Omega_{X_A/A}^{d-1})$ となって ($d := \dim X$)、無限小自己同型が lift することが事実 2.9 から従うからである (ただし $\Omega_{X_A/A}^i := \wedge^i \Omega_{X_A/A}^1$, $\mathcal{T}_{X_A/A} := (\Omega_{X_A/A}^1)^\vee$ (\vee は双対.))。

例 3.5. X がコンパクト複素多様体で $D \subset X$ がその滑らかな因子であるとき、 Def_X や $\text{Def}_{(X,D)}$ は変形関手である。もちろんその他にも Hilbert 関手や層の変形関手など様々な変形関手が存在する。

次の定理は Calabi–Yau 対に対する BTT 定理の一般化と言える。

定理 3.6. ([San14], [Iac15]) コンパクト Kähler 多様体 X であって、ある $m > 0$ に対し線形系 $| -mK_X |$ が滑らかな因子 D を含むものが与えられたとする。このとき変形関手 $\text{Def}_{(X,D)}$ は非障害である。

T^1 -lifting property と共に、再びスペクトル系列の退化が証明のキーとなる。証明は Deligne によるものとほぼ同様である。

命題 3.7. コンパクト Kähler 多様体 X とその滑らかな因子 D が与えられたとし、 $A \in \mathcal{A}$ 上で $(X_A, D_A) \in \text{Def}_{(X,D)}(A)$ を考える。

このときスペクトル系列

$$E_1^{p,q} := H^q(X_A, \Omega_{X_A/A}^p(\log D_A)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X_A, \Omega_{X_A/A}^\bullet(\log D_A))$$

は E_1 -退化する。また $H^q(X_A, \Omega_{X_A/A}^p(\log D_A))$ は自由 A -加群であり、Artin 環の底変換と可換である。($\Omega_{X_A/A}^p(\log D_A)$ は D_A に沿って極を許す相対対数微分層である。)

定理 3.6 の証明のスケッチ. BTT 定理での $T^1(X_n/A_n)$ と同様の空間を使って $\text{Def}_{(X,D)}$ の T^1 -lifting property は記述できる。すると T^1 -lifting property は $(X_n, D_n) \in \text{Def}_{(X,D)}(A_n)$ と $X_{n-1} := X_n \times_{A_n} A_{n-1}$, $D_{n-1} := D_n \times_{A_n} A_{n-1}$ に対して底変換写像

$$H^1(X_n, \mathcal{T}_{X_n/A_n}(-\log D_n)) \rightarrow H^1(X_{n-1}, \mathcal{T}_{X_{n-1}/A_{n-1}}(-\log D_{n-1}))$$

が任意の $n \geq 1$ に対し全射であることと同値であることがわかる。ただし $i = n-1, n$ に対し $\mathcal{T}_{X_i/A_i}(-\log D_i) := (\Omega_{X_i/A_i}^1(\log D_i))^\vee$ とおく。

簡単のため, $m = 1$ のときの説明をする. このとき事実 3.7 より

$$H^0(X_n, \omega_{X_n/A_n} \otimes \mathcal{O}_{X_n}(D_n)) \simeq A_n$$

であることが従うので, $\omega_{X_n/A_n} \otimes \mathcal{O}_{X_n}(D_n) \simeq \mathcal{O}_{X_n}$ である. これを使うと上の写像は

$$H^1(X_n, \Omega_{X_n/A_n}^{d-1}(\log D_n)) \rightarrow H^1(X_{n-1}, \Omega_{X_{n-1}/A_{n-1}}^{d-1}(\log D_{n-1}))$$

($d := \dim X$ とする) となり, この全射性は事実から従う.

m が一般の時には DGLA を使った方法しか今の所知られていない ([Iac15]). しかし次の仮定 (*) をおけば T^1 -lifting と分岐被覆のテクニックのみで DGLA を使わずに証明ができる:

(*) 任意の $n \geq 1$ および $(X_n, D_n) \in \text{Def}_{(X,D)}(A_n)$ に対して

$$\omega_{X_n/A_n}^{\otimes m} \otimes \mathcal{O}_{X_n}(D_n) \simeq \mathcal{O}_{X_n}.$$

この仮定は $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ の時や $m = 1$ の時には満たされる. \square

上の $\text{Def}_{(X,D)}$ の非障害性の系として, 次の Def_X の非障害性が得られる.

系 3.8. ([San14]) X を弱 Fano 多様体とする, つまり反標準因子 $-K_X$ はネフかつ巨大とする. このとき Def_X は非障害である.

証明. まず基底点自由化定理より, 十分大きい $m > 0$ をとると線形系 $|-mK_X|$ は自由となり滑らかな元 D をもつ. この D に関し $\text{Def}_{(X,D)}$ を考え, 忘却射 $\Phi: \text{Def}_{(X,D)} \rightarrow \text{Def}_X$ を $A \in \mathcal{A}$ と $(X_A, D_A) \in \text{Def}_{(X,D)}(A)$ に対し

$$\Phi((X_A, D_A)) := (X_A) \in \text{Def}_X(A)$$

により定める. 以下が証明のキーとなる.

主張 3.9. 忘却射 $\Phi: \text{Def}_{(X,D)} \rightarrow \text{Def}_X$ は滑らかである, つまり $A, A' \in \mathcal{A}$ と $A' \rightarrow A$ に対し

$$\text{Def}_{(X,D)}(A') \rightarrow \text{Def}_{(X,D)}(A) \times_{\text{Def}_X(A)} \text{Def}_X(A')$$

は全射となる.

主張の証明. これを示すには $H^1(D, \mathcal{N}_{D/X}) = 0$ ($\mathcal{N}_{D/X}$ は法束) を言えば良い. 完全列

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \rightarrow H^1(D, \mathcal{N}_{D/X}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X)$$

があって, この両端が 0 であることが川又-Viehweg 消滅定理より従う. よって $H^1(D, \mathcal{N}_{D/X}) = 0$ が従う. \square

この主張と定理 3.6 から Def_X が非障害であることが従う. \square

例 3.10. 弱 Fano 多様体は双有理幾何学, Fano 多様体の双有理的研究において頻繁に出てくる対象である. Fano 多様体の場合とは違って $H^2(X, \mathcal{T}_X) \neq 0$ なる例も存在する. 例えば $X = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3))$ とすれば, これは $\mathbb{P}(1, 1, 1, 3)$ の vertex での爆発となり弱 Fano であるが, $H^2(X, \mathcal{T}_X) \neq 0$ である. よって T^1 -lifting property のような方法が必要である.

この例では線形系 $|-K_X|$ が滑らかな元を持つが、一般には任意の $m > 0$ に対し $|-iK_X|$ ($i = 1, \dots, m-1$) が滑らかな元を持たないような Fano 多様体 X が存在することが知られている。よって証明で巡回被覆を取る必要がある。

例 3.11. $\text{Def}_{(X,D)}$ が非障害でも Def_X が障害を持つ例は次のようなものがある。

$C \subset \mathbb{P}^3$ を滑らかな射影曲線で $[C] \in \text{Hilb}(\mathbb{P}^3)$ が特異点で、かつ C が滑らかな 4 次曲面 S に含まれるとする。(Sernesi による例が存在する ([Har10, Exercise 13.2])) このとき $X \rightarrow \mathbb{P}^3$ を C での爆発とすると、 $|-K_X|$ は $D := \mu_*^{-1}(S)$ を含むので Calabi-Yau 対となる。よって $\text{Def}_{(X,D)}$ は非障害である。しかし $\text{Def}(X)$ は Hilbert スキームと同じタイプの特異点を持つことがわかるので、 Def_X は障害を持つ。

例 3.12. ω_X^{-1} がネフかつ巨大という仮定をどの程度弱められるか、という問を考える。

まず ω_X^{-1} がネフだが Def_X が障害を持つ例は存在する。例えば T を 2 次元以上の複素トーラスとし $X = T \times \mathbb{P}^1$ とすると、そのような例になる ([KS58])。実際、 ω_X^{-1} は自由ですらある。

ω_X^{-1} が巨大だが Def_X が障害を持つ例も存在する。 $C \subset \mathbb{P}^3$ を滑らかな射影曲線であって $[C] \in \text{Hilb}(\mathbb{P}^3)$ が特異点であり、かつ C が滑らかな 3 次曲面に含まれているとする (Mumford による有名な C の例がある)。このとき $X \rightarrow \mathbb{P}^3$ を C での爆発とすると ω_X^{-1} は巨大だが、 $\text{Def}(X)$ は Hilbert scheme の $[C]$ での特異点と同様の特異点を持つ。

例えば X が有理連結で ω_X^{-1} がネフ (または自由) であるときに Def_X が非障害かどうか、といった問題は興味深いが、決定的な答を見つけるには至っていない。

4. CALABI-YAU 多様体の有界性問題と正規交差多様体のログ変形

次の問題は代数多様体の分類において重要である。

問題 4.1. 射影的 Calabi-Yau 多様体の微分同相型は有限個か？

1 次元, 2 次元では楕円曲線, K3 曲面の位相型はそれぞれ一つしかない。しかし Calabi-Yau 3-fold の例は toric 多様体の中の完全交差の特異点解消により、多くの例が構成されている。具体的な数字としては 3 万個以上の位相型の存在が確認されている。

変形同値な複素多様体は微分同相であるので、Calabi-Yau 3-fold の変形同値類が有限個しかないのであれば微分同相型も有限個である。Gross は楕円ファイバー構造を持つ Calabi-Yau 3-fold は双有理有界な族をなすことを示した。特にそのような Calabi-Yau 3-fold のベッチ数, 位相的オイラー数は有界である。おそらくこれが Calabi-Yau 多様体の有界性について現在知られている最も強い結果の一つである。射影的でない Calabi-Yau 多様体を考えると、次のように無限個の例がある。

例 4.1. (1) ([Fri91]) Friedman は滑らかな 5 次超曲面 $X = X_5 \subset \mathbb{P}^4$ で無限個の互いに disjoint な $(-1, -1)$ -曲線 C_i ($i = 1, 2, \dots$) を含むものを構成した。このとき $X \rightarrow X_m$ を C_1, \dots, C_m の解析的な収縮とする (Grauert の定理より

存在). すると Friedman の変形の定理により, X_m を変形して滑らかな複素多様体 Y_m が得られることが従う. 第 2 ベッチ数 $b_2(Y_m) = 0$ であるため Y_m は Kähler でないが, そのオイラー数は $e(Y_m) = -200 - 2m$ と計算できる. よって $Y_m (m = 1, 2, \dots)$ は射影的でない Calabi-Yau 3-fold の微分同相型の無限個の系列を与えている.

(2) 小木曾 ([Ogu94]), 宮岡 ([Fri91]) は射影的 Calabi-Yau 3-fold の (解析的) flop により $H^2(X, \mathbb{Z})$ の生成元 D の $|D^3|$ がいくらかでも大きくなる例を構成し, Moishezon Calabi-Yau 3-fold の微分同相類の無限個の系列が次のように得られることを示した.

滑らかな $(2, 4)$ -完全交差 $X = X_{2,4} \subset \mathbb{P}^5$ は Calabi-Yau 3-fold となるが, それを上手くとると任意の $d \geq 1$ に対し $(-1, -1)$ -曲線 $C_d \subset X$ であって次数 d のものを X が含むようにできる. この C_d の flop $X \dashrightarrow Y_d$ をとれば条件を満たす例となる. 実際 Y_d 上の $H \in |\mathcal{O}_X(1)|$ の強変換を H_d としたとき, $H_d^3 = 8 - d^3$ となる.

(3) Ghyss により標準束が自明で $b_2(X)$ がいくらかでも大きくなる X の例は挙げられていた. $SL(2, \mathbb{C})$ に固有不連続な自由作用を持つ離散群 Γ での商として例は構成され, よって基本群は Γ になる.

Fine-Panov ([FP10]) は単連結かつ標準束が自明な例で b_2 が大きくなる例を構成した. 彼らの例は $SL(2, \mathbb{C})$ の同じく離散群による商から構成されるが, 固定点を持つ作用による商の crepant resolution として構成される. すると $H^0(X, \Omega_X^i) \neq 0$ を $i = 1, 2$ について満たすことがわかり, “強 Calabi-Yau 性” を満たさない.

川又-並河 ([KN94]) は正規交差多様体のログ構造つきの変形理論を展開し, 次の結果を得た. まず d -半安定なる概念を導入する.

定義 4.2. ([Fri83]) SNC 多様体 $X = \bigcup_{i=1}^N X_i$ に対して, $D := \text{Sing } X$ とし,

$$\mathcal{O}_D(X) := (\otimes_{i=1}^N \mathcal{I}_{X_i} / \mathcal{I}_{X_i} \mathcal{I}_D)^\vee \in \text{Pic } D$$

とする (無限小法束と呼ばれる). X が d -半安定であるとは, $\mathcal{O}_D(X) \simeq \mathcal{O}_D$ となることとする.

注意 4.3. $N = 2$ の時には $\mathcal{O}_D(X) \simeq \mathcal{N}_{D/X_1} \otimes \mathcal{N}_{D/X_2}$ となり, これが自明ならば d -半安定となる.

X が半安定退化の中心ファイバーとして現れる時, X は d -半安定となる. 逆は一般には不成立であるが, Calabi-Yau の場合には次が成り立つ.

定理 4.4. $n \geq 3$ に対し X を n 次元 proper な単純正規交差 (SNC) スキームで次の条件を満たすものとする:

- (i) 双対化層 ω_X が自明.
- (ii) X は d -半安定
- (iii) $H^{n-1}(X, \mathcal{O}_X) = 0$, $H^{n-2}(X_i, \mathcal{O}_{X_i}) = 0$ ($i = 1, \dots, N$) を満たすとする ($X = \bigcup_{i=1}^N X_i$ は既約成分への分解).

このとき X の円盤 Δ^1 上の変形 $\phi: \mathcal{X} \rightarrow \Delta^1$ であって \mathcal{X} が滑らかで, かつ一般ファイバー $\mathcal{X}_t := \phi^{-1}(t)$ は滑らかかつ標準因子が自明となるものが存在する.

注意 4.5. 川又–並河は X が Kähler SNC 多様体であるという仮定のもとで定理を証明した. 鍵となるのは Kähler SNC Calabi-Yau 多様体のログ構造付き変形 of 非障害性である. 論文の証明で肝要なのは, 各既約成分やその stratum 上で Hodge-to-de Rham スペクトル系列が E_1 -退化するということであった. よって既約成分 X_i が Kähler や固有代数多様体であると仮定するだけで十分である. ただし X が射影的でない場合には一般ファイバー \mathcal{X}_t が代数的でないものになりうる.

定理 4.4 を使うと Calabi-Yau 多様体を SNC 多様体の変形として構成できる. Lee ([Lee10]) は新しい Calabi-Yau 多様体の構成について調べた. 射影的でない SNC 多様体の対数変形により, 次の例が橋本氏との共同研究で得られた.

定理 4.6. ([HS]) 任意の正の整数 $a > 0$ に対し, 射影的でないコンパクト 3 次元複素多様体 $X = X(a)$ で $K_X \sim 0$, $b_2(X) = a + 3$, $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0 = H^0(X, \Omega_X^i)$ ($i = 1, 2$) を満たすものが存在する.

この多様体 $X(a)$ は SNC Calabi-Yau 多様体を変形することで構成される. まず SNC 多様体を滑らかな多様体の gluing として構成するには次の命題を使う.

命題 4.7. X_1, X_2 を滑らかな固有代数多様体, $D_i \subset X_i$ ($i = 1, 2$) をそれらの滑らかな因子で同型 $\psi: D_1 \simeq D_2$ を持つものとする. このとき固有な SNC スキーム X_0 であって閉埋め込み $\iota_i: X_i \hookrightarrow X_0$ を持ち Cartesian 図式

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{i_1} & X_1 \\ \downarrow \psi \circ i_2 & & \downarrow \iota_1 \\ X_2 & \xrightarrow{\iota_2} & X_0 \end{array}$$

を満たすものが存在する ($j = 1, 2$ に対し $i_j: D_j \hookrightarrow X_j$ は包含写像). これを $X_1 \cup^\psi X_2$ とかき, $i_1: D_1 \hookrightarrow X_1$ と $i_2 \circ \psi: D_1 \hookrightarrow X_2$ による push-out という.

例 4.8. 例えば $X_1 = X_2 = \mathbb{P}^3$ として, $S = D_1 = D_2 \subset \mathbb{P}^3$ を滑らかな 4 次曲面とする. このとき $\psi := \text{id}_S$ とすると, SNC 多様体 $X_0 := X_1 \cup^\psi X_2$ ができる. これの双対化層 ω_{X_0} は $K_{X_i} + D_i \sim 0$ であることから自明であることがわかる. しかし $\mathcal{N}_{S/X_1} \otimes \mathcal{N}_{S/X_2} \simeq \mathcal{O}_S(8)$ であるため, d-半安定ではない.

今 $\mu: Y_1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ を滑らかな曲線 $C \in |\mathcal{O}_S(8)|$ による爆発として, $Y_2 = \mathbb{P}^3$ とする. $S_1 \subset Y_1$ を S の強変換, $\mu_S: S_1 \rightarrow S$ を μ が誘導する同型とする. すると $Y_0 := Y_1 \cup^{\mu_S} Y_2$ は d-半安定であり, 定理 4.4 の条件を満たすものとなる. ここで注意したいのは, S が非自明な自己同型を持つ場合, それで twist した閉埋め込みによる push-out は一般には違う SNC 多様体になることである. 定理 4.6 での例もそのようにして構成される.

謝辞

講演の機会を下された世話人の先生方, 特に高橋篤史先生, 吉永正彦先生に感謝いたします.

REFERENCES

- [Del68] P. Deligne, *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1968), no. 35, 259–278. MR 0244265
- [FM99] Barbara Fantechi and Marco Manetti, *On the T^1 -lifting theorem*, J. Algebraic Geom. **8** (1999), no. 1, 31–39. MR 1658200 (99j:14009)
- [FP10] Joel Fine and Dmitri Panov, *Hyperbolic geometry and non-Kähler manifolds with trivial canonical bundle*, Geom. Topol. **14** (2010), no. 3, 1723–1763. MR 2679581
- [Fri83] Robert Friedman, *Global smoothings of varieties with normal crossings*, Ann. of Math. (2) **118** (1983), no. 1, 75–114. MR 707162 (85g:32029)
- [Fri91] ———, *On threefolds with trivial canonical bundle*, Complex geometry and Lie theory (Sundance, UT, 1989), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 53, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 103–134. MR 1141199
- [Ghy95] Étienne Ghys, *Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de $SL(2, \mathbb{C})$* , J. Reine Angew. Math. **468** (1995), 113–138. MR 1361788
- [Har10] Robin Hartshorne, *Deformation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 257, Springer, New York, 2010. MR 2583634
- [HS] Kenji Hashimoto and Taro Sano, *Examples of non-Kähler Calabi-Yau 3-folds with arbitrarily large b_2* , in preparation.
- [Iac15] Donatella Iacono, *Deformations and obstructions of pairs (X, D)* , Int. Math. Res. Not. IMRN (2015), no. 19, 9660–9695. MR 3431606
- [Kaw92] Yujiro Kawamata, *Unobstructed deformations. A remark on a paper of Z. Ran: “Deformations of manifolds with torsion or negative canonical bundle” [J. Algebraic Geom. **1** (1992), no. 2, 279–291; MR1144440 (93e:14015)]*, J. Algebraic Geom. **1** (1992), no. 2, 183–190. MR 1144434
- [KN94] Yujiro Kawamata and Yoshinori Namikawa, *Logarithmic deformations of normal crossing varieties and smoothing of degenerate Calabi-Yau varieties*, Invent. Math. **118** (1994), no. 3, 395–409. MR 1296351
- [KS58] K. Kodaira and D. C. Spencer, *On deformations of complex analytic structures. I, II*, Ann. of Math. (2) **67** (1958), 328–466. MR 0112154
- [Lee10] Nam-Hoon Lee, *Calabi-Yau construction by smoothing normal crossing varieties*, Internat. J. Math. **21** (2010), no. 6, 701–725. MR 2658406
- [Nam96] Yoshinori Namikawa, *Calabi-Yau manifolds and deformation theory*, Sūgaku **48** (1996), no. 4, 337–357. MR 1614448
- [Ogu94] Keiji Oguiso, *Two remarks on Calabi-Yau Moishezon threefolds*, J. Reine Angew. Math. **452** (1994), 153–161. MR 1282199
- [Ran92] Ziv Ran, *Deformations of manifolds with torsion or negative canonical bundle*, J. Algebraic Geom. **1** (1992), no. 2, 279–291. MR 1144440
- [San14] Taro Sano, *Unobstructedness of deformations of weak Fano manifolds*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2014), no. 18, 5124–5133. MR 3264677
- [Tod89] Andrey N. Todorov, *The Weil-Petersson geometry of the moduli space of $SU(n \geq 3)$ (Calabi-Yau) manifolds. I*, Comm. Math. Phys. **126** (1989), no. 2, 325–346. MR 1027500

神戸市灘区六甲台町 1-1, 神戸大学理学部数学科
E-mail address: tarosano@math.kobe-u.ac.jp

ヤン・バクスター方程式からホップ重代数へ

澁川 陽一 (Youichi SHIBUKAWA)*

概要

ヤン・バクスター方程式と関連した例を通じて、ホップ代数の一般化であるホップ重代数を紹介する。

1 イントロダクション

n を正の整数とし、集合 $\{X_{ij}, (X^{-1})_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ 上の自由 \mathbb{C} 代数を $\mathbb{C}\langle X_{ij}, (X^{-1})_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n \rangle$ と表す。この自由代数の元

- (1) $X_{ij}X_{kl} - X_{kl}X_{ij} \quad (i, j, k, l = 1, \dots, n)$
- (2) $\sum_{k=1}^n X_{ik}(X^{-1})_{kj} - \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n)$
- (3) $\sum_{k=1}^n (X^{-1})_{ik}X_{kj} - \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n)$

で生成された両側イデアル I による商 $\mathbb{C}\langle X_{ij}, (X^{-1})_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n \rangle / I$ を A_P と書くことにする (ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタ・シンボル)。この A_P は双代数である [1, 第 2 章 §1]。その構造射 (余積 $\Delta: A_P \rightarrow A_P \otimes A_P$, 余単位射 $\varepsilon: A_P \rightarrow \mathbb{C}$) は次のように定義される (2 つの写像が代数準同型になるよう拡張する)。

- (1) $\Delta(X_{ij}) = \sum_k X_{ik} \otimes X_{kj}$
- (2) $\Delta((X^{-1})_{ij}) = \sum_k (X^{-1})_{kj} \otimes (X^{-1})_{ik}$
- (3) $\varepsilon(X_{ij}) = \varepsilon((X^{-1})_{ij}) = \delta_{ij}$

さらに A_P はホップ代数にもなる [1, 第 2 章 §1]。その構造射である対合射 $S: A_P \rightarrow A_P$ は、生成元上次のように定義される (反自己同型として拡張する)。

$$S(X_{ij}) = (X^{-1})_{ij}; S((X^{-1})_{ij}) = X_{ij}.$$

A_P から \mathbb{C} への代数準同型全体のなす集合 M と一般線型群 $GL_n(\mathbb{C})$ は集合として同型である。実際、次の写像がこの同型を与える。

$$M \ni F \mapsto (F(X_{ij}))_{i,j} \in GL_n(\mathbb{C}).$$

そこで、これが群としての同型になるように M に群構造を与えることができる [1, 第 4 章 例 4.3], [17, Example 9.7]。このとき、余積 Δ を用いると M の積が、余単位射 ε を用いると M の単位元が、対合射 S を用いると逆元が定義できるようになっている。実際、 $F, G \in M$ に対し

- 積 $FG = F \otimes G \circ \Delta$;

* 北海道大学理学研究院数学; shibu@math.sci.hokudai.ac.jp

- 単位元 $1_M = \varepsilon$;
- $F(\in M)$ の逆元は $F \circ S$ (\mathbb{C} が可換であるため $F \circ S \in M$ に注意).

実は定義だけではなく、余積が余結合律 $(\Delta \otimes 1) \circ \Delta = (1 \otimes \Delta) \circ \Delta$ をみたすことから M の積が結合的となるなど、 $GL_n(\mathbb{C})$ が群であることと A_P がホップ代数であることがよく対応している。

このホップ代数 A_P は、 n 次元ベクトル空間 $V = \bigoplus_i \mathbb{C}v_i$ のテンソル積 $V \otimes V$ 上の線形写像 $P: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ ($P(v \otimes w) = w \otimes v$) と関係が深い。基底 $\{v_i \otimes v_j\}$ に関する P の行列表示の成分を P_{ij}^{kl} とするとき (すなわち $P(v_k \otimes v_l) = \sum_{i,j} v_i \otimes v_j P_{ij}^{kl}$), $X_{ij}X_{kl} - X_{kl}X_{ij} = \sum_{a,b} P_{ik}^{ab} X_{bj}X_{al} - \sum_{a,b} P_{ab}^{lj} X_{kb}X_{ia}$ となるので、 A_P の定義関係式を与える両側イデアル I の生成元は

$$(1) \sum_{a,b} P_{ik}^{ab} X_{bj}X_{al} - \sum_{a,b} P_{ab}^{lj} X_{kb}X_{ia} \quad (i, j, k, l = 1, \dots, n) \quad (1.1)$$

$$(2) \sum_{k=1}^n X_{ik}(X^{-1})_{kj} - \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

$$(3) \sum_{k=1}^n (X^{-1})_{ik}X_{kj} - \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

である。少々強引ではあるが、これをもって「定義関係式を通じて、線形写像 $P: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ がホップ代数 A_P を決定している」と見ることにする。

写像 P が量子ヤン・バクスター方程式 [2, 3, 20, 21] (今の場合は、ブレイド関係式と同じ) $(P \otimes 1)(1 \otimes P)(P \otimes 1) = (1 \otimes P)(P \otimes 1)(1 \otimes P)$ の解であることに注目して、「この構成の枠組みを活かして、量子ヤン・バクスター方程式の解からいろいろなホップ代数を構成しよう」と試みるのは自然であろう。実際、[6] では、量子ヤン・バクスター方程式の解から一般線型群 $GL_n(\mathbb{C})$ の q -analog 上の関数環と呼ばれるホップ代数を構成している。

講演では更に飛躍して、「上で説明した構成の枠組みを一般化して、一般化されたヤン・バクスター方程式の解からホップ代数の一般化を構成しよう」と試み、この立場からホップ亜代数について具体例と合わせて紹介した。

この報告では講演内容を抜粋し、双代数の一般化である左双亜代数、およびホップ代数の一般化であるホップ亜代数の定義を与えた上で、ホップ代数 A_P の一般化となるホップ亜代数が構成できることを簡単に紹介する。

2 左双亜代数 A_σ

A と L を積に関する単位元をもつ環とし (環 A の単位元を 1_A , 環 L の単位元を 1_L と書く), $s_L: L \rightarrow A$ と $t_L: L^{op} \rightarrow A$ を

$$s_L(l)t_L(l') = t_L(l')s_L(l) \quad (\forall l, l' \in L). \quad (2.1)$$

をみたす環準同型とする。ただし、 L^{op} は環 L の反環 (反同型環) である。式 (2.1) により、環 A は両側 L 加群となる (この加群を記号 ${}_L A_L$ で表す)。

$$l \cdot a \cdot l' = s_L(l)t_L(l')a \quad (l, l' \in L, a \in A). \quad (2.2)$$

定義 2.1. 両側 L 加群のなすテンソル圏における余モノイド (comonoid) $({}_L A_L, \gamma_L : A \rightarrow A \otimes_L A, \pi_L : A \rightarrow L)$ が次をみたすとき, $A_L = (A, L, s_L, t_L, \gamma_L, \pi_L)$ を左双垂代数 (left bialgebroid) という [4, 5].

$$\sum_{(a)} a_{(1)} t_L(l) \otimes a_{(2)} = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} s_L(l), \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \gamma_L(1_A) &= 1_A \otimes 1_A, \\ \gamma_L(ab) &= \gamma_L(a) \gamma_L(b), \\ \pi_L(1_A) &= 1_L, \\ \pi_L(as_L(\pi_L(b))) &= \pi_L(ab) = \pi_L(at_L(\pi_L(b))) \quad (\forall l \in L, \forall a, b \in A). \end{aligned} \quad (2.4)$$

ただし式 (2.3) では, Sweedler による sigma notation [18, Section 1.2] と呼ばれる記号法を用いている.

$$\gamma_L(a) = \sum_i a_{1i} \otimes a_{2i} = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \in A \otimes_L A.$$

注意 2.2. 定義 2.1 に現れる余モノイドは, テンソル圏におけるモノイドの双対である (モノイドの定義に現れる構造射 (の矢印) を逆向きにしたもの).

注意 2.3. 式 (2.3) により, 式 (2.4) の右辺は well-defined となる (環 L が必ずしも可換であるとは限らないことに注意). つまり, 式 (2.3) の下で, $\sum_{(a),(b)} a_{(1)} b_{(1)} \otimes_L a_{(2)} b_{(2)}$ ($\gamma_L(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)}$, $\gamma_L(b) = \sum_{(b)} b_{(1)} \otimes b_{(2)}$) は代表元の取り方に依存せず定まるので, これを $\gamma_L(a) \gamma_L(b) (\in A \otimes_L A)$ と書く. このようなことが左双垂代数の定義には含意されている.

注意 2.4. 左双垂代数は [19] における \times_L -bialgebra と同じものである.

以下, \mathbb{K} を体, H を空でない集合, R を \mathbb{K} 代数とし, $M_H(R)$ を集合 H から体 \mathbb{K} への写像全体のなす \mathbb{K} 代数とする. G を集合 H の置換群 $\mathfrak{S}(H)$ の反群の部分群とし, その任意の元 $\alpha \in G$ に対し, $T_\alpha \in \text{End}_{\mathbb{K}}(L, L)$ を $T_\alpha(f)(\lambda) = f(\lambda\alpha)$ ($\lambda \in H, \alpha \in G$) と定める (ただし $\lambda\alpha := \alpha(\lambda)$). さらに, 有限集合 X から群 G への写像 $\text{deg} : X \rightarrow G$ が存在することを仮定する.

L_{ab} , $(L^{-1})_{ab}$ ($a, b \in X$) を不定元として, 自由代数 $\mathbb{K}\langle (M_H(R) \otimes_{\mathbb{K}} M_H(R)^{op}) \amalg \{L_{ab} : a, b \in X\} \amalg \{(L^{-1})_{ab} : a, b \in X\} \rangle$ を考える. $\sigma_{cd}^{ab} \in M_H(R)$ ($a, b, c, d \in X$) に対し, 以下の (1)–(5) の元で生成される上記自由代数の両側イデアルを I_σ とする.

- (1) $\xi + \xi' - (\xi + \xi')$, $c\xi - (c\xi)$, $\xi\xi' - (\xi\xi')$ ($\forall c \in k, \xi, \xi' \in M_H(R) \otimes_{\mathbb{K}} M_H(R)^{op}$).
ただし, $\xi + \xi'$ における記号 $+$ は自由代数での和を表し, $(\xi + \xi')$ での記号 $+$ は代数 $M_H(R) \otimes_{\mathbb{K}} M_H(R)^{op}$ での和を表す. 他の生成元におけるスカラー倍や積も同様.
- (2) $\sum_{c \in X} L_{ac}(L^{-1})_{cb} - \delta_{ab}\emptyset$, $\sum_{c \in X} (L^{-1})_{ac}L_{cb} - \delta_{ab}\emptyset$ ($\forall a, b \in X$).
- (3) $(T_{\text{deg}(a)}(f) \otimes 1_{M_H(R)})L_{ab} - L_{ab}(f \otimes 1_{M_H(R)})$,
 $(1_{M_H(R)} \otimes T_{\text{deg}(b)}(f))L_{ab} - L_{ab}(1_{M_H(R)} \otimes f)$,
 $(f \otimes 1_{M_H(R)})(L^{-1})_{ab} - (L^{-1})_{ab}(T_{\text{deg}(b)}(f) \otimes 1_{M_H(R)})$,
 $(1_{M_H(R)} \otimes f)(L^{-1})_{ab} - (L^{-1})_{ab}(1_{M_H(R)} \otimes T_{\text{deg}(a)}(f))$ ($\forall f \in M_H(R) (= M_H(R)^{op}), a, b \in X$).
- (4) $\sum_{x, y \in X} (\sigma_{ac}^{xy} \otimes 1_{M_H(R)})L_{yd}L_{xb} - \sum_{x, y \in X} (1_{M_H(R)} \otimes \sigma_{xy}^{bd})L_{cy}L_{ax}$ ($\forall a, b, c, d \in X$).
- (5) $\emptyset - 1_{M_H(R)} \otimes 1_{M_H(R)}$.

この両側イデアル I_σ による自由代数 $\mathbb{K}\langle (M_H(R) \otimes_{\mathbb{K}} M_H(R)^{op}) \amalg \{L_{ab} : a, b \in X\} \amalg \{(L^{-1})_{ab} : a, b \in X\} \rangle$

の商を A_σ とする. A_σ の定義関係式 (4) と式 (1.1) を比較すると, これが A_P の一般化になっていることが (σ が P の一般化になっていることと合わせて) 推察されるだろう.

定理 2.5 ([7]). 写像 $\deg : X \rightarrow G$ と $\sigma_{ac}^{bd} \in M_H(R)$ が

- $\deg(b) \circ \deg(d)(\lambda) \neq \deg(a) \circ \deg(c)(\lambda) \Rightarrow \sigma_{ac}^{bd}(\lambda) = 0 \quad (\forall \lambda \in H)$
- $\sigma_{ac}^{bd}(\lambda) \in \text{Center}(R)$

をみたすならば, 商 A_σ は左双歪代数である (Cf. [14, 15]).

この定理の左双歪代数において, $s_L : M_H(R) \rightarrow A_\sigma$, $t_L : M_H(R)^{op} \rightarrow A_\sigma$ は次のような写像である.

$$s_L : M_H(R) \ni f \mapsto f \otimes 1_{M_H(R)} \in A_\sigma; \quad t_L : M_H(R)^{op} \ni f \mapsto 1_{M_H(R)} \otimes f \in A_\sigma.$$

$\gamma_{M_H(R)} : A_\sigma \rightarrow A_\sigma \otimes_{M_H(R)} A_\sigma$ については, 主要な生成元上の値のみを記す.

$$\begin{aligned} \gamma_{M_H(R)}(f \otimes g) &= (f \otimes 1) \otimes (1 \otimes g); \\ \gamma_{M_H(R)}(L_{ab}) &= \sum_{c \in X} L_{ac} \otimes L_{cb}; \quad \gamma_{M_H(R)}((L^{-1})_{ab}) = \sum_{c \in X} (L^{-1})_{cb} \otimes (L^{-1})_{ac}. \end{aligned}$$

最後に $\pi_{M_H(R)} : A_\sigma \rightarrow M_H(R)$ を定義するため, まず, \mathbb{K} 代数の準同型 $\varepsilon : A_\sigma \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(M_H(R))$ を次のように定める.

$$\varepsilon(f \otimes g) = \rho_l(f)\rho_r(g); \quad \varepsilon(L_{ab}) = \delta_{ab}T_{\deg(a)}; \quad \varepsilon((L^{-1})_{ab}) = \delta_{ab}T_{\deg(a)^{-1}} \quad (f, g \in M_H(R)).$$

ただし, $f, g \in M_H(R)$ に対し $\rho_l(f), \rho_r(g) \in \text{End}_{\mathbb{K}}(M_H(R))$ を $\rho_l(f)(h)(\lambda) = (fh)(\lambda) = f(\lambda)h(\lambda)$, $\rho_r(g)(h) = hg$ と定義する ($\lambda \in H, h \in M_H(R)$). 定理 2.5 の条件は, この ε が well-defined となることを保証する. そして, $\pi_{M_H(R)} : A_\sigma \rightarrow M_H(R)$ は ε を用いて次のように定義される.

$$\pi_{M_H(R)}(a) = \varepsilon(a)(1_{M_H(R)}) \quad (a \in A_\sigma).$$

3 ホップ歪代数 A_σ

$A_L = (A, L, s_L, t_L, \Delta_L, \pi_L)$ を左双歪代数, $S : A \rightarrow A$ を環 A 上の反自己同型, L' を反環 L^{op} と同型な環とする (この同型写像を $\nu : L^{op} \rightarrow L'$ としておく).

式 (2.2) で, 環 A 上の左 L 加群構造 ${}_L A$ と右 L 加群構造 A_L を導入した.

$${}_L A : l \cdot a = s_L(l)a; \quad A_L : a \cdot l = t_L(l)a \quad (l \in L, a \in A).$$

これと同様にして, 環 A 上に L' 加群構造を導入することができる (左 L' 加群構造を ${}^{L'} A$, 右 L' 加群構造を $A^{L'}$ と書く).

$${}^{L'} A : r \cdot a = a s_L(\nu^{-1}(r)); \quad A^{L'} : a \cdot r = a S(s_L(\nu^{-1}(r))) \quad (r \in L', a \in A).$$

命題 3.1. 写像 $S : A \rightarrow A$, $s_L : L \rightarrow A$, $t_L : L^{op} \rightarrow A$ が

$$S \circ t_L = s_L \tag{3.1}$$

をみたすならば, 次の性質をもつ加群の準同型 $S_{A \otimes_L A} : A_L \otimes_L A \rightarrow A^{L'} \otimes^{L'} A$ が一意に存在する.

$$S_{A \otimes_L A}(a \otimes b) = S(b) \otimes S(a) \quad (a, b \in A).$$

$\Delta_L(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ を Sweedler's sigma notation [18, Section 1.2] とするとき, 式 (3.1) より $\sum_{(a)} S(a_{(1)})a_{(2)}$ が well-defined となることに注意すると, 次も成り立つことがわかる.

命題 3.2. 写像 $S : A \rightarrow A$, $s_L : L \rightarrow A$, $t_L : L^{op} \rightarrow A$, $\pi_L : A \rightarrow L$ が式 (3.1) と

$$\sum_{(a)} S(a_{(1)})a_{(2)} = t_L \circ \pi_L \circ S(a) \quad (\forall a \in A) \quad (3.2)$$

をみたすならば, 次の性質をもつ加群の準同型 $S_{A \otimes_{L'} A} : A^{L'} \otimes_{L'} A \rightarrow A_L \otimes_{L'} A$ が一意的に存在する.

$$S_{A \otimes_{L'} A}(a \otimes b) = S(b) \otimes S(a) (a, b \in A).$$

写像 $\Delta_{L'} : A \rightarrow A^{L'} \otimes_{L'} A$ を $\Delta_{L'} := S_{A \otimes_{L'} A} \circ \Delta_L \circ S^{-1}$ と定義する.

定義 3.3. 4つの式 (3.1), (3.2),

$$(\Delta_L \otimes \text{id}_A) \circ \Delta_{L'} = (\text{id}_A \otimes \Delta_{L'}) \circ \Delta_L, (\Delta_{L'} \otimes \text{id}_A) \circ \Delta_L = (\text{id}_A \otimes \Delta_L) \circ \Delta_{L'}$$

をみたす左双重代数 A_L と環 A の反自己同型 $S : A \rightarrow A$ の組 (A_L, S) に対し, 次の性質をもつ写像 $S_{A \otimes_{L'} A}$ の逆写像 $S_{A \otimes_{L'} A}^{-1}$ が存在するとき, 組 (A_L, S) をホップ重代数 (Hopf algebroid) という [4, 5].

$$S_{A \otimes_{L'} A} \circ \Delta_L \circ S^{-1} = S_{A \otimes_{L'} A}^{-1} \circ \Delta_L \circ S.$$

定理 3.4 ([7]). 適切な $\sigma_{cd}^{ab} \in M_H(R)$ に対し, 定理 2.5 の A_σ はホップ重代数となる. ただし, $L' = M_H(R)^{op}$, $\nu = \text{id}_{M_H(R)^{op}}$.

講演では, 群の一般化である擬群 (quasigroup) を用いて上の定理における $\sigma_{cd}^{ab} \in M_H(R)$ を構成した [7, 9, 10, 11, 12, 13, 16]. この $\sigma_{cd}^{ab} \in M_H(R)$ から定まるホップ重代数 A_σ において, \mathbb{K} 代数の反自己同型 $S : A_\sigma \rightarrow A_\sigma$ は, 生成元上, 次のように定義される.

$$S(f \otimes g) = g \otimes f; S(L_{ab}) = (L^{-1})_{ab}; S((L^{-1})_{ab}) = L_{ab} \quad (f, g \in M_H(R)).$$

講演の最後では, $M_H(R)$ を一般化して得られる A_σ についても紹介した [8].

謝辞

講演の機会を与えていただいた藏野和彦氏および増岡彰氏にまず感謝申し上げます. また, 講演当日の朝に北海道胆振東部地震が発生したことから, 両氏を始めとして多くの方々にご心配いただいた. 皆様のお心遣いに心からの感謝を申し上げます.

本研究は科研費 (17K05187) の助成を一部受けたものである.

参考文献

- [1] 阿部英一: ホップ代数. 岩波書店, 1977.
- [2] R. J. Baxter: Partition function of the eight-vertex lattice model. Ann. Physics **70** (1972), 193–228.
- [3] R. J. Baxter: Solvable eight-vertex model on an arbitrary planar lattice. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **289** (1978), no. 1359, 315–346.

- [4] G. Böhm: An alternative notion of Hopf algebroid. Hopf algebras in noncommutative geometry and physics, 31–53, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **239**, Dekker, New York, 2005.
- [5] G. Böhm and K. Szlachányi: Hopf algebroids with bijective antipodes: axioms, integrals, and duals. J. Algebra **274** (2004), no. 2, 708–750.
- [6] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin, and A. Takhtajan: Quantization of Lie groups and Lie algebras. Algebraic Analysis, 129–139, Academic, Boston, 1989.
- [7] Y. Otsuto: Left bialgebroid および rigid 性と Hopf algebroid. 修士論文 (2018), 北海道大学.
- [8] Y. Otsuto and Y. Shibukawa: in preparation.
- [9] H. O. Pflugfelder: Quasigroups and loops: introduction. Sigma Series in Pure Mathematics, 7. Heldermann Verlag, Berlin, 1990.
- [10] Y. Shibukawa: Dynamical Yang-Baxter maps. Int. Math. Res. Not. **2005**, no. 36, 2199–2221.
- [11] Y. Shibukawa: Dynamical Yang-Baxter maps with an invariance condition. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43** (2007), no. 4, 1157–1182.
- [12] Y. Shibukawa: Survey on dynamical Yang-Baxter maps. Noncommutative structures in mathematics and physics, 239–244, K. Vlaam. Acad. Belgie Wet. Kunsten (KVAB), Brussels, 2010.
- [13] Y. Shibukawa: Dynamical braided monoids and dynamical Yang-Baxter maps. Quantum groups and quantum topology (Kyoto 2010), 80–89, RIMS Kôkyûroku **1714**, Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., Kyoto, 2010.
- [14] Y. Shibukawa: Hopf algebroids and rigid tensor categories associated with dynamical Yang-Baxter maps. J. Algebra **449** (2016), 408–445.
- [15] Y. Shibukawa and M. Takeuchi: FRT construction for dynamical Yang-Baxter maps. J. Algebra **323** (2010), no. 6, 1698–1728.
- [16] J. D. H. Smith and A. B. Romanowska: Post-modern algebra. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- [17] R. Street: Quantum Groups. A Path to Current Algebra. Australian Mathematical Society Lecture Series, **19**. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [18] M. E. Sweedler: Hopf algebras. Mathematics Lecture Note Series W. A. Benjamin, Inc., New York 1969.
- [19] M. Takeuchi: Groups of algebras over $A \otimes \bar{A}$. J. Math. Soc. Japan **29** (1977), no. 3, 459–492.
- [20] C. N. Yang: Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction. Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1312–1315.
- [21] C. N. Yang: S matrix for the one-dimensional N-body problem with repulsive or attractive δ -function. Phys. Rev. **168** (1968), 1920–1923.

正規化されたヒルベルト関数について

大関 一秀 (山口大学 創成科学研究科)

ABSTRACT. 与えられた局所環 (R, \mathfrak{m}) 内の \mathfrak{m} -準素イデアルのヒルベルト関数の挙動には、それを含む局所環 R や、Rees 代数および随伴次数環の構造といったイデアルの主要な情報が内包されていると考えられている。本報告では、解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環内に於ける \mathfrak{m} -準素イデアルの正規化されたヒルベルト関数について考察を行う。正規化されたヒルベルト関数は、1990 年頃に伊藤らによって、各ヒルベルト係数の値と随伴次数環の構造との関係解明を軸に、盛んにその挙動研究が行われた。これに対して、近年、Corso-Polini-Rossi [1], Phuong [10] によって、Sally 加群の理論が正規化された第 1 ヒルベルト係数を制御する際に有効であることが示唆された。

本報告では、Sally 加群の構造とその役割を紹介するとともに、それらを用いて、正規化された第 1 および第 2 ヒルベルト係数による \mathfrak{m} -準素イデアルの構造の新たな分類を紹介する。

1. 導入

本報告の内容は、S. K. Masuti 氏と M. E. Rossi 氏との共同研究 [8] に基づくものである。

本報告を通して特に断らない限り、 (R, \mathfrak{m}) を解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環とする。ただし、局所環 R が解析的不分岐であるとは、 R の \mathfrak{m} -進完備化が被約であることである。局所環 R の Krull 次元を $d = \dim R > 0$ とし、簡単のため、剰余体 R/\mathfrak{m} は無限体であると仮定する。 I を R の \mathfrak{m} -準素イデアルとし、 $J = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ を R の巴系イデアルであって、 I の節減をなすものとする。(ただし、 J が I の節減であるとは、ある整数 $r \geq 0$ に対して、等式 $I^{r+1} = JI^r$ が成り立つことをいう。この節減の概念は D. Rees によって導入されたものであり、後に登場する Rees 代数や随伴次数環の構造を解析する際に重要な役割を果たすものである)

本報告では、イデアルの整閉包の概念を積極的に用いる。まずは、その定義を紹介する。 $x \in R$ が I 上整であるとは、ある整数 $n \geq 1$ と $a_i \in I^i$ ($1 \leq i \leq n$) が存在して、等式 $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ が成り立つことをいう。以下、

$$\bar{I} = \{x \in R \mid x \text{ は } I \text{ 上整}\}$$

と表し、イデアル I の整閉包と呼ぶ。 R が解析的不分岐であるという仮定の下では、ある整数 $r \geq 0$ が存在して、任意の整数 $n \geq r$ に対して、等式 $\bar{I}^{n+1} = J\bar{I}^n$ が成り立つ、すなわち、 J が I の正規化されたフィルトレーション $\{\bar{I}^n\}$ に対して節減となっていることが D. Rees によって証明されている。

与えられた \mathfrak{m} -準素イデアル I の構造を分類する際に、Rees 代数や随伴次数環の構造が鍵となる。以下、 R 上の不定元 t に対して、

$$\mathcal{R}(I) = R[It] = \sum_{n \geq 0} I^n t^n \subseteq R[t], \quad \mathcal{R}'(I) = R[It, t^{-1}] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} I^n t^n \subseteq R[t, t^{-1}]$$

と定め、それぞれ、イデアル I の Rees 代数、拡大 Rees 代数という。さらに、

$$G(I) = \mathcal{R}'(I)/t^{-1}\mathcal{R}'(I) \cong \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}$$

と定め、イデアル I の随伴次数環という。

Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ の $R[t]$ 内における整閉包を $\overline{\mathcal{R}}(I) = \overline{\mathcal{R}(I)}^{R[t]}$ と表し、拡大 Rees 代数 $\mathcal{R}'(I)$ の $R[t, t^{-1}]$ 内における整閉包を $\overline{\mathcal{R}'}(I) = \overline{\mathcal{R}'(I)}^{R[t, t^{-1}]}$ と表す。すると、イデアルの整閉包を用いて、それぞれ、

$$\overline{\mathcal{R}}(I) = \sum_{n \geq 0} \overline{I^n} t^n, \quad \overline{\mathcal{R}'}(I) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{I^n} t^n$$

と表すことができる。つまり、イデアルの整閉包とは Rees 代数の整拡大に対応する概念であるといえる。さらに、

$$\overline{G}(I) = \overline{\mathcal{R}'}(I)/t^{-1}\overline{\mathcal{R}'}(I) \cong \bigoplus_{n \geq 0} \overline{I^n}/\overline{I^{n+1}}$$

と定める。

これら Rees 代数や随伴次数環といった、イデアルに随伴する次数環の構造を決定する際に、ヒルベルト函数の理論が有効であると考えられている。次に、そのヒルベルト函数の定義を紹介する。

イデアル I は \mathfrak{m} -準素であることから、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して、剰余環 R/I^{n+1} にアルティン環の構造が入る。従って、 R -加群としての組成列の意味での長さ $\ell_R(R/I^{n+1})$ が定まり、これを n についての函数とみたものを I のヒルベルト函数という。

さらに、ある $\{e_i(I) \in \mathbb{Z}\}_{0 \leq i \leq d}$ が存在して、十分大きな整数 $n \gg 0$ に対して、等式

$$\ell_R(R/I^{n+1}) = e_0(I) \binom{n+d}{d} - e_1(I) \binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d e_d(I)$$

が成り立つことがよく知られている。この d 次の多項式をイデアル I のヒルベルト多項式と呼び、各係数 $e_i(I)$ をイデアル I の第 i ヒルベルト係数と呼ぶ。

特に、先頭項係数の $e_0(I)$ は、イデアル I の重複度と呼ばれ、局所環のヒルベルト函数の研究はこの重複度研究を軸に発展をしてきたといわれている。イデアル I の節減 J に対して、等式 $e_0(I) = e_0(J)$ が成り立ち、さらに、 R がコーエン・マコーレイ局所環ならば、 J はその巴系イデアルであることから、等式 $e_0(I) = \ell_R(R/J)$ が成り立つ。つまり、コーエン・マコーレイ局所環内において、 \mathfrak{m} -準素イデアル I の重複度 $e_0(I)$ は自明であるといえる。

次に、正規化されたヒルベルト函数（正規ヒルベルト函数）について定義を述べる。イデアル I に対して、 $\ell_R(R/\overline{I^{n+1}})$ を n の函数とみたものを、 I の正規化されたヒルベル

ト函数（正規ヒルベルト函数）という。\$R\$が解析的不分岐であるという仮定の下では、ある整数 \$\{\bar{e}_i(I) \in \mathbb{Z}\}_{0 \leq i \leq d}\$ が存在し、十分大きい整数 \$n \gg 0\$ に対して、等式

$$\ell_R(R/\overline{I^{n+1}}) = \bar{e}_0(I) \binom{n+d}{d} - \bar{e}_1(I) \binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d \bar{e}_d(I)$$

が成り立つ。この \$d\$ 次の多項式をイデアル \$I\$ の正規化されたヒルベルト多項式（正規ヒルベルト多項式）と呼び、各係数 \$\bar{e}_i(I)\$ を正規化されたヒルベルト係数（正規ヒルベルト係数）という。尚、等式 \$\bar{e}_0(I) = e_0(I)\$ が成り立つことから、正規化されたヒルベルト函数においても、その重複度 \$\bar{e}_0(I)\$ は自明であるといえる。

本報告の目標は、正規化された第1ヒルベルト係数 \$\bar{e}_1(I)\$ および第2ヒルベルト係数 \$\bar{e}_2(I)\$ に注目し、Rees代数や随伴次数環の構造の分類を行うものである。

ここで、本研究の先行結果を紹介する。伊藤 [6] によって、正規化された第1ヒルベルト係数 \$\bar{e}_1(I)\$ に関して、不等式

$$\bar{e}_1(I) \geq \bar{e}_0(I) - \ell_R(R/\bar{I}) + \ell_R(\bar{I}^2/J\bar{I})$$

が与えられた。さらに、次の2条件が同値となる。

- (1) \$\bar{e}_1(I) = \bar{e}_0(I) - \ell_R(R/\bar{I}) + \ell_R(\bar{I}^2/J\bar{I})\$ が成り立つ。
- (2) 任意の整数 \$n \geq 2\$ に対して、\$\overline{I^{n+1}} = J\bar{I}^n\$ が成り立つ。

この同値条件が成り立つとき、\$d \geq 2\$ ならば \$\bar{e}_2(I) = \ell_R(\bar{I}^2/J\bar{I})\$ であり、整数 \$3 \leq i \leq d\$ に対して \$\bar{e}_i(I) = 0\$ が成り立つ。さらに、\$\overline{G(I)}\$ はコーエン・マコーレイ環であり、\$d \geq 3\$ ならば \$\overline{\mathcal{R}(I)}\$ もコーエン・マコーレイ環となる。このことから、等式 \$\bar{e}_1(I) = \bar{e}_0(I) - \ell_R(R/\bar{I}) + \ell_R(\bar{I}^2/J\bar{I})\$ を満たすようなイデアル \$I\$ は良い性質を持つものであるといえる。尚、等式 \$\ell_R(\bar{I}^2/J\bar{I}) = e_0(I) + (d-1)\ell_R(R/\bar{I}) - \ell_R(\bar{I}/\bar{I}^2)\$ が成り立つことから、上述の不等式の右辺は節減 \$J\$ のとり方によらないものであることが分かる。

伊藤 [6] は、第2ヒルベルト係数 \$\bar{e}_2(I)\$ についても次のような考察を行っている。\$d \geq 2\$ のとき不等式

$$\bar{e}_2(I) \geq \bar{e}_1(I) - \bar{e}_0(I) + \ell_R(R/\bar{I})$$

が成り立ち、次の2条件が同値となる。

- (1) \$\bar{e}_2(I) = \bar{e}_1(I) - \bar{e}_0(I) + \ell_R(R/\bar{I})\$ が成り立つ。
- (2) 任意の整数 \$n \geq 2\$ に対して、\$\overline{I^{n+1}} = J\bar{I}^n\$ が成り立つ。

この同値条件が成り立つとき、\$\bar{e}_1(I) = \bar{e}_0(I) - \ell_R(R/\bar{I}) + \ell_R(\bar{I}^2/J\bar{I})\$ であり、整数 \$3 \leq i \leq d\$ に対して \$\bar{e}_i(I) = 0\$ が成り立つ。さらに、\$\overline{G(I)}\$ はコーエン・マコーレイ環であり、\$d \geq 3\$ ならば \$\overline{\mathcal{R}(I)}\$ もコーエン・マコーレイ環となる。よって、等式 \$\bar{e}_2(I) = \bar{e}_1(I) - \bar{e}_0(I) + \ell_R(R/\bar{I})\$ を満たすイデアル \$I\$ もまた良い性質を持つものであるといえる。

さらに、[6] では、正規化された第3ヒルベルト係数 \$\bar{e}_3(I)\$ が非負であることを証明した上で、\$\bar{e}_3(I)\$ の消滅性による随伴次数環 \$\overline{G(I)}\$ のコーエン・マコーレイ性の予想を与えている。（これは伊藤予想と呼ばれ、現在も未解決である）

上記の伊藤による一連の結果を考察するに、正規化された第1および第2ヒルベルト係数には、ヒルベルト函数全体の情報や Rees代数・随伴次数環の構造が内包されていて、特に、他の不変量との相対的な関係が重要であると考えられる。

2. SALLY 加群

近年、ヒルベルト函数の挙動研究は、Sally 加群の理論を導入することで急速な発展を見せている．本報告においても Sally 加群の理論を積極的に用いていきたい．

本節の目的は、Sally 加群の定義とその役割について紹介するものである．その準備として I -admissible filtration の概念を紹介する．

本節では、 (R, \mathfrak{m}) は（解析的不分岐とは限らない）コーエン・マコーレイ局所環という仮定の下で十分である．局所環 R のイデアルの列 $\{I_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が I -admissible filtration であるとは、次の3条件を満たすことである．

- (1) $R = I_0$ であり、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して、 $I_n \supseteq I_{n+1}$ が成り立つ．
- (2) 任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して、 $I_m \cdot I_n \subseteq I_{m+n}$ が成り立つ．
- (3) ある整数 $k \geq 0$ が存在し、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して、 $I^n \subseteq I_n \subseteq I^{n-k}$ が成り立つ．

例えば、 I の冪による $\{I^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ や、 R が解析的不分岐であるとき、 $\{\overline{I^n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は I -admissible filtration をなす．本報告では、この I -admissible filtration という枠組みにおいて、Sally 加群の理論を紹介したい．

以下、 $\mathcal{I} = \{I_n\} = \{I_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を I -admissible filtration とする．これに対して、

$$\mathcal{R}(\mathcal{I}) = \sum_{n \geq 0} I_n \subseteq R[t], \quad \mathcal{R}'(\mathcal{I}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} I_n t^n \subseteq R[t, t^{-1}]$$

と定め、それぞれ、 \mathcal{I} の Rees 代数、拡大 Rees 代数という．さらに、

$$G(\mathcal{I}) = \mathcal{R}'(\mathcal{I})/t^{-1}\mathcal{R}'(\mathcal{I}) \cong \bigoplus_{n \geq 0} I_n/I_{n+1}$$

と定め、 \mathcal{I} の随伴次数環という．尚、 \mathcal{I} が I -admissible であることと、 $\mathcal{R}(\mathcal{I})$ が $\mathcal{R}(I)$ 上有限生成であることが同値である．

整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して、 $\ell_R(R/I_{n+1})$ を \mathcal{I} のヒルベルト函数と呼ぶ．ある整数 $\{e_i(\mathcal{I})\}_{0 \leq i \leq d}$ が存在し、十分大きい整数 $n \gg 0$ に対して、等式

$$\ell_R(R/I_{n+1}) = e_0(\mathcal{I}) \binom{n+d}{d} - e_1(\mathcal{I}) \binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d e_d(\mathcal{I})$$

が成り立つ (c.f.[7]). この d 次の多項式を \mathcal{I} のヒルベルト多項式と呼び、各係数 $e_i(\mathcal{I})$ を \mathcal{I} のヒルベルト係数という．(先頭項係数 $e_0(\mathcal{I})$ は \mathcal{I} の重複度と呼ばれ、等式 $e_0(\mathcal{I}) = e_0(I) = \ell_R(R/J)$ が成り立つ)

ここで、Sally 加群の定義を紹介する．W. V. Vasconcelos [11] に従って、

$$S = S_J(\mathcal{I}) = \frac{\mathcal{R}(\mathcal{I})_{\geq 1} t^{-1}}{I_1 \mathcal{R}(J)} \cong \bigoplus_{n \geq 1} I_{n+1}/J^n I_1$$

と定め、 \mathcal{I} の J に関する Sally 加群という．Sally 加群について、次の基本性質が従う．

命題 1 ([11]). 次が正しい．

- (1) S は有限生成次数付き $\mathcal{R}(J)$ -加群である．
- (2) $\text{Ass}_{\mathcal{R}(J)} S \subseteq \{\mathfrak{m}\mathcal{R}(J)\}$ である．従って、 $S \neq (0)$ ならば、 $\dim_{\mathcal{R}(J)} S = d$ である．ただし、 $\text{Ass}_{\mathcal{R}(J)} S$ は、 $\mathcal{R}(J)$ -加群 S の素因子全体の集合とする．

(3) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\ell_R(R/I_{n+1}) = e_0(\mathcal{I}) \binom{n+d}{d} - \{e_0(\mathcal{I}) - \ell_R(R/I_1)\} \binom{n+d-1}{d-1} - \ell_R(S_n)$$

が成り立つ.

(4) $e_1(\mathcal{I}) = e_0(\mathcal{I}) - \ell_R(R/I_1) + \ell_{\mathcal{R}(J)_p}(S_p)$ が成り立つ. ただし, $p = \mathfrak{m}\mathcal{R}(J)$ とする.

(5) $S \neq (0)$ とする. $\mathcal{R}(J)$ -加群 S がコーエン・マコーレイではないとき, 等式 $\text{depth } G(\mathcal{I}) = \text{depth}_{\mathcal{R}(J)} S - 1$ が成り立つ. さらに, S がコーエン・マコーレイ $\mathcal{R}(J)$ -加群であることと, $\text{depth } G(\mathcal{I}) \geq d - 1$ が成り立つことが必要十分である.

このように, Sally 加群とは I -admissible filtration \mathcal{I} と I の節減 J によって構成された次数付き加群のことである. 主な役割として, Sally 加群 S のヒルベルト関数が \mathcal{I} のヒルベルト関数の補正項となることや, 随伴次数環 $G(\mathcal{I})$ の深さ評価が可能であるなど, \mathcal{I} の主要な情報を含むものであるといえる. 特に, 命題 1 (3) の等式

$$e_1(\mathcal{I}) = e_0(\mathcal{I}) - \ell_R(R/I_1) + \ell_{\mathcal{R}(J)_p}(S_p)$$

を見るに, 第 1 ヒルベルト係数 $e_1(\mathcal{I})$ が相対的に小さい値をとるようなイデアルの分類に有効となる. 実際, Corso-Polini-Rossi [1], Phuong [10] によって, 等式 $\bar{e}_1(I) = \bar{e}_0(I) - \ell_R(R/\bar{I}) + 1$ を満たすような Sally 加群 $S_J(\{\bar{I}^n\})$ の構造解析が行われた. しかしながら, 前述の伊藤の不等式およびその先の理論に対しては, この Sally 加群 S の理論を直接利用することは難しく, もう一工夫する必要がある.

Sally 加群が登場してから間もなく, M. V. Pinto によって次のような次数付き加群が導入された.

定義 2 ([12]). 整数 $\ell \geq 1$ に対して, 次数付き $\mathcal{R}(J)$ -加群を

$$C^{(\ell)} = C_J^{(\ell)}(\mathcal{I}) = \frac{\mathcal{R}(\mathcal{I})_{\geq \ell t^{-1}}}{I_\ell \mathcal{R}(J)t^{\ell-1}} \cong \bigoplus_{n \geq \ell} I_{n+1}/J^{n-\ell+1}I_\ell$$

と定め, $C^{(\ell)}$ の次数付き $\mathcal{R}(J)$ -部分加群を

$$L^{(\ell)} = L_J^{(\ell)}(\mathcal{I}) = [C^{(\ell)}]_\ell \cdot \mathcal{R}(J)$$

と定める.

このとき, 各整数 $\ell \geq 1$ に対して, $C^{(\ell)}$ も $L^{(\ell)}$ も有限生成な次数付き $\mathcal{R}(J)$ -加群をなし, 特に, $C^{(1)} = S$ となる. さらに, 整数 $\ell \geq 1$ に対して, 次数付き $\mathcal{R}(J)$ -加群としての完全列

$$0 \rightarrow L^{(\ell)} \rightarrow C^{(\ell)} \rightarrow C^{(\ell+1)} \rightarrow 0$$

が成り立つ. すなわち, M. P. Pinto が導入した $C^{(\ell)}$ や $L^{(\ell)}$ は, Sally 加群 S の構造を分解するような次数付き加群であるといえる.

一方で, $\ell \geq 2$ のとき, $C^{(\ell)}$ の構造は複雑であり, 命題 1 で紹介した Sally 加群 S のような良い性質を持つか否かは一般には不明である. これに対して, 私たちの最近の研究で, $C^{(2)}$ については, ある仮定の下では比較的扱い易く, 本研究に対しても有効であることが判明した.

以下, $C = C_J(\mathcal{I}) = C^{(2)}$, $L = L_J(\mathcal{I}) = L^{(1)}$ と定め, 次数付き $\mathcal{R}(J)$ -加群の完全列

$$0 \rightarrow L \rightarrow S \rightarrow C \rightarrow 0$$

に注目する.

命題 3 ([8, 9]). $J \cap I_2 = JI_1$ とする. このとき, 次が正しい.

(1) $\text{Ass}_{\mathcal{R}(J)} C \subseteq \{\mathfrak{m}\mathcal{R}(J)\}$ である. 従って, $C \neq (0)$ ならば, $\dim_{\mathcal{R}(J)} C = d$ となる. ただし, $\text{Ass}_{\mathcal{R}(J)} C$ は, $\mathcal{R}(J)$ -加群 C の素因子全体の集合とする.

(2) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\begin{aligned} \ell_R(R/I_{n+1}) &= e_0(\mathcal{I}) \binom{n+d}{d} - \{e_0(\mathcal{I}) - \ell_R(R/I_1) + \ell_R(I_2/JI_1)\} \binom{n+d-1}{d-1} \\ &\quad + \ell_R(I_2/JI_1) \binom{n+d-2}{d-2} - \ell_R(C_n) \end{aligned}$$

が成り立つ.

(3) $e_1(\mathcal{I}) = e_0(\mathcal{I}) - \ell_R(R/I_1) + \ell_R(I_2/JI_1) + \ell_{\mathcal{R}(J)_{\mathfrak{p}}}(C_{\mathfrak{p}})$ が成り立つ. ただし, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\mathcal{R}(J)$ とする.

(4) $C \neq (0)$ とする. $\mathcal{R}(J)$ -加群 C がコーエン・マコーレイではないとき, $\text{depth } G(\mathcal{I}) = \text{depth}_{\mathcal{R}(J)} C - 1$ が成り立つ. さらに, C がコーエン・マコーレイ $\mathcal{R}(J)$ -加群であることと, $\text{depth } G(\mathcal{I}) \geq d-1$ が成り立つことが必要十分である.

このように, $J \cap I_2 = JI_1$ という仮定の下では, 次数付き加群 C も, S と同様に, ヒルベルト関数の理論, 特に, 第1ヒルベルト係数に対して有効な役割を果たすものであるといえる.

尚, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 等式 $J^n \cap \overline{I^{n+1}} = J^n \bar{I}$ が成り立つことが, Huneke [5] と伊藤 [6] によって証明されていることから, イデアル I の正規化されたフィルトレーション $\{\bar{I}^n\}$ を考える上では, $J \cap I_2 = JI_1$ という仮定は自然なものであるといえる.

この命題3の系として, 次の結果が得られる. 伊藤 [6] の正規化された第1ヒルベルト係数 $\bar{e}_1(I)$ に関する結果 (第1章にて紹介) もこれに従う.

系 4 ([2, 3, 6]). (R, \mathfrak{m}) をコーエン・マコーレイ局所環とし, $d = \dim R > 0$ とする. $\mathcal{I} = \{I_n\}$ を I -admissible filtration とし $J \cap I_2 = JI_1$ を仮定する. このとき, 不等式

$$e_1(\mathcal{I}) \geq e_0(\mathcal{I}) - \ell_R(R/I_1) + \ell_R(I_2/JI_1)$$

が成り立ち, さらに, 次の2条件が同値となる.

(1) $e_1(\mathcal{I}) = e_0(\mathcal{I}) - \ell_R(R/I_1) + \ell_R(I_2/JI_1)$ が成り立つ.

(2) 任意の整数 $n \geq 2$ に対して, $I_{n+1} = JI_n$ が成り立つ.

このとき, $d \geq 2$ ならば $e_2(\mathcal{I}) = \ell_R(I_2/JI_1)$ であり, 整数 $3 \leq i \leq d$ に対して $e_i(\mathcal{I}) = 0$ が成り立つ. さらに, 随伴次数環 $G(\mathcal{I})$ はコーエン・マコーレイ環であり, $d \geq 3$ ならば Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ もコーエン・マコーレイ環となる.

さらに, 次の命題も本報告の主結果において重要である.

命題 5 ([8]). $1 \leq n \leq d$ とし, $J \cap I_2 = JI_1$ とする. このとき, $\mathcal{R}(I)$ が Serre の条件 (S_n) を満たすならば, C も $\mathcal{R}(J)/\text{Ann}_{\mathcal{R}(J)} C$ -加群として Serre の条件 (S_n) を満たす.

3. 主結果

これまで述べてきた通り, 不等式 $\bar{e}_1(I) \geq \bar{e}_0(I) - \ell_R(R/\bar{I}) + \ell_R(\bar{I}^2/J\bar{I})$ に対して, 等式 $\bar{e}_1(I) = \bar{e}_0(I) - \ell_R(R/\bar{I}) + \ell_R(\bar{I}^2/J\bar{I})$ を満たすような \mathfrak{m} -準素イデアルは良い性質を持つことが分かっている. これに対して, 等式

$$\bar{e}_1(I) = \bar{e}_0(I) - \ell_R(R/\bar{I}) + \ell_R(\bar{I}^2/J\bar{I}) + 1$$

を満たすような \mathfrak{m} -準素イデアル I の構造の解明が自然な問いとして与えられる.

前節にて紹介した次数付き $\mathcal{R}(J)$ -加群 C の基本性質を用いることで, 次の定理を与えた. これは本報告の主結果である. ただし, $\bar{C} = C_J(\{\bar{I}^n\})$ とし, $B = \mathcal{R}(J)/\mathfrak{m}\mathcal{R}(J) \cong (R/\mathfrak{m})[X_1, X_2, \dots, X_d]$ は剰余体 R/\mathfrak{m} 上の d 変数多項式環とする.

定理 6 ([8]). (R, \mathfrak{m}) は解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環とし, $d = \dim R > 0$ とする. このとき, 次の 3 条件が同値である.

- (1) $\bar{e}_1(I) = \bar{e}_0(I) - \ell_R(R/\bar{I}) + \ell_R(\bar{I}^2/J\bar{I}) + 1$ が成り立つ.
- (2) ある整数 $m \geq 2$ に対して, 次数付き $\mathcal{R}(J)$ -加群としての同型 $\bar{C} \cong B(-m)$ が成り立つ.
- (3) ある整数 $m \geq 2$ に対して, $\ell_R(\bar{I}^{m+1}/J\bar{I}^m) = 1$ であり, 整数 $n \geq 3$ ($n \neq m+1$) に対して, $\bar{I}^{n+1} = J\bar{I}^n$ が成り立つ.

このとき, 次の条件が従う.

- (i) $\bar{r}_J(I) := \min\{r \in \mathbb{Z} \mid \text{任意の } n \geq r \text{ に対して, } \bar{I}^{n+1} = J\bar{I}^n\} = m+1$,
- (ii) $d \geq 2$ のとき, $\bar{e}_2(I) = \ell_R(\bar{I}^2/J\bar{I}) + m$ であり, $3 \leq i \leq d$ に対して, $\bar{e}_i(I) = \binom{m-1}{i-2}$,
- (iii) $\text{depth } \bar{G}(I) \geq d-1$,
- (iv) $\bar{G}(I)$ がコーエン・マコーレイ環であることと, $\bar{I}^3 \not\subseteq J$ が必要十分である.

ここで, 主定理 (定理 6) の根幹となる (1) \Rightarrow (2) について証明の概要を紹介する.

定理 6 (1) \Rightarrow (2) の証明の概要. 等式 $\bar{e}_1(I) = \bar{e}_0(I) - \ell_R(R/\bar{I}) + \ell_R(\bar{I}^2/J\bar{I}) + 1$ が成り立つことから, 命題 3 (3) より, $\ell_{\mathcal{R}(J)_p}(\bar{C}_p) = 1$ となる. よって, \bar{C} は多項式環 B 上の階数 1 の捻じれのない加群となる. さらに, $\bar{\mathcal{R}}(I)$ は (S_2) -環である (c.f.[10]) ことから, 命題 5 より, \bar{C} は B -加群として Serre の条件 (S_2) を満たす. よって, \bar{C} は多項式環 B 上の階数 1 の自由加群となる. 以上より, 次数付き $\mathcal{R}(J)$ -加群としての同型 $\bar{C} \cong B(-m)$ がある整数 $m \geq 2$ に対して成り立つ. \square

主定理 (定理 6) を正規イデアルの場合に適用することで, 次の系が得られる. ただし, I が正規イデアルであるとは, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 等式 $\bar{I}^n = I^n$ が成り立つことである.

系 7 ([8]). (R, \mathfrak{m}) は解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環とし, $d = \dim R > 0$ とする. I を正規 \mathfrak{m} -準素イデアルとする. このとき, 次の 3 条件が同値である.

- (1) $e_1(I) = e_0(I) - \ell_R(R/I) + \ell_R(I^2/JI) + 1$ が成り立つ.
- (2) 次数付き $\mathcal{R}(J)$ -加群としての同型 $C_J(\{I^n\}) \cong B(-2)$ が成り立つ.
- (3) $\ell_R(I^3/JI^2) = 1$ であり, $I^4 = JI^3$ が成り立つ.

このとき、次の条件が従う。

- (i) $d \geq 2$ のとき、 $e_2(I) = \ell_R(I^2/JI) + 2$ であり、 $d \geq 3$ のとき、 $e_3(I) = 1$ 、そして $4 \leq i \leq d$ に対して、 $e_i(I) = 0$ が成り立つ。
- (ii) $\text{depth } G(I) \geq d - 1$ が成り立つ。
- (iii) $G(I)$ がコーエン・マコーレイ環であることと、 $I^3 \not\subseteq J$ が必要十分である。

定理 6 および系 7 の条件を満たすような \mathfrak{m} -準素イデアルの具体例を紹介する。これは、Huckaba-Huneke によって与えられたものである。

例 8 ([4]). k は標数が 3 ではない体とする。 $R = k[[X, Y, Z]]$ を体 k 上の 3 変数冪級数環とし、その極大イデアルを $\mathfrak{m} = (X, Y, Z)$ とする。このとき、 $I = (X^4, X(Y^3 + Z^3), Y(Y^3 + Z^3), Z(Y^3 + Z^3)) + \mathfrak{m}^5$ とすると、 I は R の正規 \mathfrak{m} -準素イデアルをなし、次の条件が従う。

- (1) $\ell_R(I^3/JI^2) = 1$ であり、 $I^4 = JI^3$ が成り立つ。
- (2) 次数付き $\mathcal{R}(J)$ -加群としての同型 $C_J(\{I^n\}) \cong B(-2)$ が成り立つ。
- (3) $e_0(I) = 76$, $e_1(I) = 48$, $e_2(I) = 4$, $e_3(I) = 1$ が成り立つ。
- (4) $\text{depth } G(I) = 2 = (\dim R - 1)$ が成り立つ。

この例より、定理 6 において $\overline{G}(I)$ がコーエン・マコーレイとは限らないことが分かる。本報告の終わりに、主定理の応用を幾つか紹介する。

本報告の主定理を用いることで、Coro-Polini-Rossi による次の結果が系として得られる。

系 9 ([1]). (R, \mathfrak{m}) は解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環とし、 $d = \dim R > 0$ とする。このとき、等式 $\bar{e}_1(I) = \bar{e}_0(I) - \ell_R(R/\bar{I}) + 1$ が成り立つならば、 $\text{depth } \overline{G}(I) \geq d - 1$ である。

最後に、第 2 ヒルベルト係数に関する応用を紹介したい。

$d \geq 2$ のとき、第 2 ヒルベルト係数 $\bar{e}_2(I)$ については、[6] より、不等式

$$\bar{e}_2(I) \geq \bar{e}_1(I) - \bar{e}_0(I) + \ell_R(R/\bar{I}) \geq \ell_R(\bar{I}^2/J\bar{I})$$

が従う。さらに、等式 $\bar{e}_2(I) = \bar{e}_1(I) - \bar{e}_0(I) + \ell_R(R/\bar{I})$ が成り立つことと、等式 $\bar{e}_1(I) - \bar{e}_0(I) + \ell_R(R/\bar{I}) = \ell_R(\bar{I}^2/J\bar{I})$ が成り立つことが同値となり、このとき、 $\bar{r}_J(I) \leq 2$ であって、随伴次数環 $\overline{G}(I)$ はコーエン・マコーレイ環となる。すなわち、 $\bar{e}_2(I)$ の下限として $\ell_R(\bar{I}^2/J\bar{I})$ が与えられていて、等式 $\bar{e}_2(I) = \ell_R(\bar{I}^2/J\bar{I})$ を満たすイデアル I は良いものであることがわかる。さらに、その次の境界として、等式 $\bar{e}_2(I) = \ell_R(\bar{I}^2/J\bar{I}) + 2$ をとり得ることになる。

これに対して、次の系を与える。

系 10 ([8]). (R, \mathfrak{m}) は解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環とし、 $d = \dim R \geq 2$ とする。このとき、 $\bar{e}_2(I) \leq \ell_R(\bar{I}^2/J\bar{I}) + 2$ ならば、 $\text{depth } \overline{G}(I) \geq d - 1$ となる。さらに、 $\overline{G}(I)$ がコーエン・マコーレイであることと、 $\bar{I}^3 \not\subseteq J$ が必要十分条件となる。

一方で、等式 $\bar{e}_2(I) = \bar{e}_1(I) - \bar{e}_0(I) + \ell_R(R/\bar{I}) + 1$ を満たすようなイデアル I の構造研究が、本研究の共同研究者である Masuti 氏と Rossi 氏に加えて、H. L. Truong 氏との共同研究として開始されていて、部分的な解答が得られている。

REFERENCES

- [1] A. Corso, C. Polini and M. E. Rossi, *Bounds on the normal Hilbert coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), 1919–1930.
- [2] J. Elias and G. Valla, *Rigid Hilbert functions*, J. Pure and Appl. Algebra **71** (1991), 19–41.
- [3] A. Guerrieri and M. E. Rossi, *Hilbert coefficients of Hilbert filtrations*, J. Algebra **199** (1998), 40–61.
- [4] S. Huckaba and C. Huneke, *Normal ideals in regular rings*, J. Reine Angew. Math. **510** (1999), 63–82.
- [5] C. Huneke, *Hilbert functions and symbolic powers*, Michigan Math. J. **34** (1987), 293–318. J. Algebra **117** (1988), 390–401.
- [6] S. Itoh, *Coefficients of normal Hilbert polynomials*, J. Algebra **150** (1992), 101–117.
- [7] T. Marley, *Hilbert functions of ideals in Cohen-Macaulay rings*, Ph. D. Thesis, Purdue University, (1989).
- [8] S. K. Masuti, K. Ozeki, M. E. Rossi, *A filtration of the Sally module and the first normal Hilbert coefficient*, J. Algebra, to appear.
- [9] K. Ozeki and M. E. Rossi, *The structure of the Sally module of integrally closed ideals*, Nagoya Math. J. **227** (2017), 49–76.
- [10] T. T. Phuong, *Normal Sally modules of rank one*, J. Algebra **493** (2018), 236–250.
- [11] W. V. Vasconcelos, *Hilbert Functions, Analytic Spread, and Koszul Homology*, Contemporary Mathematics, Vol **159** (1994), 401–422.
- [12] M. Vaz Pinto, *Hilbert functions and Sally modules*, J. Algebra **192** (1997), 504–523.

〒 753-8512 山口県山口市吉田 1677-1 山口大学大学院 創成科学研究科 理学系学域 数理科学分野
Email address: ozeki@yamaguchi-u.ac.jp

FROBENIUS SUMMANDS OF GRADED RINGS

NOBUO HARA

We are motivated by a question arising from commutative algebra, asking what kind of graded rings in characteristic p have finite F -representation type (FFRT). In geometric setting, this is related to the problem of looking out for Frobenius summands. Namely, given a line bundle L on a projective variety X , we want to know how many and what kind of indecomposable direct summands appear in the direct sum decomposition of the iterated Frobenius push-forwards $F_*^e(L^i)$, where e, i are non-negative integers with $0 \leq i \leq p^e - 1$. We will consider the problem in the following two cases.

- (1) two-dimensional normal graded rings (a joint work with Ryo Ohkawa [HO])
- (2) the anti-canonical ring of a quintic del Pezzo surface

After reviewing the preliminary results in Section 1, we will take a look at the result obtained in [HO] in Section 2. Our description here is based on the Pinkham–Demazure construction: A two-dimensional normal graded ring R is isomorphic to the graded ring $R(C, D) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(C, \mathcal{O}_C([nD]))$, where D is an ample \mathbb{Q} -divisor on the smooth curve $C = \text{Proj } R$. We introduce the invariant $\delta = \deg(K_C + D')$, the degree of the canonical divisor of C plus the “fractional part” D' of D . It is known that $\text{Spec } R$ has a log terminal singularity if and only if $\delta < 0$, and in this case, R has FFRT (Proposition 2.2). On the other hand, we will see in Theorem 2.3 that if $\delta \geq 0$, then R has FFRT only in the exceptional cases where the characteristic p divides a denominator of the fractional coefficient of D .

In Section 3, we introduce an attempt to looking out for Frobenius summands on a quintic del Pezzo surface X and its anti-canonical ring $R(X, -K_X)$. Unlike case (1) above, the present situation in this case (2) is far from satisfactory, and we have not yet come to a conclusion whether the anti-canonical ring has FFRT or not. We give partial results and examples on the Frobenius summands of $F_*^e(\omega_X^{-i})$ mainly in the cases $i = 0$ and $i = \frac{p^e - 1}{2}$.

1. PRELIMINARIES

Throughout this note, we work over an algebraically closed field k of characteristic $p > 0$. For a noetherian commutative ring R over k , the Frobenius ring homomorphism sending $a \in R$ to $a^p \in R$ will be denoted by $F: R \rightarrow R$. For a k -scheme X , we denote the (absolute) Frobenius morphism $(\text{id}_X, F): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ by $F: X \rightarrow X$ and its associated ring homomorphism by $F: \mathcal{O}_X \rightarrow F_*\mathcal{O}_X$ as well.

From now on, We always assume that R is an F -finite (i.e., $F: R \rightarrow R$ is module-finite) integral domain. In this case, we can identify the e -times iterated Frobenius ring homomorphism $F^e: R \rightarrow R$ and the inclusion map $R \hookrightarrow R^{1/p^e}$ into the ring R^{1/p^e} of p^e -th roots of R , for all $e = 0, 1, 2, \dots$

When R is an \mathbb{N} -graded ring $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ over $R_0 = k$, the ring R^{1/p^e} has a natural \mathbb{Q} -grading (actually, a $\frac{1}{p^e}\mathbb{Z}$ -grading) and the inclusion map $R \hookrightarrow R^{1/p^e}$ preserves the grading. Note that the category of finitely generated \mathbb{Q} -graded R -modules is a Krull–Schmidt category. For each $e = 0, 1, 2, \dots$, we have a decomposition

$$(*) \quad R^{1/p^e} = M_1^{(e)} \oplus \dots \oplus M_{m_e}^{(e)}$$

in the category of finitely generated \mathbb{Q} -graded R -modules with each $M_i^{(e)}$ indecomposable.

Definition 1.1 (Smith–Van den Bergh [SVdB]). Let R be an \mathbb{N} -graded ring over $R_0 = k$ such that each R^{1/p^e} has a decomposition as $(*)$. We say that R has *finite F -representation type* (FFRT) if the set

$$\{M_i^{(e)} \mid e = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, m_e\} / \cong$$

is finite, where \cong denotes isomorphism of graded R -modules admitting degree shift.

Example 1.2 (rings of FFRT).

- (1) Let $R = k[x_1, \dots, x_n]$ be a polynomial ring. Then R has FFRT, since

$$R^{1/q} = k[x_1^{1/q}, \dots, x_n^{1/q}] = \bigoplus_{0 \leq i_1, \dots, i_n \leq q-1} R x_1^{i_1/q} \dots x_n^{i_n/q} \cong R^{\oplus q^n}$$

is a free R -module for all $q = p^e$.

- (2) Two-dimensional rational double points have FFRT (Artin–Verdier [AV]).
 (3) Tame quotient singularities have FFRT ([SVdB]). Namely, if $R = S^G$ is the invariant subring of finite group G of order not divisible by p acting on a polynomial ring S , then R has FFRT.
 (4) A Cohen–Macaulay ring R is called a *Frobenius sandwich* if an iterated Frobenius ring homomorphism of a polynomial ring S factors through R , i.e., there exists a power q of p such that $S^q \subset R \subset S$. If R is a Frobenius sandwich, then it has FFRT. For example, $R = k[x, y, z]/(z^p - f(x, y))$ has FFRT.

Remark 1.2.1. Rings in (1), (2) have stronger property “finite representation type,” i.e., there exist only finitely many isomorphism classes of maximal Cohen–Macaulay R -modules. On the other hand, rings in (3), (4) do not necessarily have this property.

Remark 1.2.2. Rings in (1)–(3) are F -regular, but Frobenius sandwiches are not F -regular in general. It seems natural to ask if F -regular implies FFRT, since this is true in dimension ≤ 2 . But this implication fails in higher dimension ([SS], [TT]).

Section rings. The first example of a two-dimensional graded ring that does not have FFRT was found by Smith–Van den Bergh [SVdB]. Let us review their construction. Let X be a smooth projective variety over k , L an ample invertible sheaf on X and let

$$R = R(X, L) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, L^{\otimes n}) t^n$$

be the section ring associated to (X, L) , where t is a homogeneous element of degree 1. In what follows we denote the n -times tensor power $L^{\otimes n}$ of L simply by L^n .

For each $q = p^e$, the $\frac{1}{q}\mathbb{Z}$ -graded R -module $R^{1/q}$ decomposes as

$$R^{1/q} = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, F_*^e(L^n))t^{n/q} = \bigoplus_{i=0}^{q-1} (R^{1/q})_{i/q \bmod \mathbb{Z}},$$

where the graded R -modules

$$(R^{1/q})_{i/q \bmod \mathbb{Z}} = \bigoplus_{0 \leq n \equiv i \bmod q} H^0(X, F_*^e(L^n))t^{n/q} \cong \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, F_*^e(L^i) \otimes L^m)$$

appearing as the direct summands are in one-to-one correspondence with the coherent sheaves $F_*^e(L^i)$ on X . Thus the decomposition of $(R^{1/q})_{i/q \bmod \mathbb{Z}}$ into indecomposable graded R -modules are described in terms of the decomposition

$$F_*^e(L^i) = \mathcal{F}_1^{(e,i)} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}_{m_{e,i}}^{(e,i)}$$

of the vector bundles $F_*^e(L^i)$ into indecomposable bundles $\mathcal{F}_j^{(e,i)}$ in $\text{Coh}(X)$.

Proposition-Definition 1.3. *Let the notation be as above. Then $R = R(X, L)$ has FFRT if and only if the set of isomorphism classes in $\text{Coh}(X)$,*

$$\{\mathcal{F}_j^{(e,i)} \mid e \in \mathbb{N}; i = 0, 1, \dots, p^e - 1; j = 1, \dots, m_{e,i}\} / \cong$$

is finite. In this case, the pair (X, L) is said to have globally finite F -representation type (GFFRT).

The following proposition generalizes [SVdB, Example 3.1.7].

Proposition 1.4. *Let C be a smooth projective curve over k of genus $g(C) \geq 1$ and let L be an ample invertible sheaf on C . Then the section ring $R = R(C, L)$ does not have FFRT.*

Proof. In view of Proposition 1.3, it is sufficient to show that there appear infinitely many isomorphism classes of indecomposable direct summands of $F_*^e \mathcal{O}_C$ when e ranges over all non-negative integers. This is verified case by case as follows:

Case 1: $g(C) = 1$. If C is an ordinary elliptic curve, then $F_*^e \mathcal{O}_C$ splits into p^e distinct p^e -torsion line bundles. If C is supersingular, then $F_*^e \mathcal{O}_C$ is isomorphic to Atiyah's indecomposable vector bundle \mathcal{F}_{p^e} ; see [A].

Case 2: $g(C) \geq 2$. In this case, the vector bundle $F_*^e \mathcal{O}_C$ is stable and so is indecomposable for all $e \geq 0$ (Sun [Su], see also Kitadai–Sumihiro [KS], Mehta–Pauly [MP]). \square

2. FFRT PROPERTY OF TWO-DIMENSIONAL GRADED RINGS

In this section, we consider the condition for two-dimensional normal graded rings to have FFRT. Specifically, we will answer the following question:

Question (H. Brenner). Does the ring $R = k[x, y, z]/(x^2 + y^3 + z^7)$ have FFRT?

It is known that two-dimensional F -regular rings have FFRT. On the other hand, due to Proposition 1.4 we could expect that a two-dimensional normal graded ring R has FFRT only if $\text{Proj } R \cong \mathbb{P}^1$; see Theorem 2.1. So, Brenner's question is in

a critical case, because the ring $R = k[x, y, z]/(x^2 + y^3 + z^7)$ is not F -regular and $\text{Proj } R \cong \mathbb{P}^1$. In this case, however, it is known that R has FFRT if $p \leq 7$, since it is a Frobenius sandwich in characteristic $p = 2, 3, 7$ (Shibuta [Sh]).

Pinkham–Demazure construction ([P], [D]). Let R be a two-dimensional normal graded ring over $R_0 = k$. Then there exists an ample \mathbb{Q} -Cartier divisor D on $C = \text{Proj } R$ such that

$$R \cong R(C, D) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor nD \rfloor))t^n.$$

Let $g(C)$ denote the genus of the smooth projective curve C . We write

$$D = \lfloor D \rfloor + \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{r_i} P_i$$

with closed points P_i of C and coprime integers $r_i \geq 2$ and s_i . We then put

$$D' := \sum_{i=1}^m \frac{r_i - 1}{r_i} P_i$$

and call it the *fractional part* of D .

We now state the main results of Hara–Ohkawa [HO]. Let the notation be as above.

Theorem 2.1 ([HO]). *If $g(C) \geq 1$, then $R = R(C, D)$ does not have FFRT.*

Proposition 2.2 ([HO]). *If $\deg(K_C + D') < 0$, then $R = R(C, D)$ has FFRT.*

Remark 2.2.1. Note that $\deg(K_C + D') < 0$ if and only if $C \cong \mathbb{P}^1$, and $m \leq 2$ or $m = 3$ and $(r_1, r_2, r_3) = (2, 2, r), (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5)$. These are exactly the cases where $R(C, D)$ has a log terminal singularity.

Theorem 2.3 ([HO]). *Suppose $C = \mathbb{P}^1$, $\deg(K_C + D') \geq 0$ and r_1, \dots, r_m are not divisible by p . Then $R = R(\mathbb{P}^1, D)$ does not have FFRT.*

Idea of proof. In what follows, we briefly sketch the idea of the proof of the theorems. When D is an integral divisor, then R is the section ring associated to the line bundle $L = \mathcal{O}_C(D)$, and we have the correspondence between the direct summands $(R^{1/q})_{i/q \bmod \mathbb{Z}}$ of $R^{1/q}$ and the vector bundles $F_*^e(L^i)$ on C as described in Section 1. The obstruction is that we do not have this correspondence in the case where D is not an integral divisor.

To overcome the above difficulty, we import notions from the theory of algebraic stacks [B], [Ol]. What we will use is the *orbifold curve*

$$\mathfrak{C} = C[\sqrt[r_1]{P_1}, \dots, \sqrt[r_m]{P_m}] \xrightarrow{\pi} C.$$

This is not a scheme (if D is not integral) but is a one-dimensional root stack of weight (r_1, \dots, r_m) over $P_1, \dots, P_m \in C$. The orbifold curve \mathfrak{C} is something like the “minimal covering” of C on which D becomes integral. We summarize properties of \mathfrak{C} in the following lemma.

Lemma 2.4. *For each $i = 1, \dots, m$, there is a “stacky point” Q_i on \mathfrak{C} lying over P_i satisfying the following properties.*

- (1) $\pi: \mathfrak{C} \rightarrow C$ is an isomorphism away from Q_i and P_i .
- (2) Q_i is a Cartier divisor on \mathfrak{C} and $\pi^*P_i = r_iQ_i$.
- (3) If E is a \mathbb{Q} -divisor on C such that π^*E is integral, then

$$\pi_*\mathcal{O}_{\mathfrak{C}}(\pi^*E) \cong \mathcal{O}_C(\lfloor E \rfloor) \text{ and } R^1\pi_*\mathcal{O}_{\mathfrak{C}}(\pi^*E) = 0.$$

- (4) \mathfrak{C} has a dualizing sheaf

$$\omega_{\mathfrak{C}} \cong \pi^*\omega_C \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{C}}\left(\sum_{i=1}^m (r_i - 1)Q_i\right).$$

It follows from the lemma that π^*D is an integral Cartier divisor on \mathfrak{C} and if we denote $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathfrak{C}}(\pi^*D)$, then

$$H^0(\mathfrak{C}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \cong H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor nD \rfloor))$$

for all $n \in \mathbb{Z}$. Thus

$$R = R(C, D) \cong R(\mathfrak{C}, \mathcal{L})$$

is the section ring associated to the line bundle \mathcal{L} on \mathfrak{C} .

Corollary 2.5. *$R = R(C, D)$ has FFRT if and only if $(\mathfrak{C}, \mathcal{L})$ has GFFRT in the same sense as in Proposition-Definition 1.3.*

Now let $\delta_{\mathfrak{C}} = \deg \omega_{\mathfrak{C}}$. Then $\delta_{\mathfrak{C}} = \deg(K_C + D')$ by Lemma 2.4 (4). If $\delta_{\mathfrak{C}} < 0$, then $(\mathfrak{C}, \mathcal{L})$ has GFFRT by [CB, Theorem 1], from which Proposition 2.2 follows.

To prove that R does not have FFRT in Theorems 2.1 and 2.3, it is sufficient to show that infinitely many indecomposable summands appear in $F_*^e \mathcal{O}_{\mathfrak{C}}$, when e ranges over all non-negative integers. In case $g(C) \geq 1$ (Theorem 2.1), this follows as in the proof of Proposition 1.4, since $\pi_* F_*^e \mathcal{O}_{\mathfrak{C}} \cong F_*^e \mathcal{O}_C$ by Lemma 2.4 (3).

The proof of our Main Theorem 2.3 is again due to case-by-case verification.

Case $\delta_{\mathfrak{C}} = 0$. In this case, it follows that $m = 3$ or 4 and the weight (r_1, \dots, r_m) ordered as $r_1 \leq \dots \leq r_m = r$ is either one of the following: $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$, $(3, 3, 3)$, $(2, 2, 2, 2)$. We have a separable r -fold covering $f: E \rightarrow C = \mathbb{P}^1$ from an elliptic curve E with assigned ramification indexes (r_1, \dots, r_m) . It factors through \mathfrak{C} as

$$f: E \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{C} \xrightarrow{\pi} C,$$

with φ unramified. We can use the unramified morphism $\varphi: E \rightarrow \mathfrak{C}$ to prove the following; see [HO] for details.

- (1) If E is supersingular, then $\varphi^* F_*^e \mathcal{O}_{\mathfrak{C}}$ is isomorphic to the Atiyah’s indecomposable bundle \mathcal{F}_{p^e} of rank p^e and degree zero [A]. Hence $F_*^e \mathcal{O}_{\mathfrak{C}}$ itself is indecomposable.
- (2) If E is ordinary, then $p \equiv 1 \pmod{r}$ and there are exactly $s = \frac{p^e - 1}{r}$ equivalence classes of non-trivial p^e -torsion line bundles on E with respect to the action of $\text{Gal}(E/C)$. If L_1, \dots, L_s are complete representatives thereof, then

$$F_*^e \mathcal{O}_{\mathfrak{C}} \cong \mathcal{O}_{\mathfrak{C}} \oplus \varphi_* L_1 \oplus \dots \oplus \varphi_* L_s,$$

where $\varphi_* L_1, \dots, \varphi_* L_s$ are non-isomorphic indecomposable r -bundles on \mathfrak{C} .

Case $\delta_{\mathfrak{C}} > 0$. In this case, we have the following theorem, which follows similarly as in the case of smooth projective curves of genus $g \geq 2$ [Su, Theorem 2.2].

Theorem 2.6. *If $\delta_{\mathfrak{C}} > 0$ and r_1, \dots, r_m are not divisible by p , then $F_*^e \mathcal{O}_{\mathfrak{C}}$ is stable and so indecomposable for all $e \geq 0$.*

Example 2.7. Let $R = k[x, y, z]/(x^2 + y^3 + z^7)$, the ring in Brenner's question. This is not a rational singularity but $\text{Proj } R \cong \mathbb{P}^1$ and $R \cong R(\mathbb{P}^1, D)$ for a \mathbb{Q} -divisor $D = \frac{1}{2}(\infty) - \frac{1}{3}(0) - \frac{1}{7}(1)$ on \mathbb{P}^1 . By Theorem 2.3, R does not have FFRT if $p \neq 2, 3, 7$.

Example 2.8. Let $R = R(\mathbb{P}^1, D)$ for a \mathbb{Q} -divisor $D = \frac{1}{3}(\infty) + \frac{1}{3}(0) - \frac{1}{3}(1)$ on \mathbb{P}^1 . This is a rational log canonical singularity but not log terminal. The ring R does not have FFRT if and only if $p \neq 3$. In the exceptional case when $p = 3$, the weighted projective line \mathfrak{C} of weight $(3, 3, 3)$ is a Frobenius sandwich.

3. THE ANTICANONICAL RING OF THE QUINTIC DEL PEZZO SURFACE

The FFRT problem for graded rings is wide open yet in higher dimension (i.e., $\dim R \geq 3$). We do not know even the answer to the following question.

Question. Let X be the smooth quintic del Pezzo surface in characteristic $p > 0$ with anticanonical bundle $L = \omega_X^{-1}$. Does the section ring $R(X, -K_X) = R(X, L)$ have FFRT?

The setup in the question above is considered one of the simplest non-trivial cases because of the following reasons:

- (1) Del Pezzo surfaces of degree $K^2 \geq 6$ are toric surfaces. In this case, the Frobenius push-forward of any line bundle splits into line bundles [To], and it is easy to see that the anticanonical ring has FFRT.
- (2) In order to prove that $R(X, L)$ is FFRT, one has to know the decomposition of $F_*^e(L^i)$ for all i with $0 \leq i \leq p^e - 1$. However, when $L = \omega_X^{-1}$, it is enough to consider $0 \leq i \leq \frac{p^e - 1}{2}$, since $F_*^e(L^i)$ is dual to $F_*^e(\omega_X^{1-p^e} \otimes L^{-i}) = F_*^e(L^{p^e - 1 - i})$.

In this section, we will study the structure of $F_*^e(L^i)$ mainly in the extremal cases $i = 0$ and $i = \frac{p^e - 1}{2}$. Since the quintic del Pezzo surface X is obtained by blowing up the projective plane \mathbb{P}^2 at four points in general position, we work under the following notation throughout this section.

Notation. Let $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ be the blow-up at four points $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^2$ in general position. Let H be a line in \mathbb{P}^2 and $E_i = \pi^{-1}(P_i)$ the exceptional curve over P_i . Also let $E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$.

Theorem 3.1 (case $i = 0$ [H]). *Any indecomposable direct summand of $F_*^e \mathcal{O}_X$ ($e = 1, 2, \dots$) coincides with one of the following vector bundles of rank ≤ 3 .*

- (1) line bundles \mathcal{O}_X , $L_0 = \mathcal{O}_X(E - 2\pi^*H)$ and $L_i = \mathcal{O}_X(E_i - \pi^*H)$, $i = 1, 2, 3, 4$;
- (2) an indecomposable rank two bundle \mathcal{G} given by a unique non-trivial extension

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-\pi^*H) \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow L_0 \rightarrow 0;$$

- (3) an indecomposable rank three bundle \mathcal{B} given by a non-trivial extension

$$0 \rightarrow L_1 \oplus L_2 \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{O}_X(E_3 + E_4 - \pi^*H) \rightarrow 0.$$

Furthermore, for any power $q = p^e$ of p with $e \geq 1$ one has

$$F_*^e \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X \oplus \bigoplus_{i=0}^4 L_i^{\oplus(q-2)} \oplus \mathcal{B} \oplus \mathcal{G}^{\oplus \frac{(q-2)(q-3)}{2}}$$

Case $i = \frac{p^e-1}{2}$. Let $L = \omega_X^{-1}$ and assume that the characteristic p is an odd prime. We consider the decomposition of $F_*^e(L^i)$ in the other extremal case, i.e., $i = \frac{p^e-1}{2}$. Let $q = p^e$ for $e = 0, 1, 2, \dots$. Note that the vector bundle $F_*^e(L^{\frac{q-1}{2}})$ is self-dual.

We begin with constructing the L -stable bundle \mathcal{F} of rank three which is supposed to be a unique non-trivial indecomposable summand of $F_*^e(L^{\frac{q-1}{2}})$. We require \mathcal{F} to sit in an exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{G}(2\pi^*H - E) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_X(E - \pi^*H) \rightarrow 0,$$

where \mathcal{G} is the rank two bundle given in Theorem 3.1 (2). To identify the isomorphism class of \mathcal{F} , we also need the following splitting condition: For $i = 1, 2, 3, 4$, the restriction of \mathcal{F} to $U_i = X \setminus E_i$ splits into line bundles as

$$(\star) \quad \mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}(\pi^*H - E) \oplus \mathcal{O}_{U_i} \oplus \mathcal{O}_{U_i}(E - \pi^*H).$$

We fix an open covering $X = U \cup V$ with $U = X \setminus E_4$, $V = X \setminus E_1$ and let

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_U &= \mathcal{O}_U(\pi^*H - E) \oplus \mathcal{O}_U \oplus \mathcal{O}_U(E - \pi^*H), \\ \mathcal{F}_V &= \mathcal{O}_V(\pi^*H - E) \oplus \mathcal{O}_V \oplus \mathcal{O}_V(E - \pi^*H). \end{aligned}$$

Then \mathcal{F} is given by gluing \mathcal{F}_U and \mathcal{F}_V via an isomorphism $\varphi_{UV} : \mathcal{F}_U|_{U \cap V} \rightarrow \mathcal{F}_V|_{U \cap V}$ corresponding to a transition matrix

$$T_{\alpha, \beta, \gamma} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

with $\alpha, \beta, \gamma \in k$.

Proposition 3.2. *Let $\mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma}$ denote the vector bundle given by gluing \mathcal{F}_U and \mathcal{F}_V with the transition matrix $T_{\alpha, \beta, \gamma}$.*

- (1) $\mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma}$ satisfies condition (\star) for $i = 1, 2, 3, 4$ if and only if $\alpha\beta = 2\gamma$.
- (2) If \mathcal{F} is an indecomposable bundle satisfying condition (\star) for $i = 1, 2, 3, 4$, then $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}_{1, 1, 1/2}$.

Conjecture 3.3. Assume that p is an odd prime and let $q = p^e$ for $e = 0, 1, 2, \dots$

- (1) The rank of the maximal free summand of $F_*^e(L^{\frac{q-1}{2}})$ is $h^0(L^{\frac{q-1}{2}}) = \frac{5q^2+3}{8}$.
- (2) $F_*^e(L^{\frac{q-1}{2}}) \cong \mathcal{O}_X^{\oplus \frac{5q^2+3}{8}} \oplus (\mathcal{F}_{1, 1, 1/2})^{\oplus \frac{q^2-1}{8}}$.

Proposition 3.4. *Conjecture 3.3 (1) implies Conjecture 3.3 (2).*

Proof. If Conjecture 3.3 (1) is true, then $F_*^e(L^{\frac{q-1}{2}}) \cong \mathcal{O}_X^{\oplus \frac{5q^2+3}{8}} \oplus \mathcal{E}$ for a vector bundle \mathcal{E} of rank $3n$, where $n = (q^2 - 1)/8$. It follows that \mathcal{E} is obtained by gluing

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_U &= \mathcal{O}_U(\pi^*H - E)^{\oplus n} \oplus \mathcal{O}_U^{\oplus n} \oplus \mathcal{O}_U(E - \pi^*H)^{\oplus n}, \\ \mathcal{E}_V &= \mathcal{O}_V(\pi^*H - E)^{\oplus n} \oplus \mathcal{O}_V^{\oplus n} \oplus \mathcal{O}_V(E - \pi^*H)^{\oplus n} \end{aligned}$$

with the transition matrix

$$\begin{bmatrix} I_n & A & \Gamma \\ O & I_n & B \\ O & O & I_n \end{bmatrix}.$$

Here we note that $\mathcal{E}|_{U_i}$ splits into line bundles for each $i = 1, 2, 3, 4$, since $U_i = X \setminus E_i$ is isomorphic to an open set of the sextic del Pezzo surface, which is toric. As in Proposition 3.2, this splitting condition implies that $AB = 2\Gamma$. On the other hand, we see that the line bundles $\mathcal{O}_X(E - \pi^*H)$ and $\mathcal{O}_X(\pi^*H - E)$ are not direct summands of $F_*^e(L^{\frac{q-1}{2}})$ (and hence of \mathcal{E}). This implies that $\text{rank } A = \text{rank } B = n$. Then the transition matrix is transformed under elementary transformations *within row and column blocks* to

$$\begin{bmatrix} I_n & I_n & \frac{1}{2}I_n \\ O & I_n & I_n \\ O & O & I_n \end{bmatrix} = T_{1,1,1/2}^{\oplus n}.$$

It follows that $\mathcal{E} \cong (\mathcal{F}_{1,1,1/2})^{\oplus n}$. □

Remark 3.4.1. Conjecture 3.3 (1) holds if and only if the natural pairing

$$\text{Hom}(\mathcal{O}_X, L^{\frac{q-1}{2}}) \times \text{Hom}(L^{\frac{q-1}{2}}, \mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$$

is a perfect pairing. Choosing appropriate affine coordinates x, y on \mathbb{P}^2 , we can identify $\text{Hom}(\mathcal{O}_X, L^{\frac{q-1}{2}}) \cong \text{Hom}(L^{\frac{q-1}{2}}, \mathcal{O}_X) \cong H^0(X, L^{\frac{q-1}{2}})$ with a subspace of $V = \langle x^i y^j \mid 0 \leq i, j \leq q-1 \text{ and } \frac{q-1}{2} \leq i+j \leq \frac{3q-3}{2} \rangle$. Then the pairing above is identified with the pairing

$$\langle , \rangle : H^0(X, L^{\frac{q-1}{2}}) \times H^0(X, L^{\frac{q-1}{2}}) \rightarrow k$$

given by

$$\langle \phi, \psi \rangle = \text{the coefficient of the product } \phi\psi \text{ in } (xy)^{q-1}$$

for $\phi, \psi \in H^0(X, L^{\frac{q-1}{2}}) \subset V$. Taking this into account, we can rephrase Conjecture 3.3 (1) into the assertion that a certain $\frac{q^2-1}{8} \times \frac{q^2-1}{8}$ matrix is invertible mod p . M. Tano has implemented a computer program to examine this assertion and verified that it is true up to $p^e < 100$.

Finally, we shall take a look at examples which we hope illustrate the behavior of the single Frobenius push-forwards $F_*(L^i)$ for all i in the range $0 \leq i \leq \frac{p-1}{2}$. In the following, we put $M_{i,j} = \mathcal{O}_X(E_i + E_j - \pi^*H)$ for $1 \leq i < j \leq 4$.

Example 3.5 ($p = 5$).

$$\begin{aligned} F_*\mathcal{O}_X &\cong \mathcal{O}_X \oplus \bigoplus_{i=0}^4 L_i^{\oplus 3} \oplus \mathcal{B} \oplus \mathcal{G}^{\oplus 3}, \\ F_*L &\cong \mathcal{O}_X^{\oplus 6} \oplus \bigoplus_{i=1}^4 \mathcal{O}_X(-E_i) \oplus \bigoplus_{\substack{(i,j)=(1,2),(1,3),(1,4), \\ (2,3),(2,4),(3,4)}} M_{i,j} \oplus \mathcal{B}^{\oplus 3}, \\ F_*(L^2) &\cong \mathcal{O}_X^{\oplus 16} \oplus \mathcal{F}^{\oplus 3} \end{aligned}$$

Example 3.6 ($p = 7$).

$$\begin{aligned}
 F_*\mathcal{O}_X &\cong \mathcal{O}_X \oplus \bigoplus_{i=0}^4 L_i^{\oplus 5} \oplus \mathcal{B} \oplus \mathcal{G}^{\oplus 10}, \\
 F_*L &\cong \mathcal{O}_X^{\oplus 6} \oplus \bigoplus_{i=0}^4 L_i^{\oplus 3} \oplus \bigoplus_{i=1}^4 \mathcal{O}_X(-E_i) \oplus \bigoplus_{\substack{(i,j)=(1,2),(1,3),(1,4), \\ (2,3),(2,4),(3,4)}} M_{i,j} \oplus \mathcal{B}^{\oplus 6}, \\
 F_*(L^2) &\cong \mathcal{O}_X^{\oplus 16} \oplus \bigoplus_{i=1}^4 \mathcal{O}_X(-E_i)^{\oplus 3} \oplus \bigoplus_{\substack{(i,j)=(1,2),(1,3),(1,4), \\ (2,3),(2,4),(3,4)}} M_{i,j}^{\oplus 3} \oplus \mathcal{B}, \\
 F_*(L^3) &\cong \mathcal{O}_X^{\oplus 31} \oplus \mathcal{F}^{\oplus 6}.
 \end{aligned}$$

Acknowledgments. I would like to thank the organizers of the symposium for giving me an opportunity to present a talk and this report. I am grateful to Masaya Tano, a graduate student at the Institute of Engineering, TUAT, for his computation mentioned in Remark 3.4.1. This work is partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research, 16K05092.

REFERENCES

- [AV] M. Artin and J.-L. Verdier, *Reflexive sheaves over rational double points*, Math. Ann. 270 (1985), 79–82.
- [A] M. F. Atiyah, *Vector bundles over an elliptic curve*, Proc. London Math. Soc. (3) 7 (1957), 414–452.
- [B] K. Behrend, *Introduction to algebraic stacks*, in Moduli Spaces (eds. L. Brambila-Paz et al.), London Math. Soc. Lecture Note series 411, pp. 1–131, Cambridge University Press, 2014.
- [CB] W. Crawley-Boevey, *Kac’s theorem for weighted projective lines*, J. Eur. Math. Soc. 12 (2010), 1331–1345.
- [D] M. Demazure, *Anneaux gradus normaux*, in Seminaire Deamazure-Giraud-Teissier, Singularites des surfaces, pp. 241–266, Ecole Polytechnique, 1979.
- [H] N. Hara, *Looking out for Frobenius summands on a blown-up surface of \mathbb{P}^2* , Illinois J. Math. 59 (2015), 115–142.
- [HO] N. Hara and R. Ohkawa, *The FFRT property of two-dimensional graded rings and orbifold curves*, preprint arXiv:1706.00255
- [KS] Y. Kitadai and H. Sumihiro, *Canonical filtrations and stability of direct images by Frobenius morphisms*, Tohoku Math. J. (2) 60 (2008), 287–301.
- [MP] V. B. Mehta and C. Pauly, *Semistability of Frobenius direct images over curves*, Bull. Soc. Math. France 135 (2007), 105–117.
- [Ol] M. Olsson, *Algebraic spaces and stacks*, American Mathematical Society, Colloquium Publications V. 62.
- [P] H. Pinkham, *Normal surface singularities with \mathbb{C}^* action*, Math. Ann. 227 (1977), 183–193.
- [Sh] T. Shibuta, *One-dimensional rings of finite F -representation type*, J. Algebra 332 (2011), 434–441.
- [SS] A. K. Singh and I. Swanson, *Associated primes of local cohomology modules and of Frobenius powers*, Int. Math. Res. Not. 33 (2004), 1703–1733.
- [SVdB] K. E. Smith and M. Van den Bergh, *Simplicity of rings of differential operators in prime characteristic*, Proc. London Math. Soc. (3) 75 (1997), 32–62.

- [Su] X. Sun, *Direct images of bundles under Frobenius morphism*, Invent. Math. 173 (2008), 427–447.
- [TT] S. Takagi and R. Takahashi, *D-modules over rings with finite F-representation type*, Math. Res. Lett. (2008), 15, 563–581.
- [To] J. F. Thomsen, *Frobenius direct images of line bundles on toric varieties*, J. Algebra 226 (2000), 865–874.

TOKYO UNIVERSITY OF AGRICULTURE AND TECHNOLOGY, 2-24-16 NAKACHO, KOGANEI,
TOKYO 184-8588, JAPAN

E-mail address: `nhara@cc.tuat.ac.jp`