Schur 多重ゼータ関数とその特殊値について [1]

中筋麻貴 (上智大学理工学部)

1 はじめに

素数分布の研究において重要な役割をなすゼータ関数は，複素変数 $s \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

として定義される．この関数は $\mathrm{Re}(s) > 1$ において絶対収束する．このリーマンのゼータ関数の拡張として発展したのが，変数を多変数化した多重ゼータ関数である．特に 1990 年代以降，活発な研究が報告されている (詳細は [AK1], [Mat] 等参照)．リーマンゼータ関数の多変数化については，いくつかの方法が知られているが，ここでは，その中の一つである Euler-Zagier 型と呼ばれる多重ゼータ関数を紹介する：

定義 1.1 複素変数 $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{C}$ に対し，多重ゼータ関数，等号付き多重ゼータ関数をそれぞれ次の級数で定める：

$$\zeta(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{m_1 < \cdots < m_n} \frac{1}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}}, \tag{1.1}$$

$$\zeta^{\star}(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{m_1 \le \cdots \le m_n} \frac{1}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}}. \tag{1.2}$$

これらの級数 (1.1) および (1.2) はどちらも $\mathrm{Re}(s_1), \ldots, \mathrm{Re}(s_{n-1}) \ge 1$ and $\mathrm{Re}(s_n) > 1$ において絶対収束する．

一方，一般線型群の既約指標として定義される Schur 関数は，表現論や組合せ論の分野，特に対称関数の理論において重要な研究対象である．それぞれの分野の同値条件により，様々な定義の仕方が可能であるが，ここでは semi-standard Young tableau を用いた定義を用いる：

[1]本研究は O. Phuksuwan 氏 (Chulalongkorn University) および山崎義徳氏 (愛媛大学) との共同研究，および，中村直樹氏（上智大学）との共同研究に基づく．

分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ と変数 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots)$ に対し，Schur 関数は次で定義される：

$$s_\lambda=s_\lambda(\boldsymbol{x})=\sum_{M\in SSYT(\lambda)}\prod_{(i,j)\in D(\lambda)}x_{m_{ij}}, \tag{1.3}$$

ここで $D(\lambda)$ は λ と同一視されるヤング図形とし，SSYT(λ) は形が λ のすべての semi-standard Young tableau の集合を表し (記号の詳細は次節を参照)，右辺の和は $M=(m_{ij})_{(i,j)\in D(\lambda)}\in SSYT(\lambda)$ に渡るものとする.

本研究では，(1.1) および (1.2) で表した Euler-Zagier 型多重ゼータ関数に Schur 関数の構成に類似させた拡張を行い，その性質について考察する ([NPY], [NN]). 定義の方法から，拡張した多重ゼータ関数は，Schur 関数と多重ゼータ関数の双方の性質を持つことが期待できる．本報告集では，これまでの研究で得られた成果について報告する．具体的には，Schur 関数において知られる行列式表示 (c.f. [Mac], [NNSY]) の類似公式, Hopf 代数との対応，多重ゼータ値の積分表示 (c.f. [Y]) の拡張，および多重ベルヌーイ数 (c.f. [AK2]) の拡張について報告する．証明は [NPY], [NN] をご参照いただければ幸いです.

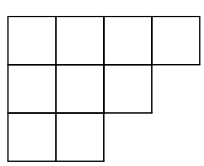
最後になりましたが，本報告集は，研究集会「代数学シンポジウム 2018」の講演内容をまとめたものです．講演の機会を与えてくださった世話人の先生方に心より御礼申し上げます.

2 Schur 多重ゼータ関数

与えられた自然数 n に対し，n の分割を $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ と定める．ここで，$\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_r>0$, $|\lambda|=\sum_{i=1}^r\lambda_i=n$ を満たすものとし，これを $\lambda\vdash n$ と書く．また，λ の元 i の重複度を $m_i(\lambda)$ とし，$\lambda=(n^{m_n(\lambda)},\cdots 2^{m_2(\lambda)},1^{m_1(\lambda)})$ と表す．分割 λ は，前節で述べた通り，次で表される $D(\lambda)$ の各 (i,j) を箱として図示するヤング図形と同一視される.

$$D(\lambda)=\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2\,|\,1\leq i\leq r,\ 1\leq j\leq\lambda_i\}$$

例.

$\lambda=(4,3,2)\longleftrightarrow D(\lambda)=$ 

ヤング図形の転置で定義される分割 λ の共役を $\lambda'=(\lambda'_1,\dots,\lambda'_s)$ と書く．次に，X をある集合

とする．λ に対するヤング図形 $D(\lambda)$ の各箱に，X の元を書き入れた図形 $T=(t_{ij})$ $(t_{ij}\in X)$ を形 (shape) が λ の X 上の Young tableau と呼ぶ．また，形が λ の全ての X 上の Young tableau たちの集合を $T(\lambda,X)$ と書く．さらに，各列に対して下方向に強い意味で増加し，各行に対して右方向に弱い意味で増加する $\mathbb{N}$ 上の Young tableau を semi-standard Young tableau と呼び，形が λ のそれらすべての集合を SSYT(λ) と書く．これらの記号を用いて，Schur 関数 (1.3) の構成に類似させた多重ゼータ関数を次のように導入する：

定義 2.1 分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ と変数 $\boldsymbol{s}=(s_{ij})\in T(\lambda,\mathbb{C})$ に対し，

$$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s})=\sum_{M\in SSYT(\lambda)}\prod_{(i,j)\in D(\lambda)}\frac{1}{{m_{ij}}^{s_{ij}}}$$

と定義する．これを *Schur* 多重ゼータ関数と呼ぶ．ここで $M=(m_{ij})_{(i,j)\in D(\lambda)}\in SSYT(\lambda)$.

Schur 多重ゼータ関数の特別な場合として，$\lambda=(r)$ の場合を考える．このとき，$\boldsymbol{s}=(s_{1j})\in T(\lambda,\mathbb{C})$ に対し，対応する semi-standard Young tableaux は $\boxed{m_{11}\,|\,m_{12}\,|\,\cdots\,|\,m_{1r}}$ で表される．すなわち，

$$\zeta_{(r)}(s_{11},\ldots,s_{1r})=\sum_{m_{11}\le\cdots\le m_{1r}}\frac{1}{m_{11}^{s_{11}}\cdots m_{1r}^{s_{1r}}}$$

であり，(1.2) から，これは等号付き多重ゼータ関数 $\zeta^\star(s_{11},\ldots,s_{1r})$ であることがわかる．

同様に考えると，$\lambda=(1^r)$ の場合，(1.1) より，$\boldsymbol{s}=(s_{i1})\in T(\lambda,\mathbb{C})$ に対し，

$$\zeta_{(1^r)}(s_{11},\ldots,s_{r1})=\sum_{m_{11}<\cdots<m_{r1}}\frac{1}{m_{11}^{s_{11}}\cdots m_{r1}^{s_{r1}}}=\zeta(s_{11},\ldots,s_{r1})$$

であることがわかる．以上より，定義 2.1 で定義した Schur 多重ゼータ関数 ζ_λ は，(1.1) および (1.2) の両方の多重ゼータ関数の拡張であると言える．

Schur 多重ゼータ関数の収束域は次で与えられる．

補題 2.2 分割 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$ に対し，$C(\lambda)\subset D(\lambda)$ を λ の *corner* の集合とし，

$$W_\lambda:=\left\{\boldsymbol{s}=(s_{ij})\in T(\lambda,\mathbb{C})\;\middle|\;\begin{array}{l}\mathrm{Re}(s_{ij})\ge 1\ \mathit{for}\ {}^\forall(i,j)\in D(\lambda)\setminus C(\lambda)\\ \mathrm{Re}(s_{ij})>1\ \mathit{for}\ {}^\forall(i,j)\in C(\lambda)\end{array}\right\}$$

とする．このとき，$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s})$ は，$\boldsymbol{s}\in W_\lambda$ において絶対収束する．

3　行列式表示

Schur 関数 s_λ のよく知られた行列式表示として，Jacobi-Trudi formula を紹介する：

定理 3.1 (Jacobi-Trudi formula) $h_r = s_{(r)}$ を完全対称式，$e_r = s_{(1^r)}$ を基本対称式とする．このとき，s_λ は次で表される行列式表示を持つ：

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{r\times r}, \quad s_\lambda = \det(e_{\lambda'_i - i + j})_{s\times s}.$$

前節の議論より，Schur 多重ゼータ関数 ζ_λ は Schur 関数 s_λ の類似であり，完全対称式に対応するのが等号付き多重ゼータ関数 $\zeta^\star$, 基本対称式に対応するのが多重ゼータ関数 ζ であることから，同様の公式が成り立つことが期待できる．実際，以下の定理を得た．

分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ に対し，

$$W_\lambda^{\mathrm{diag}} := \{\boldsymbol{s} \in W_\lambda | s_{i+k,j+k} = s_{i,j} \text{ for } {}^\forall k \in \mathbb{Z}\}$$

とする．$W_\lambda^{\mathrm{diag}}$ の元は，ζ_λ の収束域にある $\boldsymbol{s}$ について，さらに対角成分が等しいという条件を付加したものを意味する．このとき，次が成り立つ：

定理 3.2 $\boldsymbol{s} = (s_{ij}) \in W_\lambda^{\mathrm{diag}}$ とし，$s_{ij} = a_{j-i}$ とおく．

(1) $1 \le i < \lambda_1{}'$ を満たすすべての i に対し，$\mathrm{Re}(s_{i,\lambda_i}) > 1$ とする．このとき，

$$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}) = \det\left[\zeta^\star(a_{-j+1}, a_{-j+2}, \ldots, a_{-j+(\lambda_i - i + j)})\right]_{1\le i,j\le \lambda'_1}.$$

ここで，$\lambda_i - i + j = 0$ のとき $\zeta^\star(...) = 1$, $\lambda_i - i + j < 0$ のとき 0 とする．

(2) $1 \le i < \lambda_1$ を満たすすべての i に対し，$\mathrm{Re}(s_{i,\lambda'_i}) > 1$ とする．このとき，

$$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}) = \det\left[\zeta(a_{j-1}, a_{j-2}, \ldots, a_{j-(\lambda'_i - i + j)})\right]_{1\le i,j\le \lambda_1}.$$

ここで，$\lambda'_i - i + j = 0$ のとき，$\zeta(...) = 1$, $\lambda'_i - i + j < 0$ のとき 0 とする．

定理の証明は, Lindström-Gessel-Viennot lemma の手法を用いる．

上の定理において，(1) (2) は同じ ζ_λ の行列表示である．これより，この定理の系として，多重ゼータ関数と等号付き多重ゼータ関数の新しい関係式が得られる．

系 3.3

$$\det(\zeta^\star(a_{-j+1}, a_{-j+2}, \cdots, a_{-j+(\lambda_i+j-i)}))_{1\le i,j\le n} = \det(\zeta(a_{j-1}, a_{j-2}, \cdots, a_{j-(\lambda'_i+j-i)}))_{1\le i,j\le \lambda_1}.$$

特に，$\lambda = (n)$, $\lambda = (1^n)$ とすると，(1.1) の等号付き多重ゼータ関数表示，および (1.2) の（等号なし）多重ゼータ関数表示が得られる：

系 3.4 $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{C}$ が $\mathrm{Re}(s_1), \dots, \mathrm{Re}(s_n) > 1$ を満たすとする．このとき，

$$(1)\ \zeta(s_1, \dots, s_n) = \begin{vmatrix} \zeta^\star(s_1) & \zeta^\star(s_2, s_1) & \cdots & \cdots & \zeta^\star(s_n, \dots, s_2, s_1) \\ 1 & \zeta^\star(s_2) & \cdots & \cdots & \zeta^\star(s_n, \dots, s_2) \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots\ 1 & \zeta^\star(s_{n-1}) & \zeta^\star(s_n, s_{n-1}) \\ & & & 1 & \zeta^\star(s_n) \end{vmatrix},$$

$$(2)\ \zeta^\star(s_1, \dots, s_n) = \begin{vmatrix} \zeta(s_1) & \zeta(s_2, s_1) & \cdots & \cdots & \zeta(s_n, \dots, s_2, s_1) \\ 1 & \zeta(s_2) & \cdots & \cdots & \zeta(s_n, \dots, s_2) \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots\ 1 & \zeta(s_{n-1}) & \zeta(s_n, s_{n-1}) \\ & & & 1 & \zeta(s_n) \end{vmatrix}.$$

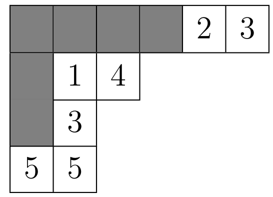
4 Variation

Schur 関数については，Macdonald[Mac] の ninth variation として，Jacobi-Trudi formula 以外の行列式表示も知られている (c.f. [NNSY])．Schur 多重ゼータ関数について，同様の variation を考察したのでその一部を紹介する．

4.1 skew 型 Jacobi-Trudi formula

λ と μ を $\lambda \supset \mu$ を満たす分割とする．すなわち，各 i について，$\lambda_i \ge \mu_i$ を満たすとする．$\lambda \backslash \mu$ を skew Young diagram といい，λ/μ で表す．semi-standard Young diagram と同様に，各列に対して下方向に強い意味で増加し，各行に対して右方向に弱い意味で増加する正の整数を箱に書き入れた tableau を skew semi-standard Young tableau と呼び，形が λ/μ のすべての skew semi-standard Young tableaux の集合を $\mathrm{SSYT}(\lambda/\mu)$ と書く．

例． $\lambda = (6, 3, 2, 2)$, $\mu = (4, 1, 1)$ とする．このとき，次の例は形が λ/μ の skew semi-standard tableaux の 1 つである．



定義 4.1 $\boldsymbol{s} = (s_{ij}) \in T(\lambda/\mu, \mathbb{C})$ とする．*skew* 型 *Schur* 多重ゼータ関数を以下で定義する：

$$\zeta_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{s}) = \sum_{M \in \mathrm{SSYT}(\lambda/\mu)} \frac{1}{M^{\boldsymbol{s}}}.$$

収束域については，以下で得られる．

補題 4.2 $C(\lambda/\mu) \subset D(\lambda/\mu)$ を λ/μ の *corner* の集合とする．

$$W_{\lambda/\mu} := \left\{ (s_{ij}) \in T(\lambda/\mu, \mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{Re}(s_{ij}) \geq 1 \textit{ for } {}^{\forall}(i,j) \in D(\lambda/\mu) \setminus C(\lambda/\mu) \\ \mathrm{Re}(s_{ij}) > 1 \textit{ for } {}^{\forall}(i,j) \in C(\lambda/\mu) \end{array} \right\}.$$

とする．このとき，$\zeta_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{s})$ は，$\boldsymbol{s} = (s_{ij}) \in W_{\lambda/\mu}$ において絶対収束する．

skew 型 Schur 多重ゼータ関数 $\zeta_{\lambda/\mu}$ について，以下の Jacobi-Trudi formula を得た．

定理 4.3 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ を $\lambda \supset \mu$ を満たす分割とする．$\boldsymbol{s} = (s_{ij}) \in W^{\mathrm{diag}}_{\lambda/\mu}$ とし，$s_{ij} = a_{j-i}$ とおく．このとき，$\mathrm{Re}(s_{i\lambda_i}) > 1$ $(1 \leq i < \lambda_1{}')$, $\mathrm{Re}(s_{i\lambda'_i}) > 1$ $(1 \leq i < \lambda_1)$ に対し，次が成り立つ：

$$\zeta_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{s}) = \det(\zeta^{\star}(a_{\mu_j-j+1}, a_{\mu_j-j+2}, \ldots, a_{\mu_j-j+(\lambda_i-\mu_j-i+j)}))_{1 \leq i,j \leq n},$$
$$\zeta_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{s}) = \det(\zeta(a_{-\mu'_j+j-1}, a_{-\mu'_j+j-2}, \ldots, a_{-\mu'_j+j-(\lambda'_i-\mu'_j-i+j)}))_{1 \leq i,j \leq \lambda_1}.$$

系 4.4

$$\det(\zeta^{\star}(a_{\mu_j-j+1}, a_{\mu_j-j+2}, \ldots, a_{\mu_j-j+(\lambda_i-\mu_j-i+j)}))_{1 \leq i,j \leq n}$$

$$= \det(\zeta(a_{-\mu'_j+j-1}, a_{-\mu'_j+j-2}, \ldots, a_{-\mu_j+j-(\lambda'_i-\mu'_j-i+j)}))_{1 \leq i,j \leq \lambda_1}.$$

4.2 Giambelli formula

t を λ の対角成分の数とする．$1 \leq i \leq t$ に対し，$p_i = \lambda_i - i$, $q_i = \lambda'_i - i$ を満たす 2 つの数列 $p_1, \ldots, p_t$, $q_1, \ldots, q_t$ を準備する．このとき，$\lambda = (p_1, \cdots, p_t \,|\, q_1, \cdots, q_t)$ を Frobenius 記法と

呼ぶ．例えば，$\lambda=(6,4,4,2,2)=(5,2,1|4,3,0)$ と表される．このとき，Schur 関数に対する，Giambelli formula の拡張として以下の結果を得た．

定理 4.5 分割 λ の *Frobenius* 記法を $\lambda=(p_1-1,\ldots,p_t-1\,|\,q_1,\ldots,q_t)$ とする．$\boldsymbol{s}=(s_{ij})\in W_\lambda^{\mathrm{diag}}$ とし，$s_{ij}=a_{j-i}$ とおく．このとき，以下が成り立つ：

$$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s})=\det(\zeta_{(p_i,1^{q_j})}(\boldsymbol{s}))_{1\le i,j\le t}.$$

5 Quasi-symmetric function

Schur 多重ゼータ関数は quasi- symmetric 関数に一般化することができる．

定義 5.1 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ を分割，$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_{ij})\in T(\lambda,\mathbb{N})$ とする．このとき，

$$S_\lambda(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{(m_{ij})\in\mathrm{SSYT}(\lambda)}\prod_{(i,j)\in D(\lambda)}t_{m_{ij}}^{\alpha_{ij}},$$

とおき，これを *Schur* 型 *quasi-symmetric* 関数と呼ぶ．

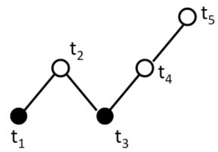
Sections 3, 4 と同様の議論を用いることにより，Schur 型 quasi-symmetric 関数 $S_\lambda(\boldsymbol{\alpha})$ について，Jacobi-Trudi formula, skew 型 Jacobi-Trudi formula, Giambelli formula 等が得られる．また，Hoffmann([H]) によって，quasi-symmetric 関数の全体 QSym と多重ゼータ値の調和積代数が (Hopf) 同型になることが示されている．この対応により，QSym と可換 Hopf 代数との同型対応が得られ，QSym における対合射 S を考えることにより，Schur 型 quasi-symmetric 関数に対する関係式が得られる：

定理 5.2 μ を *skew* 型の形，$\mu^\sharp$ を μ の *anti-diagonal* に対する転置とする．このとき，次が成り立つ．

$$S(S_\mu(\boldsymbol{\alpha}))=(-1)^{|\mu|}S_{\mu^\sharp}(\boldsymbol{\alpha}^\sharp).$$

6 反復積分表示

本節では，山本修司氏 [Y] によって導入された多重ゼータ値に対する反復積分表示の応用について述べる．$\circ$ と $\bullet$ を線で結んだグラフとして 2 色半順序集合を表す．ここで，頂点の順序に対応した変数の大小順序を 2 つの頂点の順序は上が下より大きいとして入れる．また，$\circ$ (resp. $\bullet$) に対応する変数 t に対し，$\delta(t)=0$ (resp. $\delta(t)=1$) と定義する．例えば，次のグラフに対し，



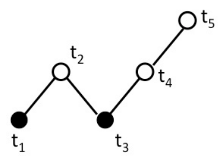
変数の順序は $t_1 < t_2 > t_3 < t_4 < t_5$，$(\delta(t_1), \delta(t_2), \delta(t_3), \delta(t_4), \delta(t_5)) = (1, 0, 1, 0, 0)$ となる．

定義 6.1 グラフ化した 2 色半順序集合 X に対し，

$$I(X) = \int_D \prod_i w_{\delta(t_i)}(t_i),$$

と定める．ここで，$D = \{(t_1, \cdots)|0 < t_i < 1\}$, $w_0(t) = \frac{dt}{t}$, $w_1(t) = \frac{dt}{1-t}$ を表すものとする．

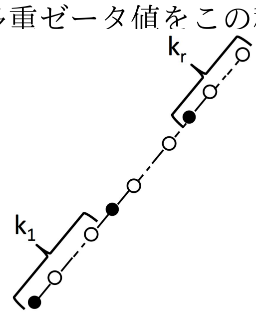
例えば，先ほどの例の場合，次で表される．

$$I\Bigg($$


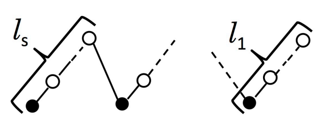
$$\Bigg) = \int_D \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_3}{1-t_3} \frac{dt_4}{t_4} \frac{dt_5}{t_5}.$$

山本氏は Euler-Zagier 型多重ゼータ値をこの積分表示を用いて表した ([Y])．

定理 6.2

$$\zeta(k_1, k_2, \cdots, k_r) = I\Bigg($$


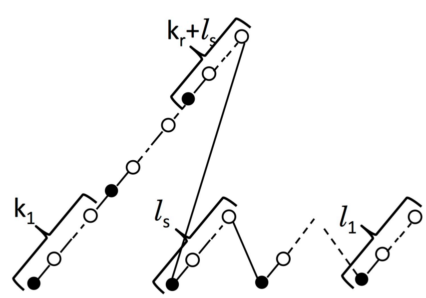
$$\Bigg),$$

$$\zeta^\star(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_s) = I\Bigg($$


$$\Bigg).$$

また，[KY] では，これを拡張し，次の積分表示を得た．

定理 6.3

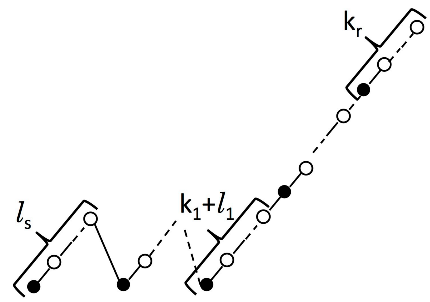
$$\sum_{\substack{0 < m_1 < \cdots < m_r \\ 0 < n_1 \le \cdots \le n_s \\ m_r = n_s}} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r} n_1^{\ell_1} \cdots n_s^{\ell_s}} = I\Bigg($$


$$\Bigg).$$

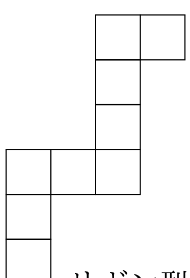
定理 6.2, 定理 6.3 の多重ゼータ値はそれぞれ，$\begin{array}{|c|}\hline k_1 \\ \hline \vdots \\ \hline k_r \\ \hline \end{array}$, $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ell_1 & \cdots & \ell_s \\ \hline \end{array}$, $\begin{array}{ccc} & & \multicolumn{1}{|c|}{k_1} \\ \cline{3-3} & & \multicolumn{1}{|c|}{\vdots} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\ell_1} & \multicolumn{1}{c|}{\cdots} & \multicolumn{1}{c|}{*} \\ \hline \end{array}$ $(* = \ell_s + k_r)$ に対する Schur 多重ゼータ値として表される．これより，$\begin{array}{ccc} \hline \multicolumn{1}{|c|}{*} & \multicolumn{1}{c|}{\cdots} & \multicolumn{1}{c|}{\ell_s} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\vdots} & & \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{k_r} & & \\ \cline{1-1} \end{array}$ $(* = \ell_1 + k_1)$ で表される Schur 多重ゼータ値が次の積分表示で得られることが容易にわかる．

定理 6.4

$$\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r \\ \| \\ 0<n_1\le\cdots\le n_s}} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r} n_1^{\ell_1}\cdots n_s^{\ell_s}} = I\left(\quad \right).$$

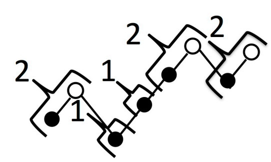


同様の方法で，これはリボン型と呼ばれる形 λ に対する Schur 多重ゼータ関数の積分表示として一般化することができる．



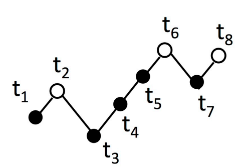
リボン型

例. $\zeta_\lambda\left(\begin{array}{ccc} & \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \cline{2-3} & \multicolumn{1}{|c|}{1} & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \\ \hline \end{array}\right) = I\left(\quad \right),$



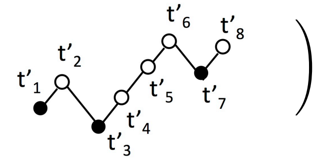
山本積分表示は変数変換を用いることにより双対性が導かれる．例えば，上の例の場合，

$$\zeta_\lambda\left(\begin{array}{ccc} & \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \cline{2-3} & \multicolumn{1}{|c|}{1} & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \\ \hline \end{array}\right) = I\left(\quad \right) = \int_D \frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{dt_3}{1-t_3}\frac{dt_4}{1-t_4}\frac{dt_5}{1-t_5}\frac{dt_6}{t_6}\frac{dt_7}{1-t_7}\frac{dt_8}{t_8}$$



と表され，ここで $t_i' = 1 - t_{9-i}$ $(1 \le i \le 8)$ とおいて変数変換すると，次を得る：

$$= \int_{D'} \frac{dt'_1}{1-t'_1}\frac{dt'_2}{t'_2}\frac{dt'_3}{1-t'_3}\frac{dt'_4}{t'_4}\frac{dt'_5}{t'_5}\frac{dt'_6}{t'_6}\frac{dt'_7}{1-t'_7}\frac{dt'_8}{t'_8} = I\Biggl($$



$$\Biggr) = \boxed{2}\boxed{4}\boxed{2}.$$

このとき，$D' = \{(t'_i) | t'_1 < t'_2 > t'_3 < t'_4 < t'_5 < t'_6 > t'_7 < t'_8\}$ を表す．このように，Schur 多重ゼータ値の反復積分表示により，Schur 多重ゼータ値間の関係式を導くことができる．

7　Schur 型多重ベルヌーイ数

本節では，ベルヌーイ数の Schur 型への拡張を考える．本節は中村氏（上智大学）との共同研究 ([NN]) に基づく．ベルヌーイ数 B_n は，自然数をべき乗和で表したときの係数に現れる数列であり，リーマンゼータ関数と次の関係式が知られている：正の整数 m に対し，

$$\zeta(1-m) = -\frac{B_m}{m}, \quad \zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1}B_{2m}}{2\cdot(2m)!}(2\pi)^{2m}.$$

多重ゼータ関数と関係する多重ベルヌーイ数は，B 型，C 型で区別されており，多重対数関数 $\mathrm{Li}_k(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^k}$ $(k \in \mathbb{Z})$ を用いて，それぞれ次のように定義される：非負整数 m に対し，

$$\frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-z})}{1-e^{-z}} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{B}_m^{(k)} \frac{z^m}{m!}, \quad \frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-z})}{e^z - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{C}_m^{(k)} \frac{z^m}{m!}.$$

さらなる一般化として，多重対数関数 $\mathrm{Li}_k(z)$ を拡張した多重対数級数

$\mathrm{Li}_{k_1,\cdots,k_r}(z) = \sum_{0<m_1<\cdots<m_r}^{\infty} \frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}$ $(k_i \geq 1,\ |z| < 1)$ が知られているが，これらをさらに Schur 型に拡張することを考える：$\mathbf{z} = \{z_{ij} | (i,j) \in C(\lambda)\}$ に対し，

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}^{\lambda}(\mathbf{z}) := \sum_{(m_{ij})\in SSYT(\lambda)} \frac{\mathbf{z}^{m_c}}{m_{ij}^{k_{ij}}}, \quad (k_{ij} \geq 1, |z_{ij}| < 1).$$

ここで，$\mathbf{z}^{m_c} = \prod_{(i,j)\in C(\lambda)} z_{ij}^{m_{ij}}$ を表す．この級数は，$\lambda = (1^r)$ とすると，多重対数級数 $\mathrm{Li}_{k_1,\cdots,k_r}(z)$ と一致する．この級数を用いて，Schur 型のベルヌーイ数を定義する．ただし，本報告集では，hook 型，すなわち $\lambda = (n, 1^{\ell-1})$ に限定した場合を考える．このとき，$C(\lambda) = \{(1,n), (\ell,1)\}$ である．簡単のため，$(z_n, z_\ell) := (z_{1n}, z_{\ell 1})$, $(m_n, m_\ell) := (m_{1n}, m_{\ell 1})$ と書く．このとき，B 型，C 型多重ベルヌーイ数の拡張として，hook Schur 型多重ベルヌーイ数を以下で定義する．

$$\frac{\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}^{\lambda}(1-e^{-z_n},1-e^{-z_\ell})}{(1-e^{-z_n})(1-e^{-z_\ell})}=\sum_{m_n,m_\ell=0}^{\infty}\mathbb{B}_{m_n,m_\ell}^{\lambda,\mathbf{k}}\frac{z_n^{m_n}z_\ell^{m_\ell}}{m_n!m_\ell!}$$

$$\frac{\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}^{\lambda}(1-e^{-z_n},1-e^{-z_\ell})}{(e^{z_n}-1)(e^{z_\ell}-1)}=\sum_{m_n,m_\ell=0}^{\infty}\mathbb{C}_{m_n,m_\ell}^{\lambda,\mathbf{k}}\frac{z_n^{m_n}z_\ell^{m_\ell}}{m_n!m_\ell!}.$$

このとき，次の定理を得た．

定理 1. $\lambda=(n,1^{\ell-1})$ に対し，$\mathbf{k}=(k_{ij})\in\mathbb{N}^{|\lambda|}$ とする．このとき，$r,s\in\mathbb{N}$ に対し，

$$\mathbb{B}_{r,s}^{\lambda,\mathbf{k}}=\sum_{p=0}^{r}\sum_{q=0}^{s}\binom{r}{p}\binom{s}{q}\mathbb{C}_{p,q}^{\lambda,\mathbf{k}},\quad \mathbb{C}_{r,s}^{\lambda,\mathbf{k}}=\sum_{p=0}^{r}\sum_{q=0}^{s}(-1)^{r+s-p-q}\binom{r}{p}\binom{s}{q}\mathbb{B}_{p,q}^{\lambda,\mathbf{k}},$$

が成り立つ．

また，Arakawa-Kaneko の多重ゼータ関数 ([AK2]), および，Kaneko-Tsumura 型の多重ゼータ関数 ([KT]):

$$\xi_{k_1,\cdots,k_r}(s):=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{\mathrm{Li}_{k_1,\cdots,k_r}(1-e^{-t})}{e^t-1}t^{s-1}dt\quad(\mathrm{Re}(s)>0),$$

$$\eta_{k_1,\cdots,k_r}(s):=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{\mathrm{Li}_{k_1,\cdots,k_r}(1-e^{t})}{1-e^t}t^{s-1}dt\quad(\mathrm{Re}(s)>0),$$

の $\lambda=(n,1^{\ell-1})$ の hook Schur 型への拡張として，$\mathbf{k}=(k_{ij})\in\mathbb{N}^{|\lambda|}$, $s_1,s_2\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s_1),\mathrm{Re}(s_2)>0$ に対し，以下のように定義する：

$$\xi_{\mathbf{k}}^{\lambda}(s_1,s_2)=\frac{1}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}^{\lambda}(1-e^{-z_n},1-e^{-z_\ell})}{(e^{z_n}-1)(e^{z_\ell}-1)}z_n^{s_1-1}z_\ell^{s_2-1}dz_ndz_\ell$$

$$\eta_{\mathbf{k}}^{\lambda}(s_1,s_2)=\frac{1}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}^{\lambda}(1-e^{z_n},1-e^{z_\ell})}{(1-e^{z_n})(1-e^{z_\ell})}z_n^{s_1-1}z_\ell^{s_2-1}dz_ndz_\ell.$$

このとき，次の定理を得た．

定理 2. 関数 $\xi_{\mathbf{k}}^{\lambda}(s_1,s_2)$ および $\eta_{\mathbf{k}}^{\lambda}(s_1,s_2)$ は s_1, s_2 に関する複素全平面に整関数として解析接続される．また，以下が成り立つ．

$$\xi_{\mathbf{k}}^{\lambda}(-p,-q)=(-1)^{p+q}\mathbb{C}_{p,q}^{\lambda(\mathbf{k})},\quad \eta_{\mathbf{k}}^{\lambda}(-p,-q)=\mathbb{B}_{p,q}^{\lambda(\mathbf{k})}.$$

References

[AK1] 荒川恒男，金子正信, 多重ゼータ値入門，COE Lecure Note Vol. 23, Kyushu University, 2010.

[AK2] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions， *Nagoya Math. J.* **153** (1999), pp.189–209.

[H] M. E. Hoffman, Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums, *Kyushu J. Math.*, **69** (2015), no.2, pp.345–366.

[KT] M. Kaneko and H. Tsumura. Multi-poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, *Nagoya Math. J.*, **232** (2018), pp.19–54.

[KY] M. Kaneko and S. Yamamoto, A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations, Selecta Math. (N. S. **24** (2018), no.3, pp.2499–2521.

[Mac] I. G. Macdonald, Schur functions: theme and variations, Sḿinaire Lotharingien de Combinatoire (Saint-Nabor, 1992), pp. 5–39, Publ. Inst. Rech. Math. Av., 498, Univ. Louis Pasteur, Strasbourg, 1992.

[Mat] K. Matsumoto, On the analytic continuation of various multiple-zeta functions, *Number Theory for the Millennium* (Urbana, 2000), Vol. II, M.A. Bennett et. al. (eds.), A. K. Peters, Natick, MA, 2002, pp. 417–440.

[NNSY] J. Nakagawa, M. Noumi, M. Shirakawa and Y. Yamada, Tableau representation for Macdonald's ninth variation of Schur functions, *(English summary) Physics and combinatorics* (Nagoya, 2000), pp. 180-195, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001.

[NN] N. Nakamura and M. Nakasuji, Schur type poly-Bernoulli numbers, preprint.

[NPY] M. Nakasuji, O. Phuksuwan, and Y. Yamasaki, On Schur multiple zeta functions: A combinatoric generalization of multiple zeta functions, Adv. Math. **333** (2018), pp.570–619.

[Y] S. Yamamoto, Multiple zeta-star values and multiple integrals, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, B68, Res, Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto (2017).

Maki Nakasuji
`nakasuji@sophia.ac.jp`