ON THE EXISTENCE OF SILTING OBJECTS

相原琢磨

多元環の表現論において, 傾理論は重要なトピックのうちの一つである. 傾理論は森田理論の一般化として 1980 年頃に導入され, 近年活発に研究が行われている. 特に, 傾理論で中心的な役割を果たす傾対象は, 導来同値を引き起こすことが知られており [H, R1, K], 数学の様々な分野で注目されている.

変異理論の観点から傾対象を眺めたとき, それらはある弱点を持っている: 傾対象の変異 (**傾変異**) とは, 与えられた傾対象の一部分 (直和因子) をある操作で取り替えて, 新しい傾対象を作り出す方法である. この方法は, Bernstein-Gelfand-Ponomarev の鏡映関手 [BGP] に起源を持ち, Auslander-Platzeck-Reiten [APR] や Brenner-Butler [BB], Riedtmann-Schofield [RS] らによって定式化された. 上述した傾変異の弱点とは, 傾変異はいつでも可能とは限らない点である.

その弱点を解消するために, 次のような 2 つの一般化が導入された.

- (三角圏における傾対象の一般化) **準傾対象**の変異 (**準傾変異**) [AI]
- (加群圏における傾加群の一般化) **台 τ 傾加群**の変異 (**τ 傾変異**) [AIR]

特筆すべき点は, 準傾変異および τ 傾変異はいつでも可能という点である.

$$\begin{tikzcd}
 & & \boxed{\text{加群圏における拡張}} & \\
\text{射影生成加群} \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \text{傾加群} \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d, phantom, "\cap" description] & \text{台}\,\tau\,\text{傾加群} \arrow[d, hook, "{[AIR]}"'] & \boxed{\text{変異が可能}} \arrow[l, rightsquigarrow] \arrow[dl, rightsquigarrow] \\
 & \text{傾複体} \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \text{準傾複体} & \\
 & \boxed{\text{導来圏への拡張}} & &
\end{tikzcd}$$

ここでは, 導来同値の観点から, 準傾対象とその変異に注目する: 準傾対象によっても導来同値が導かれる [K]. このとき, 一つでも準傾対象を見つけることができれば, 準傾変異によって, 無数に多くの準傾対象が得られる. そこで, 一つの大きな問題は, 準傾対象の分類を行うことである. この「分類問題」に対して, ここでは次の疑問について考えていく.

疑問 1. 一つの準傾対象から変異を繰り返すことで, すべての準傾対象を構成できるか?

この疑問が肯定的に解決されれば, 一つの準傾対象と準傾変異の繰り返しによってすべての準傾対象を理解でき, この意味で “分類できた” といえる.

一方, 考える三角圏によっては準傾対象が存在しないことがある. 例えば, 大域次元が無限の有限次元多元環上の有界導来圏や半単純でない自己入射的多元環の安定加群圏は, 準傾対象を持たない. 後者の例は, Buchweitz-Rickard の定理 [B, R2] より, 有界導来圏の完全導来圏による Verdier 商 (**特異圏**) と見ることができる. そのため, これらの例は次の疑問を引き起こす.

疑問 2. 特異圏はいつでも準傾対象を持たないのではないか?

特に, 自己入射的多元環 (右自己入射次元 0) の高次元版として, 右自己入射次元有限な多元環上の特異圏について議論する.

記号. 以下, Λ を代数閉体 k 上有限次元多元環とし, 次のような圏を考える.

- $\operatorname{mod}\Lambda$: 有限生成 (右) Λ 加群からなる圏 (**加群圏**)
- $\operatorname{proj}\Lambda$: 射影加群からなる $\operatorname{mod}\Lambda$ の充満部分圏
- $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Lambda)$: 加群圏 $\operatorname{mod}\Lambda$ の有界導来圏
- $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$: 射影加群の圏 $\operatorname{proj}\Lambda$ の有界ホモトピー圏 (**完全導来圏**)

一般に, $\mathcal{T}$ を次の条件を満たす三角圏とする: - Krull-Schmidt - k 線型 - Hom 有限.

1. 準傾変異

ここでは, 与えられた一つの準傾対象から, 別の準傾対象を作り出す方法 (**準傾変異**, *silting mutation*) について解説する.

まずは, 準傾対象の定義から思い出そう.

定義 1.1. 三角圏 $\mathcal{T}$ の対象 T が**前準傾** (*presilting*) であるとは, 任意の整数 $i>0$ に対して, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(T,T[i])=0$ を満たすときにいう. さらに加えて, $\mathcal{T}=\mathsf{thick}\,T$ となるとき, T を**準傾対象** (*silting object*) とよぶ. ここで, $\mathsf{thick}\,T$ は $\mathcal{T}$ の T を含む最小の thick 部分圏を表す.

$\mathcal{T}$ の基本的な準傾対象の同型類の集合を $\mathsf{silt}\,\mathcal{T}$ と書くことにする.

例えば, 環 Λ は完全導来圏 $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$ の準傾対象であり, そのシフト $\Lambda[i]$ も準傾である.

逆に, 準傾対象を持つ (ある程度の) 三角圏は, 完全導来圏しかないことが知られている [R1, K]. つまり, 次の圏同値が得られる.

定理 1.2 (Rickard, Keller)**.** $\mathcal{T}$ を代数的な三角圏, すなわち, $\mathcal{T}$ はある Frobenius 圏の安定圏として得られるとする. このとき, $\mathcal{T}$ が準傾対象 T を持つならば, $\mathcal{T}$ は T の導来自己準同型多元環上の完全複体の圏と三角圏同値になる.

準傾対象に関する基本的な性質を見てみよう [AI].

命題 1.3. (1) 準傾対象の非同型な直既約因子の個数は, 準傾対象の取り方に依存しない ($\mathcal{T}$ のみで決まる).

(2) $\mathcal{T}$ が準傾対象を持つならば, 任意の対象 X,Y は十分大きな $\ell\gg 0$ で, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(X,Y[\ell])=0$ となる.

もう一つ簡単な例を観察する.

例 1.4. Λ をクイバー $1\to 2$ で与えられる多元環とする: これは 2 次の上三角行列環と同型である. このとき, $\mathcal{T}:=\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$ $(=\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Lambda))$ を考える. Happel の結果 [H] から, $\mathcal{T}$ は Auslander-Reiten クイバーを持つことが知られており, 圏構造が次のように完全に理解できる.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & & 2 \arrow[dr] & \\
& -1 \arrow[ur] & & 1 \arrow[ur] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

整数は直既約対象, 矢は対象の間の既約射を表し, 2 本の矢を通すと零になる. さらに, $i<j$ のとき, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(j,i)=0$ が成り立つ. また, $\mathcal{T}$ の中でのシフトは 3 を足すことで与えられる ($i[1]=i+3$). 以上から, 簡単な議論により次が得られる.

$$\mathsf{silt}\,\mathcal{T}=\{i\oplus j\mid 0<j-i\equiv 1 \pmod 3\}$$

次に, 準傾変異を導入する [AI].

定義-定理 1.5 (**準傾変異**)**.** T を $\mathcal{T}$ の準傾対象とし, 直和因子 X を取る: $T=X\oplus M$. 次の 3 ステップにより, 新しい対象を定義する.

ステップ 1: X の (極小な) 左 $\mathsf{add}\, M$ 近似 $f : X \to M'$ を取る ($\mathsf{add}\, M$ は M の加法閉包). つまり, M' は $\mathsf{add}\, M$ に属し, 任意の射 $g : X \to M$ は f を通過する. $\mathcal{T}$ は Hom 有限なので, これはいつでも可能である.

ステップ 2: f を三角に拡張する: $X \xrightarrow{f} M' \to Y \to X[1]$.

ステップ 3: T の直和因子 X を Y と取り替える: $Y \oplus M$.

このとき, $Y \oplus M$ はまた, 準傾対象になる. そこでこれを, $\mu_X^-(T)$ と書き, T の X に関する**左変異**と呼ぶ. 双対的に, **右変異** $\mu_X^+(T)$ を定義する. 左変異および右変異をまとめて, 変異と呼ぶことにする. また, X が直既約のとき, その変異を**既約**な変異という.

注意 1.6. (1) 変異は近似の取り方に依らない.

上の設定で,

(2) $X = 0$ および $X = T$ でも変異可能である: $\mu_0^\pm(T) \simeq T$, $\mu_T^\pm(T) \simeq T[\mp 1]$ (複号同順).

(3) T が基本的のとき, 近似を極小に取れば, 変異も基本的になる.

(4) $\mu_Y^+(\mu_X^-(T)) \simeq T$ が成り立つ. (双対版も成り立つ.)

準傾変異によって, 一つでも準傾対象を見つけることができれば, 無数に多くの準傾対象を得ることができる. よって, 完全導来圏 $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ は無数に多くの準傾対象を持つことがわかる.

例 1.7. 例 1.4 を見てみよう. 準傾対象 $T = i \oplus j$ $(i < j)$ の既約左変異は次の 3 種類がある:

(1) $\mu_j^-(T) \simeq i \oplus (j+3)$

(2) $\mu_i^-(T) \simeq \begin{cases} (j+1) \oplus j & (j = i+1) \\ (i+3) \oplus j & (j \neq i+1) \end{cases}$

ここから, 疑問 1 について考えていく. 特に, 既約な変異に絞り, 次の概念を導入する.

定義 1.8. $\mathcal{T}$ にある準傾対象 T が存在し, すべての準傾対象が T の既約な変異の繰り返しによって得られるとき, $\mathcal{T}$ は**準傾連結** (*silting-connected*) であるという.

例 1.9. 例 1.7 で見たように, この多元環における準傾変異は, (1) "遠ざける" (2-1) "ジグザグ" (2-2) "近づける" の 3 種類である. そのため, 準傾対象の形 (例 1.4) を見れば, $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ が準傾連結であることがわかる. さらに, 任意の 2 つの準傾対象は, 適当にどちらか一つを選べば, 既約左変異のみの繰り返しで, もう片方に届く.

次のような準傾連結な完全導来圏を持つ多元環が知られている [AI, A, AAC, AM, BPP].

定理 1.10. 多元環 Λ が次のいずれかのとき, $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ は準傾連結である.

(1) 局所多元環
(2) 区分的遺伝的多元環
(3) 有限表現型対称多元環
(4) 奇数型の Brauer グラフ多元環
(5) Dynkin 型前射影対称多元環
(6) 有限大域次元の導来離散多元環

注意 1.11. 上の定理において, (2) の場合を除いて, $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ は特に, **準傾離散** (*silting-discrete*) になっている: 準傾離散とは, 準傾対象の個数がある意味で有限になっているときにいい, 準傾離散ならば準傾連結であることが従う (詳しくは [A] を参照). (2) ではさらに, Λ が有限表現型のとき, $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ は準傾離散になる.

傾離散 (*tilting-discrete*) を導入して, (3) および (5) の対称性の仮定を自己入射的に置き換えることができる. つまり, 有限表現型自己入射的多元環および Dynkin 型前射影多元環 (この場合, 自動的に自己入射的になる) の完全導来圏は傾離散になる [CKL, AM].

準傾連結であっても, 一つの準傾対象から別の準傾対象へ, 既約左変異のみの繰り返し, もしくは, 既約右変異のみの繰り返しで到達するとは限らない.

例 1.12. Λ を Kronecker 多元環とする: つまり, クイバー $1 \rightrightarrows 2$ で与えられる多元環. このとき, Λ は遺伝的である. さらに, $\mathcal{T} := \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$ $(= \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Lambda))$ の Auslander-Reiten クイバーは次のような連結成分を無限個持ち, それらはシフトによって移り合う (cf. [ASS, H]):

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & 0_n \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & 2_n \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \\
& -1_n \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & 1_n \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & \cdots
\end{tikzcd}
$$

$(i_n[1] = i_{n+1})$ また, 準傾対象は例 1.4 と似たような表示をすることができ, 準傾変異も例 1.7 と同様に, (1) “遠ざける” (2-1) “ジグザグ” (2-2) “近づける” の 3 種類がある.

定理 1.10 より, $\mathcal{T}$ は準傾連結であるが, 既約左変異のみの繰り返しでは得られないものがあることを見てみよう. $T := 0_0 \oplus 1_0$, $U := -1_1 \oplus 0_1$ とおくと, U は T の既約左変異のみの繰り返しでは得られない. 実際, T の “ジグザグ” の既約左変異のみでは 0 番目の連結成分から出ることはできず, また, 一度 “遠ざける” 既約左変異を使ってしまうと, U を飛び越えてしまい, 既約左変異では U へ戻ることができない. 一方, 既約右変異を用いれば T と U は繋がっている.

以上のことを, 既約左変異を矢で表すことにして視覚的に観察してみよう: $T, U \in \mathsf{silt}\,\mathcal{T}$ に対して, $T \to U$ は U が T の既約左変異であることを意味する.

$$
\begin{tikzcd}
& & \boxed{0_0 \oplus 1_0} \arrow[dl] \arrow[ddr] & \\
\text{すべて 0 番目の連結成分に属す.} & 1_0 \oplus 2_0 \arrow[d] & & \\
& 2_0 \oplus 3_0 \arrow[d] & & \\
& \vdots \arrow[d] & & 0_0 \oplus 1_1 \arrow[dddl] \\
& -2_1 \oplus -1_1 \arrow[d] & & \\
\text{すべて 1 番目の連結成分に属す.} & \boxed{-1_1 \oplus 0_1} \arrow[dr] & & \\
& & 0_1 \oplus 1_1 &
\end{tikzcd}
$$

この節の最後に, 完全導来圏が準傾連結でない多元環の例を挙げる [AGI].

例 1.13. Λ をクイバー $1 \substack{\rightrightarrows \\ \leftleftarrows} 2$ で与えられる多元環で, ルビー列

$$\Lambda = \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ 2 & & & & 2 \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & 1 & & \end{array} \bigoplus \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ 1 & & & & 1 \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & 2 & & \end{array}$$

を持つものとする. これは, 2 つの単純加群を持つルビー列の長さが 2 の自己入射的中山多元環の自明拡大, および, グラフ $\circ =\!= \circ$ の Brauer グラフ多元環と同型である. このとき, $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$ が準傾連結でないことが, 線型代数的手法により観察できる. 詳細は省くが, 各準傾対象を行列 (g **行列**) と対応させ, その固有ベクトルと固有値を計算する. そのとき, Λ の既約な変異の繰り返しで得られる準傾対象の g 行列と $\Lambda[1]$ の g 行列の固有値が異なり, Λ と $\Lambda[1]$ が既約な変異の繰り返しでは繋がらないことがわかる. 一方で, $\Lambda[1] \simeq \mu_\Lambda^-(\Lambda)$ となり, 疑問 1 の真偽はわかっていない.

注意 1.14. 2 つの単純加群を持つルビー列の長さが 2 の自己入射的中山多元環は, 準傾連結 (準傾離散) な完全導来圏を持つため, 上の例は自明拡大で準傾連結 (準傾離散) が壊れる例となっている.

2. 準傾対象の存在・非存在

前節では, 一つでも準傾対象を見つけることができれば, 無数に多くの準傾対象を得られることを見た. この節では, 「準傾対象はいつでも存在するか?」について考える.

$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Lambda)$ の $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$ による Verdier 商 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Lambda)/\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$ を Λ の**特異圏**といい, $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\Lambda)$ で表す.

次の圏同値がよく知られている [B, R2].

定理 2.1 (Buchweitz, Rickard)**.** Λ が岩永-Gorenstein 多元環, すなわち, 左および右の自己入射次元が有限ならば, 三角圏同値 $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\Lambda) \simeq \underline{\mathsf{CM}}\,\Lambda$ が得られる. ここで,

$$\mathsf{CM}\,\Lambda := \{M \in \operatorname{mod}\Lambda \mid \operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda) = 0 \text{ (任意の } i > 0)\}$$

であり, $\underline{\mathsf{CM}}\,\Lambda$ はその安定圏である.

前節において, 完全導来圏が無限個の準傾対象を含むことがわかったが, 有界導来圏や特異圏ではどうか?

次のことが知られている [AI].

命題 2.2. Λ は半単純でないとする.

(1) $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Lambda)$ が準傾対象を持つことと Λ が有限大域次元を持つことは同値である. 特に, Λ の大域次元が無限ならば, $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Lambda)$ は準傾対象を含まない.
(2) Λ が自己入射的ならば, 安定加群圏 $\underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$ は準傾対象を持たない. よって, Buchweitz-Rickard の定理より, Λ の特異圏に準傾対象は存在しない.

ここで疑問 2 を考える. 次の準傾退化 (silting reduction) が重要な役割を果たす [AI, IY].

定理 2.3 (**準傾退化**)**.** T を $\mathcal{T}$ の前準傾対象とし, 次を満たすと仮定する: 任意の $X \in \mathcal{T}$ に対して,

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(T, X[\ell]) = 0 = \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(X[\ell], T) \ (\ell \gg 0).$$

このとき, 標準的な関手 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}/\operatorname{\mathsf{thick}} T$ は次の集合の間の全単射を引き起こす:

$$\mathsf{silt}_T\,\mathcal{T} \xrightarrow{1-1} \mathsf{silt}\,(\mathcal{T}/\operatorname{\mathsf{thick}} T)\,.$$

ここで, $\mathsf{silt}_T\,\mathcal{T}$ は次のような $\mathsf{silt}\,\mathcal{T}$ の部分集合である:

$$\mathsf{silt}_T\,\mathcal{T} := \{U \in \mathsf{silt}\,\mathcal{T} \mid U \text{ は } T \text{ を直和因子に持つ}\}.$$

例えば, $\mathcal{T}$ が準傾対象を持てば, 任意の前準傾対象は上の定理の仮定を満たし (命題1.3), 準傾退化を適用することができる.

特異圏における準傾対象の存在・非存在を見るためには, 準傾退化を $\mathcal{T} = \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ および $T = \Lambda$ として適用すればよい.

次の結果が得られる.

定理 2.4. 半単純でない右自己入射次元有限な多元環の特異圏は, 準傾対象を含まない.

これは, 例2.2 (2) の一般化を与えている.

また, Buchweitz-Rickard の定理より, 定理2.4 はすぐに次の系を導く.

系 2.5. Λ を半単純でない岩永-Gorenstein 多元環とする. このとき, $\underline{\mathsf{CM}}\,\Lambda$ は準傾対象を持たない.

注意 2.6. 次数付き多元環と次数付き加群を考えると状況が変わる. 次のことが知られている [Y].

定理. $\Lambda := \bigoplus_{i\geq 0}\Lambda_i$ を非負整数次数付き自己入射的多元環とし, Λ_0 は大域次元有限と仮定する. このとき, 次数付き加群の安定圏 $\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}}\,\Lambda$ は準傾対象を持つ.

References

[AAC] T. Adachi, T. Aihara and A. Chan, Classification of two-term tilting complexes over Brauer graph algebras. To appear in Math. Z.

[AIR] T. Adachi, O. Iyama and I. Reiten, τ-tilting theory. *Compos. Math.* **150**, no. 3, 415–452 (2014).

[A] T. Aihara, Tilting-connected symmetric algebras. *Algebr. Represent. Theory* **16** (2013), no. 3, 873–894.

[AGI] T. Aihara, J. Grant and O. Iyama, private communication.

[AI] T. Aihara and O. Iyama, Silting mutation in triangulated categories. *J. Lond. Math. Soc. (2)* **85** (2012), no. 3, 633–668.

[AM] T. Aihara and Y. Mizuno, Classifying tilting complexes over preprojective algebras of Dynkin type. *Algebra Number Theory* **11** (2017), no. 6, 1287–1315.

[ASS] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. **1**. London Mathematical Society Student Texts **65**. *Cambridge University Press, Cambridge*, 2006.

[APR] M. Auslander, M. I. Platzech and I. Reiten, Coxeter functors without diagrams. *Trans. Amer. Math. Soc.* **250** (1979) 1–46.

[BB] S. Brenner and M.C.R. Butler, Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors. *Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979)*, pp.103-169, Lecture Notes in Math., **832**, Springer, Berlin-New York, 1980.

[BGP] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand and V. A. Pnomarev, Coxeter functors, and Gabriel's theorem. *Uspehi Mat. Nauk* **28** (1973), no. 2, 19–33.

[BPP] N. Broomhead, D. Pauksztello and D. Ploog, Discrete derived categories II: the silting pairs CW complex and the stability manifold. *J. Lond. Math. Soc. (2)* **93** (2016), no. 2, 273–300.

[B] R.-O. Buchweitz, Maximal Cohen-Macaulay modules and Tata-Cohomology over Gorenstien rings. Preprint (1986), `http://hdl.handle.net/1807/16682`.

[CKL] A. Chan, S. Koenig and Y. Liu, Simple-minded systems, configurations and mutations for representation-finite self-injective algebras. *J. Pure Appl. Algebra* **219** (2015), no. 6, 1940–1961.

[H] D. Happel, Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras. London Mathematical Society Lecture Note Series, **119**. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1988.

[IY] O. Iyama and D. Yang, Silting reduction and Calabi–Yau reduction of triangulated categories. Preprint (2014), arXiv: 1408.2678.

[K] B. Keller, Deriving DG categories. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **27** (1994), no. 1, 63–102.

[R1] J. Rickard, Morita theory for derived categories. *J. London Math. Soc. (2)* **39** (1989), no. 3, 436–456.

[R2] J. Rickard, Derived categories and stable equivalence. *J. Pure Appl. Algebra* **61** (1989), no. 3, 303–317.

[RS] C. Riedtmann, A. Schofield, On a simplicial complex associated with tilting modules. *Comment. Math. Helv.* **66**, no. 1, 70–78 (1991).

[Y] K. Yamaura, Realizing stable categories as derived categories. *Adv. Math.* **248** (2013), 784–819.

Department of Mathematics, Tokyo Gakugei University, 4-1-1 Nukuikita-machi, Koganei, Tokyo 184-8501, Japan

E-mail address: aihara@u-gakugei.ac.jp