CONIC DIVISORIAL IDEALS OF HIBI RINGS AND THEIR APPLICATIONS

中嶋祐介 (YUSUKE NAKAJIMA)

Abstract. 本稿では日比環と呼ばれる半順序集合から構成されるトーリック環、及びその因子的イデアルを考察する。その中でも特に、正標数の可換環論や非可換特異点解消の概念と関連が深い、conic 加群と呼ばれる因子的イデアルに注目し、その特徴付けを日比環に付随する半順序集合の言葉を用いて与える。また、conic 加群を用いることで、いくつかの特別な日比環に対して非可換クレパント特異点解消を構成する。

本稿は東谷章弘氏との共同研究 [HN] の内容に基づいたものである。

1. 導入

本稿ではトーリック環上の *conic* と呼ばれる因子的イデアル (階数 1 の反射的加群) に注目する。以下、conic な因子的イデアルを conic 加群と呼ぶことにする。Conic 加群はトーリック環を定める錐 (cone) の情報を用いて定義されるものであり (詳細な定義は定義 1.1を参照)、特に階数 1 の極大 Cohen-Macaulay (= CM) 加群となる。また、下記の定理 1.2(1) に示すように特徴付けることもでき、この特徴付けにより conic 加群は正標数の可換環論とも深く関係する。さらに、定理 1.2(2) から、conic 加群は非可換特異点解消といった概念と関連することもわかっており、この加群を理解することは重要であると思われる。

Conic 加群を定義するために、本稿を通じて使用する記号をまず準備する。$\mathsf{N} \cong \mathbb{Z}^d$ を階数 d の格子とし、$\mathsf{M} \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{N}, \mathbb{Z})$ を N の双対として定義される格子とする。また、$\mathsf{N}_{\mathbb{R}} \coloneqq \mathsf{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \mathsf{M}_{\mathbb{R}} \coloneqq \mathsf{M} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とおき、これらの間に自然に定まる内積を $\langle\ ,\ \rangle : \mathsf{M}_{\mathbb{R}} \times \mathsf{N}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ と書くことにする。次に $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{Z}^d$ により生成される d 次元の有理強凸多面錐

$$\tau \coloneqq \mathrm{Cone}(v_1, \cdots, v_n) = \mathbb{R}_{\geq 0} v_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0} v_n \subset \mathsf{N}_{\mathbb{R}}$$

を考える。特に $v_1, \cdots, v_n$ は極小生成系であると仮定する。各 v_i に対して $\sigma_i(-) \coloneqq \langle -, v_i \rangle$ とおく。また $\sigma(-) \coloneqq (\sigma_1(-), \cdots, \sigma_n(-))$ と書くことにする。次にこの錐 τ の双対錐 $\tau^\vee$ を考える。

$$\tau^\vee \coloneqq \{\mathbf{x} \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}} \mid \sigma_i(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ for all } i = 1, \cdots, n\}.$$

このとき、$\tau^\vee \cap \mathsf{M}$ はモノイドとなり、以下のようにトーリック環 R が定義される。

$$R \coloneqq \Bbbk[\tau^\vee \cap \mathsf{M}] = \Bbbk[t_1^{m_1} \cdots t_d^{m_d} \mid (m_1, \cdots, m_d) \in \tau^\vee \cap \mathsf{M}].$$

ここで $\Bbbk$ は体であり、以下本稿では代数閉体であると仮定する。このトーリック環 R の性質は多くの文献で研究されており、上記の設定の下では d 次元の Cohen-Macaulay (= CM) 整閉整域となる。

次にトーリック環 R の因子的イデアルについて考える。実数の組 $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\mathbb{T}(\mathbf{a}) \coloneqq \{\mathbf{x} \in \mathsf{M} \mid (\sigma_1(\mathbf{x}), \cdots, \sigma_n(\mathbf{x})) \geq (a_1, \cdots, a_n)\}$$

とおく。$T(\mathbf{a})$ を指数ベクトルが $\mathbb{T}(\mathbf{a})$ に含まれる単項式によって生成される加群と定めると、この $T(\mathbf{a})$ は因子的イデアルとなり、任意の因子的イデアルはこの形をしている。定義から $T(\mathbf{a}) = T(\ulcorner \mathbf{a} \urcorner)$ であるため、以下、整数の組 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ に対する因子的イデアル $T(\mathbf{a})$ を考える。(ここで $\ulcorner\ \urcorner$ は切り上げを意味し、$\ulcorner \mathbf{a} \urcorner = (\ulcorner a_1 \urcorner, \cdots, \ulcorner a_n \urcorner)$ と定義する。) また、明らかに $\mathbb{T}(0) = \tau^\vee \cap \mathsf{M}$ であり、$T(0) = R$ が成立する。これら $T(\mathbf{a})$ は階数 1 の反射的 R 加群であるが、その中でも極大 CM 加群となるもの (すなわち加群の深度が R の次元 d と一致するもの) に注目する。トーリック環の階数 1 の極大 CM 加群は、例えば [Sta, VdB1, Don, BG1, Bae, Bru] といった文献において調べられて

おり、それらの同型類の個数は有限となることが知られている [BG1, Corollary 5.2]。以下、階数 1 の極大 CM 加群の中でもとりわけ良い性質を示す *conic* **加群**に注目する。

定義 1.1 ([BG1, Section 3])**.** 因子的イデアル $T(\mathbf{a})$ について、ある $\mathbf{x} \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}$ が存在して $\mathbf{a} = \ulcorner \sigma(\mathbf{x}) \urcorner$ とできるとき、$T(\mathbf{a})$ を *conic* **加群**と呼ぶ。

この conic 加群の性質は [BG1, Bru, SmVdB] などにおいて調べられており、特に conic 加群は階数 1 の極大 CM 加群となるが、一般には conic でない階数 1 の極大 CM 加群も存在する。前述のように階数 1 の極大 CM 加群の同型類の個数は有限であるため、conic 加群の同型類の個数も有限である。また、conic 加群は下記のような特徴づけ、及び良い性質を持っている。

定理 1.2. *R を上記のようなトーリック環とする。このとき conic 加群に関して次が成立する。*
(1) ([BG1, Proposition 3.6], [SmVdB, Proposition 3.2.3]) 任意の *conic* 加群は $R^{1/m} = \Bbbk[\tau^\vee \cap \frac{1}{m}\mathsf{M}]$ の R 加群としての直既約分解を考えた際の直和因子として現れる (ただし m は十分大きな自然数とする)。
(2) ([ŠpVdB1, Proposition 1.8]) 十分大きな自然数 $m \gg 0$ に対して、$\mathrm{End}_R(R^{1/m})$ の大域次元は有限となる。

もし、体 $\Bbbk$ の標数が $p > 0$ であるならば R^{1/p^e} は R の Frobenius 直像 F^e_*R と同型となる。(ここで F^e は Frobenius 写像 $F : R \to R$ $(r \mapsto r^p)$ を e 回合成したものであり、F^e_*R は R を F^e を通じて R 加群としてみたもの。) この F^e_*R は正標数の可換環論において非常に重要であり、例えば強 F 正則や F 純といった F 特異点と呼ばれるクラスは、F^e_*R の構造により特徴付けることができる。この事から conic 加群は、トーリック環の正標数の可換環論における振る舞いを理解する上で非常に重要である。

また、定理 1.2(2) のような大域次元が有限となる自己準同型環は R の**非可換特異点解消** (*non-commutative resolution*) と呼ばれ [DITV]、このような環は多元環の表現論などの文脈などで深く研究されている。また、この非可換特異点解消よりも良いクラスとして Van den Bergh によって導入された**非可換クレパント特異点解消**という概念がある。

定義 1.3 ([VdB2])**.** A を Gorenstein 整閉整域とし、M を反射的 A 加群とする。このとき自己準同型環 $\mathrm{End}_A(M)$ が A の**非可換クレパント特異点解消** *(non-commutative crepant resolution)* であるとは次の条件を満たす時にいう。

(a) 大域次元 $\mathrm{gl.dim}\,\mathrm{End}_A(M)$ は有限である。
(b) A 加群として $\mathrm{End}_A(M)$ が極大 CM 加群となる。

(以下、non-commutative crepant resolution を略して NCCR と書くことにする。)

注意 1.4. 元々の [VdB2] における定義では上記のように A を Gorenstein と仮定しているが、最近は A を Cohen-Macaulay としている文献も多い。その場合、最初の条件 (a) を

(a') 任意の素イデアル $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,A$ に対して $\mathrm{gl.dim}\,\mathrm{End}_A(M)_{\mathfrak{p}} = \dim A_{\mathfrak{p}}$

と修正する必要があるが、A が Gorenstein であるならば、この条件は上記の定義と同値となる。

また、[DITW] により CM 整閉整域 A が NCCR を持つのであれば A は $\mathbb{Q}$-Gorenstein となることが示されている。本稿では因子類群が自由アーベル群となる環しか扱わないため、Gorenstein でない場合には NCCR は存在しない。よって、以下 NCCR を扱う際には定義 1.3のように Gorenstein であることを仮定することにする。

この NCCR という概念は、Bondal-Orlov 予想および Bridgeland による定理 [Bri] への非可換代数を用いたアプローチから生まれた概念であり、いくつかの良い特異点に対して、NCCR は通常の意味でのクレパント特異点解消と導来同値となる。(例えば導来 McKay 対応 [KV, BKR] の文脈でそのような例が現れる。) さらに自己準同型環 $\mathrm{End}_R(M)$ が NCCR となる加群 M は団傾部分圏、高次元 Auslander-Reiten 理論といった概念と深く関連する重要な対象である ([Iya, IR] などを参照)。しかし、通常のクレパント特異点解消と同様に、与えられた特異点がいつでも NCCR を持つとは限らない。よって、与えられた特異点に対して NCCR が存在するか、存在する場合に NCCR をどう構成するかは重要な問題である。本稿で扱うトーリック環に関しては、以下の場合に NCCR の存在が知られている。

- R が有限アーベル群 $G \subset \mathrm{SL}(d,\mathbb{C})$ に付随する商特異点であるとき [VdB2, IW]。
- トーリック環 R が Gorenstein で因子類群 $\mathrm{Cl}(R)$ が $\mathbb{Z}$ であるとき [VdB2]。
- トーリック環 R が 3 次元 Gorenstein であるとき [Bro, IU]。この場合 NCCR はダイマー模型と呼ばれるトーラス上に描かれた二部グラフの情報を用いることにより構成できる。(ダイマー模型を用いない構成法は [ŠpVdB3] を参照。)

トーリック環が 4 次元以上の場合でも、R を定義するトーラスの作用がある種の "良い性質" を満たすとき、NCCR が存在することが知られている (詳しくは [ŠpVdB1, ŠpVdB2] を参照)。しかし、任意のトーリック環が NCCR を持つか否かは未解決である。一方で、定理 1.2(2) から任意のトーリック環が非可換特異点解消を持つことはわかる。そこで、定理 1.2(2) に現れた $\mathrm{End}_R(R^{1/m})$ が NCCR になっていないか?という疑問が浮かぶが、一般にこれは NCCR とならない。つまり、自己準同型環が極大 CM 加群になるという定義 1.3(b) の条件が、$\mathrm{End}_R(R^{1/m})$ に対しては成り立たない。ただし、R が有限アーベル群 $G \subset \mathrm{SL}(d,\mathbb{C})$ に付随する商特異点なら $\mathrm{End}_R(R^{1/m})$ は NCCR になる。

以上のように conic 加群は正標数の可換環論や非可換 (クレパント) 特異点解消と深い関連のある対象である。もし conic 加群の具体的な表示や特徴付けを与えることができれば、上記の分野をより深く理解するための手助けとなるが、その特徴付けは一般には難しい。そこで本稿では日比環と呼ばれる半順序集合から定まるトーリック環に対して、この conic 加群を考察していく。

2. 準備

2.1. **トーリック環の因子的イデアルについて.**

本稿の目的のひとつは、日比環の conic 加群と呼ばれる因子的イデアルを理解することである。そこで、まず始めにトーリック環の因子的イデアルについての基本事項を復習しておく。$R = \Bbbk[\tau^\vee \cap \mathsf{M}]$ を前章で定義した錐 $\tau = \mathrm{Cone}(v_1, \cdots, v_n) \subset \mathsf{N}_\mathbb{R}$ に付随するトーリック環とする。前述のように R の因子的イデアルは $T(\mathbf{a})$ という形で書き表すことができる。R 双対を $(-)^* := \mathrm{Hom}_R(-, R)$ と書くことにすると、これら因子的イデアルは演算 $T(\mathbf{a}) \cdot T(\mathbf{b}) := (T(\mathbf{a}) \otimes T(\mathbf{b}))^{**} \cong T(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ によって群をなす。その群を R の**因子類群**と呼び、$\mathrm{Cl}(R)$ と書くことにする。$\mathrm{Cl}(R)$ を考察する際に次の完全列は基本的である (例えば [BG2, Corollary 4.56] を参照)。

$$0 \to \mathsf{M} = \mathbb{Z}^d \xrightarrow{\sigma(-)} \mathbb{Z}^n \to \mathrm{Cl}(R) \to 0 \tag{2.1}$$

従って、この完全列から $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathbb{Z}^n$ に対して、$T(\mathbf{a}) \cong T(\mathbf{a}')$ となるための必要十分条件は、すべての $i = 1, \cdots, n$ に対して $a_i = a'_i + \sigma_i(\mathbf{y})$ となる $\mathbf{y} \in \mathsf{M}$ が存在することである。また、$\mathfrak{p}_i := T(\delta_{i1}, \cdots, \delta_{in})$ とおくことにすると (ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタ)、$\mathfrak{p}_i$ は高さ 1 の素イデアルであり、素因子 $\mathcal{D}_i := \mathrm{V}(\mathfrak{p}_i) = \mathrm{Spec}\, R/\mathfrak{p}_i$ を定める。このとき因子的イデアル $T(\mathbf{a}) = T(a_1, \cdots, a_n)$ は Weil 因子 $-(a_1\mathcal{D}_1 + \cdots + a_n\mathcal{D}_n)$ に対応する。さらに完全列 (2.1) から次の関係式を得ることができる。

$$v_1\mathcal{D}_1 + \cdots + v_n\mathcal{D}_n = 0. \tag{2.2}$$

定義 1.1で見たように、$T(\mathbf{a})$ が conic 加群であるならば $\mathbf{x} \in \mathsf{M}_\mathbb{R}$ が存在して $\mathbf{a} = \ulcorner \sigma(\mathbf{x}) \urcorner$ となる。また、$\mathbf{y} \in \mathsf{M}$ に対して $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ とおけば、上記の考察より $T(\sigma(\mathbf{x}')) \cong T(\sigma(\mathbf{x}))$ を得る。すなわち conic 加群を考察するためには $\mathsf{M}_\mathbb{R}/\mathsf{M}$ の元を考えれば十分であり、特に次の補題が成立する。

補題 2.1 ([Bru, Corollary 1.2])**.** *Conic* 加群 $T(a_1, \cdots, a_n)$ は超平面 $H_{i,m} = \{\mathbf{x} \in \mathsf{M}_\mathbb{R} \mid \sigma_i(\mathbf{x}) = m\}$ $(m \in \mathbb{Z},\, i = 1, \cdots, n)$ によって $(-1, 0]^d$ を分割した際にできる d 次元のセルと 1 対 1 に対応する。ただし、この対応は $L_{i,a_i} = \{\mathbf{x} \in \mathsf{M}_\mathbb{R} \mid a_i - 1 < \sigma_i(\mathbf{x}) \le a_i\}$ とおいたとき、セル $\bigcap_{i=1}^n L_{i,a_i}$ を $T(a_1, \cdots, a_n)$ に対応させることにより得られる。

2.2. **日比環の構成.**

本稿では特に、日比環と呼ばれる特別なトーリック環に注目する。この日比環は論文 [Hib] において考察された対象であり、半順序集合を用いて以下のように定義される。

$P = \{p_1, \cdots, p_{d-1}\}$ を有限半順序集合とする。(以下、半順序集合と言えば有限なものを意味することとする。) このとき $p_i, p_j \in P$ に対して $p_j \prec p_i$ かつ $p_j \prec p' \prec p_i$ をみたす $p' \in P$ が存

在しない時、p_i は p_j を**支配** (*cover*) するという。次に P に含まれていない二つの元 $\widehat{0}, \widehat{1}$ を加えた $\widehat{P} := P \cup \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$ を考える。ただし、$\widehat{0}$ は P の順序 $\prec$ に関して任意の P の元より小さな元、$\widehat{1}$ は任意の P の元より大きな元とする。また、$p_0 = \widehat{0}, p_d = \widehat{1}$ と書くこともある。この半順序集合 $\widehat{P}$ に対し、$\{p_0, p_1, \cdots, p_d\}$ を頂点集合とし、p_i が p_j を支配するとき p_i と p_j を辺でつなぐことによってできるグラフを $\widehat{P}$ のハッセ図 $\mathcal{H}(\widehat{P})$ と呼ぶ。p_i と p_j が辺でつながっているとき、その辺を $\{p_i, p_j\}$ と書くこともある。

次に、ハッセ図 $\mathcal{H}(\widehat{P})$ における辺の集合を $\{e_1, \cdots, e_n\}$ とおき、以下のように $d \times n$ 行列 $H = (h_{p_i e_j})_{\substack{0 \le i \le d-1 \\ 1 \le j \le n}}$ を定義する。(行列 H の定義においては、最大元 p_d を考えていないことに注意する。)

$$h_{p_i e_j} = \begin{cases} 1 & p_i \text{ が辺 } e_j \text{ の下側の端点のとき} \\ -1 & p_i \text{ が辺 } e_j \text{ の上側の端点のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

行列 H の i 番目の列ベクトルを $v_i \in \mathbb{Z}^d$ $(i = 1, \cdots, n)$ とおき、これらの列ベクトルが生成する錐 $\tau_P := \mathrm{Cone}\{v_1, \cdots, v_n\}$ を定義する。$\sigma_i(-) := \langle -, v_i \rangle$ とおけば、錐 τ_P の双対は

$$\tau_P^\vee := \{\mathbf{x} \in \mathsf{M}_\mathbb{R} \mid \sigma_i(\mathbf{x}) \ge 0 \text{ for any } i = 1, \cdots, n\}$$

であり、トーリック環

$$R = \Bbbk[\tau_P^\vee \cap \mathsf{M}] = \Bbbk[t_1^{x_1} \cdots t_d^{x_d} \mid (x_1, \cdots, x_d) \in \tau_P^\vee \cap \mathsf{M}]$$

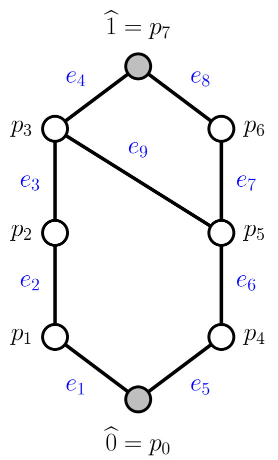
を定義することができる。上記のように半順序集合 P から構成されたトーリック環 R を P に付随する**日比環**と呼ぶ。

注意 2.2. 元々の論文 [Hib] では、半順序集合 P から構成した分配束 $I(P)$ を用いて定義される多項式環の商

$$\Bbbk[P] = \Bbbk[X_\alpha \mid \alpha \in I(P)] \big/ \langle X_\alpha X_\beta - X_{\alpha \cup \beta} X_{\alpha \cap \beta} \mid \alpha \not\sim \beta \rangle$$

を扱っており、この形の環を日比環として導入している文献も多くある。本稿で用いる $R = \Bbbk[\tau_P^\vee \cap \mathsf{M}]$ はこの $\Bbbk[P]$ と同型となるため、これを日比環と呼んでいる。以下で見るように、錐 τ_P を用いた構成の方が因子的イデアルと相性が良く、特に P (及び $\mathcal{H}(\widehat{P})$) の情報から日比環の因子類群を理解することができる (定理 2.4)。

例 2.3. 半順序集合 $P = \{p_1 \prec p_2 \prec p_3, p_5 \prec p_3, p_4 \prec p_5 \prec p_6\}$ に関して、ハッセ図 $\mathcal{H}(\widehat{P})$ および付随する行列 H は以下のようになる。



$$\begin{array}{c} \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0
\end{array}\right] \end{array}$$

このとき、上記の行列の列ベクトル ($v_1 = {}^t(1, -1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $v_2 = {}^t(0, 1, -1, 0, 0, 0, 0)$ など) から生成される錐が τ_P である。

ここで日比環 R の持つ基本的な性質をまとめておく (詳細は [Hib] などを参照)。

- $\dim R = |P| + 1 = d$
- R は CM 整閉整域
- R が Gorenstein となる必要十分条件は P が**純** (*pure*) であること。ここで半順序集合 P が純であるとは、P における任意の極大鎖 $p_{i_1} \prec \cdots \prec p_{i_\ell}$ が同じ長さを持つときにいう。

日比環 R の因子類群 $\mathrm{Cl}(R)$ について考察するために、いくつかの用語を準備する。ハッセ図 $\mathcal{H}(\widehat{P})$ における頂点の列 $C = (p_{k_1}, \cdots, p_{k_m})$ について、$p_{k_i} \neq p_{k_j}$ $(1 \leq i \neq j \leq m)$, $p_{k_{m+1}} = p_{k_1}$ かつ、$\{p_{k_i}, p_{k_{i+1}}\}$ が $\mathcal{H}(\widehat{P})$ の辺であるとき、C を $\widehat{P}$ の (あるいは $\mathcal{H}(\widehat{P})$ の) **サイクル**という。次に全域木の概念を導入する。$\mathcal{H}(\widehat{P})$ の辺集合 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ の部分集合 $\{e_{i_1}, \cdots, e_{i_d}\}$ は、以下の条件を満たすとき**全域木** (*spanning tree*) であるという。

- 任意の $\widehat{P} = \{p_0, p_1, \cdots, p_d\}$ の元はある辺 e_{i_j} の端点となる。
- $\{e_{i_1}, \cdots, e_{i_d}\}$ はサイクルを成さない。

例えば、例 2.3において部分集合 $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ をとると、これは全域木となっている。しかし、一般には全域木の選び方は一意的ではない。

これらの用語を使って日比環 R の因子類群を考察する。まず、錐 τ_P の定義から各素因子は $\mathcal{H}(\widehat{P})$ の辺と 1 対 1 に対応する。辺 e に対応する素因子を $\mathcal{D}_e$ と書くことにすると、$\sigma(-)$ の定義と、関係式 (2.2) から

$$\sum_{q \in U(p)} \mathcal{D}_{\{q,p\}} = \sum_{q' \in D(p)} \mathcal{D}_{\{p,q'\}} \text{ for } p \in \widehat{P} \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}, \qquad \sum_{q \in U(\hat{0})} \mathcal{D}_{\{q,p_0\}} = 0. \tag{2.3}$$

を得る。ただし、$U(p)$ は $p \in \widehat{P} \setminus \{\hat{1}\}$ を支配する $\widehat{P}$ の元の集合とする。また、$D(p)$ を $p \in \widehat{P} \setminus \{\hat{0}\}$ によって支配される $\widehat{P}$ の元の集合とする。

このとき次の定理が成立する。

定理 2.4 ([HHN])**.** R を半順序集合 P に付随する日比環とする。このとき $\mathrm{Cl}(R) \cong \mathbb{Z}^{n-d}$ を得る。ここで、n は $\mathcal{H}(\widehat{P})$ の辺の数であり、$d+1$ は $\mathcal{H}(\widehat{P})$ の頂点の数である。

特に、$\{e_1, \cdots, e_d\}$ を全域木とし、$e_{d+1}, \cdots, e_n$ を全域木に含まれない辺とすると、素因子 $\mathcal{D}_{e_{d+1}}, \cdots, \mathcal{D}_{e_n}$ が $\mathrm{Cl}(R)$ の生成元となる。

例 2.5. 例 2.3の半順序集合 P に付随する日比環 R を考える。特に $\widehat{P}$ の全域木として $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ を固定する。このとき辺 e_8, e_9 は全域木に含まれないため、定理 2.4より対応する因子 $\mathcal{D}_{e_8}, \mathcal{D}_{e_9}$ が $\mathrm{Cl}(R)$ を生成し、とくに $\mathrm{Cl}(R) = \langle \mathcal{D}_{e_8}, \mathcal{D}_{e_9} \rangle \cong \mathbb{Z}^2$ である。また、関係式 (2.3) を用いると

$$\mathcal{D}_{e_1} = \mathcal{D}_{e_2} = \mathcal{D}_{e_3} = -\mathcal{D}_{e_8} - \mathcal{D}_{e_9}, \quad \mathcal{D}_{e_4} = -\mathcal{D}_{e_7} = -\mathcal{D}_{e_8} \quad \mathcal{D}_{e_5} = \mathcal{D}_{e_6} = \mathcal{D}_{e_8} + \mathcal{D}_{e_9}$$

を得る。

3. 日比環の Conic 加群について

定理 2.4で見たように、日比環の因子類群は $\mathrm{Cl}(R) \cong \mathbb{Z}^{n-d}$ である。本節では、どの $\mathrm{Cl}(R)$ の元が conic 加群に対応するかを見ていく。鍵となるのは補題 2.1である。日比環の構成から $\mathcal{H}(\widehat{P})$ の辺 e_i は錐 τ_P を生成する列ベクトル v_i と 1 対 1 に対応し、この v_i から線形形式 $\sigma_i(-) = \langle -, v_i \rangle$ が定まる。このことから補題 2.1に現れる超平面 $H_{i,m}$ を $\mathcal{H}(\widehat{P})$ を用いて理解することができる。特に本節では、日比環の conic 加群がハッセ図 $\mathcal{H}(\widehat{P})$ の言葉を用いて特徴付けられることを示す (定理 3.2)。定理の詳細な証明は [HN] に譲ることにし、本稿では例 2.3の半順序集合を用いて、証明の鍵となるアイディアを紹介する。

例 3.1. P を例 2.3の半順序集合とする。このとき、$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ は全域木となる。よって、$\mathrm{Cl}(R) = \langle \mathcal{D}_{e_8}, \mathcal{D}_{e_9} \rangle \cong \mathbb{Z}^2$ を得る (例 2.5を参照)。以下、この $\mathrm{Cl}(R) \cong \mathbb{Z}^2$ の元で conic となるものを求める。補題 2.1から、超平面 $H_{i,m} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^7 \mid \sigma_i(\mathbf{x}) = m\}$ $(m \in \mathbb{Z}, i = 1, \cdots, 9)$ による $(-1, 0]^7$ の分割を考えれば、その分割により得られる 7 次元のセルが conic 加群と 1 対 1 に対応す

る。しかし、複数の超平面の様子を同時に考察する必要があるため、その分割は非常に複雑である。そこで

$$\phi : \mathsf{M}_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7 \ (\mathbf{x} = (x_0, \cdots, x_6) \mapsto (\sigma_1(\mathbf{x}), \cdots, \sigma_7(\mathbf{x})) =: (X_1, \cdots, X_7))$$

という線形変換を考える。この変換はユニモジュラー変換である (すなわち ϕ の表現行列が $\mathrm{GL}(7, \mathbb{Z})$ に含まれる)。線形変換 ϕ を施したあとの座標系で定義されるトーリック環を R' とすると、ϕ がユニモジュラー変換であるときは $R \cong R'$ となることがわかる。変換後の座標系を用いて補題 2.1を考えると、超平面 $\sigma_i(\mathbf{x}) = m$ は $X_i = m$ に変換されており、この形の超平面は $(-1, 0]^7$ の境界に乗っているため内部を分割しない。よって、以上の考察から $(-1, 0]^7$ の超平面による分割は、R' で考えたほうが簡明である。上記のように全域木に対応する辺を標準基底に移す線形変換を考えた時、それがユニモジュラー変換となることが日比環の大きな特徴である。

そこで以下では変換 ϕ を施した後の超平面を用いて、$(-1, 0]^7$ の分割を考えていく。前述のように $i = 1, \cdots, 7$ に対して超平面 $X_i = -1, 0$ は $(-1, 0]^7$ の境界に乗っているため、conic 加群を求めるためには、残りの $\sigma_8(\mathbf{x}), \sigma_9(\mathbf{x})$ を変換した後の超平面を考えれば良い。ここで

$$X_8 := \sigma_8(\mathbf{x}) = x_6, \quad X_9 := \sigma_9(\mathbf{x}) = x_5 - x_3$$

とおき、超平面 $X_8 = m_8, X_9 = m_9$ $(m_8, m_9 \in \mathbb{Z})$ による $(-1, 0]^7$ の分割を考察していく。(X_8, X_9 は $X_1, \cdots, X_7$ を用いて表記することができるが、詳しくは後述する。) 特に、補題 2.1から、その分割において

$$a - 1 < X_8 \le a \quad \text{and} \quad b - 1 < X_9 \le b$$

を満たす $(-1, 0]^7$ の 7 次元のセルが conic 加群 $T(0, \cdots, 0, a, b)$ に対応する。

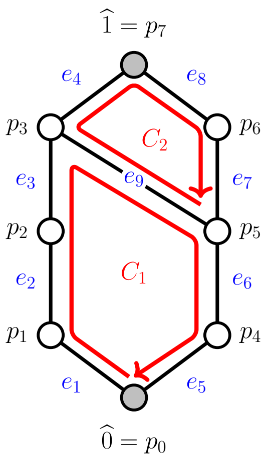
次に、$T(0, \cdots, 0, a, b)$ が conic 加群であるとき、$(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ の取り得る値を調べていく。(a, b) が conic 加群を定めると仮定すると、$a - 1 < X_8 \le a$, $b - 1 < X_9 \le b$ をみたすセルが存在する。ここで $\mathcal{H}(\widehat{P})$ 上のサイクル $C_1 = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_5, p_4\}$ を考える。日比環に付随する錐 τ_P の定義から

$$\sigma_1(\mathbf{x}) + \sigma_2(\mathbf{x}) + \sigma_3(\mathbf{x}) - \sigma_5(\mathbf{x}) - \sigma_6(\mathbf{x}) - \sigma_9(\mathbf{x}) = 0$$

が成立するので、特に次の関係式を得る。

$$X_9 = X_1 + X_2 + X_3 - X_5 - X_6$$

考えているセルにおいては $-1 < X_i \le 0$ $(i = 1, \cdots, 7)$ なので、上記の式と合わせて $-3 < X_9 < 2$ を得る。また、$b - 1 < X_9 \le b$ であることから、$-2 \le b \le 2$ である。



サイクル $C_2 = \{p_5, p_3, p_7, p_6\}$ に対しても、同様の議論をすることにより $X_8 = X_4 + X_9 - X_7$ を得る。また、$-1 < X_i \le 0$ $(i = 1, \cdots, 7)$, $b - 1 < X_9 \le b$ なので $b - 2 < X_8 < b - 1$ が成立し、$a - 1 < X_8 \le a$ と合わせて $-1 \le a - b \le 1$ を得る。

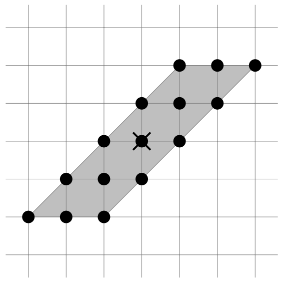
以上の議論により不等式

$$-2 \le b \le 2, \quad -1 \le a - b \le 1 \tag{3.1}$$

を得ることができた。$\mathcal{H}(\widehat{P})$ 上にはもうひとつのサイクル $C_3 = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_7, p_6, p_5, p_4\}$ が存在するが、このサイクルから同様の議論で得られる不等式が定める領域は、(3.1) により定まる領域よりも大きいため、conic 加群を考える際には無視してもかまわない。

よって $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ が conic 加群に対応するならば、不等式 (3.1) を満たすことがわかった。また逆に、これらの不等式をみたす (a, b) は conic 加群を定めることも示すことができる。

以上より、Conic 加群を定める $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ は下記のように表示することができる。ただし $\times$ 印は原点を表す。



以上の考察は一般の日比環に対しても適用でき、特に下記の定理が成立する。

定理 3.2 ([HN, Theorem 2.4])**.** R を半順序集合 P に付随する日比環とする。$\{e_1, \cdots, e_d, e_{d+1}, \cdots, e_n\}$ をハッセ図 $\mathcal{H}(\widehat{P})$ の辺集合とし、$\mathcal{H}(\widehat{P})$ の頂点の個数を $d + 1$ とする。(このとき $\dim R = d$ であり、定理 *2.4*から $\mathrm{Cl}(R) \cong \mathbb{Z}^{n-d}$ を得る。) また、$\{e_1, \cdots, e_d\}$ を全域木として固定する。サイクル $C = (p_{k_1}, \cdots, p_{k_m})$ に対して、以下のような C に含まれる辺の部分集合を定義する。

$$X_C^+ = \{\{p_{k_i}, p_{k_{i+1}}\} \mid 1 \le i \le m,\ p_{k_i} \prec p_{k_{i+1}}\},$$
$$X_C^- = \{\{p_{k_i}, p_{k_{i+1}}\} \mid 1 \le i \le m,\ p_{k_{i+1}} \prec p_{k_i}\},$$
$$Y_C^\pm = X_C^\pm \cap \{e_{d+1}, \cdots, e_n\}.$$

さらに、

$$\mathcal{C}(P) = \left\{(y_1, \cdots, y_{n-d}) \in \mathrm{Cl}(R) \mid -|X_C^-| + 1 \le \sum_{e_{d+\ell} \in Y_C^+} y_\ell - \sum_{e_{d+\ell'} \in Y_C^-} y_{\ell'} \le |X_C^+| - 1\right\}$$

とおく。ただし、$\mathcal{H}(\widehat{P})$ 上のすべてのサイクル C に対して上記の不等式を考えていることとする。

このとき、因子的イデアル $T(0, \cdots, 0, a_1, \cdots, a_{n-d})$ が *conic* であるための必要十分条件は、$(a_1, \cdots, a_{n-d}) \in \mathcal{C}(P)$ である。

注意 3.3. 定理 3.2における $\mathcal{C}(P)$ は**サーキット** (*circuit*) という概念を用いて、より精密化できるが、ここでは省略する。詳しくは [HN] を参照頂きたい。

4. 多項式環の Segre 積の非可換クレパント特異点解消

前章の定理 3.2では日比環の conic 加群の特徴付けを付随する半順序集合 P を用いて与えた。この定理と定理 1.2(2) を合わせることにより次を得る。

系 4.1. 定理 *3.2*と同じ記号を用いることとする。このとき自己準同型環

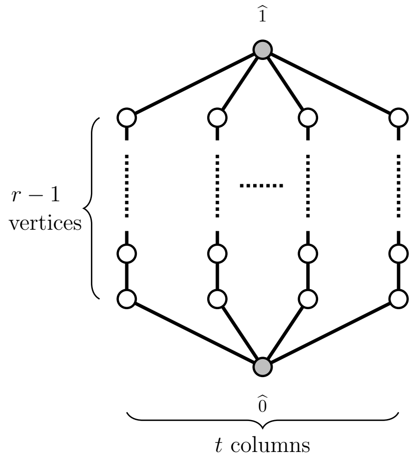
$$\mathrm{End}_R\Big(\bigoplus_{(a_1, \cdots, a_{n-d}) \in \mathcal{C}(P)} T(0, \cdots, 0, a_1, \cdots, a_{n-d})\Big)$$

の大域次元は有限である。すなわちこれは R の非可換特異点解消である。

ここで、M, N を conic 加群とすると、これらは極大 CM 加群であるが、一般に $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ が極大 CM 加群になるとは限らない。よって、上記の自己準同型環も極大 CM R 加群になるとは限らず、特に NCCR ではない。このようにすべての conic 加群の直和を考えると、その自己準同型環は一般に極大 CM 加群とならないため、余分な conic 加群を除くことで、大域次元が有限かつ

極大 CM 加群となる自己準同型環を構成できないかを考える。(実際、[ŠpVdB1] では conic 加群の一部分を用いることにより、特別な高次元トーリック環の NCCR を構成している。) 定理 3.2では日比環の conic 加群の具体的な表示を与えているため、$\mathrm{Hom}_R(M,N)$ がいつ極大 CM 加群になるかを詳しく調べることができ、特に下記の日比環に対して NCCR を構成することができる。

以下、P をハッセ図が下記の形となる半順序集合とし、R を P に付随する日比環とする。



このとき R は t 個の多項式環の Segre 積 $S_1\#\cdots\#S_t$ と同型となる (ただし S_i は r 変数の多項式環)。特に R は次元 $t(r-1)+1$ の Gorenstein 環で、$\mathrm{Cl}(R)\cong\mathbb{Z}^{t-1}$ となる。また、定理 3.2から

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(P)=\{(c_1,\cdots,c_{t-1})\in\mathrm{Cl}(R)\mid &-(r-1)\le c_i\le r-1 \text{ for } 1\le i\le t-1,\\ &-(r-1)\le c_i-c_j\le r-1 \text{ for } 1\le i<j\le t-1\}\end{aligned}$$

が成立する。

定理 4.2 ([HN, Theorem 3.6]). *R を上記の日比環 $R\cong S_1\#\cdots\#S_t$ とし、*

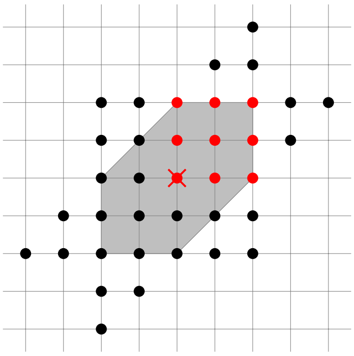
$$\mathcal{L}:=\{\mathbf{c}=(c_1,\cdots,c_{t-1})\in\mathcal{C}(P)\mid 0\le c_i\le r-1 \textit{ for } \ i=1,\cdots,t-1\}$$

とおく。このとき $M_{\mathcal{L}}:=\bigoplus_{\mathbf{c}\in\mathcal{L}}T(0,\cdots,0,\mathbf{c})$ の自己準同型環 $\mathrm{End}_R(M_{\mathcal{L}})$ は R の NCCR である。

注意 4.3. 上記の定理において $t=2$ であるとき、R は行列式環として表すこともできる。また特に $r=t=2$ であるならば、R は 3 次元の A_1 特異点 $\Bbbk[X,Y,Z,W]/(XW-YZ)$ と同型となる。行列式環の NCCR はすでに [BLVdB] において構成されているため、$t=2$ の場合には定理 4.2は [BLVdB] の結果に含まれる。

上記の定理を証明するためには $\mathrm{End}_R(M_{\mathcal{L}})$ の大域次元が有限であることと、$\mathrm{End}_R(M_{\mathcal{L}})$ が R 加群として極大 CM であることを示す必要があるが、大域次元の有限性は [ŠpVdB1, Section 10, 11] と類似の手法を用いて示すことができる。また極大 CM R 加群であることは局所コホモロジーの消滅を調べることにより成される。詳しくは [HN, Section 3] を参照頂きたい。定理 4.2は NCCR を与える加群をひとつ与えただけであるが、その加群 $M_{\mathcal{L}}$ に "変異" という操作を施すことにより、NCCR を与えるその他の加群を次々と構成していくことができる。

例 4.4. 定理 4.2において $r=3,t=3$ の場合を考える。すなわち R は 3 変数多項式環 3 つの Segre 積であり、$\mathrm{Cl}(R)\cong\mathbb{Z}^2$ である。下記の図において $\times$ 印は原点 $(0,0)$ を表すものとする。定理 3.2を用いると灰色で塗られた部分に含まれているドットが conic 加群に対応することがわかる。また、灰色の部分に含まれていないドットは、階数 1 の極大 CM 加群だが conic ではないものを表している。



このとき、定理 4.2から、赤色のドットに対応する conic 加群の直和 $M_{\mathcal{L}}$ を考えると、$\mathrm{End}_R(M_{\mathcal{L}})$ が R の NCCR となる。また、この加群 $M_{\mathcal{L}}$ を変異していくことによって、NCCR を与える他の加群を得ることができる。例えば、$M_{\mathcal{L}}$ から $(2,2)$ に対応する加群を取り除いて、代わりに $(-1,-1)$ に対応する加群を直和したものを M' とすれば、$\mathrm{End}_R(M')$ も R の NCCR となる。

また定理 4.2で扱った以外の日比環でも、それが Gorenstein かつ因子類群が $\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{Z}^2$ であれば NCCR を構成することができる [Nak]。(日比環の因子類群は自由アーベル群であるため、注意 1.4で述べたように、日比環が Gorenstein でない場合には NCCR は存在しない。)

謝辞. 代数学シンポジウムにおける講演の機会を下さった世話人の皆様に感謝いたします。また、講演準備及び本稿の執筆において共同研究者の東谷章弘氏に多くの助言を頂きました。この場を借りて御礼申し上げます。

References

[Bae] C. Baeţica, *Cohen-Macaulay classes which are not conic*, Comm. Alg., **32** (2004), 1183–1188.
[Bri] T. Bridgeland, *Flops and derived categories*, Invent. Math. **147** (2002), no. 3, 613–632.
[BKR] T. Bridgeland, A. King and M. Reid, *The McKay correspondence as an equivalence of derived categories*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 3, 535–554.
[Bro] N. Broomhead, *Dimer model and Calabi-Yau algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., **215** no. 1011, (2012).
[Bru] W. Bruns, *Conic divisor classes over a normal monoid algebra*, Commutative algebra and algebraic geometry, Contemp. Math., **390**, Amer. Math. Soc., (2005), 63-71.
[BG1] W. Bruns and J. Gubeladze, *Divisorial linear algebra of normal semigroup rings*, Algebra and Represent. Theory, **6** (2003), 139-168.
[BG2] W. Bruns and J. Gubeladze, *Polytopes, rings and K-theory*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Dordrecht, (2009).
[BLVdB] R.-O. Buchweitz, G. J. Leuschke, and M. Van den Bergh, *Non-commutative desingularization of determinantal varieties II: arbitrary minors*, Int. Math. Res. Not. IMRN **9**, 2748–2812 (2016).
[DITV] H. Dao, O. Iyama, R. Takahashi and C. Vial, *Non-commutative resolutions and Grothendieck groups*, J. Noncommut. Geom., **9** (2015) no. 1, 21–34.
[DITW] H. Dao, O. Iyama, R. Takahashi and M. Wemyss, *Gorenstein modifications and $\mathbb{Q}$-Gorenstein rings*, arXiv:1611.04137.
[Don] X. Dong, *Canonical modules of semigroup rings and a conjecture of Reiner*, Discrete Comput. Geom. **27** (2002), 85–97.
[HHN] M. Hashimoto, T. Hibi and A. Noma, *Divisor class groups of affine semigroup rings associated with distributive lattices*, J. Algebra **149** (1992), no. 2, 352–357.
[Hib] T. Hibi, *Distributive lattices, affine semigroup rings and algebras with straightening laws*, In:"Commutative Algebra and Combinatorics" (M. Nagata and H. Matsumura, Eds.), Adv. Stud. *Pure Math.* **11**, North–Holland, Amsterdam, (1987), 93–109.
[HN] A. Higashitani and Y. Nakajima, *Conic divisorial ideals of Hibi rings and their applications to non-commutative crepant resolutions*, arXiv:1702.07058.
[IU] A. Ishii and K. Ueda, *Dimer models and the special McKay correspondence*, Geom. Topol. **19** (2015) 3405–3466.
[Iya] O. Iyama, *Auslander correspondence*, Adv. Math. **210** (2007), no. 1, 51–82.

[IR] O. Iyama and I. Reiten, *Fomin-Zelevinsky mutation and tilting modules over Calabi-Yau algebras*, Amer. J. Math. **130** (2008), no. 4, 1087–1149.

[IW] O. Iyama, M. Wemyss, *Maximal modifications and Auslander-Reiten duality for non-isolated singularities*, Invent. Math. **197** (2014), no. 3, 521–586.

[KV] M. Kapranov and E. Vasserot, *Kleinian singularities, derived categories and Hall algebras*, Math. Ann. 316 (2000), no. 3, 565–576.

[Nak] Y. Nakajima, *Non-commutative crepant resolutions of Hibi rings with small class group*, in preparation.

[SmVdB] K. E. Smith and M. Van den Bergh, *Simplicity of rings of differential operators in prime characteristic*, Proc. London Math. Soc. (3) **75** (1997), no. 1, 32–62.

[ŠpVdB1] Š. Špenko and M. Van den Bergh, *Non-commutative resolutions of quotient singularities for reductive groups*, Invent. Math. **210** (2017), no. 1, 3–67.

[ŠpVdB2] Š. Špenko and M. Van den Bergh, *Non-commutative crepant resolutions for some toric singularities I*, arXiv:1701.05255.

[ŠpVdB3] Š. Špenko and M. Van den Bergh, *Non-commutative crepant resolutions for some toric singularities II*, arXiv:1707.08245.

[Sta] R. P. Stanley, *Linear Diophantine equations and local cohomology*, Invent. Math. **68** (1982), no. 2, 175–193.

[VdB1] M. Van den Bergh, *Cohen-Macaulayness of semi-invariants for tori*, Trans. Amer. Math. Soc. **336** (1993), no. 2, 557–580.

[VdB2] M. Van den Bergh, *Non-Commutative Crepant Resolutions*, The Legacy of Niels Henrik Abel, Springer-Verlag, Berlin, (2004), 749–770.

〒 277-8583 千葉県柏市柏の葉 5-1-5 東京大学 国際高等研究所 カブリ数物連携宇宙研究機構
E-mail address: `yusuke.nakajima@ipmu.jp`