休眠乍の l 進コホモロジー的場の理論

若林泰央[1]（東京大学数理科学研究科）
Yasuhiro Wakabayashi (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概 要

休眠乍（dormant oper, do'per）とは, 正標数体上定義された代数曲線上の然るべき接続付き主束であり, 特別な場合は（代数的）解を最大限に多く持つ然るべき線型常微分方程式に対応するものである. 本稿では, 論文 [23] にて展開された「休眠乍の数え上げ幾何学」に関連する話題を取り上げる. 半単純代数群 G に対して, 点付き捻れ安定曲線上の「休眠忠実捻れ G 乍」なる概念を導入し, これらを分類することにより休眠 G 乍のモジュライをコンパクト化する. これは G が随伴型の場合を扱った先行研究の拡張といえる. このコンパクトモジュライ上の仮想基本類を用いたコホモロジー的場の理論（CohFT）の構成およびその帰結として得られる Witten 予想の類似を紹介する.

1　はじめに: 素敵♪な微分方程式

本稿は第 62 回 代数学シンポジウムで行った筆者自身による講演内容に基づき,「休眠乍の数え上げ幾何学」に関連する話題と諸結果について紹介したい. 主には論文 [23] で論じた次の結果を紹介する:

1. 休眠乍を分類する（仮想基本類をもつ）コンパクトモジュライの構成;
2. 休眠乍によるコホモロジー的場の理論の構成;
3. Witten 予想の「休眠乍」類似.

ところで休眠乍とはいったい何だろうか. 休眠乍の定義に触れる前に, まずは関連する素朴な数学的対象について議論することから始めよう. X を複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義された連結, 非特異, そして固有な代数曲線（あるいは連結かつコンパクトな Riemann 面）とし, K をその関数体とする. いま, 高々有限個の点で確定特異点を持つ X 上のモニックな n (> 1) 階斉次線型常微分方程式について考えよう:

$$Dy = 0, \qquad D := \frac{d^n}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + q_{n-1}\frac{d}{dx} + q_n. \tag{1}$$

ただし, 上記の D において $q_1, \cdots, q_n \in K$ であり, x は X の局所座標とする. 常微分方程式の基礎理論が私たちに教えてくれることを思い出そう. それは, このような微分方程式 $Dy = 0$ の解は解析的位相に関して局所的に $\mathbb{C}$ 上の n 次元ベクトル空間をなす, ということである.「$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間をなす」ことだけなら確かめるのは容易い. 実際, 解空間が加法で閉じていることは斉次性から従い, そして $\mathbb{C}$ によるスカラー乗法で閉じていることは微分作用素 $\frac{d}{dx}$ の核（あるいは普遍導分 d の核）が定数 $\mathbb{C}$ と一致することから従う. 局所的に与えられる解たちは（もちろん）一般には解析的な関数によって表されるものであるから, 解が（然るべき意味で）代数的になるような事態は非常に特別である[2]. このような微分方程式は, 言い方を変えるならば, 代数解からなる部分ベクトル空間の次元が, とり得る最大の値, すなわち n となるようなものである. このように解が全て代数的な線型微分方程式に関する研究は 1870 年代に始まり, 多くの数学者達（H. A. Schwarz, L. I. Fuchs, P. Gordan, C. F. Klein, C. Jordan, et al.）によって進められてきた. この話題についてはここでは詳しく説明しない. 私たちが本稿の導入にて本当に取り上げたい対象とは, このような微分方程式ではなく, その「**正標数類似物**」である.

ということで, まずは k を標数 $p > n$ の代数閉体とし, 前出の X を（$\mathbb{C}$ 上ではなく）k 上定義された連結, 非特異, そして固有な代数曲線に置き換えて再び (1) のような微分方程式 $Dy = 0$ を考えよう. X の種数を g (≥ 0) とし, $Dy = 0$ の確定特異点は $\sigma_1, \cdots, \sigma_r \in X(k)$ $(r \geq 0)$ の上にあるとす

[1] wkbysh@ms.u-tokyo.ac.jp

[2] 代数学シンポジウムに集まるような私たちにとっては, もはやこのような微分方程式は「良い」,「素敵な」方程式であると言い切ってしまいたい!

る．このとき, $X^\bigstar := (X, \{\sigma_i\}_{i=1}^r)$ を (g,r) 型の点付き代数曲線とみなし, この状況のもとで微分方程式 $Dy=0$ は「$X^\bigstar$ 上定義された微分方程式」と呼ぶことにする．ところで, $\mathbb{C}$ 上で考える微分方程式 $Dy=0$ と正標数体上でのそれとの基本的な違いは何だろうか. それは, 正標数の場合の解空間は, 関数体 K の元の p 冪全体のなす部分体 K^p (結構デカい！) を係数とするベクトル空間として見るべきものである, ということであろう．というのも, $\frac{dx^p}{dx} = px^{p-1} = 0$ からも分かるように, K における普遍導分 $d: K \to \Omega_{K/k}$ の核は K^p であるために, 解空間は（k のみならず）K^p によるスカラー乗法で閉じているのである．解空間の次元は（K^p 上のベクトル空間として）やはり高々n 次元である．そこで, $X^\bigstar$ 上定義された (1) のような n 階線型微分方程式のうち, 解空間の次元が n となるものを（簡単のため）「**素敵♪な微分方程式**」と呼ぶことにしよう（もちろんこれは本稿に限った不真面目な呼び方であることに注意されたい）．そう,「素敵♪な微分方程式」とはまさに先ほどの話で触れた「代数解を最大限にもつ微分方程式」の正標数類似物である．このような微分方程式は滅多に存在しないことが想像されるが,（少なくとも筆者には）D がどのようなルックスをしているときに素敵♪なのか, そしてどれくらい素敵♪な微分方程式が存在するのか簡単には分からない. $\mathbb{C}$ 上の話しに比べるとこのような微分方程式に関する研究はあまり（というか全然）進展していないようである．ということで私たちの当座の目標として「**（各代数曲線上の）素敵♪な微分方程式がどれくらいあるのかを明示的なかたちで答える**」ことを掲げることにしよう．以下では, $2g-2+r>0$（かつ $n>1$）の場合について考える．

2　超幾何微分方程式の場合

先行研究のなかで素敵♪な微分方程式の個数が明示的に計算されているケースは多くない．明示的に個数が求められている超幾何微分方程式の場合で得られている結果について紹介しよう．$\mathbb{P} := \mathrm{Proj}(k[s,t])$ を k 上の射影直線とする．k の 3 元 a,b,c によって定まる超幾何微分方程式とは次のような微分方程式であった:

$$D_{a,b,c}y = 0, \qquad D_{a,b,c} := \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{c}{x} + \frac{1-c+a+b}{x-1}\right)\frac{d}{dx} + \frac{ab}{x(x-1)} \tag{2}$$

（ただし, $x := s/t$）．これは 3 点 $0,1,\infty$ において確定特異点を持つので, $(0,3)$ 型の点付き代数曲線 $\mathbb{P}^\bigstar := (\mathbb{P}, \{0,1,\infty\})$ 上の微分方程式と呼ぶべきものである．では, a,b,c がどのような組み合わせのときに $D_{a,b,c}y=0$ が素敵♪になるだろうか. この問いに対する答えは Y. Ihara によって次のように与えられている（cf. [5], § 1.6）：

$$D_{a,b,c}y = 0 \text{ が素敵♪} \iff \text{「}a,b,c \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\text{」かつ「}\widetilde{b} > \widetilde{c} > \widetilde{a} \text{ または } \widetilde{a} > \widetilde{c} > \widetilde{b}\text{」}. \tag{3}$$

ここで, $\widetilde{(-)}$ は自然な商 $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を制限して得られる全単射 $\{1,\cdots,p\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の逆写像とする．もし $D_{a,b,c}y=0$ が素敵♪ならば, 関数

$$y_{a,b,c}(x) := 1 + \frac{a\cdot b}{1\cdot c}x + \frac{a\cdot(a+1)\cdot b\cdot(b+1)}{1\cdot 2\cdot c\cdot(c+1)}x^2 + \cdots \tag{4}$$

（ただし, 和は分子が 0 となる時点までとるものとする）および $x^{1-\widetilde{c}}y_{a-c+1,b-c+1,2-c}(x)$ からなる 2 元は解空間の基底となる．そして (3) から, **素敵♪な超幾何微分方程式はちょうど $\frac{p^3-p}{3}$ 個ある**ことが簡単に計算される．$(0,3)$ 型の点付き代数曲線上の (1) で与えられるような微分方程式は（適切な変数変換により）超幾何微分方程式で表されるため, $(g,r,n) = (0,3,2)$ の場合はこれにより既に理解されたといってよいだろう．

その他に知られている例として $(g,r,2) = (2,0,2)$ の場合があるが, これは本質的に上の結果の言い換えにすぎない．古典的には（筆者の知る限りでは）この程度しか分かっていないのである[3]．はたして一般的な場合における素敵♪な微分方程式はいったいどれくらいあるのだろうか．

[3]他にもまだ計算されていたら申し訳ありません m(_ _)m

3 素敵♪な微分方程式から休眠ffへ

より一般的な場合を扱うことために, ひとまず (1) のような微分方程式を接続付きの主束として書き換えよう. (1) で与えられるかたちの微分作用素 D は然るべきベクトル束上の

$$\nabla = \frac{d}{dx} - A, \qquad A = \begin{pmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 & \cdots & -q_{n-1} & -q_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

と表される接続と対応する. 今しがた「対応する」と言ったが, これは次のような意味である: もし y が微分方程式 $Dy = 0$ の解であるとき ${}^t(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \cdots, \frac{dy}{dx}, y)$ によって与えられるベクトル束の切断は ∇ に関して水平になり, 逆に任意の水平切断はこのようにして $Dy = 0$ の解から得られる. 特に, 私たちが今考えているような解を最大限に多く持つ（=「素敵♪な」）微分方程式は, 水平切断を最大限に多く持つ（つまり, 水平切断全体のなす部分層の階数が n になる）接続と対応する. 一方, ベクトル束上の接続の水平切断の多さは, その接続の「p **曲率**」によって測ることができる. p 曲率なる不変量についてはここでは詳しく述べない（正確な定義は [15], Proposition 1.2.1 などを参照されたい）が, 一言で言うと「接続 （=接束から下部ベクトル束（あるいは主束）に付随する随伴ベクトル束への射）に関する, p 冪構造の可換性への障害」として定義されるものである. 接続において, 「p 冪構造が可換」という非凡な対称性をもつ（=「p 曲率が零になる」）ことと, 水平切断を最大限にもつことが同値であることが（一見すると全く非自明な事実だが）よく知られている. 以上より, 微分方程式 $Dy = 0$ が素敵♪かどうかは, 対応する接続 ∇ の p 曲率によって判別できることが分かった:

$$\begin{aligned} Dy = 0 \text{ が素敵♪である（解を最大限に持つ）} &\Longleftrightarrow \nabla \text{ が最大限に多くの水平切断を持つ} \\ &\Longleftrightarrow \nabla \text{ の } p \text{ 曲率が零.} \end{aligned} \tag{6}$$

ちなみに上記の ∇ のように或る種の Griffiths 横断性をみたす接続を伴ったベクトル束（GL_n 主束）のことを「GL_n **ff**」と呼ぶ. より具体的に言うと, 接続の表現行列（つまり (5) における A）の対角成分より一段下のラインが全て可逆であり, そこから左下にある三角形内の成分は全て零となる（残りの成分は任意）ような接続を伴った GL_n 主束を GL_n ffと呼んでいる. しかし実際は, 上三角行列によるゲージ変換により, 任意の GL_n ffは (5) のかたち（つまり上三角においても一番上の行を除いて零となる）をした GL_n ffとして表される. 結局のところ, GL_n ffとはまさに (1) のかたちをした微分方程式と対応する接続付き GL_n 主束に他ならない. 技術的な理由により, 以下では GL_n ffではなく, GL_n ffから誘導される接続付き PGL_n 主束 $\mathcal{E}^\spadesuit := (\mathcal{E}, \nabla_\mathcal{E})$ として定義される「PGL_n **ff**」を扱うことにする[4].

休眠ffとはいったい何だろうか, と冒頭に問いかけた. 構造群が PGL_n となる場合の定義には（一応）辿り着いたことになる. **休眠 PGL_n ffとは, PGL_n ff $\mathcal{E}^\spadesuit := (\mathcal{E}, \nabla_\mathcal{E})$ であり, 接続 $\nabla_\mathcal{E}$ の p 曲率が零になるものとして定義される正標数固有の対象である**. 素敵♪な微分方程式なる素朴かつ素敵な対象について理解することは休眠 PGL_n ffについて理解することであると言ってしまっても（今までの議論から）差し支えないだろう. 特に私たちが掲げた目標は次のように（より広範な射程をもって）言い換えられる:

（各代数曲線上の）休眠ffがどれくらいあるのかを明示的なかたちで答える. (7)

[4] GL_n ffではなく PGL_n ffを扱う理由は主に次の二つからなる: 1.（休眠）GL_n ffは自己同型を多くもつため, そのような対象を分類するモジュライを「扱いやすい空間」として表現することが出来ない. 2. 各 $X^\star$ 上の休眠 GL_n ffは無限個存在してしまうため, 数え上げ問題を考えるうえで適切な対象ではない. 「休眠 PGL_n ffの数え上げ」はまさに「休眠 GL_n ffのモジュライの連結成分の数え上げ」に対応しており, 各連結成分の素性は簡単に把握できるものである. したがって「休眠 PGL_n ffの数え上げ」のほうを考えるだけでも, 素敵♪な微分方程式を知りたいという動機を見失うことは無い.

例えば先ほどの超幾何微分方程式の場合について振り返ってみよう．(2) のような素敵♪な超幾何微分方程式 $D_{a,b,c}y = 0$ から誘導される $\mathbb{P}^\star$ 上の休眠 PGL_2 乍を $\mathcal{E}^\spadesuit_{a,b,c}$ と表記することにする．超幾何微分方程式の特性指数を比較することにより，2 つの休眠 PGL_n 乍 $\mathcal{E}^\spadesuit_{a,b,c}$, $\mathcal{E}^\spadesuit_{a',b',c'}$ が同型であるためには，次の条件をみたすことが必要十分であることが簡単に確かめられる:

$$(1-c)^2 = (1-c')^2, \qquad (c-a-b)^2 = (c'-a'-b')^2, \qquad (b-a)^2 = (b'-a')^2. \tag{8}$$

特に，$D_{a,b,c} \mapsto \mathcal{E}^\spadesuit_{a,b,c}$ は素敵♪な超幾何微分方程式の集合から $\mathbb{P}^\star$ 上の休眠 PGL_2 乍の（同型類全体のなす）集合への 2^3 対 1 対応を与える．したがって前述の計算から，$(0,3)$ **型の点付き代数曲線上の休眠 PGL_2 乍の同型類集合はちょうど $\frac{1}{2^3}\cdot\frac{p^3-p}{3} = \frac{p^3-p}{24}$ 個ある**ことが分かる．実はこの $(g,r,n) = (0,3,2)$（同値なことだが $(g,r,n) = (2,0,2)$ の場合も）に対する明示的計算は数学者達により様々な視点と方法によって与えられている (cf. [14], Chap. V, § 3.2, Corollary 3.7; [11], Theorem 2; [17], Theorem 1.2)．様々な視点と方法が可能なこと自体が休眠乍に多様な側面が備わっていることへの傍証であり，関連する他の対象の研究とともに相互的発展を期待せずにはいられない．兎にも角にも特別な場合の「休眠乍の数え上げ」が分かった以上，もっと一般的な状況はどうなっているのか知りたくてたまらなくなるだろう[5]．

補足 1. この和文記事において「乍（き）」と呼んでいるものは，*A. Beilinson-V. Drinfeld*（*cf. [1], Definition 3.1.3*）により *"oper"* との呼び名で導入された概念を指している[6]．$\mathbb{C}$ 上定義された代数曲線上の乍は，可積分系やループ群の表現論において中心的な対象として登場する．それらは一般化 *KdV* 階層の状態空間を構成するものとして *[2]* で扱われた接続であり，*[1]* においては幾何的ラングランズ問題の文脈において（座標に依存しない記述のもと）導入された．先に議論したように，乍は（G が然るべき場合においては）或る種の直線束間の微分作用素と対応することがその名 *"oper"* の由来となっているようである．とはいえ，例えば PGL_2 乍などは *R. C. Gunning* より *[3]* において扱われた（*Riemann* 面上の）「射影構造」もしくは「固有束」なる概念に他ならない．このように乍はその名が与えられるより以前から既に常に存在していた基本的実存であり，歴史の長さゆえに多面的な表情を持っている．

一方，正標数の乍を扱う私たちの議論は，*S. Mochizuki* により基礎付けられた p 進 *Teichmüller* 理論に端を発する文脈に沿っているといえるだろう．誤解を恐れず述べるならば，p 進 *Teichmüller* 理論とは正標数体上定義された双曲的代数曲線の「然るべき PGL_2 乍（＝固有束）を用いた」p 進持ち上げに関する理論である．他の文脈においても近年注目されつつあるが，それらの眼目はいずれにせよ，「(乍を定義する）接続の p 曲率の研究」に集約される．後ほど紹介するが，点付き安定曲線上の休眠 PGL_2 乍（＝休眠固有束）やそのコンパクトモジュライの構成は p 進 *Teichmüller* 理論の研究なかで行われた．

補足 2. 上の補足 *1* で一言触れたので，少しだけ「射影構造」について説明しておこう．Σ を向き付け可能で連結な種数 $g > 1$ の位相的閉曲面とする．Σ の射影構造とは，Σ の座標近傍系 $\mathfrak{U} := \{(U_\alpha \subseteq \Sigma, \varphi_\alpha : U_\alpha \hookrightarrow \mathbb{C})\}_\alpha$ であり，その座標変換が「一次分数変換」で表されるものの（然るべき自然な同値関係による）同値類 $[\mathfrak{U}]$ である．Σ 上の射影構造 $[\mathfrak{U}]$ のうち誘導する複素構造が種数 g のコンパクト *Riemann* 面 X と同型になるとき，$[\mathfrak{U}]$ は X **上の射影構造**であると呼ぶことにしよう．X 上の射影構造 $[\mathfrak{U}]$ が一つ与えられたとき，$\mathfrak{U}$ を構成している座標変換関数は X の基本群の PGL_2 表現を定める．（*Riemann-Hilbert* 対応を介して）この表現に対応する X 上の接続付き PGL_2 主束がまさに PGL_2 乍となる．この構成により，X 上の射影構造全体の集合と X 上の PGL_2 乍の同型類全体の集合との間の一対一対応が得られる．

[5] あくまで個人的な感想です．

[6] "oper" は "operator（＝作用素）" に因んでいる（operator の語根）ため，対応する漢字「作」の初文としての「乍」を oper の和名とすることにした．

4　コンパクトモジュライの構成

以上の流れから，（代数的）解を多く持つ微分方程式に対する興味から休眠乍の数え上げ問題へと議論が繋がった（繋げたつもりである）．「休眠乍の数え上げ幾何学」を展開するうえで欠かせない登場人物こそ「休眠乍のモジュライ」に他ならない. 固定した代数曲線上の休眠乍を分類するモジュライを考える（一般的な）文脈と異なり, p 進 Teichmüller 理論（補足 1 を参照のこと）のそれにおいては「代数曲線とその上の休眠乍の組を分類するモジュライ」を取り扱う. 下部代数曲線の変形や退化にしたがって休眠乍がどのように振る舞うのかを理解することが重要だからである. 特にその観点（および後ほど紹介するコホモロジー的場の理論を構成する点においても）から, 休眠乍を分類するモジュライを適切かつ自然にコンパクト化する必要に私たちは迫られる. 半単純代数群 G が随伴型の場合については, 既に [21] のなかでコンパクトモジュライの構成およびそのモジュライに関する様々な研究がなされた. $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ を (g,r) 型の点付き安定曲線を分類するモジュライスタックとする（良く知られているように, $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ は連結, 非特異, そして固有な k 上の Deligne-Mumford スタックにより表現される）と, 当該モジュライは $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ 上の有限スタックとして表現される. これは点付き安定曲線が自然に備えている対数構造 (これにより下部代数曲線が非特異な場合においても対数的な意味で非特異 (log smooth) な対象と見做すことができる) を用いて乍の概念を対数幾何的対象へと一般化し, それらを分類することにより構成される. ところが G が随伴型でない場合は, そのような構成ではモジュライは適切にコンパクト化されない. このような困難を解消するために [23] のなかで「**点付き捻れ安定曲線上の休眠忠実捻れ G 乍**」なる対象を導入し, それらを分類するモジュライを考えた. まずはじめに「点付き捻れ安定曲線」について復習したい（正確な定義および関連する議論については [23] を参照されたい）.

定義 3. （k 上の）**（平衡）捻れ曲線**（**(balanced) twisted curve**）とは, 高々結節点のみを特異点として持つ連結, 従順（*tame*）, そして k 上固有な 1 次元 *Deligne-Mumford* スタック $\mathfrak{X}$ であり, 次の条件をみたすものである:

- $|\mathfrak{X}|^{\mathrm{sm}}$ を $\mathfrak{X}$ の粗モジュライ $|\mathfrak{X}|$ のなかの非特異部分からなる開部分概型とするとき, $\mathfrak{X}\times_{|\mathfrak{X}|}|\mathfrak{X}|^{\mathrm{sm}}$ $(\subseteq \mathfrak{X})$ は $\mathfrak{X}$ の非特異部分と一致する.
- 自然な射影 $coa_{\mathfrak{X}}:\mathfrak{X}\to|\mathfrak{X}|$ は $|\mathfrak{X}|$ の或る稠密な開部分スタック上で同型となる.
- $\overline{x}$ を $|\mathfrak{X}|$ にある結節点の一つとする. このとき, $\overline{x}$ の任意のエタール近傍 $\mathrm{Spec}(A)\to|\mathfrak{X}|$ と任意のエタール射

$$\eta:\mathrm{Spec}(A)\to\mathrm{Spec}(k[s_0,t_0]/(s_0t_0-u_0)) \tag{9}$$

（ただし, $u_0\in k$）に対して[7], 引き戻し $\mathfrak{X}\times_{|\mathfrak{X}|}\mathrm{Spec}(A)$ は以下のような商スタックと同型となる:

$$[\mathrm{Spec}(A[s_1,t_1]/(s_1t_1-u_1,s_1^l-\eta^*(s_0),t_1^l-\eta^*(t_0)))/\mu_l], \tag{10}$$

ただし, u_1 は k の元, l は k において可逆な正整数, μ_l は 1 の l 冪根からなる群であり, μ_l の作用は $(s_1,t_1)\mapsto(\zeta s_1,\zeta^{-1}t_1)$ $(^\forall\zeta\in\mu_l)$ によって与えられる.

定義 4. （k 上の）(g,r) **型の点付き捻れ安定曲線**とは次のようなデータである：

$$\mathfrak{X}^\bigstar:=(\mathfrak{X},\{\sigma_{\mathfrak{X},i}:\mathfrak{S}_i\to\mathfrak{X}\}_{i=1}^r), \tag{11}$$

ただし,

- $\mathfrak{X}$ は（k 上の）捻れ曲線であり, 粗モジュライ $|\mathfrak{X}|$ によって与えられる固有代数曲線の種数が g となるもの,

[7] このようなエタール近傍とエタール射の組は各 $\overline{x}$ に対して少なくとも一つ（したがって沢山）存在する.

- $\sigma_{\mathfrak{X},i} : \mathfrak{S}_i \to \mathfrak{X}$ $(i \in I)$ は互いに交わらない $\mathfrak{X}$ の閉部分スタック,

であり, 次の条件をみたす:

- 各 $\mathrm{Im}(\sigma_{\mathfrak{X},i})$ は $\mathfrak{X}$ の非特異部分に含まれる;
- 各 $\mathfrak{S}_i$ は k 上エタールなジャーブ（*gerbe*）;
- $\mathfrak{X}^{\mathrm{gen}}$ を $\mathfrak{X}$ の非特異部分から $\mathrm{Im}(\sigma_{\mathfrak{X},i})$ $(i = 1, \cdots, r)$ の和を取り除いて得られる $\mathfrak{X}$ の開部分スタックとすると, この $\mathfrak{X}^{\mathrm{gen}}$ は概型により表現される.

点付き捻れ安定曲線 $\mathfrak{X}^\star := (\mathfrak{X}, \{\sigma_{\mathfrak{X},i}\}_i)$ が与えられたとき, X およびその下にある $\mathrm{Spec}(k)$ には（捻れてない場合と同様に）自然な対数構造が入り, 結果として得られる対数スタック $X^{\log}$ は対数的な意味で $\mathrm{Spec}(k)^{\log}$ 上非特異なスタック的曲線となる.

次にこのように導入した点付き捻れ安定曲線の上で定義される（忠実）捻れ乍を定義しよう. そのためにいくつか準備をしなければならない. G を k 上定義された連結な半単純代数群とし, T を G の極大トーラス, B を T を含む G の Borel 部分群とする. $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$ をそれぞれ T, B, G の Lie 環とし, T の各指標 $\beta : T \to \mathbb{G}_m$ に対して

$$\mathfrak{g}^\beta := \left\{ x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; {}^\forall t \in T,\, \mathrm{ad}(t)(x) = \beta(t) \cdot x \right\} \tag{12}$$

とおこう. Γ を B 内の T に対する単純ルート全てからなる集合とすると, $\mathfrak{g}$ には次の 2 条件を満たすような一意的な降下フィルトレーション $\{\mathfrak{g}^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ が定まる：

- $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{g}^0/\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{g}^{-1}/\mathfrak{g}^0 = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{g}^{-\alpha}$;
- 任意の j_1, $j_2 \in \mathbb{Z}$ に対して $[\mathfrak{g}^{j_1}, \mathfrak{g}^{j_2}] \subseteq \mathfrak{g}^{j_1 + j_2}$.

G の階数が p に対して十分大きいときには様々な不都合に直面してしまう. そのような事態を避けるためにも, 以下のような条件 $(*)_{G,p}$, $(**)_{G,p}$ を考え, それらを適宜課す必要がある.

$(*)_{G,p}$: h を G の Coxeter 数とするとき, 不等式 $p > 2h$ が成り立つ;

$(**)_{G,p}$: G は A_n $(2n < p-2)$, B_l $(4l < p)$, もしくは C_m $(4m < p)$ 型古典群と同型.

($(**)_{G,p}$ は $(*)_{G,p}$ より強い条件であることに注意されたい.) 差し当たって以下の議論では, 条件 $(*)_{G,p}$ を仮定しよう.

さて, $\mathfrak{X}^\star := (\mathfrak{X}, \{\sigma_{\mathfrak{X},i}\}_{i=1}^r)$ を (g, r) 型の点付き捻れ安定曲線とし, $\pi_B : \mathcal{E}_B \to \mathfrak{X}$ を $\mathfrak{X}$ 上の B 主束とする. 自然な埋め込み $B \to G$ による構造群の変換を施すことにより, $\mathcal{E}_B$ から G 主束 $\pi_G : \mathcal{E}_G$ $(:= \mathcal{E}_B \times^B G) \to \mathfrak{X}$ を得る. $\mathfrak{X}^{\log}$ 上の対数構造を π_B, π_G を通して引き戻すことにより $\mathcal{E}_B$, $\mathcal{E}_G$ にそれぞれ対数構造を入れる（結果として得られる対数スタックをそれぞれ $\mathcal{E}_B^{\log}$, $\mathcal{E}_G^{\log}$ とおく）. 順像 $\pi_{G*}(\mathcal{T}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}})$ の G 不変な切断からなる $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ 加群 $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}} := \pi_{G*}(\mathcal{T}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}})^G$ にはフィルトレーション $\{\mathfrak{g}^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ から誘導される降下フィルトレーション $\{\widetilde{\mathcal{T}}^j_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}}\}_{j \leq -1}$ が自然に定まるが. このとき $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ 商加群 $\widetilde{\mathcal{T}}^{-1}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}} / \widetilde{\mathcal{T}}^0_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}}$ は $\mathfrak{g}^{-1}/\mathfrak{g}^0 = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{g}^{-\alpha}$ にしたがって直線束の有限直和へと分解する:

$$\widetilde{\mathcal{T}}^{-1}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}} / \widetilde{\mathcal{T}}^0_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}} = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{g}_{\mathcal{E}}^{-\alpha}. \tag{13}$$

また, $\nabla_{\mathcal{E}}$ を $\mathcal{E}_G$ 上の対数的接続とする. つまり $\nabla_{\mathcal{E}}$ は, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ 線型射 $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}^{\log}/k^{\log}} \to \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}}$ のうち, π_G を微分して得られる射影 $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}} \twoheadrightarrow \mathcal{T}_{\mathfrak{X}^{\log}/k^{\log}}$ との合成が $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}^{\log}/k^{\log}}$ 上の恒等写像になるものである.

定義 5. *(i)* $\mathfrak{X}^\star$ 上の**捻れ** G **乍**は上のような組 $\mathcal{E}^\spadesuit = (\mathcal{E}_B, \nabla_{\mathcal{E}})$ のうち, 次の条件をみたすものである:

- $\nabla_{\mathcal{E}}(\mathcal{T}_{\mathfrak{X}^{\log}/k^{\log}}) \subseteq \widetilde{\mathcal{T}}^{-1}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}}$,
- 各 $\alpha \in \Gamma$ に対して, 次の合成射は同型である:

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{X}^{\log}/S^{\log}} \xrightarrow{\nabla_{\mathcal{E}}} \widetilde{\mathcal{T}}^{-1}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{T}}^{-1}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}}/\widetilde{\mathcal{T}}^{0}_{\mathcal{E}_G^{\log}/S^{\log}} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}_{\mathcal{E}}^{-\alpha}, \tag{14}$$

ただし, 最後の射は直和分解 *(13)* により得られる射影である.

(ii) 捻れ G 乍 $\mathcal{E}^{\spadesuit} := (\mathcal{E}_B, \nabla_{\mathcal{E}})$ が**忠実**であるとは, T 主束 $\mathcal{E}_B \times^B T$ の分類射 $X \to \mathcal{B}T$（ただし, $\mathcal{B}T$ は T の分類スタックとする）が表現可能であるときをいう.

(iii) **休眠忠実捻れ** G **乍**とは忠実捻れ G 乍 $\mathcal{E}^{\spadesuit} := (\mathcal{E}_B, \nabla_{\mathcal{E}})$ であり, $\nabla_{\mathcal{E}}$ の p 曲率が零となるものである.

上によって定義した点付き捻れ安定曲線上の休眠忠実捻れ G 乍こそが私たちが扱いたい基本的対象である. 簡単に確かめられるように, G が随伴型のときは忠実捻れ G 乍の下に敷かれた点付き捻れ安定曲線は（忠実性により）実際は（捻れてない）点付き安定曲線であり, つまるところ忠実捻れ G 乍なる概念は古典的な G 乍と変わるところがない.

さてここで,

$$\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r} \tag{15}$$

を (g,r) 型の点付き捻れ安定曲線 $\mathfrak{X}^{\bigstar} := (\mathfrak{X}, \{\sigma_{\mathfrak{X},i}\}_{i=1}^{r})$ とその上の休眠忠実捻れ G 乍 $\mathcal{E}^{\spadesuit}$ の組 $(\mathfrak{X}^{\bigstar}, \mathcal{E}^{\spadesuit})$ を分類する 2 圏[8]とする. 各 $(\mathfrak{X}^{\bigstar}, \mathcal{E}^{\spadesuit})$ に対して $\mathfrak{X}^{\bigstar}$ の粗モジュライを割り当てることにより射 $\pi_{g,r} : \mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r} \to \overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ が定まる. [23] で証明した主定理のひとつは次の主張である:

定理 6 (cf. [23], Theorem A). *(i)* $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}$ は仮想次元 $3g-3+r$ の完全障害理論を持つ（特に, 仮想基本類 $[\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}]^{\mathrm{vir}}$ を持つ）空でない k 上固有な *Deligne-Mumford* スタックで表現される. また, 射影 $\pi_{g,r} : \mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r} \to \overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ は有限射となり, この射のそれへの制限が支配的になるような $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}$ の既約成分が少なくとも一つ存在する.

(ii) さらに条件 $(**)_{G,p}$ を仮定する. このとき, $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}$ は $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ 上生成的エタールとなる（つまり, $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ への射影が支配的になる $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}$ の任意の既約成分は, その上で $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ 上エタールになるような稠密な開部分スタックが存在する）.

したがってこの結果により, 休眠 G 乍のモジュライの標準的といえるコンパクト化を得た. 繰り返すが, G が随伴型の場合はこのコンパクトモジュライは既に先行研究で得られているものと一致する (cf. [21], Theorem C). 特に $G = \mathrm{PGL}_2$ の場合はさらに強い結果として, $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}$ が非特異（かつ連結）であることが S. Mochizuki によって示されている. 一般の場合にそのような強い結果が成り立つのかまだ分かっていないが, 個人的にはあまり期待していない. しかし, （その替わりというべきものとして）$\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}$ の仮想基本類 $[\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}]^{\mathrm{vir}}$ によって或る程度は適切に $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}$ 上で交叉理論を展開できる. 仮想基本類は Gromov-Witten 不変量や Donaldson-Thomas 不変量といった変形不変量の構成において重要な役割を持ち, このような数え上げ幾何においては重要な役割を担っていることは言うまでもないだろう. 以下では, この仮想基本類 $[\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}]^{\mathrm{vir}}$ を用いてコホモロジー的場の理論を構成しよう.

5 コホモロジー的場の理論と休眠乍の数え上げ

コホモロジー的場の理論（以下, CohFT）は M. Kontsevich と Y. Manin によって導入された概念 (cf. [9]) であり, 与えられたターゲット空間の Gromov-Witten 類がみたす分解性質を公理化したもの

[8]実際は, この 2 圏は圏と同値になる.

である. 実際は Gromov-Witten 理論に由来するものだけではなく, Witten r スピン類や Fan-Jarvis-Ruan-Witten (FJRW) 理論に由来するものなどがある. いずれの場合も $\mathbb{C}$ 上定義された代数曲線のモジュライに対する $\mathbb{C}$ 係数コホモロジー群によって与えられるが, ここでは $\overline{\mathbb{Q}}_l$ (=$\mathbb{Q}_l$ の代数閉包, l は p とは異なる素数) を係数とする（k 上の）$\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ に対する l 進エタールコホモロジー群

$$\widetilde{H}^*_{\text{ét}}(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^i_{\text{ét}}(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l(\lfloor \tfrac{i}{2} \rfloor)) \tag{16}$$

に値を持つコホモロジー的場の理論を導入しよう. Φ_{tree}, Φ_{loop}, Φ_{tail} はそれぞれ以下のような, 点付き代数曲線を標点に沿って張り合わせる操作によって定まる（いわゆる “clutching morphism” と呼ばれる）射とする:

$$\Phi_{\text{tree}} : \overline{\mathfrak{M}}_{g_1,r_1+1} \times_k \overline{\mathfrak{M}}_{g_2,r_2+1} \to \overline{\mathfrak{M}}_{g_1+g_2,r_1+r_2}, \tag{17}$$

$$\Phi_{\text{loop}} : \overline{\mathfrak{M}}_{g_3,r_3+2} \to \overline{\mathfrak{M}}_{g_3+1,r_3}, \tag{18}$$

$$\Phi_{\text{tail}} : \overline{\mathfrak{M}}_{g_4,r_4+1} \to \overline{\mathfrak{M}}_{g_4,r_4} \tag{19}$$

（ただし, $g_1, \cdots, g_4$, $r_1, \cdots, r_4$ はそれぞれ非負整数であり, $2g_i - 1 + r_i > 0$ $(i = 1, 2)$, $2g_3 + r_3 > 0$, および $2g_4 - 2 + r_4 > 0$ をみたす）.

定義 7. **（l 進）コホモロジー的場の理論（CohFT）**とは, 次のようなデータのこととする:

$$\Lambda := (\mathcal{H}, \eta, \mathbf{1}, \{\Lambda_{g,r}\}_{g,r \geq 0, 2g-2+r>0}), \tag{20}$$

ただし,

- $\mathcal{H}$ は $\overline{\mathbb{Q}}_l$ 上の有限次元ベクトル空間（$\mathfrak{e} := \{e_1, \cdots, e_{\dim(\mathcal{H})}\}$ を基底とする）;
- η は非退化対称ペアリング $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{Q}}_l$（$\eta$ を基底 $\mathfrak{e}$ に関して行列表示したものの逆行列を $(\eta^{e_a e_b})_{a,b}$ とする）;
- $\mathbf{1}$ は $\mathcal{H}$ の元,
- 各 g, r に対して $\Lambda_{g,r}$ は $\overline{\mathbb{Q}}_l$ 線型射 $\mathcal{H}^{\otimes r} \to \widetilde{H}^*_{\acute{e}t}(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$（$\mathcal{H}^{\otimes 0} := \overline{\mathbb{Q}}_l$）,

であり, 次の性質を満たす[9]:

- 各 $\Lambda_{g,r}$ は $\mathcal{H}^{\otimes r}$ および $\widetilde{H}^*_{\acute{e}t}(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ 上にそれぞれ与えられる r 次対称群 $\mathfrak{S}_r$ の自然な作用[10]と可換である;
- 任意の v_1, $v_2 \in \mathcal{H}$ に対して, 次の等式が成り立つ:

$$\eta(v_1, v_2) = \int_{[\overline{\mathfrak{M}}_{0,3}]} \Lambda_{0,3}(v_1 \otimes v_2 \otimes \mathbf{1}). \tag{21}$$

- 任意の $v_1, \cdots, v_{r_1+r_2} \in \mathcal{H}$ に対して次の等式が成り立つ:

$$\begin{aligned} &\Phi^*_{\text{tree}}(\Lambda_{g_1+g_2,r_1+r_2}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{r_1+r_2})) \\ &= \sum_{e_1,e_2 \in \mathfrak{e}} \Lambda_{g_1,r_1+1}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{r_1} \otimes e_1)\eta^{e_1 e_2} \otimes \Lambda_{g_2,r_2+1}(e_2 \otimes v_{r_1+1} \otimes \cdots \otimes v_{r_1+r_2}), \end{aligned} \tag{22}$$

  ただし, Φ^*_{tree} は Φ_{tree} から誘導される以下のような射

$$\widetilde{H}^*_{\acute{e}t}(\overline{\mathfrak{M}}_{g_1+g_2,r_1+r_2}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \to \widetilde{H}^*_{\acute{e}t}(\overline{\mathfrak{M}}_{g_1,r_1+1}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \widetilde{H}^*_{\acute{e}t}(\overline{\mathfrak{M}}_{g_2,r_2+1}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \tag{23}$$

  とする.

[9] これらの性質は実際は基底 $\mathfrak{e}$ の取り方に依らない.

[10] $\mathcal{H}^{\otimes r}$ への作用は各テンソル積成分の置換, $\widetilde{H}^*_{\text{ét}}(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ に関しては $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ 上の普遍代数曲線が持つ r 個の標点の置換により誘導される作用のことを指している.

- 任意の $v_1, \cdots, v_{r_3} \in \mathcal{H}$ に対して次の等式が成り立つ:

$$\Phi^*_{\mathrm{loop}}(\Lambda_{g_3+1,r_3}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{r_3})) = \sum_{e_1,e_2 \in \mathfrak{e}} \Lambda_{g_3,r_3+1}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{r_3} \otimes e_1 \otimes e_2)\eta^{e_1e_2}, \tag{24}$$

ただし, Φ^*_{loop} は Φ_{loop} から誘導される射 $\widetilde{H}^*_{\acute{e}t}(\overline{\mathfrak{M}}_{g_3+1,r_3}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \to \widetilde{H}^*_{\acute{e}t}(\overline{\mathfrak{M}}_{g_3,r_3+2}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ とする.

- 任意の $v_1, \cdots, v_{r_4} \in \mathcal{H}$ に対して次の等式が成り立つ:

$$\Phi^*_{\mathrm{tail}}(\Lambda_{g_4,r_4}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{r_4})) = \Lambda_{g_4,r_4+1}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{r_4} \otimes \mathbf{1}), \tag{25}$$

ただし, Φ^*_{tail} は Φ_{tail} から誘導される射 $\widetilde{H}^*_{\acute{e}t}(\overline{\mathfrak{M}}_{g_4,r_4}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \to \widetilde{H}^*_{\acute{e}t}(\overline{\mathfrak{M}}_{g_4,r_4+1}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ とする.

それでは次に休眠乍の CohFT を定義しよう. $\mathfrak{t}$ のなかの Frobenius 不変な正則元からなる有限閉部分スキームを $\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}$ とする. W を (G,T) の Weyl 群とすると, $\mathfrak{t}$ の自然な W 作用を制限することにより $\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}$ への W 作用が定まる. 結果として得られる商スキーム $\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}/W$ を G の中心 Z による自明作用で割った商スタックを $[(\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}/W)/Z]$ としよう. さらに, $\overline{\mathcal{I}}_\mu([(\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}/W)/Z])$ を $[(\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}/W)/Z]$ における円分ジャーブのスタック (stack of cyclotomic gerbes) とする. これは Z の分類スタック $\mathcal{B}Z$ の有限直和であることが分かる. つまり, 直和の添え字集合を Δ_G として, 次のように表される:

$$\overline{\mathcal{I}}_\mu([(\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}/W)/Z]) = \coprod_{\boldsymbol{\rho} \in \Delta_G} \mathcal{B}Z_{\boldsymbol{\rho}} \tag{26}$$

(ただし, $\mathcal{B}Z_{\boldsymbol{\rho}} := \mathcal{B}Z$). この添え字集合 Δ_G には特別な元があり, これを $\boldsymbol{\varepsilon}$ と書くことにする. 各休眠忠実捻れ G 乍 $\mathcal{E}^\spadesuit := (\mathcal{E}_B, \nabla_\mathcal{E})$ と下部捻れ安定曲線の標点 σ_i ($i \in \{1, \cdots, r\}$) に対して, $\mathcal{E}^\spadesuit$ の σ_i 上のファイバーから（然るべき方法により）決まる境界不変量 $\boldsymbol{\rho}_i \in \Delta_G$ を, $\mathcal{E}^\spadesuit$ の σ_i での**半径**として定義する. これは例えば $\mathbb{C}$ 上の $G = \mathrm{PGL}_2$（つまり古典的な Teichmüller 理論に対応する）の場合, 今しがた定義した半径とはまさに（PGL_2 乍から誘導される Riemann 面上の距離構造による）標点の周りの（通常の意味での）半径と対応すべきものになっている. 半径を与える割り当て $\mathcal{E}^\spadesuit \mapsto \rho_i^{\mathcal{E}^\spadesuit}$ は, より精密には以下の図式にあるような（つまり幾何的なレベルで与えられる）射 ev_i から誘導されるものである:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r} & \xrightarrow{\pi_{g,r}} & \overline{\mathfrak{M}}_{g,r} \\ {\scriptstyle ev_i}\Big\downarrow & & \\ \overline{\mathcal{I}}_\mu([(\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}/W)/Z]). & & \end{array} \tag{27}$$

次に, $\overline{\mathcal{I}}_\mu([(\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}/W)/Z])$ の l 進エタールコホモロジー群を考えよう:

$$\mathcal{V} := \widetilde{H}^*_{\mathrm{\acute{e}t}}(\overline{\mathcal{I}}_\mu([(\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}/W)/Z]), \overline{\mathbb{Q}}_l). \tag{28}$$

$\mathcal{V}$ は直和分解 (26) にしたがって直和分解する: $\mathcal{V} = \bigoplus_{\boldsymbol{\rho} \in \Delta_G} \overline{\mathbb{Q}}_l e_{\boldsymbol{\rho}}$. ここで, 各 $\boldsymbol{\rho} \in \Delta_G$ に対する $e_{\boldsymbol{\rho}}$ は直和因子における $1 \in \widetilde{H}^*_{\mathrm{\acute{e}t}}(\mathcal{B}Z_{\boldsymbol{\rho}}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ とする. また, $2g-2+r>0$ をみたす非負整数の組 (g,r) に対して, $\overline{\mathbb{Q}}_l$ 線型射 $\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{G,g,r}$ を次のように定義する:

$$\begin{array}{rccc} \Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{G,g,r}: & \mathcal{V}^{\otimes r} & \to & \widetilde{H}^*_{\mathrm{\acute{e}t}}(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \\ & \cup & & \cup \\ & \displaystyle\bigotimes_{i=1}^r v_i & \mapsto & \left(\pi^{\mathrm{hom}}_{g,r*}\left(\left(\displaystyle\prod_{i=1}^r ev_i^*(v_i)\right) \cap cl([\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}]^{\mathrm{vir}})\right)\right)^\blacklozenge \end{array} \tag{29}$$

ただし,

- $\pi^{\mathrm{hom}}_{g,r*}$ は射影 $\pi_{g,r}$ に誘導される順像射 $\widetilde{H}^{\mathrm{BM}}_*(\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \to \widetilde{H}^{\mathrm{BM}}_*(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ を表す（$\widetilde{H}^{\mathrm{BM}}_*(-, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ は Borel-Moore ホモロジー群 $\bigoplus_{i=0}^\infty \widetilde{H}^{\mathrm{BM}}_i(-, \overline{\mathbb{Q}}_l)(-\lceil \frac{i}{2} \rceil)$ を表す）;

- cl はサイクル射 $A_*(\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r})_{\mathbb{Q}} \to \widetilde{H}^{\mathrm{BM}}_{2*}(\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$（$A_*(\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r})_{\mathbb{Q}}$ は $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}$ の有理 Chow 群）を表す;
- $(-)^{\blacklozenge}$ は Poincaré 双対同型 $\widetilde{H}^{\mathrm{BM}}_{*}(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}^{6g-6+2r-*}_{\text{ét}}(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ を表す.

また, $\eta : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \overline{\mathbb{Q}}_l$ を「$\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2^{\vee} \in \Delta_G$ のとき $\eta(e_{\boldsymbol{\rho}_1}, e_{\boldsymbol{\rho}_2}) = \frac{1}{\sharp(Z)}$, $\boldsymbol{\rho}_1 \neq \boldsymbol{\rho}_2^{\vee}$ のとき $\eta(e_{\boldsymbol{\rho}_1}, e_{\boldsymbol{\rho}_2}) = 0$」によって定まる $\overline{\mathbb{Q}}_l$ 双線型ペアリングとする. このとき, 次の定理が成り立つ:

定理 8 (cf. [23], Theorem B)**.** *条件 $(**)_{G,p}$ を仮定する. このとき, 次のデータはコホモロジー的場の理論となる:*

$$\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{G} := (\mathcal{V}, \eta, e_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \{\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{G,g,r}\}_{g,r\geq 0, 2g-2+r>0}) \tag{30}$$

また, 付随して得られる Frobenius 代数 $(\mathcal{V}, \eta)$ は半単純になる.

このように（本質的に）正標数固有の対象による CohFT の例は, 少なくとも筆者が知る限りではこれが初めてである. しかしながら, 下記の定理 9 (i), (ii) からも分かるように, $\mathbb{C}$ 上の対象に由来する他の CohFT との関連性が見出されるのも興味深い. 他の CohFT と比較することにより様々な G における休眠 G 仐の CohFT や付随する Frobenius 代数の構造などの理解が期待される. 例えば, SL_2 Wess-Zumino-Witten 模型のフージョン環の結合係数と比較することにより, 休眠 PGL_2 仐における Frobenius 代数の環構造を具体的に理解することが出来る（補足 10 を参照のこと）.

ところで, この CohFT が指し示す量 $\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{G,g,r}(\bigotimes_{i=1}^r e_{\boldsymbol{\rho}_i})$ にははたしてどんな意味があるのだろうか. 実はこれらの値は全て $\widetilde{H}^0_{\text{ét}}(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ に収まることが分かる（このようなデータは「2 次元位相的量子場の理論」と見做すことができる）. さらに, $X^{\bigstar}$ を (g,r) 型の一般的な点付き（非特異）代数曲線とするとき, 各 $(\boldsymbol{\rho}_i)_{i=1}^r \in \Delta_G^{\times r}$ に対して次の等式が成り立つ:

$$\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{G,g,r}(\bigotimes_{i=1}^{r} e_{\boldsymbol{\rho}_i}) = \frac{1}{\sharp(Z)} \cdot \sharp \left\{ X^{\bigstar} \text{ 上の半径 } (\boldsymbol{\rho}_i)_{i=1}^r \text{ の休眠 } G \text{ 仐の同型類} \right\}. \tag{31}$$

したがって, 目標として掲げた (7) を達成するため, つまり休眠仐の個数を具体的に求めるためには, この左辺の（一見するとよくわからないような）不変量を求めればよいことになる. そしてこれは CohFT のもつ分解性質を適用することにより, 小さい (g,r)（特に $(g,r) = (0,3)$）に対する休眠仐の個数（あるいは量 $\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{G,g,r}(\bigotimes_{i=1}^r e_{\boldsymbol{\rho}_i})$）を調べることに帰着される. CohFT とはまさにこのような数え上げ不変量を小さい (g,r) から大きいそれへと思い出す（復元する）ためのレシピのようなものといえる. では実際に私たちが今までに示すことが出来た「休眠仐の数え上げ」に関する明示的な結果を紹介しよう[11].

定理 9 (cf. [23], Corollary 6.3.1; [21], Theorem H; [22], Theorems A and B ; [4], Theorem 2.1)**.**

(i) （休眠 PGL_2 仐の数え上げ明示公式）*自然な同一視 $\Delta_{\mathrm{PGL}_2} = \left\{0, 1, \cdots, \frac{p-3}{2}\right\}$ のもとで, 各 $(n_i)_{i=1}^r \in \Delta^{\times r}$ に対して次の等式が成り立つ:*

$$\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{\mathrm{PGL}_2,g,r}(\bigotimes_{i=1}^{r} e_{n_i}) = \frac{p^{g-1}}{2^{2g-1}} \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\prod_{i=1}^{r} \sin\left(\frac{(2n_i+1)j\pi}{p}\right)}{\sin^{2g-2+r}\left(\frac{j\pi}{p}\right)}. \tag{32}$$

(ii) （休眠 PGL_n 仐の数え上げ明示公式）*$p > n \cdot \max\{g-1, 2\}$ とする. このとき, 次の等式が成り立つ:*

$$\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{\mathrm{PGL}_n,g,0}(1) = \frac{p^{(n-1)(g-1)-1}}{n!} \cdot \sum_{\substack{(\zeta_1,\cdots,\zeta_n) \in \mathbb{C}^{\times n} \\ \zeta_i^p = 1,\ \zeta_i \neq \zeta_j (i \neq j)}} \frac{(\prod_{i=1}^{n} \zeta_i)^{(n-1)(g-1)}}{\prod_{i\neq j}(\zeta_i - \zeta_j)^{g-1}}. \tag{33}$$

[11] 定理 9 (iii), (iv) においては条件 $(**)_{G,p}$ を満たしていないが, [21], §4 における議論からこの場合にもコンパクトモジュライや CohFT を同様に構成することができる.

(iii) （休眠 PGL_n 乍と休眠 $\mathrm{PGL}_{(p-n)}$ 乍の間の双対性）$1 < n < p-1$ とする．このとき，自然な全単射 $\iota : \Delta_{\mathrm{PGL}_n} \xrightarrow{\sim} \Delta_{\mathrm{PGL}_{(p-n)}}$ が存在し，このもとで各 $(\boldsymbol{\rho}_i)_{i=1}^r \in \Delta_{\mathrm{PGL}_n}^{\times r}$ に対して次の等式が成り立つ:

$$\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{\mathrm{PGL}_n, g, r}(\bigotimes_{i=1}^r e_{\boldsymbol{\rho}_i}) = \Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{\mathrm{PGL}_{(p-n)}, g, r}(\bigotimes_{i=1}^r e_{\iota(\boldsymbol{\rho}_i)}). \tag{34}$$

(iv) （休眠 $\mathrm{PGL}_{(p-1)}$ 乍の場合）$\Delta_{\mathrm{PGL}_{(p-1)}} = \{\bullet\}$ （一点集合）であり，次の等式が成り立つ:

$$\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{\mathrm{PGL}_{(p-1)}, g, r}(e_\bullet^{\otimes r}) = 1. \tag{35}$$

補足 10. 上の定理で述べた各結果について少し補足したい．

まず *(i)* については，（前に触れたように）休眠 PGL_2 乍の *CohFT* に付随する *Frobenius* 代数の環構造と SL_2 *Wess-Zumino-Witten* 模型のフージョン環の結合係数とを比較することにより示される．（しかし，幾何学的なレベルでの休眠 PGL_2 乍と *WZW* 模型の共形ブロックとの対応は依然として分かっていない.）そして少し面倒くさい計算を実行したのち，前述の超幾何微分方程式を介した数え上げの結果と整合することが確かめられる．

また *(ii)* については，先ほど構成した休眠乍の *CohFT* を適用した結果ではないことに注意されたい．この明示公式を示すための鍵となっているのは、定理 *6 (ii)* で主張した $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{\mathrm{PGL}_n, g, 0}/\overline{\mathfrak{M}}_{g,0}$ の生成的エタール性である．実際，固定された非特異代数曲線 X 上の休眠 PGL_n 乍を分類するモジュライは（X の *Frobenius* 捻り $X^{(1)}$ 上の）然るべき相対 *Grassmann* 多様体と同型であることが示される．生成的エタール性によりそれは，$W(k)$ *(:=*k *の Witt* 環*)* 上定義された代数曲線（つまり $X^{(1)}$ の $W(k)$ 上への変形）上の然るべき「$W(k)$ 上平坦な」相対 *Grassmann* 多様体へと変形される．従って $\mathbb{C}$ 上の相対 *Grassmann* 多様体の *Gromov-Witten* 不変量に関する既知の計算結果（*Vafa-Intriligator* 公式*)* を適用することで所望の明示的公式を得る．

(iii) で与えた等式は二つの *CohFT* が等価であることを主張するものである．より強い主張として，「休眠 PGL_n 乍のモジュライ」と「休眠 $\mathrm{PGL}_{(p-n)}$ 乍のモジュライ」の間の（幾何的なレベルでの）双対性が示される．つまり，それらのモジュライの間の（$ev_1, \cdots, ev_r$ と可換な）標準的な同型 $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{\mathrm{PGL}_n, g, r} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{\mathrm{PGL}_{(p-n)}, g, r}$ が構成される．この結果と *(i), (ii)* を組み合わせることにより，階数が大きい場合における休眠 PGL_n 乍の個数を明示的に数え上げることが出来る．

(iv) で主張していることは，各代数曲線上に存在する休眠 $\mathrm{PGL}_{(p-1)}$ 乍は（同型類の違いを除いて）唯一つである，ことである．言い換えるならば，休眠 $\mathrm{PGL}_{(p-1)}$ 乍の *CohFT* は自明な *CohFT* と同型である．

6　Witten 予想の類似

休眠乍の CohFT を適用して Witten 予想（Witten-Kontsevich の定理）の類似について考えよう．Witten 予想 (cf. [25], [8], [6], [7], [12], and [16]) は近年において発展目覚ましい代数曲線（またはリーマン面）のモジュライの交叉理論における一つの標柱であり，然るべき位相的重力理論と行列模型が等価であることを主張するものである．このことから，自明な CohFT の分配関数は KdV 階層のタウ関数となることが導かれ，モジュライ上の ψ 類の交点数たちが無限個の連立方程式によって結ばれることが分かる．ここで私たちが考えたい休眠 G 乍の分配関数は次のようにして定義される関数である:

$$Z^{\mathrm{Zz.}}_G := \exp\left(\sum_{g,r\geq 0} \frac{\hbar^{2g-2}}{r!} \sum_{\substack{d_1,\cdots,d_r\geq 0,\\ \boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}_r\in\Delta_G}} \left(\int_{[\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}]^{\mathrm{vir}}} \prod_{i=1}^r ev_i^*(e_{\boldsymbol{\rho}_i})\widehat{\psi}_i^{d_i}\right) \prod_{i=1}^n t_{d_i,\boldsymbol{\rho}_i}\right) \tag{36}$$

$$\left(= \exp\left(\sum_{g,r\geq 0} \frac{\hbar^{2g-2}}{r!} \sum_{\substack{d_1,\cdots,d_r\geq 0,\\ \boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}_r\in\Delta_G}} \left(\int_{[\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}]} \Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{G,g,r}(\bigotimes_{i=1}^r e_{\boldsymbol{\rho}_i}) \prod_{i=1}^r \psi_i^{d_i}\right) \prod_{i=1}^n t_{d_i,\boldsymbol{\rho}_i}\right)\right), \tag{37}$$

ただし, $\widehat{\psi}_i$ 及び ψ_i $(i = 1, \cdots, r)$ はそれぞれ $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}$ および $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ の第 i 番目の ψ 類を表す. [23] の最後の主定理は以下のような Witten 予想の「休眠乍」類似である:

定理 11 (cf. [23], Theorem C)**.** 条件 $(**)_{G,p}$ を仮定し, l は g, r, p に関して十分大きいとする[12]. 各 $n \geq -1$ に対し, 次のような微分作用素を考えよう:

$$\begin{aligned} L_n := &- \frac{(2n+3)!!}{2^{n+1}} \frac{\partial}{\partial t_{n+1,\boldsymbol{\varepsilon}}} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+2n+1)!!}{(2i-1)!!2^{n+1}} \left(\sum_{\boldsymbol{\rho} \in \Delta_G} t_{i,\boldsymbol{\rho}} \frac{\partial}{\partial t_{i+n,\boldsymbol{\rho}}} \right) \\ &+ \frac{\sharp(Z)\hbar^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2i+1)!!(2n-2i-1)!!}{2^{n+1}} \left(\sum_{\boldsymbol{\rho} \in \Delta_G} \frac{\partial^2}{\partial t_{i,\boldsymbol{\rho}} \partial t_{n-1-i,\boldsymbol{\rho}^\vee}} \right) \\ &+ \delta_{n,-1} \frac{\hbar^{-2}}{2\sharp(Z)} \left(\sum_{\boldsymbol{\rho} \in \Delta_G} t_{0,\boldsymbol{\rho}} t_{0,\boldsymbol{\rho}^\vee} \right) + \delta_{n,0} \frac{\sharp(\Delta_G)}{16}. \end{aligned} \tag{38}$$

このとき, 任意の $n \geq -1$ に対して次の等式が成り立つ:

$$L_n Z_G^{\mathrm{Zz.}} = 0. \tag{39}$$

7 終わりに

本稿では半単純代数群 G に対する休眠 G 乍の数え上げ幾何学に関する結果をいくつか紹介した. 最後の Witten 予想の類似に関しては, 結果の意義や今後どのように話しが展開されるか（位相的漸化式など）について少しは説明したほうが良かったかもしれない. しかし, そもそも筆者自身がその周辺分野について十分に理解していないこともあり, あまり（間違ったことを書くよりかは）余計なことを書かないでおこうと遠慮させていただいた. また, 定理を主張する際に条件 $(**)_{G,p}$ を仮定した箇所がいくつかあるが, これは $(**)_{G,p}$ が成り立たない G において反例があったり, 本質的にうまくいかない事態なのではなく, 現時点ではこのように条件を狭めた状況でしか示すことが出来ていない, という事情による. 今後, このように余計（?）な条件を取り除いて定理を示すことが必要だろう.

代数学シンポジウムでの講演で紹介したにもかかわらず本稿では扱わなかった話題について少しだけ触れたい. 然るべき特別な乍として Miura 乍なる概念がある[13]. 例えば Riemann 面上の PGL_2 乍は（補足 2 で言及したように）射影構造に対応する一方, Miura PGL_2 乍はいわゆるアフィン構造と呼ばれるものと対応する (cf. [3]). [24] では, Miura PGL_2 乍と代数曲線上の丹後構造と呼ばれる直線束とが一対一対応することを示し, これにより（小平消滅定理の反例となるような）正標数の病理的な代数多様体の高次元変形族を構成した.

この他にも, 完全退化曲線上の休眠 PGL_2 乍は組み合わせ論的対象（スピンネットワーク, 有理凸多面体内にある格子点）と対応付けられることが知られており (cf. [10], [14], [19]), また, [19] では休眠 PGL_2 乍のモジュライに関する（$\mathbb{C}$ 上の類似としての）シンプレクティック幾何的性質について調べている. 定理 9 (i) の明示的公式も含めて, 休眠 PGL_2 乍の理論やその他分野との関連性については, かなり視界が開けてきたといえるだろう. しかし一般の G に対する休眠 G 乍のモジュライはまだ（どのような観点においても）多くのことが分かっていないといえる. 今後こうした一般化を含め, 「休眠 G 乍の数え上げ幾何学」のさらなる発展を目指していく予定である.

最後に, 第 62 回 代数学シンポジウムにて講演の機会を与えてくださったオーガナイザーの皆様に, この場を借りてお礼申し上げたい. そして, 時間があまり割けないなかで本稿を書いたこともあり, 誤字・脱字や数学的間違いなどが散見されるかもしれないことを予めお詫び申し上げたい.

[12] cf. [23], Remark 6.2.3

[13] 例えば Miura GL_n 乍を $\nabla = \frac{d}{dx} - A$ （ただし A は $n \times n$ 行列）として表すならば, A は「対角成分より一段下のラインが全て可逆であり, それ以外は対角成分を除いて全て零である」ものによって定まるものである.

参考文献

[1] A. Beilinson, V. Drinfeld, "Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves." Available at: http://math.uchicago.edu/ mitya/langlands/hitchin/BD-hitchin.pdf

[2] V. G. Drinfeld, V. Sokolov, Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries types. *Journal of Soviet Mathematics* **30** (1985), pp. 1975-2035.

[3] R. C. Gunning, Special coordinate covering of Riemann surfaces. *Math. Ann.* **170** (1967), pp. 67-86.

[4] Y. Hoshi, A note on dormant opers of rank $p-1$ in characteristic p. *RIMS Preprint* **1822** (2015).

[5] Y. Ihara, Schwarzian equations. *Jour. Fac. Sci. Univ. Tokyo* Sect IA Math. **21** (1974), pp. 97-118.

[6] M. Kazarian, S. Lando An algebro-geometric proof of Witten's conjecture. *J. Amer. Math. Soc.* **20** (2007), pp. 1079-1089.

[7] Y.-S. Kim, K. Liu, A simple proof of Witten conjecture through localization. *arXiv: math. AG/0508384*, (2005).

[8] M. Kontsevich, Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function. *Comm. Math. Phys.* **147** (1992), pp. 1-23.

[9] M. Kontsevich, Y. Manin, Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry. *Comm. Math. Phys.* **164** (1994), pp. 525-562.

[10] F. Liu, B. Osserman, Mochizuki's indigenous bundles and Ehrhart polynomials. *J. Algebraic Combin.* **26** (2006), pp. 125-136.

[11] Y. Laszlo, C. Pauly, On the Hitchin morphism in positive characteristic. *Int. Math. Res. Not.* (2001), pp. 129-143.

[12] M. Mirzakhani, Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves. *J. Amer. Math. Soc.* **20** (2007), pp. 1-23.

[13] S. Mochizuki, A theory of ordinary p-adic curves. *Publ. RIMS* **32** (1996), pp. 957-1151.

[14] S. Mochizuki, *Foundations of p-adic Teichmüller theory.* American Mathematical Society, (1999).

[15] A. Ogus, *F-Crystals, Griffiths Transversality, and the Hodge Decomposition.* Astérisque **221**, Soc. Math. de France, (1994).

[16] A. Okounkov, R. Pandharipande Gromov-Witten theory, Hurwitz numbers, and Matrix models, I. *arXiv: math. AG/0101147*, (2001).

[17] B. Osserman, Frobenius-unstable bundles and p-curvature. *Transactions of the Amer. Math. Soc.* **360** (2008), pp. 273-305.

[18] Y. Wakabayashi, An explicit formula for the generic number of dormant indigenous bundles. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **50** (2014), pp. 383-409.

[19] Y. Wakabayashi, Spin networks, Ehrhart quasi-polynomials, and combinatorics of dormant indigenous bundles. *Kyoto J. Math.* 掲載決定済み

[20] Y. Wakabayashi, The symplectic nature of the space of dormant indigenous bundles on algebraic curves. *arXiv: math. AG/1411.1197*, (2014).

[21] Y. Wakabayashi, A theory of dormant opers on pointed stable curves —a proof of Joshi's conjecture—. *arXiv: math. AG/1411.1208v3*, (2016).

[22] Y. Wakabayashi, Duality for dormant opers. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **24** (2017), pp. 271-320.

[23] Y. Wakabayashi, l-adic cohomological field theories of dormant opers. *arXiv: math. AG/1709.04235*, (2017).

[24] Y. Wakabayashi, Moduli of Tango structures and dormant Miura opers. *arXiv: math. AG/1709.04241*, (2017).

[25] E. Witten, Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space. *Surveys in Diff. Geom.* **1** (1991), pp. 243-310.