Artin 表現に付随する保型表現の特徴付け*

山内 卓也 (東北大学)

1 序論

保型形式と数論との関わりの歴史は深くこれまでに蓄積された研究は膨大ではあるが一度, 正則楕円保型形式の範疇を超えるとまだまだ分かっていないことが多い. 正則楕円保型形式の良い所はそれらは一変数の「正則」関数であるという点そして重さ $k(\in \mathbb{Z}_{>0})$ が $k>1$ のときはモジュラー曲線と呼ばれる代数曲線の係数付き Weil コホモロジーの中に様々な形で実現できる点にあり, 代数曲線特有の利点を生かした解析により保型形式の数論的性質をある程度満足いく形で捉えられる. ここで重さ $k>1$ という条件は保型表現の regularity condition に対応する. 楕円保型形式の場合は $k=1$ のときは対応する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ のユニタリ表現が limit of discrete series と呼ばれ discrete series の limit に実際になっている. このことが背景にもあって重さ $k=1$ の場合の解析に $k>1$ の研究が使えることが多々ある. この場合 $(k=1)$ は Weil コホモロジーには実現できないがあるモジュラー曲線上の正則ベクトル束のコホモロジーの元として (実際には大域切断として) 実現されるため代数幾何が援用できる. 一度関数としての「正則」という性質 (regularity のことではない) を外すと問題は劇的に難しくなる. 問題は (有限次の) コホモロジーに実現できなかったり, また実現できたとしてもフーリエ展開の応用上有用な具体的公式があまり整備されていないなど整数論との相性が悪く純解析的手法にのみ頼らざるを得ないというのが現状である.

より一般に代数体 K 上定義された簡約連結代数群 G を考えるとき $G(\mathbb{A}_K)$ の代数的尖点保型表現 π に対してその無限素点におけるユニタリ表現 π_∞ は Langlands によって完全に分類されている [21]. 一般に保型形式 F とは表現 $\pi=\otimes'_v\pi_v$ の表現空間のベクトル v_F のことである. ここから関数を取り出すには $G(K_\infty)$ の表現 $\pi_\infty=\otimes_{v|\infty}\pi_v$ の具体的な実現が必要となる. ベクトル v_F がどのような性質を持つ関数として実現できるかは π_∞ の情報に集約され, その実現に応じてフーリエ展開, Hecke 作用素, 佐竹固有値等の情報を絡めた数論

*第 62 回 代数学シンポジウムにおける講演 (2017 年 9 月 6 日 (水)). 講演タイトルと題目が異なるが本稿の内容は講演の前半部分に相当する. 後半の内容については [18],[17],[19] とその文献を参照されたい.

的性質を導く事が容易かどうかをある程度理解することができる．この周辺の話は [28] が参考になるので興味ある方は是非とも一読されたい．

本稿における我々の興味は保型 L 関数 $L(s,\pi)$ が (有限個を除くすべての素点で) 定義されているとき，これがある Artin 表現の L 関数と有限個を除く局所因子の差を除いて一致するとき，π_∞ の性質を解析することである． とくに G の対称領域が複素構造を持つとき，π_∞ を実現する関数として正則なものが取れるかどうかも議論する．より具体的に $G = GSp_4/\mathbb{Q}, GL_n/\mathbb{Q}$ および $GL_2/K(K/\mathbb{Q}$ 虚 2 次体) のとき，Artin 表現に対応する π_∞ の性質について Henry H. Kim (トロント大) との共著で議論された結果について述べる [15],[16].

まず，我々の研究の動機となった楕円保型形式の場合の簡単にまとめ，次に我々の扱った問題を紹介する．最後に今後の課題・展望などを述べる．

2 Artin 表現

この節に関する一般論は [7] を参照されたい．有理数体 $\mathbb{Q}$ の絶対ガロア群 $G_\mathbb{Q} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の複素係数有限次元連続表現

$$\rho : G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

のことを Artin 表現という[1]．絶対ガロア群 $G_\mathbb{Q}$ は Krull 位相に関してコンパクトな位相群であり，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ には $\mathbb{C}$ から定まる通常の位相を入れる．このとき，$G_\mathbb{Q}$ のコンパクト性から ρ は有限商を経由する即ちある有限次ガロア拡大 $L/\mathbb{Q}$ があって，

$$\begin{tikzcd} G_\mathbb{Q} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\mathrm{res}_L"'] & & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ & \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \arrow[ur, hook, "\rho_L"'] & \end{tikzcd}$$

のように ρ は L への制限を経由する．以下では簡単のため ρ_L も ρ で表すことにする．

L の整数環を $\mathcal{O}_L$ とし素数 p を割る素イデアル v に対して，$D_{p,v} := \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \mid {}^\sigma v = v\}$ を p での分解群という．別の v' を取ると，$\tau \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ であって $v' = {}^\tau v$ 成るものが存在するので $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ 内で $\tau^{-1}D_{p,v}\tau = D_{p,v'}$ が成立する．さて，$\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ は v の剰余体 $\mathbb{F}_v := \mathcal{O}_L/v$ の間の体準同型 $\sigma : \mathbb{F}_v \longrightarrow \mathbb{F}_v$ を引き起こすので準同型 $D_{v,p} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_v/\mathbb{F}_p)$ を誘導するがこれは全射となることが知られている．そこでこの射の核を $I_{p,v}$ と表す:

$$1 \longrightarrow I_{p,v} \longrightarrow D_{p,v} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_v/\mathbb{F}_p) \longrightarrow 1.$$

群 $I_{p,v}$ を p での惰性群という．この群も v に依存しているが $D_{p,v}$ 同様その差は共役である．フロベニウス射 $\mathbb{F}_v \longrightarrow \mathbb{F}_v,\ x \mapsto x^p$ の $D_{p,v}$ への持ち上げを一つ固定し Frob_p で表す．Artin

[1]代数体 K の絶対ガロア群 G_K でも同様に定式化できるが主に今回は $K = \mathbb{Q}$ のみ扱う．

表現 ρ が $\rho(I_{p,v}) = \{1\}$ を満たすとき p で不分岐であるという．これは v の取り方によらない．$L/\mathbb{Q}$ は有限次拡大であるので, ρ は有限個を除く素数 p に対して ρ は不分岐である．Artin 表現 ρ を考えることは $G_{\mathbb{Q}}$ の $V := \mathbb{C}^n$ への $\mathbb{C}$ 線形連続作用が与えられていると見ることができる．惰性群 $I_{p,v}$ は ρ を通して V に作用し, その固定部分を

$$V^{I_{p,v}} := \{x \in V \mid \rho(\sigma)x = x \text{ for all } \sigma \in I_{p,v}\}$$

とする．ここには Frob_p が作用し, その固有多項式は v の選択によらないことが確認できる．このとき ρ に付随する L 関数を次で定義する:

Definition 2.1. 上記 *Artin* 表現 ρ に対して,

$$L(s,\rho) := \prod_p L_p(s,\rho),\ \ L_p(s,\rho) := \det(\mathrm{id}_{V^{I_{p,v}}} - p^{-s}\rho(\mathrm{Frob}_p)|_{V^{I_{p,v}}})^{-1}$$

を ρ の *Artin L* 関数という．ただし, s は複素変数.

Artin L 関数 $L(s,\rho)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ の範囲で絶対収束することが容易に証明でき, さらに, Brauer によって全平面に有理型に解析接続されることが証明されている [2].

Example 2.1. 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の *3* 次多項式 $f(x) := x^3 - x - 1$ の分解体を $L = \mathbb{Q}_f$ とする．S_3 の生成元 $\sigma = (123)$, $\tau = (12)$ を用いて群準同型 *(*S_3 の表現*)* $\iota : S_3 \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を $\iota(\sigma) = \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3^{-1} \end{pmatrix}$, $\iota(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって定義する．ただし, $\zeta_3 = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}$．このとき,

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{L\ \text{への制限}} \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq \mathfrak{S}_3 \xrightarrow{\iota} \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

は *odd* かつ既約 *2* 次元 *Artin* 表現となる．ここで *odd* とは複素共役 c の作用の判別式が -1 となるときをいう (つまり, $\det(\rho(c)) = -1$)．体 $L/\mathbb{Q}$ は $p = 23$ 以外では不分岐であり, $p \neq 23$ のときは $f_p(x) := f(x) \bmod p$ は分離多項式で $\rho(I_{p,v}) = \{1\}$ となる．また, $f_p(x)$ の既約因子の数 $1, 2, 3$ に応じてそれぞれ $D_{p.v} \sim \langle\sigma\rangle$, $\langle\tau\rangle$ および 1 となる．従って, 前述の状況に応じて $a_p := \mathrm{tr}(\rho(\mathrm{Frob}_p)) = -1, 0, 2$ となる．また, $\det(\rho(\mathrm{Frob}_p)) = \left(\frac{p}{23}\right)$ が分かる．よって, $p \neq 23$ のときは

$$L_p(s,\rho) = \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + \left(\frac{p}{23}\right)p^{-2s}}$$

となる．分岐する素数 $p = 23$ のときは $D_{p,v} = I_{p,v} \sim \langle\tau\rangle$ となり, $a_{23} := \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_p|_{V^{I_{p,v}}}) = 1$ を確認することができる．よって,

$$L_{23}(s,\rho) = \frac{1}{1 - 23^{-s}}$$

Definition 2.2. (*Artin* 予想) 自明でない既約 *Artin* 表現 ρ は全平面に正則に解析接続される.

Definition 2.3. (強 *Artin* 予想) 自明でない既約 *Artin* 表現 ρ は保型的, 即ち, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ のある尖点的保型表現 $\pi = \otimes'_p \pi_p$ が存在して有限個を除く p に対して $L(s, \pi_p) = L_p(s, \rho)$ が成り立つ. ただし, $L(s, \pi_p)$ は局所表現 π_p の L 関数である *(cf. [12])*. また,

Example 2.2. 上半空間 $\mathbb{H}$ 上の正則関数 $f_{23}(\tau) = q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)(1-q^{23n}),\ q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ を考える. これは重さ *1*, レベル 23, 指標 $\left(\dfrac{*}{23}\right)$ の尖点的楕円保型形式と呼ばれている. $f_{23}(\tau) = \sum_{n\geq 1} b_n q^n$ とおくと, *Example 2.1* の a_p に対して $a_p = b_p$ がすべての素数 p に対して成り立つ. これは $L(s, \rho)$ が保型的であることを導く. 後で説明するように保型性と尖点性より $L(s, \rho)$ は全平面に解析接続される.

π の尖点性から保型 L 関数 $L(s, \pi) := \prod_p L(s, \pi_p)$ が全平面に正則に解析接続されることが従うので (cf. [12]) 強 Artin 予想は Artin 予想を導く. Artin 予想を証明する方針として保型性を証明することが今の所有力な手段であるが, ρ の像が小さい群からの誘導になっているような良い状況 (例えば像が可解であるなど) になければ保型性を証明することは難しいと思われる. そこで状況を逆手にとって, もし保型表現であってそれが Artin 表現に対応するならばその表現の何等かの性質が反映されていると推測するのは至極当然のことと思われる。

そのような動機の下, 本稿における我々の興味はほとんどすべての素数 p で $L(s, \pi_p) = L_p(s, \rho)$ となっているような π の無限素点 π_∞ を調べることにある. $GL_n, n \geq 3$ の場合は対称空間が複素構造を持たないので冒頭で説明したように π_∞ を実現する関数の正則性自体を論じることはできないが $G = GL_2/\mathbb{Q}$ または $GSp_4/\mathbb{Q}$ の場合は対称空間が複素構造を持つのでその余地がある. 結果的には $GL_2/\mathbb{Q}$ の場合とは違い $GSp_4/\mathbb{Q}$ の場合には正則形式は Artin 表現に対応し得ないことを説明する.

3 $GL_2/\mathbb{Q}$ の場合

この節の内容は専門家には well-known であるが文献は [6] や [10] 等が挙げられる. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の尖点的保型表現を $\pi = \otimes'_p \pi_p$ とする. このとき, ある既約 Artin 表現 $\rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ が存在して, π, ρ が不分岐となる素数 p に対して $L_p(s, \rho) = L(s, \pi_p)$ が成り立っているとする[2]. $n^{\pm} = \dfrac{2 \pm \mathrm{tr}(\rho(c))}{2}$ とおくとき, 無限素点における ρ の局所 L 因子を

$$L_\infty(s, \rho) := \Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{n^+}\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)^{n^-},\ \Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(s)$$

[2] より正確には「π, ρ が不分岐となる有限個を除くすべての素数 p」に対して $L_p(s, \rho) = L(s, \pi_p)$ なる π を考える.

と定義すると (Artin motive に対するガンマ因子の定義に従う [9]), 標準的な L 関数を用いた議論により (cf. Appendix of [24]),

$$L(s,\pi_\infty) = L_\infty(s,\rho)$$

が分かる．一方で $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現の局所 L 因子は良く知られており (cf [22] の 3.3 節), ここから, パラメーターを比べることで

$$\pi_\infty \simeq \begin{cases} \pi(1,\mathrm{sgn}) & \text{if } (n^+,n^-)=(1,1) \\ \pi(1,1) & \text{if } (n^+,n^-)=(2,0) \\ \pi(\mathrm{sgn},\mathrm{sgn}) & \text{if } (n^+,n^-)=(0,2) \end{cases}$$

が分かる．ここで, 連続指標 $\chi_i : \mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times, i=1,2$ に対して, $\pi(\chi_1,\chi_2) := \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{R})}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})}\chi_1\otimes\chi_2$ は上半ボレル $B(\mathbb{R})$ 上の指標 $\chi_1\otimes\chi_2\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix} \mapsto \chi_1(a)\chi_2(d)$ の正規化された誘導表現である．また, sgn は 0 でない実数に対してその符号を与える関数である．表現 $\pi(1,\mathrm{sgn})$ は離散系列表現の極限と呼ばれ, 重さ 1 の正則保型形式を実現する．その一方で, $\pi(1,1)$ や $\pi(\mathrm{sgn},\mathrm{sgn})$ は正則でも反正則でもなく緩増加する C^∞ 級関数の成す空間にしか実現できない．どの表現も Casimir 作用素の固有値は $\dfrac{1}{4}$ であり, これだけでは表現を実現する関数の性質は決まらない．これと指標 sgn が表現のパラメータに現れる数 ($n^\pm$ のこと) をみることで正則性が導かれる．以上の事は代数体 K 上の GL_2/K に対しても容易に考察できる．

無限素点での表現が $\pi(1,\mathrm{sgn})$ となる $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の尖点的保型表現には odd な既約 2 次元 Artin 表現 $\rho : G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ が対応する [8]．逆に odd な既約 2 次元 Artin 表現は保型的であることが Khare-Wintenberger によるセール予想の解決 ([14]) の帰結として証明されている (cf. [20])．その一方で, 既約 2 次元 Artin 表現 $\rho : G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ で even なもの (*odd* でない場合) は予想として無限素点での表現が $\pi(1,1)$ や $\pi(\mathrm{sgn},\mathrm{sgn})$ となる尖点的保型表現が対応すると予想されているが解決には至ってない．またそのような保型表現から Artin 表現を構成する手段も今の所ない．このような表現は代数幾何と関連付けることができないため何らかの抜本的なアイデアが必要である．$\pi(1,1)$ や $\pi(\mathrm{sgn},\mathrm{sgn})$ となる尖点的保型表現は重さ 0 の Maass wave form と呼ばれている．このような Maass wave form に対して Blasius-Ramakrishnan は [1] においてガロア表現が構成できたと主張したが途中の議論で致命的なミス ([1] の Proposition 6.6) を犯していることに気付き主張を撤回している．ここの部分は $GSp_4/\mathbb{Q}$ の節で再び論じる．

even な既約 Artin 表現 ρ の $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ への射影像が二面体群のとき, これに対応する Maass wave form は具体的に構成できる (cf. [3] の Theorem 19.1, p.112)．より一般に Artin 表現の像が可解である場合は底変換 (base chnage) を用いて対応する保型表現を構成することができるが具体的に form を構成できるかどうかは表現の具体的実現と関連しており容易な問題ではない．

4　$GL_n/\mathbb{Q}, n \geq 3$ の場合

この場合も $GL_2/\mathbb{Q}$ の場合と同様であるが対称空間が自然な複素構造 (エルミート構造) を持たない. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の尖点的保型表現を $\pi = \otimes'_p \pi_p$ とする. 前節と同様にして, ある既約 Artin 表現 $\rho : G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が存在して, π, ρ が不分岐となる素数 p に対して $L(s,\rho)_p = L(s,\pi_p)$ が成り立っているとする. $n^{\pm} = \dfrac{n \pm \mathrm{tr}(\rho(c))}{2}$ とおく. このとき, $L(s,\pi_\infty) = L_\infty(s,\rho)$ であり,

$$\pi_\infty \simeq \pi(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) := \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{R})}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \epsilon_1 \otimes \cdots \otimes \epsilon_n,\ \epsilon_i \in \{1, \mathrm{sgn}\}.$$

ただし, $\epsilon_i = 1$ となる数は n^+, $\epsilon_i = \mathrm{sgn}$ となる数は n^- と一致する. $GL_2/\mathbb{Q}$ のときと同じように $GL_3/\mathbb{Q}$ の場合に Artin 表現に対応する保型形式を具体的に構成する方法はあるのか興味深い所である.

5　$GSp_4/\mathbb{Q}$ の場合

この節が論文 [15] の 5 節と命題 9.4 に関連する.

5.1　正則形式と Artin 表現

$G = GSp_4/\mathbb{Q}$ とする (記号は [15],[29] を参照). G の導来群 $G' = [G,G] = Sp_4$ の対称空間は次数 2 のジーゲル上半空間 $\mathbb{H}_2 = \{Z \in M_2(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z,\ \mathrm{Im}(Z) > 0\}$ となり複素構造を備える. 正則なジーゲル形式には重さという概念があり, それは整数の組 $(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2,\ k_1 \geq k_2 \geq 1$ に対応している[3]. 重さ (k_1,k_2) の正則尖点ジーゲル形式 F に保型表現 π が対応していると仮定する. このとき, π に既約な Artin 表現 $\rho : G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$ が対応し得るかどうか考察する. 先ず, CAP 表現と endoscopic 表現の分類より, このような表現は既約 Artin 表現に対応しえないことが分かる. よって, π は CAP でも endoscopic でもないとしてよい. このとき Arthur の分類から GSp_4 の globally generic 表現 π^g が存在して, π と π^g は有限個を除くすべての素点で同値かつ $\{\pi_\infty, \pi^g_\infty\}$ は L-packet となる ([15] の 5 節または [30] の 2 節). もちろん $\pi_\infty = \pi^g_\infty$ の場合もある. この場合 L-packet は singleton である. π^g は generic transfer により GL_4 へ尖点的保型表現 Π として lift されるから GL_4 の時の議論が使えて, π_∞, π^g_∞ のラングランズパラメーター $\tau : W_\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$ と自然な包含関係 $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ との合成は Π_∞ のラングランズパラメーターと一致する ($\mathrm{GSp}_4(\mathbb{R})$ のラングランズパラメーターについては例えば [26] を参照). Π は Artin 表現に対応するという仮定なので, 前節の結果より, $\Pi_\infty = \pi(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4), \epsilon_i \in \{1,\mathrm{sgn}\}$. この内,

[3] $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の代数的表現 $\mathrm{Sym}^{k_1-k_2} \otimes \det^{k_2} \mathrm{St}_2$ と対応.

共役で $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$ に値をとるものと同値になる場合は $(n^+, n^-) = (4,0), (2,2), (0,4)$ のときであり,

$$\pi_\infty \simeq \begin{cases} \pi(1, \mathrm{sgn}, \mathrm{sgn}), \pi(1,1,\mathrm{sgn}), \text{ or } \pi(\mathrm{sgn}, \mathrm{sgn}, \mathrm{sgn}) & \text{if } (n^+, n^-) = (2,2) \\ \pi(1,1,1) & \text{if } (n^+, n^-) = (4,0) \\ \pi(\mathrm{sgn}, \mathrm{sgn}, 1) & \text{if } (n^+, n^-) = (0,4) \end{cases}$$

が分かる. ただし, 右辺は GSp_4 の上半ボレル部分群 B 上の指標

$$\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \chi_3 : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \ \begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & a^{-1}c & * \\ 0 & 0 & 0 & b^{-1}c \end{pmatrix} \mapsto \chi_1(a)\chi_2(b)\chi_3(c)$$

に関する (正規化された) 誘導表現 $\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{R})}^{\mathrm{GSp}_4(\mathbb{R})} \chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \chi_3$ である. 右辺に現れる誘導表現はすべて既約であることは R 群の計算からわかる. 一方 [29] の結果 (Corollary 3.2.3) より π_∞ は上記のいずれとも一致しないことが分かるので正則ジーゲル形式は Artin 表現に対応し得ないことが分かる. 以上纏めると,

Theorem 5.1. (*[15] の 9 節*) *如何なる次数 2 の正則ジーゲル形式にも Artin 表現は対応しない.*

表現 $\pi(1, \mathrm{sgn}, \mathrm{sgn})$, $\pi(1,1,\epsilon)$, $\pi(\mathrm{sgn}, \mathrm{sgn}, \epsilon)$, $\epsilon \in \{1, \mathrm{sgn}\}$ の極小 K タイプの最高ウェイトはそれぞれ $(1,0), (0,0), (-1,-1)$ である. 古典的な重さ ($K_\mathbb{C} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の代数的表現) としてはそれぞれ $\mathrm{Sym}^1 \mathrm{St}_2$, $\mathbf{1}$, $\det^{-1} \mathrm{St}_2$ である.

$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie} Sp_4(\mathbb{R})$ とし, $Z(\mathfrak{g})$ を複素化 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の中心とする. $Z(\mathfrak{g})$ は $\mathbb{C}$ 上の 2 変数多項式でありその生成元を Δ_1, Δ_2 とする ([15] の 4 節参照). 整数 $k_1 \geq k_2$ に対して $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の代数的表現を $W_{(k_1,k_2)} := (\rho_{(k_1,k_2)}, \mathrm{Sym}^{k_1-k_2} \otimes \det^{k_2} \mathbb{C}^2)$ と定める.

複素数 c_1, c_2 および $Sp_4(\mathbb{Z})$ の合同部分群 Γ に対して, $S_{(k_1,k_2)}(\Gamma, c_1, c_2)$ を C^∞ 級緩増加ベクトル値関数 $F : \mathbb{H}_2 \longrightarrow W_{(k_1,k_2)}$ であって, $F(\gamma Z) = \rho_{(k_1,k_2)}(CZ+D)F(Z)$ かつ $\Delta_i F = c_i F$ を満たしかつ尖点的であるもの全体の成す集合とする. Harish-Chandra の結果よりこれは有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間となる. 表現 $\pi(1, \mathrm{sgn}, \mathrm{sgn})$, $\pi(1,1,\epsilon)$, $\pi(\mathrm{sgn}, \mathrm{sgn}, \epsilon)$, $\epsilon \in \{1, \mathrm{sgn}\}$ はそれぞれ

$$S_{(1,0)}(\Gamma, -\frac{5}{12}, 0), \ S_{(0,0)}(\Gamma, -\frac{5}{12}, 0), \ S_{(-1,-1)}(\Gamma, -\frac{5}{12}, 0)$$

に関連する. 微分作用素を用いると, Hecke 作用素と可換な同型

$$S_{(1,0)}(\Gamma, -\frac{5}{12}, 0) \simeq S_{(2,1)}(\Gamma, -\frac{5}{12}, 0)$$

が得られ別の K-type への実現が構成できる. $S_{(2,1)}(\Gamma, -\frac{5}{12}, 0)$ を考えるメリットは L 関数が (adelic form と classical form の間に生じる) 正規化をすること (Hecke 作用素を正規化すること) なしに Artin L 関数と対応するという点がある ([15] の Remark 4.3 と Section 6 を参照). $S_{(0,0)}(\Gamma, -\frac{5}{12}, 0)$ の元は [11], [27], [23] で研究されている.

6 GL_2/K, $K/\mathbb{Q}$ 虚 2 次体の場合 ([16] の 9 節参照)

$K/\mathbb{Q}$ を虚 2 次体とし, $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \{1, \theta\}$ とする. K の $\mathbb{C}$ への埋め込みを ∞_1, ∞_2 とする. π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K)$ の尖点的保型表現とし, ある既約 Artin 表現 $\rho : G_K \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ があって, ほとんどすべての K の有限素点 v に対して, $L(s, \pi_v) = L_v(s, \rho)$ となっているとする. このとき前の議論と同様にして,

$$L(s, \pi_{\infty_1}) = L(s, \pi_{\infty_2}) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$$

が分かる. これは $\pi_{\infty_i} = \pi(1,1),\ i = 1, 2$ を導く.

π の中心指標がノルム写像 $N_{K/\mathbb{Q}}$ を経由するとき, π は $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現に transfer されそれを Asai lift といい $\mathrm{Asai}(\pi)$ で表す. さらに, $\pi \not\simeq \pi \circ \theta$ でないとき, $\mathrm{Asai}(\pi)$ は尖点的であることが分かり, 中心指標の条件から $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の尖点的保型表現に descend する. それを Π と記すと, ラングランズパラメーターの計算により,

$$\Pi_\infty \simeq \pi(1, \mathrm{sgn}, \mathrm{sgn})$$

が分かる. 特に, Π には正則ジーゲル形式は対応しない.

[1] の著者らが採った方針は次の通りである. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の尖点的保型表現 π で重さ 0 の Maass wave form に対応するものをとる. ここから even Artin 表現 $\rho : G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を作りたい訳である. 先ず, 虚 2 次体 K を適切に選び, 底変換で $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K)$ の尖点的保型表現 $\mathrm{BC}(\pi)$ を作る. これを上記方法で $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ に decend し, それを Π とすると, 上述したようにやはり $\Pi_\infty \simeq \pi(1, \mathrm{sgn}, \mathrm{sgn})$ となり正則形式はどうがんばっても対応し得ないことがわかる. 特に [1] の命題 6.6 は誤りである.

7 今後の課題

$GSp_4/\mathbb{Q}$ の場合に Artin 表現に対応する保型形式の type を分類したが結局それらには正則ジーゲル形式は対応し得ないことが分かった. このことが引き起こす問題点は代数幾何が援用できないということにある. しかし [4] [13] の著者らはこのような代数幾何が直接使えないような状況において, ペンローズ変換という複素解析的な対応を用いて, 上記の

Artin 表現に対応すべき保型形式が正則な保型形式のある種のペアリングとして記述できることを証明した ([4] では $U(2,1)/\mathbb{Q}$ が扱われている).

$G = GSp_4/\mathbb{Q}$ の場合, $D = Sp_4(\mathbb{R})/H,\ H := U(1) \times U(1)$ とおくとこれは 4 次元複素多様体の構造が入ることが分かる. $\mathrm{Lie}(H)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}H_1^* \oplus \mathbb{C}H_2^*$ とおく. ただし,

$$H_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ H_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mu = (\mu_1, \mu_2) \in X^*(\mathrm{Lie}H_{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}H_1 \oplus \mathbb{Z}H_2 \simeq \mathbb{Z}^2$ に対して,

$$\mathcal{L}_\mu := Sp_4(\mathbb{R}) \times_H \mathbb{C}_\mu/(ge^h, z) \sim (g, e^{\langle \mu, h \rangle} z)$$

の様に D 上の直線束を定める. ただし, ペアリング $\langle *, * \rangle$ は $\langle H_i, H_i^* \rangle = 2\pi\sqrt{-1},\ i = 1, 2$ となるように定められる. また $\mathbb{C}_\mu$ は H の 1 次元表現 $\mathbb{C}$ で $h' = \exp(h) \in H, h \in \mathrm{Lie}(H)_{\mathbb{C}}$ の作用が $e^{\langle \mu, h \rangle}$ で与えられるものである. Section 5 で論じた $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現 $\pi(1, \mathrm{sgn}, \mathrm{sgn})$ を $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$ に制限したものは (完全) 可約でありその既約因子の minimal K-type が $(1, 0)$ のものを $V_{(0, C_{II})}$ とする. 一方, $\pi(1, 1, 1)$ を $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$ に制限したものは既約であり, それを $V_{(0, C_I)}$ とする. この場合の minimal K-type は前に見た通り $(0, 0)$ である (記号の意味は [13] の命題 3.11 等参照). このとき次が知られている:

Theorem 7.1. (*[13] の定理 5.4,p.224*) Γ を $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ の *cocompact lattice,* すなわち $\Gamma\backslash\mathbb{H}_2$ がコンパクトとなる *arithmetic subgroup* とする. このとき次が成り立つ*:*

1. $H^3(\Gamma\backslash D, \mathcal{L}_{(-2,-1)})$ に $V_{(0,C_I)}, V_{(0,C_{II})}$ が寄与する.

2. $k \geq 5$ に対して $(\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ 双線形な同型

$$S_{(k,k)}(\Gamma) \otimes S_{(k+1,k)}(\Gamma) \simeq H^3(\Gamma\backslash D, \mathcal{L}_{(-2,-1)})$$

が存在する.

ただし, 右辺は層係数のコホモロジーであり左辺は正則ジーゲル形式である.

このように, 解析的な対応を通して Artin 表現に対応すると期待される保型形式を正則ジーゲル形式で記述することができる. 問題をここから以下にして代数的な量を抽出するかである. Carayol は $U(2,1)$ の場合に CM 点を用いてこれを試みている. ジーゲルの場合にも様々な部分志村多様体が存在するのでそこの値での評価で関数の代数性を調べる方法が考えられるであろう. 何にせよ関数の実現とそのなんらかのフーリエ展開 (実解析的な

ので Whittaker function の明示公式) が必要で $V_{(0,C_I)}$ の場合に [11], [27] 等により確立された理論を [25] を用いて $V_{(0,C_{II})}$ の場合 (この場合は 2 次元ベクトル値関数) に拡張しそれを用いてフーリエ展開や L 関数の理論を確立することが取り敢えずやるべきことであるというのが私見である (cf. [28] の spilit も参照されたい).

Remark 7.2. *Section 5* で論じた $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{R})$ のユニタリ表現は *Totally degenerate limit of discrete series* (略して *TDLDS*) と呼ばれている *[5].*

8 Artin 表現構成に必要な条件

この節の内容は [15],[16] の主な内容と関連する. Artin 表現に対応する保型表現の無限素点のタイプは理解できたので, そのような無限素点をもつ保型表現 π からスタートして実際に Artin 表現を作るには今の所, 次の (厳しい) 条件が必要となる;

1. Hecke 固有値の代数的整数性
2. 保型表現のガロア捻りの存在
3. 有限個を除く ℓ に対して mod ℓ ガロア表現の存在

いずれの条件も $GL_2/\mathbb{Q},\ \pi_\infty \simeq \pi(1, \mathrm{sgn})$ の場合を除いて証明することが現在の技術では非常に難しいというのが私見である. これらの条件を仮定すれば Rankin-Selberg L 関数と有限群の部分群の構造に関する一般論から Artin 表現の存在が従う (cf. [15],[16]).

9 謝辞

講演の機会を与えてくださいました成田 宏秋さん, 中村 健太郎さん, 市川 尚志先生, およびプログラム責任者の方々に感謝を申し上げます. また講演後いろいろと有益な質問をしてくださいました成田 宏秋さん, 田口雄一郎先生, および, Carayol, Kerr 等の仕事の重要性を指摘し研究を励ましてくださいました足利正先生に感謝申し上げます.

参考文献

[1] D. Blasius and D. Ramakrishnan, Maass forms and Galois representations in Galois Groups over $\mathbb{Q}$, ed. by Y. Ihara, K. Ribet, an d J.-P. Serre, Math. S.Res. Inst. Pub .116, Springer-Verlag, New York, 1989, 33-77.

[2] R. Brauer, On Artin's L-series with general group characters, Ann. Math. 48 (1947), 502-514.

[3] D. Bump, Automorphic forms and representations, Cambridge University Press.

[4] H. Carayol, Limites dégénérées de séries discrètes, formes automorphes et variétés de Griffiths-Schmid:le cas du groupe $U(2,1)$, Compositio Mathematica 111: 51-88, 1998.

[5] H. Carayol and A. W. Knapp, *Limits of discrete series with infinitesimal character zero*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 5611-5651.

[6] W. Casselman, GL_n, Algebraic number fields: L-functions and Galois properties. In: Algebraic number fields: L-functions and Galois properties. In: Proceedings of Symposium, University of Durham, Durham, 1975), pp. 663-704, Academic Press, London (1977).

[7] J-W. Cogdell, L-functions and non-abelian class fiels theory, from Artin to Langlands, Emil Artin and Beyond – Class Field Theory and L-functions (D. Dumbaugh and J. Schwermer, Eds.), EMS.

[8] P. Deligne and J-P. Serre, *Formes modulaires de poids 1*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **7** (1974), 507–530.

[9] C. Deninger, L-functions of mixed motives, Proceedings of Symposia in Pure math Volume 55 (1994), Part 1, 517-525.

[10] S. Gelbart, three lectures on the modularity of $\overline{\rho}_{E,3}$ and the Langlands reciprocity conjecture, Modular Forms and Fermat ' s Last Theorem pp 155-207.

[11] A. Hori, Andrianov's L -functions associated to Siegel wave forms of degree two. Math. Ann. **303** (1995), 195–226.

[12] H. Jacquet, *Automorphic forms and automorphic representations*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, 1977, Part 1, 189–207.

[13] M. Kerr, *Cup products in automorphic cohomology: the case of* Sp_4, in Hodge Theory, Complex Geometry, and Representation Theory (Doran, Friedman, Nollet, Eds.), Contemp. Math. 608, AMS, Providence, 2014, 199-234.

[14] C. Khare and J-P. Wintenberger, *Serre's modularity conjecture I, II*, Invent. Math. **178** (2009), 485–504; 505–586.

[15] H. Kim and T. Yamauchi, A conditional construction of Artin representations for real analytic Siegel cusp forms of weight $(2,1)$, Contemporary Mathematics Volume 664, 2016, http://dx.doi.org/10.1090/conm/664/13061

[16] H. Kim and T. Yamauchi, A uniform structure on subgroups of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ and its application to a conditional construction of Artin representations of GL_n,Journal of the Ramanujan Mathematical Society Volume 32, Issue 1, March 2017 pp. 75-99.

[17] H. Kim and T. Yamauchi, Cusp forms on the exceptional group of type E_7, Compositio math, Volume 152, Issue 2 February 2016 , pp. 223-254.

[18] H. Kim and T. Yamauchi, Ikeda type construction of cusp forms, 数理解析研究所講究録数理解析研究所講究録 1973, 162-178, 2015-11.

[19] H. Kim and T. Yamauchi, Higher level cusp forms on the exceptional group of type E_7, arXiv:1711.03785.

[20] M. Kisin, *Modularity of 2-adic Barsotti-Tate representations*, Invent. Math. **178** (2009), 587–634.

[21] R. Langlands, On the classification of irreducible representations of real algebraic groups, mimeographed notes, Institute for Advanced Study, 1973; in P. J. Sally and D. A. Vogan (eds.), Representation Theory and Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups, Math. Surveys and Monographs, 31, American Mathematical Society, Providence, 1989, pp. 101-170.

[22] 今野拓也, GL_2 の保型形式と L 関数, 第 16 回整数論サマースクール報告集.

[23] N. Kurokawa, Siegel wave forms and Kronecker limit formula without absolute value, 数理解析研究所講究録 792 巻 1992 年 64-133.

[24] K. Martin, Four-dimensional Galois representations of solvable type and automorphic forms, thesis.

[25] T. Miyazaki and T. Oda, *Principal series Whittaker functions on $Sp(2,\mathbb{R})$. Explicit formulae of differential equations*, Automorphic forms and related topics (Seoul, 1993), 59–92.

[26] T. Moriyama, *L-functions for $GSp(2)\times GL(2)$; Archimedean Theory and Applications*, Can. J. Math. **61** (2009), 395–426.

[27] S. Niwa, On generalized Whittaker functions on Siegel's upper half space of degree 2, Nagoya math. J, vol. 121 (1991), 171-184.

[28] 織田孝幸, 保型形式の数論のための実解析, 雑誌数学, 50 巻 (1998) 4 号 p. 350-357.

[29] R. Schmidt, *Lowest weight vectors in induced representations of* $GSp(4, \mathbb{R})$, Preprint.

[30] R. Schmidt, Packet structure and paramodular forms, Transactions of the American mathematical society, http://dx.doi.org/10.1090/tran/7028 Article electronically published on October 24, 2017

山内卓也
東北大学大学院 理学研究科
e-mail: yamauchi@math.tohoku.ac.jp