GROUP CHARACTEROIDS AND QUIVER REPRESENTATIONS

山口大学 飯寄信保（Nobuo Iiyori. Yamaguchi University)

今回の講演の内容は、千葉大学の澤辺正人さんとの共同研究の一部です。澤辺さんとは、有限群の部分群束の構造をいろいろな視点から考察しています。例えば, 部分群束を単体的複体と捉え、その幾何構造について素数グラフなどの視点などから考察をしています。今回は、部分群束をクイバーと考え，その表現を用いて群の指標について考察していきたいと思います。

記号等.

・$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$\pi(n) := \{p : \mathrm{prime} |\ p|n\}$
・素数からなる集合 π : に対し，$n_\pi \in \mathbb{N}$ は次の 3 つの条件 $(1) n_\pi | n, \quad (2) \pi(n_\pi) \subseteq \pi, \quad (3) \pi(n/n_\pi) \cap \pi = \emptyset.$ を満たす正整数とする。
・$\pi(G) = \pi(|G|)$,
・$G_\pi = \{x \in G | x^{|G|_\pi} = 1\}$,
・$\pi' = \pi(G) - \pi$,
・ただ一つの素数からなる集合 $\{p\}$ は，単に p と表す。

そのほかの記号等については必要な時に説明します。

Definiteion of a Quiver.

定義　四つ組 $Q = (Q_0,\ Q_1,\ (s : Q_1 \to Q_0),\ (r : Q_1 \to Q_0))$ が次の 2 つの条件を満たすとき quiver と呼ぶ。
(1)$Q_0\ (\neq \emptyset),\ Q_1 =$ は集合である。
(2)$s,\ r$ は，Q_1 から Q_0 への写像である。

Q_0 の元を point と呼び，Q_1 の元を arrow と呼ぶ。また，arrow $\alpha \in Q_1$ に対し，$s(\alpha) = a$ かつ $r(\alpha) = b$ のとき，$a \xrightarrow{\alpha} b$ or $\alpha = (a \to b)$ で表す。arrow の有限列 $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_k$ で条件 $r(\alpha_l) = s(\alpha_{l+1})$ for $1 \leq l \leq k-1$ を満たすものを path と呼ぶ。

クイバー Q から直接得られる重要な 2 つのクイバーを紹介します。

定義.　$Q = (Q_0,\ Q_1,\ (s : Q_1 \to Q_0),\ (r : Q_1 \to Q_0))$ を quiver とする。各 $\alpha = (a \to b) \in Q_1$ に対し，シンボル ${}^t\alpha$ を作り，$Q_1^{\mathrm{op}} := \{{}^t\alpha \mid \alpha \in Q_1\}$ とする（$Q_1 \cap Q_1^{\mathrm{op}} = \emptyset$ に注意する）。写像 $\widetilde{s},\ \widetilde{r}$ を次のように定める。

$$\widetilde{s} : Q_1^{\mathrm{op}} \longrightarrow Q_0\ (\widetilde{s}({}^t\alpha) := r(\alpha)) \widetilde{r} : Q_1^{\mathrm{op}} \longrightarrow Q_0\ (\widetilde{r}({}^t\alpha) := s(\alpha))$$

このとき， $Q^{\mathrm{op}} := (Q_0, Q_1^{\mathrm{op}}, \widetilde{s}, \widetilde{r})$ を Q の opposite という。

Date: December 25, 2017.

定義. $Q=(Q_0,\ Q_1,\ (s:Q_1\to Q_0),\ (r:Q_1\to Q_0))$ を quiver とし，$Q^{\mathrm{op}}:=(Q_0,Q_1^{\mathrm{op}},\widetilde{s},\widetilde{r})$ を Q の opposite とする。Q の UD-quiver$Q^{\mathrm{ud}}=(Q_0^{\mathrm{ud}},\ Q_1^{\mathrm{ud}},\ s^{\mathrm{ud}},\ r^{\mathrm{ud}})$ は，次の式で定義される quiver である：$Q_0^{\mathrm{ud}}=Q_0,\quad Q_1^{\mathrm{ud}}=Q_1\cup Q_1^{\mathrm{op}}$,

$$s^{\mathrm{ud}}(\alpha)=\begin{cases} s(\alpha) & \text{if } \alpha\in Q_1\\ \widetilde{s}(\alpha) & \text{if } \alpha\in Q_1^{\mathrm{op}}\end{cases}\quad\text{and}\quad r^{\mathrm{ud}}(\alpha)=\begin{cases} r(\alpha) & \text{if } \alpha\in Q_1\\ \widetilde{r}(\alpha) & \text{if } \alpha\in Q_1^{\mathrm{op}}.\end{cases}$$

また，アップダウンクイバーにおいては，パス $\gamma=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$ の oppsite は ${}^t\gamma={}^t\alpha_k{}^t\alpha_{k-1}\cdots{}^t\alpha_1$,（ここで， ${}^t({}^t\alpha)=\alpha$ である）で定まるパスとする。

今回の話では，次に示す例の形でクイバーが用いられます。

例（poset の quiver）.
$\mathcal{P}\,(=(\mathcal{P},\leq))$ poset とし，$\mathcal{P}_0=\mathcal{P}$，$\mathcal{P}_1=\{a\to b|a,b\in\mathcal{P}\text{ and }b\lneq a\}$ とおく。$Q_{\mathcal{P}}$ あるいは，$\mathcal{P}=(\mathcal{P}_0,\mathcal{P}_1,s,r)$ を poset $\mathcal{P}$ の quiver と呼ぶ。

さて，G を有限群，$\mathrm{Sgp}(G)$ を G の部分群全体とする。$(\mathrm{Sgp}(G),\leq)\ (=\mathrm{Sgp}(G))$ として poset とみる（ G の部分群束と呼ぶ)。quiver $Q_{\mathrm{Sgp}(G)}$ が今回の話の主対象である。

Quiver の表現の定義等.

R を可換環とする。$\mathcal{F}$ が quiver$Q$ の R 上の表現であるとは，各 $a\in Q_0$ に対し $\mathcal{F}_a$ は有限集合 (あるいは R-module, R-algebra) であり，各 $\alpha=(a\to b)\in Q_1$ に対して $\mathcal{F}_\alpha=\mathcal{F}_{(a\to b)}:R[\mathcal{F}_a]\longrightarrow R[\mathcal{F}_b]$ （または $\mathcal{F}_a\longrightarrow\mathcal{F}_b$) が R-準同形となることを意味する。また，各パス $\gamma=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$ に対し，$\mathcal{F}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}=\mathcal{F}_{\alpha_k}\circ\mathcal{F}_{\alpha_{k-1}}\circ\cdots\circ\mathcal{F}_{\alpha_1}$ と定義しておく。

可換環 $\mathfrak{B}_n(G)$.

G を有限群，n を正整数，$L_n(G):=\{x\in G|x^n=1\}$ とおき，$\mathbb{Z}$-代数　$\mathfrak{B}_n(G)$ を

$$\mathfrak{B}_n(G)=\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{\varphi\big|_{L_n(G)}|\varphi\in\mathrm{Irr}(G)\}.$$

と定める。 この可換代数について基本的な事項は以下の通りである。

補題
(1) $\mathfrak{B}_n(G)$ は，指標環の演算により自然に $\mathbb{Z}$-代数となる。
(2) 2 つの正整数 $m|n$ と部分群 $K\leq H\leq G$ に対し，制限写像 $\mathrm{Res}^{(H,n)}_{(K,m)}:\mathfrak{B}_n(G)\to\mathfrak{B}_m(G)$ を

$$\mathrm{Res}^{(H,n)}_{(K,m)}(f)=f|_{L_m(K).}$$

と定義することができ，これは $\mathbb{Z}$-準同形である。
(3)$X\subseteq G$ に対し

$$\mathrm{C}(X):=\{D\subseteq X|D:G\text{-共役類}\}$$

とおくと

$$\mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_n(G)\simeq\mathbb{C}^{|\mathrm{C}(L_n(G))|}.$$

が成り立つ。

さて，$\mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_n(G)$ 上には非退化な Hremitian 積が次のように定義できる。 $f, g \in \mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_n(G)$ に対し

$$[f,g]_{(G,n)} := \frac{1}{(|G|,n)} \sum_{x\in L_n(G)} f(x)\overline{g(x)}.$$

この内積について次の重要な性質が成り立ちます。

定理 (Frobenius propoerty)
$K \le H \le G$ を G の部分群，m, n を $m|n$ なる 2 つの正整数とする。$f \in \mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_m(K)$ に対して

$$\mathrm{Ind}_{(K,m)}^{(H,n)}(f) := \frac{(|H|,n)}{(|K|,m)}\left(\frac{|H|}{|K|}\right)^{-1} \sum_{D\in \mathrm{C}(L_m(K))} f(x_D) \sum_{t\in K\backslash H} \chi_{D^t}^{L_n(H)},$$

ここで $x_D \in D$ は $D \in C(L_m(K)$ の代表元とし，$B \subseteq A$ に対し χ_B^A は B の A における特性関数とする。このとき $\mathrm{Ind}_{(K,m)}^{(H,n)}$ は $\mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_m(K)$ から $\mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_n(H)$ への $\mathbb{C}$-線形写像であり、次を満たす。各 $f \in \mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_n(H)$ と $g \in \mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_m(K)$ に対し

$$[f,\ \mathrm{Ind}_{(K,m)}^{(H,\ n)}(g)]_{(H,n)} = [\mathrm{Res}_{(K,m)}^{(H,n)}(f),\ g]_{(K,m)}$$

Remark. 上で $m = n = |G|$ のとき，我々の Frobenius property は通常指標における Frobenius reciprocity と一致する。講演においては $\mathrm{Ind}_{(K,m)}^{(H,n)}(f)$ の式につて誤ったものを紹介しましたが，訂正いたします。

Generalized π-Brauer Characeroids.

G を有限群とし，$\pi \subseteq \pi(G)$ をとる。

$$\mathfrak{B}_\pi(G) := \mathfrak{B}_{|G|_{\pi'}}(G) \text{ および } [*,*]_{(G,\pi)} = [*,*]_{(G,|G|_{\pi'})}.$$

のように記号を定義しておく。
$\mathfrak{B}_\pi(G)$ に属する類関数を G の *generalized π-Brauer characteroid* と呼ぶことにする。特に $\pi = \{p\}$ のとき，generalized p-Brauer characteroid は一般 p-Brauer 指標 と一致する。この generalized π-Brauer characteroid　の特徴づけとして次が挙げられる。

命題　2 整数 a, b を $a|G|_\pi + b|G|_{\pi'} = 1$ のように選ぶ。bZ-線形写像$\hat{}: \mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_\pi(G) \to \mathbb{C}\otimes\mathbb{Z}[\mathrm{Irr}(G)]$ を次のように定める。

$$\hat{f}(x) := f(x^{a|G|_\pi}).$$

このとき $f \in \mathfrak{B}_\pi(G) \iff \hat{f} \in \mathbb{Z}[\mathrm{Irr}(G)]$ が成り立つ。

この generalized p-Brauer characteroid の重要な性質として次がある。

定理　$\pi_1 \subseteq \pi_2 \subseteq \pi(G)$ とする。

$$\mathrm{Ind}_{(H,|H|_{\pi_2'})}^{(H,|H|_{\pi_1'})}\Big|_{\mathfrak{B}_{\pi_2}(H)} \subseteq \mathfrak{B}_{\pi_1}(H).$$

以下，

$$\mathrm{Ind}_{(K,\pi_2)}^{(H,\pi_1)} := \mathrm{Ind}_{(K,|K|_{\pi_2'})}^{(H,|H|_{\pi_1'})} \quad \text{および} \quad \mathrm{ind}_{(K,\pi_2)}^{(H,\pi_1)} := \mathrm{Ind}_{(K,\pi_2)}^{(H,\pi_1)}|_{\mathfrak{B}_{\pi_2}(K)}.$$

$$\mathrm{Res}_{(K,\pi_2)}^{(H,\pi_1)} := \mathrm{Res}_{(K,|K|_{\pi_2'})}^{(H,|H|_{\pi_1'})} \quad \text{および} \quad \mathrm{res}_{(K,\pi_2)}^{(H,\pi_1)} := \mathrm{Res}_{(K,\pi_2)}^{(H,\pi_1)}|_{\mathfrak{B}_{\pi_1}(H)}.$$

のように記号を整理しておく。次は，characteroid が通常の指標と似通った性質をもつことの示しているものである。

定理　$\langle[\mathfrak{B}_\pi(G),\ \mathfrak{B}_\pi(G)]_{(G,\pi)}\rangle = \mathbb{Z}$.

Quivers of our cases.

これまでの事柄がクイバーの表現を用いてそのように整理できるかを説明する。次の 3 つのクイバーがターゲットである。

$$\text{(i) } Q_{\mathrm{Sgp}(G)\times(\mathbb{Z},\ |\ )},\ \text{(ii) } Q_{\mathrm{Sgp}(G)\times(\{n\in\mathbb{Z}_{>0} | n \big| |G|\},|\ )},\ \text{(iii) } Q_{\mathrm{Sgp}(G)\times 2^{\pi(G)}}.$$

(ii) は (i) の部分クイバーである。(iii) の 2^π の poset のオーダーリングは通常のものと逆なものを採用している。Q' を (i)∼(iii) または $Q = (Q')^{\mathrm{ud}}$ のクイバーのどれか一つとする。点 $a(= (H, n)$ あるいは $(H, \pi)) \in Q_0$ と矢 $\alpha \in Q_1$ に対し，

$$\mathcal{F}_a = \mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_n(H) \text{ or } \mathfrak{B}_\pi(H), \quad \mathcal{F}_\alpha = \begin{cases} \mathrm{res}^{s(\alpha)}_{r(\alpha)} & \text{if } \alpha \in Q'_1 \\ \mathrm{ind}^{s(\alpha)}_{r(\alpha)} & \text{if } \alpha \in (Q')^{\mathrm{op}}_1 \end{cases}$$

とする。このとき，$\mathcal{F}$ は Q の表現となる。この準備の下で，次の定理が成立つ。

定理　γ を Q の path とする。任意の $f \in \mathcal{F}_{s(\gamma)}$ と $g \in \mathcal{F}_{r(\gamma)}$ に対し次が成立する。

$$[\mathcal{F}_\gamma(f),\ g]_{\mathcal{F}_{r(\gamma)}} = [f, \mathcal{F}_{{}^t\gamma}(g)]_{\mathcal{F}_{s(\gamma)}}.$$

系　$\pi_3 \subseteq \pi_1, \pi_2 \subseteq \pi(G)$ と $H, K \le L \le G$ に対し次が成立する。

$$[f, \mathrm{res}^{(L,\pi_3)}_{(H,\pi_1)}\mathrm{ind}^{(L,\pi_3)}_{(K,\pi_2)}(g)]_{(H,\pi_1)} = [\mathrm{res}^{(L,\pi_3)}_{(K,\pi_2)}\mathrm{ind}^{(L,\pi_3)}_{(H,\pi_1)}(f),\ g]_{(K,\pi_2)}$$

ただし，$f \in \mathfrak{B}_{\pi_1}(H)$，$g \in \mathfrak{B}_{\pi_2}(K)$ とする。

系　　$p, q \in \pi \subseteq \pi(G)$ および $H, K \le H \le G$ とする。$f \in \mathbb{Z}[p-\mathrm{IBr}(H)],\ g \in \mathbb{Z}[q-\mathrm{IBr}(K)]$ に対して，次が成立する。

$$[f, \mathrm{res}^{(L,\pi)}_{(H,p)}\mathrm{ind}^{(L,\pi)}_{(K,q)}(g)]_{(H,p)} = [\mathrm{res}^{(L,\pi)}_{(K,q)}\mathrm{ind}^{(L,\pi)}_{(H,p)}(f),\ g]_{(K,q)}$$

Application.

以上の話と通常の群論との関係は次の定理がもっとも重要なものと思われる。ただし，上で紹介した定理を書き換えたものに過ぎない。

定理　G を有限群，$\pi \subseteq \pi(G)$ とする。このとき任意の一般指標 f, g に対し

$$\sum_{x\in G_\pi} f(x)\overline{g(x)} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ |G|_\pi)$$

が成立する。

上の定理は群指標の初歩的な教科書に書かれるべき極めて基本的な性質のように私は思う。

References

[1] N. Iiyori and M. Sawabe, Representations of path algebras with applications to subgroup lattices and group characters, *Tokyo J. Math.* **37** (2014), 37–59.

[2] N. Iiyori and M. Sawabe, Simplicial complexes associated to quivers arising from finite groups, *Osaka J. Math.* **52** (2015), 161–204.

[3] N. Iiyori and M. Sawabe, Partially ordered sets of non-trivial nilpotent π-subgroups, *Osaka J. Math.* **53** (2016), 731–750.

[4] N. Iiyori and M. Sawabe, Homology of a certain associative algebra, *Hokkaido Math. J.* **46** (2017), 227–256.

[5] N. Iiyori and M. Sawabe, Partially ordered sets of non-trivial nilpotent π-subgroups II, *Topology Appl.* **231** (2017), 197–218.

[6] N. Iiyori and M. Sawabe, Homology of the complex of all non-trivial nilpotent subgroups of a finite non-solvable group, *Tokyo J. Math.*, in press

[7] N. Iiyori and M. Sawabe, Class functions related to Brauer characters and quiver representations, preprint.

[8] N. Iiyori and M. Sawabe, Representations of quivers with applications to finite groups, preprint.

[9] I.M. Isaacs, “Character theory of finite groups”, Corrected reprint of the 1976 original, Dover Publications, New York, (1994).

[10] G. Navarro, “Characters and blocks of finite groups”, London Mathematical Society Lecture Note Series, **250**, Cambridge University Press, Cambridge, (1998).