Schur の分割定理の一般化について

東京大学大学院数理科学研究科　土岡俊介 (Shunsuke Tsuchioka)*

1　イントロダクション

I.Schur(1875–1941) は 1926 年に次の分割定理を証明した．

定理 1.1 (Schur 分割定理，Schur partition theorem, **SPT**)．$n \geq 0$ について，以下の条件を満たす n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell)$ は，それぞれ同数存在する．

(a) 任意の $1 \leq i \leq \ell$ について $\lambda_i \equiv \pm 1 \pmod 6$

(b) 任意の $1 \leq i < \ell$ について $\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 3$ が成り立ち，$\lambda_i \in 3\mathbb{Z}$ のとき $\geq$ は $>$.

分割についての記法を確認する．$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell)$ が分割 (partition) であるとは，各 λ_i たち（λ のパートと呼ぶ）は整数であって，さらに $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_\ell \geq 1$ が成り立つことである．また $\ell(\lambda) := \ell$, $|\lambda| := \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i$, $m_j(\lambda) := |\{1 \leq i \leq \ell \mid \lambda_i = j\}|$（$|S|$ によって有限集合 S の元の個数を表す）と設定して，それぞれ λ の長さ，λ のサイズ，λ 中の j の重複度と呼ぶ．

λ が自然数 $n \geq 0$ の分割であるとは，$|\lambda| = n$ となることをいう．n の分割の集合を $\mathsf{Par}(n)$ と表し，分割の集合を Par と書く．

▌ 分割定理のテンプレート　$\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \mathsf{Par}$ について，$\forall n \geq 0, |\mathcal{C} \cap \mathsf{Par}(n)| = |\mathcal{D} \cap \mathsf{Par}(n)|$.

本稿で分割定理 (partition theorem, **PT**) とは，上の形の命題「うまく分割のクラス $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を設定すれば,「$\mathcal{C}$ な」n の分割と「$\mathcal{D}$ な」n の分割は同数ある」という主張を意味し，$\mathcal{C} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathcal{D}$ と書く．

2　Euler 分割定理

古い分割定理に，Euler によるとされる Strict $\overset{\mathrm{PT}}{\sim}$ Odd がある．ここで，ストリクト分割 (strict partitions)，奇数分割 (odd partitions) と呼ばれる分割の集合 Strict と Odd は

$$\mathrm{Strict} := \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \forall i \geq 1,\ m_i(\lambda) \leq 1\}, \quad \mathrm{Odd} := \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \forall i \geq 1,\ m_{2i}(\lambda) = 0\}$$

と定義される．証明として，ここでは母関数によるものを思い出そう．つまり，$\mathcal{C} \subseteq \mathsf{Par}$ について

$$g_{\mathcal{C}}(q) := \sum_{n \geq 0} |\mathcal{C} \cap \mathsf{Par}(n)| q^n \ (= \sum_{\lambda \in \mathcal{C}} q^{|\lambda|}) \tag{1}$$

としたとき，形式的べき級数の等式 $g_{\mathrm{Strict}} = g_{\mathrm{Odd}}$ を示せばよい．積展開の意味を考えると

$$g_{\mathrm{Strict}}(q) = \prod_{i \geq 1} (1 + q^i), \quad g_{\mathrm{Odd}}(q) = \prod_{i\, \geq\, 1\,:\,\text{奇数}} \frac{1}{1 - q^i}$$

が分かり，この表示から $g_{\mathrm{Strict}} = g_{\mathrm{Odd}}$ が示される．

*tshun@kurims.kyoto-u.ac.jp, The research was supported by JSPS Kakenhi Grants 17K14154.

3 Rogers-Ramanujan 連分数・恒等式・分割定理

SPT は，より有名な Rogers-Ramanujan 分割定理（RRPT）の mod 6 版である．Ramanujan が Hardy に送った手紙中の以下の公式が，話の発端である（Hardy の回想は印象的だ [Har]）．

定理 3.1 (Rogers-Ramanujan 連分数)**.**

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{\ddots}}} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) e^{2\pi/5}.$$

唐突だが，(2) を満たす形式的べき級数 $F(x,q)$ を考える：

$$F(x,q) = F(xq,q) + xqF(xq^2,q). \tag{2}$$

(2) より，$c(x,q) := \frac{F(x,q)}{F(xq,q)}$ は入れ子構造

$$c(x,q) = 1 + \frac{xq}{c(xq,q)} = 1 + \frac{xq}{1+\frac{xq^2}{c(xq^2,q)}} = \cdots$$

を持ち，RR 連分数の左辺は $1/c(1,e^{-2\pi})$ となる．特に，$F(1,q)$ と $F(q,q)$ を理解すればよい．

定理 3.2 (Rogers-Ramanujan 恒等式)**.**

$$\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2}}{(1-q)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n\geq 0} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}$$
$$\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n\geq 0} \frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})}.$$

ここで左辺の無限和は，$F(1,q), F(q,q)$ の一種である．これは $F(x,q) = \sum_{n\geq 0} A_n(q)x^n$ とすると

$$A_n(q) = q^n A_n(q) + q^{2n-1}A_{n-1}(q)$$

が (2) よりえられるので，$A_0(q) = 1$ であれば

$$A_n(q) = \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}$$

であるからだ．RR 恒等式は初等的な見かけをしているが，Hardy 周辺の数学者は証明できなかった．実際，1915 年に出版された MacMahon の *Combinatory Analysis* には，「Ramanujan の等式」という章があるが，そこでは予想として紹介されている．Ramanujan は 1917 年に Proc.LMS をめくっていて，1894 年に Rogers が RR 恒等式をえていたことを再発見した [Rog]．さて MacMahon と Schur は，RR 恒等式と，以下の RRPT との同値性を独立に観察した（[An2, §8] も参照）．

定理 3.3 (Rogers-Ramanujan 分割定理，**RRPT**)**.** $R \overset{PT}{\sim} T_{5,1}$ と $R' \overset{PT}{\sim} T_{5,2}$ が成り立つ．ここで

$$R = \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid 1 \leq \forall i < \ell(\lambda),\ \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2\}$$
$$R' = \{\lambda \in R \mid \ell(\lambda) \geq 1 \Longrightarrow \lambda_{\ell(\lambda)} \geq 2\}$$
$$T_{a,b} = \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid m_i(\lambda) \geq 1 \Longrightarrow i \equiv \pm b \pmod{a}\}.$$

SPT は $R \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T_{5,1}$ の mod 6 版である．そのまま 5 を 6 にすれば，$T_{5,1}$ は $T_{6,1}$ になる．R は

$$S_3' := \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid 1 \leq \forall i < \ell(\lambda),\ \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 3\}$$

となりそうだが，$n = 9$ のとき $(6,3) \in S_3'$ を排除すれば数勘定があうという観察から

$$S_3 := \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \lambda \text{ は冒頭の条件 (b) を満たす}\}$$

と条件を足したものを R の mod 6 版とすると，$S_3 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T_{6,1}$ が成り立つ，というのが SPT である.「差条件」（$\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 3$）に加えて,「部分パターンの禁止」（$(6,3), (9,6), \cdots$ を含まない）が RRPT にはなかった特徴である.

4 Andrews のレシピ 1·2·3 による RRPT と SPT の証明

RRPT や SPT などの，いわゆる「RR 型分割定理」の古典的な証明の定石を復習し，SPT の証明を与えよう．要点は，(1) の精密化になっているような

$$G_{\mathcal{C}}(x,q) := \sum_{\lambda \in \mathcal{C}} x^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} \tag{3}$$

を考えることである．$G_{\mathcal{C}}(1,q) = g_{\mathcal{C}}(q)$ となっていればよいので，(3) の x の肩は柔軟に設定してよい．G.E.Andrews によると，$\mathcal{C} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathcal{D}$ を証明する古典的な定石は

(R1) $G_{\mathcal{C}}(x,q)$ についての q 差分方程式を立てる

(R2) q 差分方程式を解き $G_{\mathcal{C}}$ の「表示」をえる

(R3) q 級数恒等式を援用して $\mathcal{C} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathcal{D}$ を演繹する

と要約される [An4]．これは大雑把な方針というべきものだ．現在でも分割定理の研究が続いているのは，分割定理を証明するアルゴリズムが存在しないからだと思われる．

(R1) については，$\mathcal{C} \subseteq \mathsf{Par}$ が [An1, §8] の意味の「リンク分割イデアル (linked partiton ideal)」（本稿では定義を説明しない）であれば，$G_{\mathcal{C}}(x,q)$ の q 差分方程式が存在し，かつそれを求めるアルゴリズムがある．R と S_3 はリンク分割イデアルになっていて

$$G_R(x,q) = G_R(xq,q) + xqG_R(xq^2,q) \tag{4}$$
$$G_{S_3}(x,q) = (1 + xq + xq^2)G_{S_3}(xq^3,q) + xq^3(1 - xq^3)G_{S_3}(xq^6,q) \tag{5}$$

が自動的にえられる（直接導出も難しくない）．また (4) は (2) と同一であることにも注意しよう．

まずは RRPT を証明する．唐突だが，べき級数

$$f_i := \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n} q^{\frac{n(5n+3)}{2} - in}(1 - x^{i+1}q^{(2n+1)(i+1)})}{(1-q)\cdots(1-q^n)\prod_{j \geq n+1}(1 - xq^j)}$$

を考える（$i \geq 0$）．f_i を思いつくのは至難の業だが，

$$f_i(x,q) = f_{i-1}(x,q) + x^i q^i f_{1-i}(xq,q) \tag{6}$$

が成り立つ（ここで $f_{-1} = 0$），といわれたら，確認は high school algebra で可能である.

詳細は省略するが，(6) と (4) と初期条件から $G_R = f_1$ が証明される．これが (R2) の実行例である．(R3) に移る．$g_R(q) = G_R(1,q) = f_1(1,q)$ は

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n q^{n(5n+1)/2}(1-q^{4n+2})/\Delta \tag{7}$$

と展開されるが（$\Delta := \prod_{n\geq 1}(1-q^n)$），不思議なことに分子は $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n(5n+1)/2}$ と等しい．これは $q^{n(5n+1)/2}q^{4n+2} = q^{(5n+4)(n+1)/2} = q^{(5n'+1)n'/2}$ だからである（$n' := -1-n$）．(7) と

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n(5n+1)/2} = \Delta\cdot\prod_{n\geq 0}(1-q^{5n+1})^{-1}(1-q^{5n+4})^{-1}$$

（Jacobi 三重積）をあわせると

$$g_R(q) = \prod_{n\geq 0}(1-q^{5n+1})^{-1}(1-q^{5n+4})^{-1}$$

がえられるが，右辺はまさに $g_{T_{5,1}}(q)$ である．これで RRPT $R \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T_{5,1}$ が証明された．

SPT についても (R2), (R3) を完遂し，証明を完成させよう．SPT は RRPT の条件に加えてさらに「部分パターンの禁止」があるので，RRPT よりも難しいと考えられる．しかし少なくとも (R2) については，そうではない．漸化式 (5) を解くために，

$$G_{S_3}\Big/\prod_{n\geq 0}(1-xq^{3n}) = \sum_{n\geq 0}B_n(q)x^n \tag{8}$$

によってべき級数 $B_n(q)$ を定義すると，(5) より

$$B_n = \frac{(1+q^{3n-1})(1+q^{3n-2})}{1-q^{3n}}B_{n-1}$$

がえられる．$B_0 = 1$ より G_{S_3} を解くことができた．(R3) に移る．安直に $x = 1$ としてしまうと，(8) の分母が 0 になるので注意が必要である．そこで

$$G_{S_3} = \prod_{n\geq 1}(1-xq^{3n})\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}x^n(B_n - B_{n-1})$$

として（ここで $B_{-1} = 0$），$x = 1$ とすれば

$$g_{S_3} = B_\infty\prod_{n\geq 1}(1-q^{3n}) = \prod_{n\geq 0}(1+q^{3n+1})(1+q^{3n+2})$$

をえる．右辺が $g_{T_{6,1}} = \displaystyle\prod_{n\geq 0}(1-q^{6n+1})^{-1}(1-q^{6n+5})^{-1}$ であることは易しく，SPT $S_3 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T_{6,1}$ が示された．その他，Bessenrodt や Bressoud による，全単射を用いた SPT の証明も知られている [Be1, Bre]（[An2, §4.4] も参照）．

なお，たったいま証明した SPT と等価な形式的べき級数の等式

$$\sum_{\lambda\in S_3} q^{|\lambda|} = \prod_{n\geq 0}(1+q^{3n+1})(1+q^{3n+2})$$

の左辺を，印象的な無限和に書いて「Schur 恒等式」をえるのは難しいようである（Hardy は「RR 恒等式より美しい公式を発見するのは難しい」と述べている [HW]）．

5　Andrews の 3 パラメータ RRPT と SPT の $p = 5$ 版（5SPT）

1970 年代，Andrews はレシピ 1·2·3 を推し進め，RRPT の 3 パラメータ一般化に成功した [An3].

定理 5.1 (3 パラメータ RRPT，Andrews). 自然数 $\ell, k, a \geq 1$ が $0 \leq \ell/2 < a \leq k \geq \ell$ を満たすとき $A_{\ell,k,a} \overset{PT}{\sim} B_{\ell,k,a}$ が成り立つ．ここで，必要な定義は以下のとおりである：

$$A_{\ell,k,a} = \begin{cases} \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \textit{(A1)}_{\ell+1}, \textit{(A2)}\} & (\ell \text{ が偶数}) \\ \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \textit{(A1)}_{(\ell+1)/2}, \textit{(A2)}, \textit{(A3)}\} & (\ell \text{ が奇数}) \end{cases}$$

$$B_{\ell,k,a} = \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \textit{(A1)}_{\ell+1}, \textit{(B1)}, \textit{(B2)}, \textit{(B3)}\}.$$

(A1)$_b$　$m_i(\lambda) > 1 \Longrightarrow i \in b\mathbb{Z}$

(A2)　$m_i(\lambda) = 0 \Longleftarrow i \equiv 0, \pm(2a-\ell)(\ell+1)/2 \pmod{(2k-\ell+1)(\ell+1)}$

(A3)　$m_i(\lambda) = 0 \Longleftarrow i \equiv \ell+1 \pmod{2(\ell+1)}$

(B1)　$1 \leq \forall i \leq \ell(\lambda) - k + 1, \lambda_i - \lambda_{i+k-1} \geq \ell + 1$，かつ $\lambda_i \in (\ell+1)\mathbb{Z}$ ならば $\geq$ は $>$

(B2)　$1 \leq \forall j \leq (\ell+1)/2, \sum_{i=j}^{\ell-j+1} m_i(\lambda) \leq a - j$.

(B3)　$\sum_{i=1}^{\ell+1} m_i(\lambda) \leq a - 1$.

$\ell = 0,\ k = a = 2$ が RRPT $R \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T_{5,1}$ を，$\ell = 0,\ k = 2,\ a = 1$ が RRPT $R' \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T_{5,2}$ を，$\ell = k = a = 2$ が SPT $S_3 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T_{6,1}$ を，それぞれ復元する．今，$\ell = 4,\ k = a = 3$ とすると

$$A_{4,3,3} = C_2 \cap C_5, \quad B_{4,3,3} = \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \text{(S1)},\text{(S2)},\text{(S3)}_0\}$$

だが，定理の前提 $0 \leq \ell/2 < a \leq k \geq \ell$ が破られているため，本当に $A_{4,3,3} \overset{\mathrm{PT}}{\not\sim} B_{4,3,3}$ となっている．しかし SPT の S_3 を定義したときのように，条件を足した $S_5 = B^{\circ}_{4,3,3} \subsetneq B_{4,3,3}$ を定義すると「3 パラメータ RRPT $A_{4,3,3} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} B^{\circ}_{4,3,3}$ が成り立つ」と Andrews は予想し [An3] を締めくくった．

定義 5.2. $C_a := \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid m_i(\lambda) > 0 \Longrightarrow i \notin a\mathbb{Z}\}$ を *a-class regular* 分割の集合とする．

Andrews の予想 = 定理（Andrews-Bessenrodt-Olsson [ABO], 5SPT）　$S_5 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} C_2 \cap C_5$ が成り立つ．ここで $S_5 = \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \text{(S1)}_2, \text{(S2)}_2, \forall j \geq 0, \text{(S3)}_j, \text{(S4)}_j, \text{(S5)}_j\}$.

(S1)$_h$　$m_i(\lambda) > 1 \Longrightarrow i \in (2h+1)\mathbb{Z}$

(S2)$_h$　$1 \leq \forall i \leq \ell(\lambda) - h,\ \lambda_i - \lambda_{i+h} \geq 2h + 1$，かつ $\lambda_i \in (2h+1)\mathbb{Z}$ ならば $\geq$ は $>$

(S3)$_j$　$m_{5j+3}(\lambda) + m_{5j+2}(\lambda) \leq 1$

(S4)$_j$　$m_{5j+6}(\lambda) + m_{5j+4}(\lambda) \leq 1$

(S5)$_j$　$m_{5j+11}(\lambda) + m_{5j+10}(\lambda) + m_{5j+5}(\lambda) + m_{5j+4}(\lambda) \leq 3$

本稿で SPT の $p = 2h + 1$ 版とは，次のような命題を想定している（$T_{6,1} = C_2 \cap C_3$ に注意する）．(S1)$_h$,(S2)$_h$ も (◇) の一種である．(S3)$_j$,(S4)$_j$,(S5)$_j$ は，(S1)$_2$,(S2)$_2$ もあわせると

$$\lambda \text{ は，} \mathrm{shift}_5^j((3,2)), \mathrm{shift}_5^j((6,4)), \mathrm{shift}_5^j((11,10,5,4)) \text{ を部分に含まない（} j \geq 0 \text{）}$$

のように「部分パターンの禁止」でいいかえられる．

一般 SPT のテンプレート　奇数 $p=2h+1\geq 3$ について $S_p \overset{\mathrm{PT}}{\sim} C_2\cap C_p$ が成り立つ．ここで S_p とは，ある有限集合 $\Omega_p \subseteq \mathsf{Par}$ を用いて,「$\lambda\in S_p$ であることが

$$\forall k\geq 0, \forall \mu\in\Omega_p, \lambda \text{ は } \mathrm{shift}_p^k(\mu) \text{ を部分に含まない} \qquad (\diamondsuit)$$

ことと同値」と定義される（仮想的な）「Schur 正則分割」の集合である．また $\mathrm{shift}_p^k(\mu)$ は，μ のすべてのパート μ_i に kp を足してえられる分割である．

5SPT は，20 年後，Andrews-Bessenrodt-Olsson によって証明された [ABO]．その手法は (3) の多項式近似に基づくもので，詳細を [Ts1] に書いたので，参照されたい．この 5SPT の証明には

- 証明の遂行に計算機が不可欠である
- 5SPT が成り立つ本質が明らかにならない

などの不満が残る．特に「人間が手で紙に書き下せる」証明は知られていなかった．

6　主定理：SPT の $p=2h+1$ 版（pSPT）

2016 年 2 月下旬に，筆者は当時，東大数理の院生だった渡部正樹さんとの共同研究において，SPT の一般の奇数 $p=2h+1$ 版と考えられる定理を発見・証明した [TW].

定義 6.1. 奇数 $p=2h+1$ について，有限集合 Ω_p を

$$\left\{\begin{array}{ccc} (p+1,p-1), & (h+1,h), & (2p+1,*^h,p-1) \\ (p+2,*,p-2), & (h+2,*,h-1), & (2p+2,*^{h+1},p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (3h,*^{h-2},h+2), & (p-2,*^{h-2},2), & (5h+1,*^{p-3},h+2) \end{array}\right\}$$

と定義する．$*$ はワイルドカードで，そこに数を入れると分割になるような任意の数を表している．また $*^a$ は $*$ の a 個の並びを表す略記法である．

定理 6.2 (Watanabe-T, pSPT)**.** 任意の奇数 $p=2h+1\geq 3$ について，$S_p \overset{PT}{\sim} C_2\cap C_p$ が成り立つ．ここで $S_p := \{\lambda\in\mathsf{Par} \mid \textit{(S1)}_h, \textit{(S2)}_h, (\diamondsuit)\}$.

これは $p=3,5$ で Schur の SPT, Andrews らの 5SPT にそれぞれ一致する．$p=3$ の場合は $\Omega_3=\emptyset$ となって易しいので，$p=5$ のとき $X:=\{\lambda\in\mathsf{Par}\mid (\mathrm{S1})_2, (\mathrm{S2})_2, (\diamondsuit)\}$ を考える．ここで，$\Omega_5=\{(6,4),(3,2),(11,*_1,*_2,4)\mid 11\geq *_1\geq *_2\geq 4\}$ である．$\lambda\in X$ は，すべての $j\geq 0$ について

- $\mathrm{shift}_5^j((6,4))$ を含まないので，$*_1\neq 9$, $*_2\neq 6$
- $\mathrm{shift}_5^j((3,2))$ を含まないので，$(*_1,*_2)\neq(8,7)$

としても X は変わらない．$(\mathrm{S1})_2$ もあわせると，$\Omega_5=\{(6,4),(3,2),(11,10,5,4)\}$ としても X は変わらず，望み通り $X=S_5$ をえる．

pSPT のような「記憶できる」初等的な PT が未発見だったのは意外だが，Bessenrodt らによる 7SPT の発見の試みがあった以上，事実である．「（RR 恒等式の）真に簡単な証明を期待するのが不合理なことは疑いない」という Hardy による見解 [Har] によれば，RRPT の mod 6 版である SPT=3SPT も証明は簡単でないといってよいだろう．さらに 5SPT の歴史的経緯も考えると，pSPT の「真に簡単な」証明を望むのは野心的であるといえる．

7 pSPT の（対称群・量子群の）表現論的背景（S_p の定義について）

われわれは，対称群の p モジュラースピン表現論の研究から，pSPT に導かれた．証明は間接的で，京都スクール流の量子群の表現論，特に柏原正樹さん (RIMS) による結晶基底 (crystal base) の理論の応用としてえられる．$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ を対称化可能 GCM（generalized Cartan matrix）[Kac, §2.1]，$(P, P^\vee, \Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\}, \Pi^\vee = \{h_i \mid i \in I\})$ を A の Cartan データとする [Ka1, §2.1].

定義 7.1 ([Ka1, §7.2])**.** 柏原クリスタルとは，以下の公理 *(K1)–(K5)* を満たす 6 つ組 $(B, \mathsf{wt}, (\tilde{e}_i)_{i\in I}, (\tilde{f}_i)_{i\in I}, (\varepsilon_i)_{i\in I}, (\varphi_i)_{i\in I})$ である（ここで B は集合，$\mathsf{wt} : B \to P, \varepsilon_i, \varphi_i : B \to \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B \to B \sqcup \{\mathbf{0}\}$ は関数）．

(K1) $\forall i \in I, \forall b \in B, \varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle h_i, \mathsf{wt}(b)\rangle$

(K2) $\forall i \in I, \forall b \in B, \tilde{e}_i b \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathsf{wt}(\tilde{e}_i b) = \mathsf{wt}(b) + \alpha_i, \varepsilon_i(\tilde{e}_i b) = \varepsilon_i(b) - 1, \varphi_i(\tilde{e}_i b) = \varphi_i(b) + 1$

(K3) $\forall i \in I, \forall b \in B, \tilde{f}_i b \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathsf{wt}(\tilde{f}_i b) = \mathsf{wt}(b) - \alpha_i, \varepsilon_i(\tilde{f}_i b) = \varepsilon_i(b) + 1, \varphi_i(\tilde{f}_i b) = \varphi_i(b) - 1$

(K4) $\forall i \in I, \forall b \in B, \forall b' \in B, \tilde{e}_i b = b' \Leftrightarrow b = \tilde{f}_i b'$

(K5) $\forall i \in I, \forall b \in B, \varphi_i(b) = -\infty \Rightarrow \tilde{e}_i b = \tilde{f}_i b = \mathbf{0}$

支配的整ウェイト $\lambda \in P^+$ について，柏原は量子群 $U_q(A)$ の可積分表現 $V(\lambda)$ の結晶基底 $B(\lambda)$ の存在と一意性を証明した [Ka2, Theorem 2]．柏原クリスタルのうち，$B(\lambda)$ の disjoint union になっている regular クリスタルは特に重要である．これらはテンソル積中の組成重複度や parabolic 部分代数に関する分岐則を与え，さらに Young 図形や Littlewood-Richardson 規則といった有名だがアドホックに思われた対象の統一的な理解（例えば [Ka1, §5] を参照）や類似物の構成（例えば [KN, GJK^3] を参照）をもたらす．対称群の表現論と柏原クリスタルの関係をみてみよう．

定理 7.1 (Kleshchev モジュラー分岐則 [Kle])**.** 素数 $p \geq 2$ について，既約表現の集合 $\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n))$ は，$A^{(1)}_{p-1}$ 型 $B(\Lambda_0)$ で分岐則こみで *parameterize* できる：$\bigsqcup_{n\geq 0} \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\mathbb{F}_\ell\mathfrak{S}_n)) \cong B(\Lambda_0)$.

定義 7.2. R を可換整域とする．R 上の対称群の捻じれ群環 $R\mathfrak{S}^-_n$ とは，*odd* な $\{t_i \mid 1 \leq i < n\}$ で生成され，以下を定義関係式に持つ R 超代数である（$1 \leq a \leq n-2$ かつ $1 \leq b, c < n$ で $|b-c| > 1$）．

$$t_b^2 = 1, \quad t_a t_{a+1} t_a = t_{a+1} t_a t_{a+1}, \quad t_b t_c = -t_c t_b.$$

対称群 $\mathfrak{S}_n$ の体 $\mathbf{k}$ 上のスピン表現論は，$\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\mathbf{k}\mathfrak{S}^-_n)$ の考察とほぼ同義である（ここで，super の圏や既約表現の同型類の定義は行わない．[Kle, KKT] などを参照されたい）．本稿では

(a) $\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\overline{\mathbb{Q}}\mathfrak{S}^-_n)$ の考察を「対称群の通常スピン表現論」

(b) 奇素数 $p \geq 3$ について $\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}^-_n)$ の考察を「対称群の p モジュラースピン表現論」

と呼ぶ．[BK1, Theorem 8.11] で対称群のスピン表現論におけるモジュラー分岐則がえられた．

定理 7.2 (Brundan-Kleshchev)**.** 奇素数 $p \geq 3$ について，既約表現の集合 $\mathsf{Irr}^{\mathsf{su}}(\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}^-_n))$ は，$A^{(2)}_{p-1}$ 型 $B(\Lambda_0)$ で分岐則こみで *parameterize* できる：$\bigsqcup_{n\geq 0} \mathsf{Irr}^{\mathsf{su}}(\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}^-_n)) \cong B(\Lambda_0)$.

ここで定理 7.1 と定理 7.2 のクリスタル同型は，それぞれ既約表現の具体的な構成を知らずに証明できる「抽象的な」ものであることに注意する（[OV] に触発された [Gro] の論法である．[KS] のクリスタル $B(\infty)$ の特徴づけ定理を用いる）．「Perfect crystal による京都パス模型 [KMN^2_1, KMN^2_2]」によると，$A^{(2)}_{p-1}$ 型クリスタル $B(\Lambda_0)$ の $B(\Lambda_0) \subseteq \mathsf{Par}$ なる実現は p-strict p-restricted な分割 RP_p によるものが知られている [Kan] [Kle, §22].

定義 7.3. $\lambda \in \mathsf{RP}_p$ とは，以下の条件が成り立つことと定義される．

- $m_i(\lambda) > 1 \Rightarrow i \in p\mathbb{Z}$（注：これは $\lambda \in \mathsf{Par}$ が p-strict であるということである）
- $1 \le \forall r \le \ell(\lambda), \lambda_r - \lambda_{r+1} \le p$（ただし $\lambda_r \in p\mathbb{Z}$ のとき $\le$ は $<$）．

まとめると，$\mathsf{Irr}^{\mathsf{su}}(\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}_n^-))$ が RP_p で parameterize されたことになる（この可能性は LLTA 理論に触発されて [LT] で初めて提案された．Sergeev duality を用いた導出もある [BK2]）．

定義 7.4. $p \ge 2$ について，$R_p = \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \forall i \ge 1, m_i(\lambda) < p\}$ と定義する（p 正則分割）．

さて下左が成り立つことはよく知られている [Jam] ので，スピン類似を考えると，上右を満たす「うまい」分割のクラス $R_p^{??}$ の存在を期待したくなる（上右の 1 行目の全単射は Schur による [Sch]）．モジュラー表現論の一般論（Brauer-Nesbitt の定理）より，$R_p^{??} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} C_2 \cap C_p$ でなければならない．

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Par}(n) & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n)) \\ \uparrow & & \\ R_p \cap \mathsf{Par}(n) & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Strict} \cap \mathsf{Par}(n) & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\overline{\mathbb{Q}}\mathfrak{S}_n^-)) \\ \uparrow & & \\ R_p^{??} \cap \mathsf{Par}(n) & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{Irr}^{\mathsf{su}}(\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}_n^-)) \end{array}$$

$\mathsf{RP}_3 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} S_3$ はやさしいが，RP_3 は S_3 と「不等号の向きが逆転している」ことに注意しよう．$R_3^{??} = S_3$ とする parameterization は「対称群の 3 スピン分解行列を三角化する」 [BMO]．対称群の 5 モジュラースピン表現論の研究から，Bessenrodt-Morris-Olsson は，次の PT を予想した（さらに 5 スピン分解行列についての予想も述べている．この辺の話題については [Be2, §3] が優れた解説である）．この予想が 5SPT と等価であることは，命題 7.3 の通りである（証明は略）．

定理 7.5 ([BMO, §3, Conjecture]=[ABO, Theorem 3.1])**.** *Schur*$_5$ を，以下の条件を満たす Par の部分集合として定義する．このとき $C_2 \cap C_5 \overset{PT}{\sim} \mathit{Schur}_5$ が成り立つ．

- $1 \le \forall i \le \ell(\lambda) - 2, \lambda_i - \lambda_{i+2} \ge 5$（ただし $\lambda_i \in 5\mathbb{Z}$ または $\lambda_i + \lambda_{i+1} \in 5\mathbb{Z}$ のとき $\ge$ は $>$），
- $\forall j \ge 0, m_{5j+3}(\lambda) + m_{5j+2}(\lambda) \le 1,$
- $\forall j \ge 0, m_{5j+11}(\lambda) + m_{5j+9}(\lambda) + m_{5j+5}(\lambda) \le 2,$
- $\forall j \ge 0, m_{5j+10}(\lambda) + m_{5j+6}(\lambda) + m_{5j+4}(\lambda) \le 2,$
- $\forall j \ge 0, m_{5j+11}(\lambda) + m_{5j+10}(\lambda) + m_{5j+5}(\lambda) + m_{5j+4}(\lambda) \le 3.$

命題 7.3 ([BMO, §3])**.** 単射 $\varphi_5 : S_5 \hookrightarrow \mathsf{Par}$ を「$(5j, 5j)$ の現われを $(5j+1, 5j-1)$ に置き換える」によって定義すると，$\mathsf{Image}\,\varphi_5 = \mathit{Schur}_5$ が成り立つ．特に $S_5 \overset{PT}{\sim} \mathit{Schur}_5$ である．

われわれの研究は，$\mathrm{Schur}_3, \mathrm{Schur}_5 \subseteq \mathrm{Strict}$ と同じ性質が期待できる $\mathrm{Schur}_7 \subseteq \mathrm{Strict}$ をみつけ，[ABO] の方法で計算機を用いて $\mathrm{Schur}_7 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} C_2 \cap C_7$ を示したところから始まった．Schur_7 は複数あるのだが，とりあえず 1 つの明示的な定義は [Ts1] にある．最終的に達した Schur_p の定義は [TW, Definition 5.2] にある．Schur_7 をみつけるには [KOR, LT] などに触発されたヒューリスティックによる試行錯誤が必要だったが，これについては割愛する．$\mathrm{Schur}_7 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} C_2 \cap C_7$ を示すには，命題 7.3 のように p-strict な $S_7 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathrm{Schur}_7$ を見つける必要がある．$\mathrm{Schur}_5, \mathrm{Schur}_7$ には規則性がみられなかった（そもそも Schur_7 は記憶するのが困難である）が，S_3, S_5, S_7 からは S_p の定義に到達することができた．

8　pSPT の（対称群・量子群の）表現論的背景（証明について）

われわれの主定理の証明には「解釈による非負性の証明」のような圏論化の精神がみられる．とくにその証明は（命題のみかけに反して）完全に初等的というわけではない（[Ste, Ts2] を用いれば，perfect crystal 理論 [KMN$^2_1$, KMN$^2_2$] による regularity の証明を回避できるかもしれない）．

証明の概略を述べる．一般に $\mathcal{C} \subseteq \mathsf{Par}$ と $i \leq j$ について

$$\mathcal{C}^{i,j} = \{\lambda \in \mathcal{C} \mid m_k(\lambda) > 0 \Rightarrow i \leq k \leq j\}$$

とおく．S_p の組合せ論的性質として，全単射

$$S_p^{jp-h,jp+h} \xrightarrow{\sim} S_p^{jp+1,jp+h} \times S_p^{jp-h,jp-1}, \lambda \mapsto (\lambda^+, \lambda^-)$$

であって（ここで $j \geq 1$），次の性質をもつものを構成できる [TW, §2].

- $\mu \in S_p^{(j+1)p-h,(j+1)p+h}, \lambda \in S_p^{jp-h,jp+h}$ について，$(\mu,\lambda) \in S_p \Leftrightarrow (\mu,\lambda^+) \in S_p$
- $\nu \in S_p^{(j-1)p-h,(j-1)p+h}, \lambda \in S_p^{jp-h,jp+h}$ について，$(\lambda,\nu) \in S_p \Leftrightarrow (\lambda^-,\nu) \in S_p$

ここで例えば (μ,λ) とは，μ と λ をそのまま並べてえられる分割を意味している．

この全単射を用いると，全単射 $S_p \xrightarrow{\sim} \cdots \times S_p^{2p+1,3p-1} \times S_p^{p+1,2p-1} \times S_p^{1,p-1}$ を構成できる [TW, §3]．$S_p^{(j-1)p+1,jp-1}$ は $(A^{(2)}_{p-1})^\dagger$ 型の Kirillov-Reshetikhin perfect crystal $B^{h,2}$（これは [JMO] で構成された．KR クリスタルについては [HKOTY, HKOTT] を参照されたい）と等濃度なので，$B^{h,2}$ から引き戻してクリスタル構造を与えることができ [TW, Corollary 3.10]，これによって S_p は $(A^{(2)}_{p-1})^\dagger$ 型クリスタルになる．ここで根源的な理由は不明だが，S_p 上の柏原作用素 $\tilde{f}_i$ が S_p の「箱を 1 つ増やす」ことが証明できる [TW, Theorem 3.16]（証明を読んでいただければ，不思議な cancellation の結果，成り立っていることはわかる）．一方，$S_p \cong (B^{h,2})^{\otimes\infty}$ は perfect crystal の一般論 [KMN$^2_1$, KMN$^2_2$] によって $B(\Lambda_h)$ と同型なので，クリスタル構造を忘れると $S_p \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathsf{RP}_p$ がえられ，$\mathsf{RP}_p \overset{\mathrm{PT}}{\sim} C_2 \cap C_p$ はやさしいので（例えば [TW, §5.2] を参照），主定理がえられる．

このように主定理は，perfect crystal 理論による京都パス模型の応用なのだが，これまで知られているような Par の部分集合によるレベル 1 クリスタルの実現とは異なることを注意する（典型的なものに [MM] による，$A^{(1)}_{p-1}$ 型クリスタル同型 $R_p \cong B(\Lambda_0)$ がある．これから $R_p \overset{\mathrm{PT}}{\sim} C_p$ もえられる．前述した $A^{(2)}_{p-1}$ 型クリスタル同型 $\mathsf{RP}_p \cong B(\Lambda_0)$ もこの一例である）．これまでのいわゆる Young wall 的な実現では，[Ts3, §1] の意味で「分岐点をもたない」perfect crystal が用いられる．「perfect crystal は KR crystal のテンソル積に限る」という予想（これはたとえば [KNO] のイントロに書かれている）のもと，このような perfect crystal を分類した [Ts3, §1]（これが [Ts3] の動機であった）．そして，このリスト以外の perfect crystal を用いて「Par の部分集合によるレベル 1 クリスタル実現」（およびその帰結としての PT）をえることは，できないだろうと考えていた．

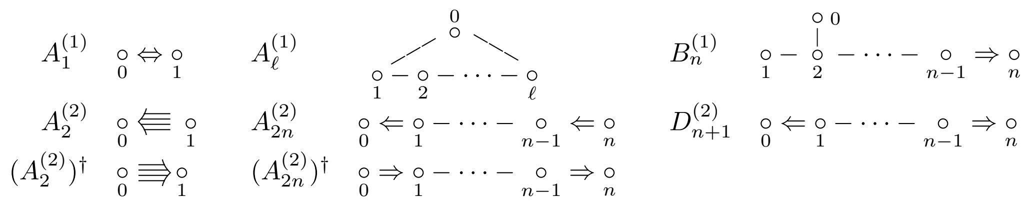
しかし $(A^{(2)}_{p-1})^\dagger$ 型 $B^{h,2}$ はたくさんの分岐点をもち，従来の「Par の部分集合によるレベル 1 クリスタルの実現」の枠組みにない．主定理の証明の本質がどこにあるのかよく理解し，他のリー型（あるいは perfect crystal）について類似の PT がえられると望ましい．例えば筆者は $B^{(1)}_n$ 型の頂点 n について，主定理と同様の PT がえられるかもしれないと考えているが，現状ではほぼ妄想にすぎない状態である．また [BK1, Theorem 8.11] の類似である [Ts3, Corollary 6.11] や，[Ts3, §1] や [TW, §3] で説明されている $A^{(2)}_{2n}$ 型と $D^{(2)}_{n+1}$ 型の類似を考えると，主定理の $D^{(2)}_{n+1}$ 版が期待できると想像される．この場合，自然な命題は「Strict に "自然な" $D^{(2)}_{n+1}$ 型クリスタル構造が入り $B(\Lambda_0)$ と同型になる」だと考えられる．これは別の文脈で，Oh によって予想されていた [Oh, Conjecture 0.1] が，適切な定式化のもとで正しくないことが知られている．

PT のリー理論・表現論的証明は [ASW, LW] など多数知られている．われわれの証明とこれらのアイデアとの関係を明らかにすることも，今後の課題である．例えば，われわれの主定理は「$A^{(2)}_{2n}$ 型 Schur PT」と思えるものだから，[GKW, Theorem 1.1] の「$A^{(2)}_{2n}$ 型 RR 恒等式」との関連を考察することはよい出発点になるかもしれない．

最後に，われわれの動機は，かつて存在が期待され，$p = 3, 5$ では定義されていた（さらに $p = 3$ では表現論的正当化 [BMO] も知られていた）が，[BK1, BK2] による RP_p を用いた $\bigsqcup_{n\geq 0} \mathsf{Irr}^{\mathsf{su}}(\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}^-_n))$ の parameterization でいったんは忘れられたように思われる，$R^{??}_p \subseteq$ Strict を一般の奇数（あるいは奇素数）$p \geq 3$ でみつけることであった．われわれは $\mathrm{Schur}_3, \mathrm{Schur}_5$ を一般化した $\mathrm{Schur}_p \subseteq$ Strict も定義し [TW, Definition 5.2]，これが $R^{??}_p$ だろうと考えている．$\mathrm{Schur}_p \overset{\mathrm{PT}}{\sim} S_p$ だが，残念ながら S_p のような「簡単な」定義を与えることはできなかった．また Schur_p は S_p を用いて定義される，という意味で S_p はより根源的だろうと考えている．「Schur_p を用いた parameterization で，対称群の p スピン分解行列が三角化される」といった正当化も今後の課題である（R_p による $\bigsqcup_{n\geq 0} \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n))$ の parameterization でこの性質が成り立つことは [FMP] で示されたが，現在では [Jam] の Specht 加群の存在の影と理解できる）．

9　最後に

この度，講演の機会を与えてくださった加藤周さんをはじめとする organizer のみなさんに感謝いたします．ありがとうございました．



参考文献

[ABO] G.E. Andrews, C. Bessenrodt and J.B. Olsson, *Partition identities and labels for some modular characters*, Trans.Amer.Math.Soc. **344** (1994), 597–615.

[An1] G.E. Andrews, *The theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2. Addison-Wesley Publishing Co., 1976.

[An2] 佐藤文広訳『整数の分割』（数学書房，2006 年）

[An3] G.E. Andrews, *On the general Rogers-Ramanujan theorem*, Memiors of the American Mathematical Society, **152**, 1974.

[An4] G.E. Andrews, *A general theory of identities of the Rogers-Ramanujan type*, Bull.Amer.Math.Soc. **80** (1974), 1033–1052.

[ASW] G.E. Andrews, A. Schilling and S.O. Warnaar, *An A_2 Bailey lemma and Rogers-Ramanujan-type identities*, J.Amer.Math.Soc. **12** (1999), 677–702.

[Be1] C. Bessenrodt, *A combinatorial proof of a refinement of the Andrews-Olsson partition identity*, European J.Combin. **12** (1991), 271–276.

[Be2] C. Bessenrodt, *Representations of the covering groups of the symmetric groups and their combinatorics*, Sem.Lothar.Combin. **33** (1994) (electronic).

[BK1] J. Brundan and A. Kleshchev, *Hecke-Clifford superalgebras, crystals of type $A^{(2)}_{2\ell}$ and modular branching rules for $\widehat{S}_n$*, Represent.Theory **5** (2001), 317–403.

[BK2] J. Brundan and A. Kleshchev, *Projective representations of symmetric groups via Sergeev duality*, Math.Z. **239** (2002), 27–68.

[BMO] C. Bessenrodt, A.O. Morris and J.B. Olsson, *Decomposition matrices for spin characters of symmetric groups at characteristic 3*, J.Algebra **164** (1994), 146–172.

[Bre] D.M. Bressoud, *A combinatorial proof of Schur's 1926 partition theorem*, Proc.Amer.Math.Soc. **79** (1980), 338–340.

[FMP] H.K. Farahat, W. Müller and M.H. Peel, *The modular characters of the symmetric groups*, J.Algebra **40** (1976), 354–363.

[GJK^3] D. Grantcharov, J.H. Jung, S-J. Kang, M. Kashiwara and M. Kim *Crystal bases for the quantum queer superalgebra and semistandard decomposition tableaux*, Trans.Amer.Math.Soc. **366** (2014), 457–489.

[GKW] M.J. Griffin, K. Ono and S.O. Warnaar, *A framework of Rogers-Ramanujan identities and their arithmetic properties*, Duke Math.J. **165** (2016), 1475–1527.

[Gro] I. Grojnowski, *Affine $\hat{sl}_p$ controls the modular representation theory of the symmetric group and related Hecke algebras*, math.RT/9907129.

[Har] 高瀬幸一訳『ラマヌジャン その生涯と業績に想起された主題による十二の講義』（丸善出版，2016 年）

[HKOTY] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Y. Yamada, *Remarks on fermionic formula*, Contemp. Math., **248** (1999), 243–291.

[HKOTT] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Z. Tsuboi, *Paths, crystals and fermionic formulae*, in "MathPhys Odyssey 2001-Integrable Models and Beyond In Honor of Barry M.McCoy", edited by M. Kashiwara and T. Miwa, Birkh"auser (2002) 205–272.

[HW] 示野信一訳『数論入門 I, II』（丸善出版，2012 年）

[Jam] G.D. James, *The irreducible representations of the symmetric groups*, Bull.London Math.Soc. **8** (1976), 229–232.

[JMO] N. Jing, K.C. Misra and M. Okado, *q-wedge modules for quantized enveloping algebras of classical type*, J.Algebra **230** (2000), 518–539.

[Kac] V. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, 1990.

[Kan] S-J. Kang, *Crystal bases for quantum affine algebras and combinatorics of Young walls*, Proc. London Math. Soc. **86** (2003), 29–69.

[Ka1] M. Kashiwara, *On crystal bases*, Representations of groups (Banff, AB, 1994), 155–197, CMS Conf.Proc., **16**, Amer.Math.Soc., Providence, RI, 1995.

[Ka2] M. Kashiwara, *On crystal bases of the Q-analogue of universal enveloping algebras*, Duke Math.J. **63** (1991), 465–516.

[KKT] S-J. Kang, M. Kashiwara and S. Tsuchioka, *Quiver Hecke superalgebras*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **711** (2016) 1–54

[Kle] A. Kleshchev, *Linear and projective representations of symmetric groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, 163. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[KMN$^2_1$] S-J. Kang, M. Kashiwara, K. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Affine crystals and vertex models*, Internat. J. Modern Phys. A **7**, Suppl. 1A (1992), 449–484.

[KMN$^2_2$] S-J. Kang, M. Kashiwara, K. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Perfect crystals of quantum affine Lie algebras*, Duke Math.J. **68** (1992), 499–607.

[KN] M. Kashiwara and T. Nakashima, *Crystal graphs for representations of the q-analogue of classical Lie algebras*, J.Algebra **165** (1994), 295–345.

[KNO] M. Kashiwara, T. Nakashima and M. Okado, *Affine geometric crystals and limit of perfect crystals*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 3645–3686.

[KOR] B. Külshammer, J. Olsson and G. Robinson, *Generalized blocks for symmetric groups*, Invent.Math. **151** (2003), 513–552.

[KS] M. Kashiwara and Y. Saito, *Geometric construction of crystal bases*, Duke Math. J. **89** (1997), 9–36.

[LT] B. Leclerc and J-Y. Thibon, *q-deformed Fock spaces and modular representations of spin symmetric groups*, J. Phys. A **30** (1997), 6163–6176.

[LW] J. Lepowsky and R.L. Wilson, *The structure of standard modules. I. Universal algebras and the Rogers-Ramanujan identities*, Invent.Math. **77** (1984), 199–290.

[MM] K. Misra and T. Miwa, *Crystal base for the basic representation of* $U_q(\mathfrak{sl}(n))$, Comm. Math. Phys. **134** (1990), 79–88.

[Oh] S. Oh, *Young Walls of Type* $D^{(2)}_{n+1}$ *and Strict Partitions*, arXiv:1105.2380

[OV] A. Okounkov and A. Vershik, *A new approach to representation theory of symmetric groups*, Selecta Math. (N.S.) **2** (1996), 581–605.

[Rog] L.J. Rogers, *Second Memoir on the Expansion of certain Infinite Products*, Proc.London Math.Soc. S1-25 (1894), 318–343.

[Sch] I. Schur, *Über die Darstellung der symmetrischen and der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. Reine Angew. Math. **139** (1911), 155–250.

[Ste] J. Stembridge, *A local characterization of simply-laced crystals*, Trans.Amer.Math.Soc. **355** (2003), 4807–4823.

[Ts1] 土岡俊介, *Schur* の分割定理の $p = 7$ 類似について, 数理解析研究所講究録 1992 (2016) 33–43

[Ts2] S. Tsuchioka, *A local characterization of* B_2 *regular crystals*, arXiv:1710.09622

[Ts3] S. Tsuchioka, *Hecke-Clifford superalgebras and crystals of type* $D^{(2)}_l$, Publ.Res.Inst.Math.Sci. **46** (2010), 423–471.

[TW] S. Tsuchioka and M. Watanabe, *Schur partition theorems via perfect crystal*, arXiv:1609.01905