非可換環上の変形について

川又雄二郎（東大・数理）

1. INTRODUCTION

非可換 Artin 環上の変形理論について述べる。議論は初等的であるが、なかなかうまくいくところが面白いと思う。

小平・Spencer の変形理論ではパラメーター空間は複素多様体であった：コンパクト複素多様体 X の変形とは、複素多様体 $\mathcal{X}$ から点付きの複素多様体（または複素解析空間） $s_0 \in S$ への滑らかで固有的な正則写像 $f : \mathcal{X} \to S$ と、s_0 上のファイバー $f^{-1}(s_0)$ への同型写像 $\phi : X \to f^{-1}(s_0)$ の組のことである。微分可能多様体としての X 上で偏微分方程式を解くことによって、半普遍変形族の存在などが示された。また、半普遍変形族の底空間 S の原点 s_0 における Zariski 接空間はコホモロジー群 $H^1(X, T_X)$ で与えられ、S が滑らかになることに対する障害の空間が $H^2(X, T_X)$ で与えられることなどが示された（東大セミナー・ノート「小平邦彦述：複素多様体の構造の変形」を参照。大事な点がよくまとまっている）。

Grothendieck, Artin, Schlessinger はパラメーター空間として（可換な） Artin 局所環（のスペック）$S = \mathrm{Spec}(R)$ を考えた ([8] 参照)。代数多様体 X の変形とは、代数的スキーム $\mathcal{X}$ からの平坦な射 $f : \mathcal{X} \to S$ と、極大イデアルに対応する点 s_0 上のファイバー $f^{-1}(s_0)$ への同型写像 $\phi : X \to f^{-1}(s_0)$ の組のことである。X が特異点を持つ場合には、f は滑らかではなく平坦になる。半普遍変形の底空間は Artin 局所環の逆極限 $\hat{R}$ として得られ、これは複素解析空間としての半普遍変形の底空間 S の原点 s_0 における完備化と一致する。$\hat{R}$ は無限小拡大の列によって逐次近似され、$T^i = H^i(X, T_X)$, $i = 1, 2$ によって制御される。多様体の代わりに、固定した多様体上の層 F の変形を考えるときには、$T^i = \mathrm{Ext}^i(F, F)$ となる。

Laudal [5] はパラメーター空間として非可換 Artin 環を考えた。変形の定義において、R を非可換にすればあとは同じである。Donovan, Wemyss は 3 次元 flop の例外曲線に対して非可換変形を考えた。すると、非可換変形は可換変形よりもむしろ自然であり、幾何学的により深い意味があることがわかった。非可換 Artin 環は局所環の直積にはならないので、非可換変形は相互作用を持つ多体問題となる。この講演では、単純組というものを定義し、その非可換変形を考えると、Abel 圏における拡大の理論と一致することを見た。そして、相対的例外対象や相対的球面対象を構成し、半直交分解や球面関手が得られることを解説した。

なお、非可換とは必ずしも可換とは限らないという意味とし、可換の場合も含むと解釈する。定義体は $k = \mathbf{C}$ とする。ただし、多くの議論はより一般の体でも成り立つ。以下の記述の詳細は [4] にある。

2. 非可換変形の定義

まず、パラメーター空間として採用する環のカテゴリーを決める：

定義 2.1. 非可換環 R が r-**点付き** k-**代数**であるとは、環準同型の列 $k^r \to R \to k^r$ で合成が恒等写像になっているものがあるときとする。ここで k^r は r 個の k の直積環である。

k^r の i 番目 $(1 \le i \le r)$ の基本ベクトルの像を $e_i \in R$ と書く。これらは互いに直交する冪零元であり、$\sum_{i=1}^r e_i = 1$ が成り立つ。$R_{ij} = e_i R e_j$ とおけば、$R = \bigoplus_{i,j=1}^r R_{ij}$ であり、R を行列表示することができる。$M_i = \mathrm{Ker}(R \to k^r \to k)$ とおく。ここで、2番目の写像は第 i 成分への射影である。$M = \bigcap_{i=1}^r M_i$ とおくと、$R/M = \bigoplus_{i=1}^r R/M_i$ である。

$R \in (\mathrm{Art}_r)$ とは、$\dim_k R < \infty$ かつ M が冪零となるときとする。このとき、R/M_i はすべての単純両側加群を尽くす。

$R \in (\mathrm{Art}_r)$ 上の変形を定義する：

定義 2.2. $\mathcal{A}$ を k-線形なアーベル圏とする。$F \in \mathcal{A}$ の左 R-加群の構造は、環準同型 $R \to \mathrm{End}(F)$ によって与えられる。F が R 上**平坦**であるとは、右 R-加群に対する関手 $\otimes_R F$ が完全になることである。

$F = \bigoplus_{i=1}^r F_i \in \mathcal{A}$ の $R \in (\mathrm{Art}_r)$ 上の**変形**とは、左平坦 R-加群 F_R と、同型 $\phi : R/M \otimes_R F_R \cong F$ の組のことである。R に対して R 上の変形全体の同型類を対応させれば、**変形関手** $\mathrm{Def}_F : (\mathrm{Art}_r) \to (\mathrm{Set})$ が得られる。

半普遍 (versal) 変形を定義する：

定義 2.3. $F \in \mathcal{A}$ を固定する。$(\hat{R}, \hat{M}) = \lim(R_n, M_n)$ を (Art_r) の対象の逆極限として得られる環とする。ここで $(\hat{R}/\hat{M}^n, \hat{M}/\hat{M}^n) = (R_n, M_n) \in (\mathrm{Art}_r)$ と仮定する。各 R_n 上に与えられた F の変形 F_{R_n} の列と、$n < n'$ に対する同型 $\phi_{nn'} : R_n \otimes_{R_{n'}} F_{n'} \cong F_n$ の組みが以下の条件を満たすとき、F の**半普遍変形**と呼ぶ：

(1) 任意の R' 上の変形 $F_{R'}$ を与えると、ある n と環準同型 $f : R_n \to R'$ 及び同型 $R' \otimes_{R_n} F_{R_n} \cong F_{R'}$ が存在する。

(2) f が誘導する写像 $\hat{M}/\hat{M}^2 \to M'/(M')^2$ はただ一つに定まる。

もしも $\dim \mathrm{Ext}^1(F, F) < \infty$ ならば半普遍変形が存在する ([5])。$\hat{R}$ のアーベル化は、可換な半普遍変形の底空間を与える ([8])。

3. 単純組の非可換変形

以下では単純組の非可換変形を考える：

定義 3.1. $F = \sum_{i=1}^r F_i$ が**単純組**であるとは、$\mathrm{Hom}(F_i, F_j) \cong k^{\delta_{ij}}$ が成り立つときとする。

例 3.2. $f : X \to Y$ を滑らかな3次元代数多様体 X の**小さな収縮射**とする。つまり、f は射影的双有理射で、例外集合が1次元であるとする。Y は末端特異点を持つ。一つの特異点 $y \in Y$ 上のスキーム論的ファイバーを $f^{-1}(y)$ とする。$f^{-1}(y)$ の純1次元閉部分スキーム $Z_1, \dots, Z_r$ で、互いの台の交わりが0次元になるものを取る。このとき、$F_i = \mathcal{O}_{Z_i}$ とすれば、$F = \sum F_i$ は単純組になる。

単純組の半普遍変形は、普遍拡大の完全系列を繰り返し適用することによって得られる：

定理 3.3. 単純組 $F = \sum F_i$ に対して、**普遍拡大**の完全系列を帰納的に構成する：

$$0 \to \bigoplus Ext^1(F^{(n)}, F_i) \otimes F_i \to F^{(n+1)} \to F^{(n)} \to 0$$

$R_n = End(F^{(n)})$、 $\hat{R} = \lim R_n$ とおく。このとき、$\{F^{(n)}\}$ は $\hat{R}$ を底空間とする半普遍変形になる。

4. 相対的例外対象

定義 4.1. 射影的多様体 X 上の連接層の有界導来圏 $D^b(\mathrm{coh}(X))$ を考える。

(1) $F \in D^b(\mathrm{coh}(X))$ が**傾斜対象**であるとは、任意の $p \neq 0$ に対して $\mathrm{Hom}^p(F, F) = 0$ が成り立つこととする。

(2) F の**生成する**三角圏 $\langle F \rangle$ とは、以下の条件が成り立つ最大の三角部分圏のことである：$a \in \langle F \rangle$ において、任意の整数 p に対して $\mathrm{Hom}^p(F, a) = 0$ が成り立つならば、$a \cong 0$ となる。

定理 4.2. *傾斜対象 $F \in D^b(coh(X))$ が生成する三角圏 $\langle F \rangle$ において、$R = End(F)$ とおくとき、三角圏の同値 $\langle F \rangle \cong D^b(mod\text{-}R)$ が成り立つ ([2], [7], [11])。*

相対的例外対象を定義する：

定義 4.3. 射影的多様体 X 上の連接層からなる単純組 F を考える。$R \in (\mathrm{Art}_r)$ 上の変形 F_R が半普遍変形になっていると仮定する。さらに、$p > 0$ ならば $\mathrm{Hom}^p(F_R, F) = 0$ となると仮定する。このとき、F_R は R 上相対的に**例外対象**であるという。

定義 4.4. 三角圏の**半直交分解** $\mathcal{D} = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ とは、

(1) $\mathcal{A}_i$ たちは三角部分圏であり、すべての $\mathcal{A}_i$ を含む三角部分圏は $\mathcal{D}$ しかない。

(2) $a_i \in \mathcal{A}_i$ かつ $i < j$ ならば、$\mathrm{Hom}(a_j, a_i) = 0$ が成り立つ。

定理 4.5. *射影的多様体 X 上の連接層からなる単純組 F の半普遍変形 F_R が R 上の相対的例外対象になっていると仮定する。さらに、F_R は完全複体（局所的に自由層の有界複体と擬同型）であると仮定する。このとき、半直交分解 $D^b(coh(X)) = \langle F^{\perp}, F \rangle$ と、三角圏の同値 $\langle F \rangle \cong D^b(mod\text{-}R)$ が成り立つ。*

証明の概略は以下の通りである。R は非可換なので $\mathrm{Spec}(R)$ というものは存在しないが、仮に空間 $[R]$ のようなものを考える。$[R]$ 上の連接層とは、有限生成 R-加群のことである。すると、$F_R \in (\mathrm{coh}(X \times [R]))$ と考えられる。つまり F_R は $\mathcal{O}_X \otimes R$-加群である。二つの射影

$$X \xleftarrow{\ p\ } X \times [R] \xrightarrow{\ q\ } [R]$$

がある。**Fourier-Mukai 型の変換** $\Phi^{F_R^*} : D^b(\mathrm{coh}(X)) \to D^b(\mathrm{mod}\text{-}(R))$ と $\Phi^{F_R} : D^b(\mathrm{mod}\text{-}(R)) \to D^b(\mathrm{coh}(X))$ が、$\Phi^{F_R^*}(a) = q_*(p^*a \otimes_{\mathcal{O}_X} F_R^*)$ 及び $\Phi^{F_R}(b) = p_*(q^*b \otimes_R F_R)$ によって定義される。ここで、F_R^* は F_R の導来双対である。

半直交分解は、関手 $\Psi = \mathrm{cone}(\Phi^{F_R}\Phi^{F_R^*} \to \mathrm{Id})$ で与えられる。つまり、特別三角形 $\mathrm{Hom}_X(F_R, a) \otimes_R F_R \to a \to \Psi(a)$ が成り立つ。

以下ではいくつかの例を述べる：

例 4.6. (1) $X = \mathbf{P}(1, 1, 2)$、$F = \mathcal{O}_X(-1)$ とする。F は可逆ではないが、その半普遍変形 F_R は階数 2 の局所自由層になる。底空間は $R = k[t]/t^2$ である。半直交分解

$$D^b(\mathrm{coh}(X)) = \langle \mathcal{O}_X(-2), F_R, \mathcal{O}_X \rangle$$

が成り立つ。

(2) X は $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ 上の豊富層 $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1}(1,1)$ に関する射影的錐体とし、$F = \mathcal{O}_X(-1,0) \oplus \mathcal{O}_X(0,-1)$ とする。非自明な拡大

$$0 \to F_2 \to G_1 \to F_1 \to 0$$

などにより、$F_R = G_1 \oplus G_2$ を得る。$R = \begin{pmatrix} k & kt \\ kt & k \end{pmatrix} \mod t^2$ と書ける。半直交分解

$$D^b(\mathrm{coh}(X)) = \langle \mathcal{O}_X(-2,-2), \mathcal{O}_X(-1,-1), F_R, \mathcal{O}_X \rangle$$

を得る。

(3) $X = \mathbf{P}(1,1,d)$、$F = \mathcal{O}_X(-1)$ とする。半普遍変形は $R = k[t_1,\dots,t_{d-1}]/(t_1,\dots,t_{d-1})^2$ で与えられる。

$$D^b(\mathrm{coh}(X)) = \langle \mathcal{O}_X(-d), F_R, \mathcal{O}_X \rangle$$

となる。

(4) $X = \mathbf{P}(1,2,3)$、$F_i = \mathcal{O}_X(-i)$ とする。

F_1 の半普遍変形は、底空間が $k\langle x,y\rangle/(x^2,y^3)$ で与えられ、無限次元になる。可換変形に限れば有限次元になる。

F_2 と F_3 の半普遍変形 G_2, G_3 は有限次元になり、底空間はそれぞれ $R_2 = k[t]/t^3$、$R_3 = k[t]/t^2$ で与えられる。$D^b(\mathrm{coh}(X)) = \langle G_3, G_2, \mathcal{O}_X \rangle$ となる。

5. 相対的球面対象

Fano 多様体には例外対象が現れるが、Calabi-Yau 多様体には球面対象が現れる：

定義 5.1. 滑らかな射影的多様体 X 上に連接層からなる単純組 F を考える。$n = \dim X \ge 2$ とする。$R \in (\mathrm{Art}_r)$ 上の変形 F_R が半普遍変形になっていると仮定する。さらに、以下の仮定が成り立つとき、F_R は R 上相対的に n**-球面対象**であるという：

(1) $p \ne 0, n$ ならば $\mathrm{Hom}^p(F_R, F) = 0$、$\mathrm{Hom}(F_R, F_i) \cong R/M_i$、かつ置換 $\sigma \in S_n$ が存在して $\mathrm{Hom}^n(F_R, F_i) \cong R/M_{\sigma(i)}$ が成り立つ。

(2) $F \otimes \omega_X \cong F$ が成り立つ。

X が滑らかである代わりに、より一般に Serre 関手 S_X の存在を仮定しても良い。この時は (2) の条件は $S(F) \cong F[n]$ となる。

定理 5.2. *相対的 n-球面対象 F_R において、R は 対称環（または 0 次元の Gorenstein 環）になる：$R^* = Hom_k(R,k)$ は階数 1 の自由右 R-加群になる。*

系 5.3. 以下のような双対定理が成り立つ：有限生成右 R-加群 M に対して、$Hom_k(M,k) \cong Hom_R(M,R)$。

これは「射」$[R] \to \mathrm{Spec}(k)$ に対する相対的双対定理である。

定義-定理 5.4. *$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は導来圏の間の Fourier-Mukai 型の関手（積分関手）とする。F が*球面関手*であるとは、左随伴関手 L と右随伴関手 R が存在し、さらに以下の４条件のうちの２条件が成り立つ時とする。このとき残りの２条件も自動的に成り立つ。*[9], [1], [6]。

(1) 特別三角形 $C \to Id_{\mathcal{A}} \to RF$ によって定義される余ねじれ関手 C は $\mathcal{A}$ の自己同値である。

(2) 特別三角形 $FR \to Id_B \to T$ によって定義されるねじれ関手 T は $\mathcal{B}$ の自己同値である。
(3) $R \cong CL[1]$.
(4) $R \cong LT[-1]$.

球面対象は球面関手を与える：

定理 5.5. 相対的 n-球面対象 F_R に対して、$F(\bullet) = \bullet \otimes_R F_R$ で与えられる関手 $F : D^b(mod\text{-}R) \to D^b(coh(X))$ は球面関手になる。

証明の概略。F の右随伴関手は $\Phi_R(\bullet) = R\mathrm{Hom}_X(F_R, \bullet)$、左随伴関手は $\Phi_L = \Phi_R[n]$ で与えられる。$D^b(\mathrm{mod}\text{-}R)$ の生成元 R に対して、$C(R) \cong R[1-n]$ が成り立つので、F は球面関手になる。

例 5.6. (1) $f : X \to Y$ を滑らかな 3 次元代数多様体から孤立特異点を持つ正規代数多様体への射影的双有理射で、例外集合が素因子 E であって、特異 2 次曲面 $\mathbf{P}(1,1,2)$ と同型になるものとする。Y の特異点は複素解析的には $\{(x,y,z,w) \in \mathbf{C}^4 \mid xy + z^2 + w^3 = 0\}$ と同型である。

$\mathcal{O}_E(E) = \mathcal{O}_E(-2) \in D^b(\mathrm{coh}(X))$ は例外対象になる。左直交部分圏 $\mathcal{D} = {}^\perp\mathcal{O}_E(E) \subset D^b(\mathrm{coh}(X))$ を考える。$F = \mathcal{O}_E(-1)$ は $\mathcal{D}$ の元となり、$\mathcal{D}$ の Serre 関手は $S_\mathcal{D}(F) = F[2]$ を満たす。F の半普遍変形 F_R の底空間は $R = k[t]/(t^2)$ で与えられ、2-球面対象を得る。

(2) $f : X \to Y$ を滑らかな 4 次元代数多様体から孤立特異点を持つ正規代数多様体への射影的双有理射で、例外集合が素因子 E であって、$\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ を射影空間に豊富因子 $\mathcal{O}(1,1)$ により埋め込んだときの射影的錐体と同型になるものとする。このとき、$(\mathcal{O}_E(-2,-2), \mathcal{O}_E(-1,-1)) \in D^b(\mathrm{coh}(X))$ は例外列となる。左直交部分圏 $D = {}^\perp\langle \mathcal{O}_E(-2,-2), \mathcal{O}_E(-1,-1)\rangle \subset D^b(\mathrm{coh}(X))$ を考える。$F = \mathcal{O}_E(-1,0) \oplus \mathcal{O}_E(0,-1)$ は $\mathcal{D}$ の元となり、$\mathcal{D}$ の Serre 関手は $S_\mathcal{D}(F) = F[2]$ を満たす。F の半普遍変形 F_R の底空間は $R = \begin{pmatrix} k & kt \\ kt & k \end{pmatrix} \mod t^2$ で与えられ、2-球面対象を得る。ここで、σ は互換である。

さらに高次元の場合でも、E が孤立特異点を持つ 2 次超曲面に対して、Spinor ベクトル束を考えれば同様の結果を得る。この場合でも、いつも 2-球面対象になることは興味深い。

6. 3 次元フロップ

小さな収縮（例 3.2）はフリップやフロップの片側である。

定理 6.1 ([12])**.** 滑らかな 3 次元代数多様体 X からアフィン代数多様体 $Y = Spec(B)$ への小さな収縮射 $f : X \to Y$ を考える。このとき、X 上の局所自由層 M で、$D^b(coh(X))$ を生成し、しかも $H^1(Hom(M,M)) = 0$ が成り立つもの、つまり**傾斜束**が存在する。そして、自己同型環 $A = End(M)$ は非可換 B-代数となり、三角圏の同値 $D^b(coh(X)) \cong D^b(mod\text{-}A)$ が成り立つ。

次の定理がこの研究の出発点であった：

定理 6.2 ([3])**.** 前の定理の状況で、さらに f の例外集合 C が $\mathbf{P}^1$ と同型になっていると仮定する。$I \subset A$ を層準同型 $h : M \to M$ のうちで $M \to \mathcal{O}_X \to M$ の形に分解するもの全体

で生成された両側イデアルとする。このとき、$\mathcal{O}_C$ の半普遍非可換変形の底空間は、環 R/I で与えられる。

非可換環 A は M に対応した箙で表示できるので、$R = A/I$ は具体的に計算できる：

例 6.3. (1) $Y = \{(x,y,u,v) \in \mathbf{C}^4 \mid u^2 + v^2 y = x(x^2+y^3)\}$ とする。このとき、$R = k\langle x,y\rangle/(xy+yx, x^2-y^3)$ となる。R の最大可換商環は、$\mathcal{O}_C$ の可換変形に対応するが、$R^{ab} = k[x,y]/(xy, x^2-y^3)$ となる。

(2) $Y = \{(a,y,z,w) \in \mathbf{C}^4 \mid xy - zw(z+w) = 0\}$ とする。このときは例外集合 C は $\mathbf{P}^1$ と同型な 2 個の曲線 C_1, C_2 からなり、これらが一点で交わっている。$F = \mathcal{O}_{C_1} \oplus \mathcal{O}_{C_2}$ の半普遍非可換変形の底空間は、非可換環 $R = \begin{pmatrix} k+kt^2 & kt \\ kt & k+kt^2 \end{pmatrix} \mod t^3$ で与えられる。

[10] は Gopakumar-Vafa 不変量と非可換変形の関係を明らかにした：

定理 6.4. *滑らかな 3 次元代数多様体 X からアフィン代数多様体 $Y = Spec(B)$ への小さな収縮射 $f : X \to Y$ を考える。Y の特異点 p 上のスキーム論的ファイバー $f^{-1}(p)$ は $C \cong \mathbf{P}^1$ を台とし、C の一般点での長さが l になると仮定する。$\mathcal{O}_C$ の半普遍非可換変形の底空間を R とし、$w = length(R)$, $w^{ab} = length(R^{ab})$ とおく。n_j を j 番目の Gopakumar-Vafa 不変量とする。すなわち、X を一般的に変形したときに得られる多様体の上の $(-1,-1)$-曲線であって、X へ退化させたときのクラスが $j[C]$ になるようなものの本数を n_j とする。このとき、以下の公式が成り立つ：$w = \sum_{i=j}^{l} j^2 n_j$, $w^{ab} = n_1$。*

References

[1] Anno, Rina; Logvinenko, Timothy. *Spherical DG-functors.* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 19 (2017), no. 9, 2577–2656.

[2] Bondal, A. I.; M. M. Kapranov, M. M. *Representable functors, Serre functors, and reconstructions.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 53 (1989), no. 6, 1183–1205, 1337.

[3] Donovan, Will; Wemyss, Michael. *Noncommutative deformations and flops.* Duke Math. J. 165 (2016), no. 8, 1397–1474.

[4] Kawamata, Yujiro. *On multi-pointed non-commutative deformations and Calabi-Yau threefolds.* arXiv: 1512.06170

[5] Laudal, O. A. *Noncommutative deformations of modules.* The Roos Festschrift volume, 2. Homology Homotopy Appl. 4 (2002), no. 2, part 2, 357–396.

[6] Meachan, Ciaran. *A note on spherical functors.* arXiv:1606.09377

[7] Rickard, J. *Morita theory for derived categories.* J. London Math. Soc. Vol. 39, pp. 436–456, 1989.

[8] Schlessinger, Michael. *Functors of Artin rings.* Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), 208–222.

[9] Seidel, Paul; Thomas, Richard. *Braid group actions on derived categories of coherent sheaves.* Duke Math. J., Volume 108, Number 1 (2001), 37–108.

[10] Toda, Yukinobu. *Non-commutative width and Gopakumar-Vafa invariants.* Manuscripta Math. 148 (2015), no. 3-4, 521–533.

[11] Toda, Yukinobu; Uehara, Hokuto. *Tilting generators via ample line bundles.* Adv. Math. 223 (2010), no. 1, 1–29.

[12] Van den Bergh, Michel. *Three-dimensional flops and noncommutative rings.* Duke Math. J. 122 (2004), no. 3, 423–455.