

第61回代数学シンポジウム報告集

於 佐賀大学

2016年9月 7日～9月 10日

2016年度 第 61 回代数学シンポジウム 報告集

本書は平成 28 年 9 月に佐賀大学で開催された第 61 回代数学シンポジウムの報告集です。このシンポジウムは
基盤研究(S) (研究代表者 金銅 誠之 課題番号 15H05738),
からの援助を受けました。

記

日時： 2015 年 9 月 7 日 (月) — 9 月 10 日 (木)
場所： 佐賀大学本庄キャンパス理工学部 6 号館 1 階大会議室
会場責任者： 宮崎誓 (熊本大学)、寺井直樹 (佐賀大学)
プログラム責任者：
(環論) 宮崎充弘 (京都教育大)、眞田克典 (東京理大理)
(代数幾何) 吉岡康太 (神戸大)、加藤文元 (東工大)
(数論) 三枝洋一 (東大数理)、若槻聡 (金沢大)
(群論・表現論) 小田文仁 (近畿大)、鈴木武史 (岡山大自然科学研究科)
シンポジウム責任者： 寺杣 友秀

主催：日本数学会代数学分科会
共催：佐賀大学

プログラム

8 月 31 日 (月) 群論・表現論

09:45 - 10:45 飛田 明彦 (埼玉大学) Biset functors and cohomology of finite groups
11:00 - 12:00 中島 啓 (京大数理研) Towards a mathematical definition of Coulomb
branches of gauge theories
13:30 - 14:30 中岡 宏行 (鹿児島大学) An interpretation of biset functors as Mackey
functors on finite groupoids, and its relation to deviators
14:45 - 15:45 坂本玲峰 (東京理科大学) ベーテ仮説へのいざない
16:00 - 17:00 田辺 颯一郎 (北海道大学) 頂点代数の表現と結合的代数

9 月 1 日 (火) 数論

09:45 - 10:45 金子 昌信 (九大数理) 多重ゼータ値

- 11:00 - 12:00 玉川 安騎男 (京大数理研) 代数多様体の数論的基本群とその線形表現
- 13:30 - 14:30 津嶋 貴弘 (千葉大理) 剰余標数が奇数の等標数の場合の二次元非可換ルビンテイト理論の局所的証明について
- 14:45 - 15:45 安福 悠 (日大理工) 有理曲面上のボエタ予想
- 16:00 - 17:00 服部 新 (九大数理) アーベル多様体の標準部分群とヒルベルト固有値多様体

9月2日(水) 代数幾何

- 09:45 - 10:45 小木曾 啓示 (東大数理) **Birational geometry through complex dynamics**
- 11:00 - 12:00 斎藤 秀司 (東工大流動) 高次元類体論とモチーフ理論の一般化
- 13:30 - 14:30 権業 善範 (東大数理) 拡張定理と極小モデル理論
- 14:45 - 15:45 大川 新之介 (阪大理) **Compact moduli of marked noncommutative del Pezzo surfaces**
- 16:00 - 17:00 阿部 拓郎 (九大) **Divisionally free arrangements of hyperplanes**

9月3日(木) 環論

- 09:45 - 10:45 加藤 希理子 (大阪府立大理) 三角圏の対称性—多角形ルコルマン—
- 11:00 - 12:00 黒田 茂 (首都大理工) 微分作用素と多項式環
- 13:30 - 14:30 下元 数馬 (日大文理) **Almost Ring Theory** の観点からのホモロジカル予想
- 14:45 - 15:45 谷口 直樹 (明治大) **Almost Gorenstein rings**
- 16:00 - 17:00 板場 綾子 (静岡大理) 自己移入的 Koszul 多元環に対する有限条件 (Fg)

目次

| | | |
|--------|---|-----|
| 飛田 明彦 | Biset functors and cohomology of finite groups | 6 |
| 中島 啓 | Towards a mathematical definition of Coulomb branches of gauge theories | 22 |
| 中岡 宏行 | An interpretation of biset functors as Mackey functors on finite groupoids, and its relation to deviators | 34 |
| 坂本玲峰 | ベーテ仮説へのいざない | 43 |
| 田辺 顕一郎 | 頂点代数の表現と結合的代数 | 119 |
| 金子 昌信 | 多重ゼータ値 | 130 |
| 玉川 安騎男 | 代数多様体の数論的基本群とその線形表現 | 140 |
| 津嶋 貴弘 | 剰余標数が奇数の等標数の場合の二次元非可換ルビンテイト理論の局所的証明について | 147 |
| 安福 悠 | 有理曲面上のボエタ予想 | 158 |
| 服部 新 | アーベル多様体の標準部分群とヒルベルト固有値多様体 | 164 |
| 小木曾 啓示 | Birational geometry through complex dynamics | 181 |
| 斎藤 秀司 | 高次元類体論とモチーフ理論の一般化 | 185 |
| 権業 善範 | 拡張定理と極小モデル理論 | 199 |
| 大川 新之介 | Compact moduli of marked noncommutative del Pezzo surfaces | 208 |
| 阿部 拓郎 | Divisionally free arrangements of hyperplanes | 221 |
| 加藤 希理子 | 三角圏の対称性—多角形ルコルマン— | 239 |
| 黒田 茂 | 微分作用素と多項式環 | 253 |
| 下元 数馬 | Almost Ring Theory の観点からのホモロジカル予想 | 279 |
| 谷口 直樹 | Almost Gorenstein rings | 290 |
| 板場 綾子 | 自己移入的 Koszul 多元環に対する有限条件 (Fg) | 308 |

Biset functors and cohomology of finite groups

飛田明彦 (埼玉大学教育学部)

1 はじめに

有限群 G 上の Mackey 関手は, G の部分群に関する, 制限・誘導・共役等の作用を圏論的に扱う枠組みです。一方, ひとつの有限群だけではなく, すべての有限群を扱う大域的な枠組みとして, global Mackey 関手が定義されます。さらに, 有限群の部分群や準同型写像などは, 群が左右から作用する集合, biset の枠組みで捉えることができ, biset 圏が定義され, biset 圏上の関手として biset 関手が定義されます。そこでは, 部分群や, 共役あるいは単射準同型写像のみならず, inflation, deflation, という二つの作用も取り込まれます。しかし, 本稿での対象である群の表現や cohomology は, deflation に対応する作用を持たず, inflation のみを取り入れた右自由な biset が対象となります。

一方, 有限群 G の biset 圏での自己準同型環 $B(G, G)$ は両側 Burnside 環と呼ばれ, $B(G, G)$ の表現と biset 関手は密接な関係にあります。両側 Burnside 環や biset 関手は有限群の cohomology 環, Burnside 環, 表現環, Dade 群, 等の様々な分野と関連しています。このような, 有限群とその表現論の方面からの集大成が S. Bouc [4] にまとめられています。また, 小田文仁・中岡宏行氏の論説 [20] もご参照ください。他方, Mackey 関手, biset 関手などは, 代数的位相幾何学, homotopy 論の立場からも多くの研究がなされてきています。

本稿の目的は, biset 関手と両側 Burnside 環について概略を述べ, 位数が p^3 の extraspecial p -群の cohomology に関する柳田伸顕氏 (茨城大学) との共同研究 [14, 15] の結果を紹介することです。これらは mod- p cohomology 環を両側 Burnside 環上の加群として考えその構造や組成因子などを調べたものですが, cohomology を biset 関手として見る立場からの考察が有効に用いられました。また, これらの研究には安定 homotopy 論からの背景と動機があり, [14, 15] の結果は, 分類空間の stable splitting とその cohomology についての結果に翻訳することができます。

以下の第2章, 第3章では, 有限群の biset, biset 圏, biset 関手, 両側 Burnside 環について概略を述べます。第4章では homotopy 論からの背景について述べます。第5章では [14, 15] の主結果を紹介し, 第6章では rank が 2 の p -群の cohomology に関する [16] の結果を紹介します。この部分はまだ未完成の部分もあるのですが, 多少希望的な展望も述べさせていただきます。

今回の講演の機会を与えていただき, 様々にお世話になりました関係の方々に深く感謝します。

2 有限群と biset

本章では, [4] の第 1 章に従って, 有限群の biset がどのような場面で現われてくるか, 概略を紹介する。\$k\$ を体とし, \$G, H\$ を有限群とする。\$kG\text{-mod}\$ を有限生成左 \$kG\$-加群の圏とし, 次の基本的な完全関手を考える。

- 部分群 \$H \leq G\$ に対して,

$$\text{Ind}_H^G : kH\text{-mod} \longrightarrow kG\text{-mod}$$

$$\text{Ind}_H^G = kG \otimes_{kH} -$$

- 群準同型写像 \$\varphi : G \longrightarrow H\$ に対して,

$$\varphi^* : kH\text{-mod} \longrightarrow kG\text{-mod}$$

$$\varphi^* = {}_\varphi kH \otimes_{kH} -$$

ただし, \${}_\varphi kH\$ は \$kH\$ に \$G, H\$ の作用を

$$g \cdot x \cdot h = \varphi(g)xh \quad (g \in G, x \in kH, h \in H)$$

と定義して得られる \$(kG, kH)\$-両側加群である。

これらは \$(kG, kH)\$-両側加群 \$kG\$ 及びに \${}_\varphi kH\$ により誘導されている。さらに \$kG, {}_\varphi kH\$ は置換加群であり, \$H\$ の右からの作用は自由な作用である。この状況を一般化して, 右からの作用が自由である両側置換加群によって引き起こされる完全関手を考える。

有限集合 \$X\$ に左から \$G\$ が, 右から \$H\$ が作用し,

$$(gx)h = g(xh) \quad (g \in G, x \in X, h \in H)$$

をみたすとき, \$X\$ を \$(G, H)\$-biset と呼ぶ。さらに, \$xh = x\$ ならば \$h = 1\$ であるとき, この作用は右自由であるという。右自由な biset \$X\$ に対して, \$X\$ を基底とする \$k\$-ベクトル空間を \$kX\$ とする。\$kX\$ には左右から自然に \$G, H\$ が作用し, \$kX\$ は \$(kG, kH)\$-両側加群となる。\$X\$ への \$H\$ の作用が右自由であることから \$kX\$ は右 \$kH\$-加群として自由加群となり, 関手

$$X \otimes_{kH} : kH\text{-mod} \longrightarrow kG\text{-mod}$$

は完全関手となる。

\$R_k(G)\$ を \$kG\$ の表現環とする。つまり \$R_k(G)\$ は有限生成 \$kG\$-加群の圏の Grothendieck 群であり, 単純 \$kG\$-加群の同型類を基底とする自由アーベル群である。\$X \otimes_{kH} -\$ は完全関手であり完全列を保つことより対応

$$R_k(H) \longrightarrow R_k(G)$$

が引き起こされる。

次に biset の合成について考える。 G, H, K を有限群とする。 (G, H) -biset X と (H, K) -biset Y に対して、

$$X \times_H Y = X \times Y / \sim$$

とおく。ただし、 $h \in H$ に対して $(xh, y) \sim (x, hy)$ である。 $X \times_H Y$ は (G, K) -biset であり、 X, Y がともに右自由であるならば $X \times_H Y$ も右自由である。対応する置換加群については自然に

$$k(X \times_H Y) \cong kX \otimes_{kH} kY$$

となり、 kY, kX により誘導される関手の合成は $k(X \times_H Y)$ により誘導される関手となる。このことから、上であげた表現環 $R_k(-)$ は、適当な係数体上で考えるならば、次章で述べる biset 関手となっている。例えば、[33] では、 k を正標数 p の体として、標数 0 の体上での biset 関手 $R_k(-)$ について研究している。

(G, H) -biset は可移な (G, H) -biset の和に分解するが、可移な右自由 biset は部分群と準同型写像を用いて具体的に表示することができる。 $G \geq H$ と準同型写像 $\varphi : H \rightarrow K$ に対して、 ${}_G G_H$ と ${}_H(\varphi K)_K$ の合成

$$G \times_H (\varphi K)$$

を考えると次が成り立つ。

命題 2.1. 任意の可移右自由 (G, K) -biset は、適当な $G \geq H$ 、 $\varphi : H \rightarrow K$ に対して $G \times_H (\varphi K)$ と同型である。

この命題は、非常におおまかにいうならば、

$$\boxed{\text{右自由な biset} \longleftrightarrow \text{部分群} + \text{準同型写像}}$$

ということを意味している。

次に biset の cohomology への作用を見る。 $H^n(G, k) = \text{Ext}_{kG}^n(k, k)$ を k -係数の n 次の cohomology 群とし、 $H^*(G, k) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(G, k)$ を cohomology 環とする。部分群 $G \geq H$ に対して、transfer 写像

$$\text{Tr}_H^G : H^*(H, k) \rightarrow H^*(G, k)$$

が定義され、準同型写像 $\varphi : H \rightarrow K$ に対して、

$$\varphi^* : H^*(K, k) \rightarrow H^*(H, k)$$

が定義される。これらを利用して、 (G, K) -biset $G \times_H (\varphi K)$ の作用を

$$H^*(K, k) \xrightarrow{\varphi^*} H^*(H, k) \xrightarrow{\text{Tr}_H^G} H^*(G, k)$$

として定義する。この作用により、 $H^*(-, k)$ は次章で定義する biset 関手となっている。

3 Biset 圏と biset 関手

G, H を有限群とする。 (G, H) -biset の圏の Grothendieck 群を $B_{\mathbb{Z}}(G, H)$ とおく。さらに体 k に対して,

$$B(G, H) = k \otimes B_{\mathbb{Z}}(G, H)$$

とおく。これは可移 (G, H) -biset の同型類を基底とする k -ベクトル空間である。ここでは、必ずしもすべての (G, H) -biset を考えるのではなく、次の3種類の biset について考察する。

- すべての biset を対象とする場合： $B^{\text{all}}(G, H)$ と表記する。
- 右自由な biset のみを対象とする場合： $B^{\text{r}}(G, H)$ と表記する。
- 右自由かつ左自由となる biset のみを対象とする場合： $B^{\text{lr}}(G, H)$ と表記する。

定義 3.1. (1) $\square = \text{all}, \text{r}, \text{lr}$ に対して、biset 圏 \mathcal{C}_k^{\square} を次のように定義する。

- 対象はすべての有限群
- 射は

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_k^{\square}}(H, G) = B^{\square}(G, H)$$

- 射の合成は ${}_G X_H, {}_H Y_K$ に対して,

$$[X] \circ [Y] = [X \times_H Y]$$

(2) \mathcal{C}_k^{\square} における G の自己準同型環

$$\text{End}_{\mathcal{C}_k^{\square}}(G) = B^{\square}(G, G)$$

を両側 Burnside 環と呼ぶ。

$B^{\square}(G, G)$ は可移 (\square に応じて、すべての、右自由、左右自由な) biset の同型類を基底として持つ k 上の有限次元多元環である。その単位元は G 自身を (G, G) -biset としてみたものの同型類 $[G]$ である。実際、 (G, G) -biset X に対して

$$G \times_G X \cong X \times_G G \cong X$$

が成り立つ。両側 Burnside 環は G の外部自己同型群の群環と密接な関係にある。

命題 3.2. 分裂する全射

$$B^{\square}(G, G) \longrightarrow k \text{Out}(G)$$

が存在する。 $k \text{Out}(G)$ は $B^{\square}(G, G)$ の剰余環であると同時に部分環である。 $\varphi : G \longrightarrow G$ に対しては $[G_{\varphi}]$ が対応する。

例として、位数が 2 の巡回群の場合を詳しく見てみることにする。

例 3.3. G を位数 2 の巡回群とする。可移 (G, G) -biset は次の 5 種類である。

$$\{*\}, G_\varepsilon, \overbrace{\varepsilon G, G, G \times G}^{\text{右自由}} \\ \text{左} \cdot \text{右自由}$$

ただし, $\varepsilon: G \rightarrow G$ は $\varepsilon(G) = 1$ となる準同型写像である。また $\{*\}$ は G が自明に作用する 1 点集合である。よって, 両側 Burnside 多元環の基底と次元は次のようになる。

| | 基底 | 次元 |
|------------------------|--|----|
| $B^{\text{all}}(G, G)$ | $\{*\}, [G_\varepsilon], [\varepsilon G], [G], [G \times G]$ | 5 |
| $B^{\text{r}}(G, G)$ | $[\varepsilon G], [G], [G \times G]$ | 3 |
| $B^{\text{lr}}(G, G)$ | $[G], [G \times G]$ | 2 |

その構造は,

$$[G \times G \times_G G \times G] = [G \times G \times G] = 2[G \times G]$$

となることから

$$B^{\text{lr}}(G, G) \cong \begin{cases} k \oplus k & (\text{char } k \neq 2) \\ k[x]/(x^2) & (\text{char } k = 2) \end{cases}$$

がわかる。一方, $B^{\text{all}}(G, G)$ は体 k に依存せず semisimple であり,

$$B^{\text{all}}(G, G) \cong k \oplus \text{Mat}_2(k)$$

となる。ただし $\text{Mat}_2(k)$ は 2 次の行列環である。また, $B^{\text{r}}(G, G)$ も体 k に依存せず,

$$B^{\text{r}}(G, G) \cong \begin{pmatrix} k & k \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

であることがわかる。

$B^\square(G, G)$ の semisimplicity については, 次が成り立つ。

命題 3.4. (1) $\text{char } k = 0$ ならば $B^{\text{lr}}(G, G)$ は semisimple である [30]。

(2) $B^{\text{lr}}(G, G)$ が semisimple ならば $\text{char } k \nmid |G| |\text{Out}(G)|$ である。

(3) $B^{\text{all}}(G, G)$ について, 次は同値である [4]。

(i) $B^{\text{all}}(G, G)$ は semisimple

(ii) G は巡回群で $\text{char } k \nmid |\text{Out}(G)|$

(4) $B^{\text{r}}(G, G)$ について, 次は同値である。

(iii) $B^{\text{r}}(G, G)$ が semisimple

(iv) $G = 1$

以下では、右自由な biset のみを扱うこととして、

$$\mathcal{C}_k = \mathcal{C}_k^r, B(G, H) = B^r(G, H)$$

とおく。

定義 3.5. k -線形関手

$$\mathcal{C}_k \longrightarrow k\text{-mod}$$

を biset 関手と呼ぶ。biset 関手 $F \neq 0$ の部分関手が F と 0 のみであるとき F は biset 関手として単純である (simple biset functor) という。

注意 3.6. ここでいう biset 関手は inflation 関手とも呼ばれる ([29])。全射準同型 $\varphi : G \rightarrow H$ に対して、 ${}_{\varphi}H$ は右自由な (G, H) -biset となり、 $B(G, H) = \text{Hom}_{\mathcal{C}_k}(H, G)$ の射を与える。よって、biset 関手 F は inflation 写像

$$F(H) \longrightarrow F(G)$$

を引き起こす。前章でみた、表現環 $R_k(-)$ や、cohomology $H^*(-, k)$ は inflation 関手、つまりここでいう意味での biset 関手である。

左右ともに自由な biset を考えた場合は、準同型写像として単射であるものだけを考えることに相当し、この場合の k -線形関手 $\mathcal{C}_k^{\text{rl}} \rightarrow k\text{-mod}$ を global Mackey 関手と呼ぶこともある。また、一般的には k -線形関手 $\mathcal{C}_k^{\text{all}} \rightarrow k\text{-mod}$ を biset 関手と呼ぶ。いずれにしても、以下では右自由な場合のみを扱うことにする。

biset 関手 F に対し、 $F(G)$ は $B(G, G)$ -加群であり、 S が単純関手ならば $S(G)$ は 0 または単純 $B(G, G)$ -加群である。任意の単純 $B(G, G)$ -加群はこのようにして単純関手の G での値として得られる。一方、単純関手は有限群 H と単純 $k\text{Out}(H)$ -加群の組 (H, V) で parametrize される。組 (H, V) に対応する単純関手を $S_{H, V}$ と表す。

cohomology $H^*(-, k)$ は、biset 関手である。厳密には $H^*(G, k)$ は有限次元ベクトル空間ではないが、各次数部分 $H^n(G, k)$ は有限次元ベクトル空間であり、これらを同時に考えていることに相当する。biset 関手について、組成列や組成因子を考えることができ、 $H^*(-, k)$ はある意味で (有限の長さではないが) 組成列を持っている。[29] では $k = \mathbb{F}_2$ の場合、 $H^*(-, \mathbb{F}_2)$ の組成列を計算し、単純関手 $S_{H, V}$ の組成因子としての重複度を H が小さい場合 (巡回群、 $C_2 \times C_2$ 、二面体群や四元数群) に決定している。

$H^*(-, k)$ の組成列、あるいは、単純関手の $H^*(-, k)$ の組成因子としての重複度を考察したいのであるが、biset 関手 F の部分剰余関手として現われる単純関手と、両側 Burnside 環との関係は次のようになる。

補題 3.7. F を biset 関手、 S が単純関手で $S(G) \neq 0$ であるとする。このとき S が F の組成因子であることと $S(G)$ が $B(G, G)$ -加群として $F(G)$ の組成因子であることは、同値である。

これより, $B(G, G)$ -加群としての $H^*(G, k)$ の構造を調べるのが重要となり, まず, 次が目標となる。

3.8. 単純 $B(G, G)$ -加群の $H(G, k)$ における組成因子としての重複度を求めること。

p を素数とし, 有限 p -群 P の cohomology について考える。係数体 k は, 有限体 \mathbb{F}_p とする。 $H^*(-, \mathbb{F}_p)$ の, あるいは, $H^*(P, \mathbb{F}_p)$ の単純組成因子について, 次章で述べる homotopy 論における深い結果の帰結として, 次が知られている。

命題 3.9 ([12]). 任意の単純関手は $H^*(-, \mathbb{F}_p)$ の組成因子となる。また, 任意の単純 $B(P, P)$ -加群は $H^*(P, \mathbb{F}_p)$ の組成因子となる。

[27] では, この命題は, 群の cohomology と p -fusion に関する次の Mislin の定理を導くことが示されている。

定理 3.10 ([22]). G を有限群, H は G の部分群で G の Sylow p -部分群を含むものとする。このとき, 次は同値である。

- (1) H は G の p -fusion を支配する。
- (2) 制限写像 $H^*(G, \mathbb{F}_p) \rightarrow H^*(H, \mathbb{F}_p)$ は同型写像である。

この Mislin の定理については, homotopy 論を経由することなく, モデューラー表現を利用した代数的な証明が知られている [13, 21]。一方, 定理 3.10 は fusion system の cohomology 環 ([3]) に関する主張として, 一般化した形に述べることができる。[24] では, fusion system に一般化された Mislin の定理も, やはり, 命題 3.9 から導かれることが証明されている。[24] で述べられているように, もし, 命題 3.9 の代数的な証明が得られれば, fusion system 版の Mislin の定理についても, 代数的な証明が得られることになる。

4 分類空間の stable splitting

本章では, homotopy 論からの背景について触れる。ここでの説明には, 非常に不正確な部分があることをご容赦願いたい。 p を素数とし, $BG = (BG_+)_p^\wedge$ を (p -完備化した) 分類空間 (の suspension spectrum) とする。安定 homotopy に関連して次の問題を考える。

- wedge 和への分解 $BG = X_0 \vee X_1 \vee \cdots \vee X_m$ を決定する。
- 各 X_i と同値な因子の重複度を決定する。
- 上記の分解に対応して, コホモロジーの分解

$$H^*(BG; \mathbb{F}_p) = \bigoplus H^*(X_i, \mathbb{F}_p)$$

を決定する。

p -群の場合, これらの問題は, Segal 予想 (Carlsson の定理 [6]) の帰結として, 両側 Burnside 環の表現という代数的な問題に帰着される。 P を p -群とすると, 環準同型 $B_{\mathbb{Z}}(P, P) \rightarrow \{BP, BP\}$ が存在し, 適当な完備化の下ではほぼ同型となる。係数体を p 元体 \mathbb{F}_p として, $B(P, P)$ を \mathbb{F}_p 上の両側 Burnside 環とする。先の自己準同型環の同型対応より, BP の stable splitting $BP = \vee X_i$ は \mathbb{F}_p 多元環 $B(P, P)$ における 1 の直交冪等元分解 $1 = \sum e_i$ と対応していることがわかる。詳しくは [1, 2, 23, 25] 等を参照していただきたい。

一方, $B(P, P)$ の原始冪等元は単純 $B(P, P)$ -加群と対応する。各原始冪等元 e_i に対応する単純加群を S_i とおく。以下簡単のため, \mathbb{F}_p は $B(P, P)$ の分解体であると仮定する。このとき, 1 の原始冪等元分解 $1 = \sum e_i$ において e_i と同値な冪等元の重複度は $\dim S_i$ である。また, $\dim_{\mathbb{F}_p} S_i e_i = 1$ であり, 右 $B(P, P)$ -加群 M に対して, M での組成因子としての S_i の重複度は $M e_i$ のベクトル空間としての \mathbb{F}_p 上の次元に等しい。よって次の対応,

- 因子 X_i は単純 $B(P, P)$ -加群 S_i と対応する。
- X_i と同値な因子の重複度は $\dim S_i$ に等しい。
- $H^*(X_i, \mathbb{F}_p) \cong H^*(P, \mathbb{F}_p) e_i$

を経由して, stable splitting の問題は次の問題に置き換わる。

- 単純 $B(P, P)$ -加群を分類し, その次元を決定する。
- $B(P, P)$ の原始冪等元 e_i に対して, $H^*(P, \mathbb{F}_p) e_i$ を決定する。

$\dim H^n(P, \mathbb{F}_p) e_i$ は $H^n(P, \mathbb{F}_p)$ における単純組成因子としての S_i の重複度であるから, これは前章での目標 3.8 「 $H^*(P, \mathbb{F}_p)$ における単純 $B(P, P)$ -加群の重複度」を求めることと合致している。

5 Extraspecial p -群の cohomology

p を素数とする。 p 群の stable splitting に関していくつかの結果が知られている。例えば, 可換群の場合 [12], metacyclic 群の場合 [8, 9], p -rank が 2 の群の場合 [10] などがある。本章では, p を奇素数とし, 位数が p^3 の extraspecial p -群

$$E = \langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^p = [a, c] = [b, c] = 1, [a, b] = c \rangle$$

について考察する。これは位数が p^3 の非可換群で exponent が p となる群である。[10] において, BE の stable splitting での因子の重複度 (つまり, 単純 $B(E, E)$ -加群の次元) が求められている。また, [32] では, E を Sylow p -部分群に持つ有限群, さらに E 上の saturated fusion system の stable splitting とその cohomology について調べられている。 E を Sylow p -部分群とする単純群は非常に豊富にあり ([28]), また E 上の saturated fusion system も興味深いものが存在する ([26])。[14], [15] においては \mathbb{F}_p 係数 cohomology の $B(E, E)$ -加群としての構造に焦点を絞り, その詳細を調べることにより次の結果を得た。

定理 5.1 ([14],[15]). $B(E, E)$ の原始冪等元 e に対して, 次数付きベクトル空間 $H^*(E, \mathbb{F}_p)e$ を記述することができる。また, その過程において [10] とは独立に単純加群を分類し, その次元を決定した。

$H^*(E, \mathbb{F}_p)$ の構造は知られている [18]。しかし, その構造は非常に複雑であるため, まず, その部分剰余環である $(\mathbb{F}_p \otimes H^*(E, \mathbb{Z}))/\sqrt{0}$ の構造を調べ, その結果と整係数 cohomology についての結果を, Milnor 作用素を利用して結びつけることにより $H^*(E, \mathbb{F}_p)e$ についての結果が得られた。

$$H^*(E) = (\mathbb{F}_p \otimes H^*(E, \mathbb{Z}))/\sqrt{0}$$

とおく。以下では $H^*(E)$ に関する [14] の主結果を紹介する。 $H^*(E)$ の構造は比較的わかりやすく, $p \geq 5$ ならば $H^*(E) = H^*(E, \mathbb{F}_p)/\sqrt{0}$ となることが知られている。 $H^*(E)$ は生成元

$$y_1, y_2, C, v \quad (\deg y_i = 2, \deg C = 2p - 2, \deg v = 2p)$$

と関係式

$$y_1^p y_2 - y_1 y_2^p = 0, \quad C y_i = y_i^p, \quad C^2 = y_1^{2p-2} + y_2^{2p-2} - y_1^{p-1} y_2^{p-1}$$

により得られる可換環である [17, 19]。

S を単純 $B(E, E)$ -加群とする。冪等元 $e \in B(E, E)$ で $Se = S$ をみだし, 一方, S と非同型な単純加群 S' に対しては $S'e = 0$ となるものを, S に対する冪等元と呼ぶことにする。これは必ずしも原始冪等元ではないが, 原始冪等元よりも扱いやすい面がある。 \mathbb{F}_p は $B(E, E)$ の分解体であり, 上記の冪等元は単純加群に対応する原始冪等元 $\dim S$ 個の和に分解し, $H^n(E)$ での単純加群 S の組成因子としての重複度は

$$\frac{\dim H^n(E)e}{\dim S}$$

で与えられる。

E の外部自己同型群 $\text{Out}(E)$ は 2 次一般線形群 $\text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ と同型である。 $\text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の $H^*(E)$ への作用を考える。 y_1, y_2 で生成される部分多元環 $\mathbb{F}_p[y_1, y_2]$ の $2i$ 次斉次部分を S^i とおく。 $\mathbb{F}_p[y_1, y_2]$ への $\text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の作用は多項式環への作用から誘導される標準的なものであり, v への作用は行列式 \det で与えられる。よって

$$\{S^i v^q \cong S^i \otimes \det^q \quad (0 \leq i \leq p-1, 1 \leq q \leq p-2)\}$$

は単純 $\mathbb{F}_p \text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ -加群の同型類の代表を与える。さらに, $1 \leq i \leq p-2$ に対して, CS^i は S^{p-1+i} の $\mathbb{F}_p \text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ -部分加群であり,

$$S^{p-1+i}/CS^i \cong S^{p-1-i} \otimes \det^i$$

となる。 S^{p-1+i} での CS^i のベクトル空間としての補空間を T^i とおく。これは $\mathbb{F}_p \text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ -部分加群とはならない。

次に, $B(E, E)$ の $H^*(E)$ への作用を考える。単純 $\mathbb{F}_p \text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ -加群は Proposition 3.2 の全射

$$B(E, E) \longrightarrow \mathbb{F}_p \text{Out}(E) = \mathbb{F}_p \text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$$

により自然に $B(E, E)$ -加群とみなすことができるが, このようにして得られる単純加群を支配的単純加群と呼ぶ。単純 $B(E, E)$ -加群には, 支配的加群の他に, E の真部分群に対応するものが存在する。例えば上記の S^i ($1 \leq i \leq p-2$) は支配的単純加群ではなく, 位数が p の部分群に対応する単純加群である。

以下では支配的単純加群に対応する冪等元 e について, $H^*(E)e$ の記述を与える。これらは, [5] による biset 関手 と Burnside 多元環上の単純加群に関する基本的な補題を用い, 組成列の中で, 支配的でない単純加群がどのように現われてくるかを計算することにより証明される。記号を何点か定義する。

$$V = v^{p-1}, \mathbb{CA} = \mathbb{F}_p[C, V]$$

$$\mathbb{DA} = \mathbb{F}_p[C^p + V, CV]$$

とおく。 \mathbb{CA} と \mathbb{DA} は $H^*(E)$ の部分環で, \mathbb{CA} は $\text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の作用による不変環である。また, 単純 $\mathbb{F}_p \text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ -加群 S に対して, 対応する支配的単純 $B(E, E)$ -加群は, 単純関手 $S_{(E,S)}$ の E での値 $S_{(E,S)}(E)$ となる。

定理 5.2 ([14, Theorem 10.4]). e を支配的単純加群 $S_{(E,S)}(E)$ に対応する冪等元とする。

(1) S が自明な加群のとき,

$$H^*(E)e \cong \mathbb{DA}^+$$

(2) $S = \det^q$, $1 \leq q \leq p-2$ のとき,

$$H^*(E)e \cong \mathbb{CA}\{v^q\}$$

(3) $S = S^{p-1}$ つまり $\text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の Steinberg 加群のとき,

$$H^*(E)e \cong \mathbb{DA}\{VS^{p-1}\}$$

(4) $S = S^{p-1} \otimes \det^q$, $1 \leq q \leq p-2$ のとき,

$$H^*(E)e \cong \mathbb{CA}\{v^q S^{p-1}\}$$

定理 5.3 ([14, Theorem 10.5]). $1 \leq i \leq p-2$, $0 \leq q \leq p-2$, $S = S^i v^q$, $T = T^{p-i-1} v^s$, $s \equiv i+q \pmod{p-1}$, $0 \leq s \leq p-2$ とおく。 e を支配的単純加群 $S_{(E,S)}(E)$ に対応する冪等元とすると, 次数付きベクトル空間として $H^*(E)e$ は次と同型となる。

$$\mathbb{CA}\{VS\} \oplus \mathbb{DA}\{VT\} \quad (q \equiv 2i \equiv 0 \pmod{p-1})$$

$$\mathbb{CA}\{VS\} \oplus \mathbb{CA}\{T\} \quad (q \equiv 0, 2i \not\equiv 0)$$

$$\mathbb{DA}\{S\} \oplus \mathbb{DA}\{VT\} \quad (i = q, 3i \equiv 0)$$

$$\mathbb{DA}\{S\} \oplus \mathbb{CA}\{T\} \quad (i = q, 3i \not\equiv 0)$$

$$\mathbb{CA}\{S\} \oplus \mathbb{DA}\{VT\} \quad (q \neq 0, i \neq q, q+2i \equiv 0)$$

$$\mathbb{CA}\{S\} \oplus \mathbb{CA}\{T\} \quad (q \neq 0, i \neq q, q+2i \not\equiv 0)$$

支配的単純加群ではない, 真部分群に対応する単純加群についても同様の記述をすることが出来る。

これらの結果は stable splitting での因子の cohomology に関する結果を与える。例えば, $X(\mathbb{F}_p)$ を自明な $B(E, E)$ -加群に対応する BE の因子とする (主支配的因子と呼ばれる)。 $X(\mathbb{F}_p)$ の cohomology においては冪零部分が定義されないので, 対応する冪等元 e_0 を用いて $H^*(X(\mathbb{F}_p)) = H^*(E)e_0$ と定義することにより, 次の系を得る。

系 5.4 ([14, Corollary 10.7]). $X(\mathbb{F}_p)$ を BE の主支配的因子とすると, 同型

$$H^*(X(\mathbb{F}_p)) \cong \mathbb{D}\mathbb{A}$$

が成り立つ。

[32] では, E を Sylow p -部分群を持つ有限群の stable splitting について研究されている。特に, E を Sylow p -部分群として持つ散在型有限単純群の stable splitting とその cohomology について調べ, それらを利用して BE の stable splitting の因子の cohomology の情報を得ている。例えば $p = 3$ の場合, [32] では系 5.4 を Janko 単純群 J_4 の cohomology ([11]) を利用して証明している。一方 [14] では, 単純群を用いることなく $B(E, E)$ -加群構造を調べることにより, すべての p について統一的に証明している。

さらに [15] では, $H^*(E)$ の $B(E, E)$ -加群構造を利用して, [32] において欠けていたいくつかの場合, 3 次の線形群に関連した場合を扱うことができた。特に, $p = 7$ の場合には, $L_3(7)$ の拡大群の stable splitting と, 散在型単純群 $O'N$, Fi'_{24} や Ruiz-Viruel の exotic fusion system ([26]) の stable splitting との間の関係を決定した。

定理 5.2, 5.3 の証明のために, $H^*(E)$ の加群構造の情報が必要となるが, その出発点となるのは次の結果である。

定理 5.5 ([14, Theorem 7.8]). $B(E, E)$ -加群として, $H^*(E)$ は次の 4 種類の部分加群の直和である。

$$\begin{aligned} & \mathbb{C}\mathbb{A}\{\mathbb{F}_p + S^{p-1}\} \\ & \mathbb{C}\mathbb{A}\{S^i + T^i + \mathbb{F}_p v^i + v^i S^{p-1}\} \quad (1 \leq i \leq p-2) \\ & \mathbb{C}\mathbb{A}\{v^i(S^i + T^i)\} \quad (1 \leq i \leq p-2) \\ & \sum_{1 \leq i \neq q \leq p-2} \mathbb{C}\mathbb{A}\{v^q(S^i + T^i)\} \end{aligned}$$

ただし, ここに現われた加群は直既約加群という訳ではない。 $H^*(E)$ の $B(E, E)$ -加群としての直既約加群分解は得られていない。一般に, 両側 Burnside 環上の加群としての cohomology の直和分解が何を意味しているのかは不明であり, この点は今後の課題である。

6 Rank 2 の p -biset 圏

本章では p を 5 以上の素数とし, rank が 2 の p -群の cohomology について考察する。奇素数 p について, rank が 2 の p -群の分類は知られている。詳細は, 例えば [7, Appendix A] に述べられている。rank 2 の p -群は次のように分類される。

命題 6.1. $p \geq 5$ のとき, rank 2 の p -群は次のように分類される。

- (1) $C(r)$, $r \geq 3$
- (2) $G(r, e)$, $r \geq 4$, $e \in \mathbb{F}_p^\times$
- (3) 巡回群ではない metacyclic p -群

個々の群の定義は次のようになっている。

- (1) $C(r)$, ($r \geq 3$)

$$C(r) = \langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^{p^{r-2}} = 1, [a, b] = c^{p^{r-3}}, [a, c] = [b, c] = 1 \rangle$$

$|C(r)| = p^r$ であり, $E = C(3) (= \langle a, b \rangle)$ は $C(r)$ の部分群となっている。

- (2) $G(r, e)$, ($r \geq 4$)

$$G(r, e) = \langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^{p^{r-2}} = 1, [b, c] = 1, [a, b^{-1}] = c^{ep^{r-3}}, [a, c] = b \rangle$$

$G(r, e)$ は e が平方剰余であるか, 平方非剰余であるかにより二つの同型類に分かれる。また, $E (\cong \langle a, b \rangle)$ は $G(r, e)$ の部分群となっている。

- (3) 完全列

$$1 \longrightarrow C_{p^m} \longrightarrow P \longrightarrow C_{p^n} \longrightarrow 1$$

が存在するとき, P を metacyclic 群と呼ぶ。ただし C_{p^m} は位数が p^m の巡回群である。例えば, 位数が p^3 の非可換群で E と同型でない群は metacyclic となっている。

以下では $p \geq 5$, P は rank 2 の p -群とする。前章と同様に

$$H^*(P) = (\mathbb{F}_p \otimes H^*(P, \mathbb{Z})) / \sqrt{0}$$

とおく。単純 $B(P, P)$ -加群の情報 [10] にあり, また, $H^*(P)$ に関する情報は [31] にある。

定理 6.2 ([16]). P を rank 2 の p -群とする。任意の原始冪等元 $e \in B(P, P)$ に対して, 次数付きベクトル空間 $H(P)^*e$ を記述することができる。

この結果を得る過程で我々は

P に関する結果はすべて E の情報から得ることができるのではないか

と考えた。次の様な群の間の関係を考える。ただし $r \geq 4$ とする。

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{meta cyclic} & & C(r) & \longrightarrow & G(r+1, e) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \\
 (C_p \times C_p) & \longleftarrow & E & \longrightarrow & G(4, e)
 \end{array}$$

図で $C_p \times C_p \longleftarrow E$ は全射, つまり E の剰余群として $C_p \times C_p$ を考えている。他は単射, つまり部分群であることを示している。 E の結果から $G(4, e)$ と $C(r)$ の結果が得られ, $C(r)$ の結果から $G(r, e)$ の結果が得られる, のではないだろうかと予想される。

なお, 当然のことながら $C_p \times C_p$ は E の部分群であり, E の情報はその極大部分群である $C_p \times C_p$ の情報から得られるものではあるが, 逆に E の剰余群として $H^*(E)$ の構造から $H^*(C_p \times C_p)$ を見ることも非常に有効である ([14, section 5])。図式の右側については次が成り立つ。

定理 6.3 ([16]). $P = C(r)$ または $G(r, e)$, $r \geq 4$ とする。 $B(P, P)$ の原始冪等元 e に対して,

$$H^*(P)e \cong H^*(E)f$$

となる $B(E, E)$ の冪等元 f が存在する。

f は必ずしも原始冪等元ではなく, $B(E, E)$ の中では原始冪等元の和に分解する場合もある。これは, stable splitting を考えたときに, これらの群の中で BE がもっとも細かく分解するというを示している。定理 6.3 での同型は単にベクトル空間の同型であり, 今のところ現象として確認できているだけであるが, 対応は自然なものであり, 何らかの構造的な説明ができるはずである。言い換えるならば, 「 $H^*(P)$ の $B(P, P)$ -加群構造を $H^*(E)$ の $B(E, E)$ -加群構造に結び付けて理解したい」ということになる。

具体的には次の方向で考えたい。まず, $B(P, P)$ は $B(E, E)$ に直接含まれている訳ではない。しかし, $B(P, P)$ の適当な部分多元環で, $B(E, E)$ の部分多元環と同型になるものを構成して利用することで, 定理 6.3 は統一的に証明できると予想している。

また, rank 2 の p -群 P に対して, 両側加群

$${}_{B(E, E)}B(E, P)_{B(P, P)}, \quad {}_{B(P, P)}B(P, E)_{B(E, E)}$$

を考え, 関手

$$\begin{aligned}
 & - \otimes_{B(E, E)} B(E, P) : \text{mod-}B(E, E) \longrightarrow \text{mod-}B(P, P) \\
 & - \otimes_{B(P, P)} B(P, E) : \text{mod-}B(P, P) \longrightarrow \text{mod-}B(E, E)
 \end{aligned}$$

を考察する。これらの関手を単純加群へ施したときの状況や, cohomology への作用,

$$H^*(E) \xrightarrow{B(E, P)} H^*(P), \quad H^*(P) \xrightarrow{B(P, E)} H^*(E)$$

を見ていくことにより, さらに構造的な説明が得られると思われる。これに関しては, 定理 5.5 など [14] で得られた $H^*(E)$ の詳細な $B(E, E)$ -加群構造が有効に利用できるはずである。

さらに, biset 圏の観点から見るために, rank 2 の p -群を対象とする \mathcal{C} の充満部分圏を $\mathcal{C}_{p,2}$ とおき, biset 関手 $H^*(-)$ のこの部分圏への制限, つまり, rank 2 の p -biset 関手

$$H^*(-) : \mathcal{C}_{p,2} \longrightarrow k\text{-mod}$$

を考察する。その biset 関手としての組成列や直和分解を調べることにより, rank 2 の p -群の cohomology を一望のもとに眺め, その中心に E がある状況を理解できるようになると期待したい。

参考文献

- [1] D. J. Benson, Stably splitting BG , Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1996), 189-198.
- [2] D. J. Benson and M. Feshbach, Stable splittings of classifying spaces of finite groups, Topology 31 (1992), 157-176.
- [3] C. Broto, R. Levi and B. Oliver, The homotopy theory of fusion systems, J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), 779-856.
- [4] S. Bouc, Biset functor for finite groups, Lecture Notes in Mathematics 1990, Springer (2010).
- [5] S. Bouc, R. Stancu and J. Thévenaz, Simple biset functors and double Burnside ring, J. Pure Appl. Algebra 217 (2013), 546-566.
- [6] G. Carlsson, Equivariant stable homotopy and Segal's Burnside ring conjecture, Annals of Math. 120 (1984), 189-224.
- [7] A. Díaz, A. Ruiz and A. Viruel, All p -local finite groups of rank two for odd prime p , Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2006), 1725-1764.
- [8] J. Dietz, Stable splittings of classifying spaces of metacyclic p -groups, p odd, J. Pure Appl. Algebra 90 (1993), 115-136.
- [9] J. Dietz, Stable splittings of classifying spaces of metacyclic 2-groups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1994), 285-299.
- [10] J. Dietz and S. Priddy, The stable homotopy type of rank two p -groups, *Homotopy theory and its applications*, Contemp. Math. 188, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1995), 93-103.

- [11] D. J. Green, On the cohomology of the sporadic simple group J_4 , Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 113 (1993), 253-266.
- [12] J. Harris and N. J. Kuhn, Stable decomposition of classifying spaces of finite abelian p -groups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 103 (1988), 427-449.
- [13] A. Hida, Control of fusion and cohomology of trivial source modules, J. Algebra 317 (2007), 462-470.
- [14] A. Hida and N. Yagita, Representations of the double Burnside algebra and cohomology of the extraspecial p -group, J. Algebra 409 (2014), 265-319.
- [15] A. Hida and N. Yagita, Representations of the double Burnside algebra and cohomology of the extraspecial p -group II, J. Algebra 451 (2016), 461-493.
- [16] A. Hida and N. Yagita, The splitting of cohomology of p -group with rank 2, arXiv:1502.02790v2 (2016).
- [17] I. J. Leary, The integral cohomology rings of some p -groups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 110 (1991), 25-32.
- [18] I. J. Leary, The mod- p cohomology rings of some p -groups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 112 (1992), 63-75.
- [19] G. Lewis, The integral cohomology rings of groups of order p^3 , Trans. Amer. Math. Soc. 132 (1968), 501-529.
- [20] 小田文仁, 中岡宏行, 有限群に関連した圏論的構成, 数学 67 (2015), 55-81.
- [21] T. Okuyama, On a theorem of Mislin on cohomology isomorphism and control of fusion, 有限群のコホモロジー論とその周辺, 数理解析研究所講究録 1466 (2006), 86-92.
- [22] G. Mislin, On group homomorphisms inducing mod- p cohomology isomorphisms, Comment. Math. Helvetici 65 (1990), 454-461.
- [23] J. Martino and S. Priddy, The complete stable splitting for the classifying space of a finite group, Topology 31 (1992), 143-156.
- [24] S. Park, Mislin's theorem for fusion systems via Mackey functors, arXiv:1401.0208v2 (2014).
- [25] S. Priddy, Lectures on the stable homotopy of BG , Geometry and Topology Monographs 11 (2007), 289-308.

- [26] A. Ruiz and A. Viruel, The classification of p -local finite groups over the extraspecial group of order p^3 and exponent p , *Math. Z.* 248 (2004), 45-65.
- [27] P. Symonds, Mackey functors and control of fusion, *Bull. London Math. Soc.* 36 (2004), 623-632.
- [28] M. Tezuka and N. Yagita, On odd prime components of cohomologies of sporadic simple groups and the rings of universal stable elements, *J. Algebra* 183 (1996), 483-513.
- [29] P. Webb, Two classifications of simple Mackey functors with applications to group cohomology and the decomposition of classifying spaces, *J. Pure Appl. Algebra* 88 (1993), 265-304.
- [30] P. Webb, Stratifications and Mackey functors II: globally defined Mackey functors, *J. K-Theory* 6 (2010), 99-170.
- [31] N. Yagita, Cohomology for groups of $\text{rank}_p G = 2$ and Brown-Peterson cohomology, *J. Math. Soc. Japan*, 45 (1993), 627-644.
- [32] N. Yagita, Stable splitting and cohomology of p -local finite groups over the extraspecial p -group of order p^3 and exponent p , *Geometry and Topology Monographs* 11 (2007), 399-434.
- [33] E. Yaraneri, A filtration of the modular representation functor, *J. Algebra* 318 (2007), 140-179.

INTRODUCTION TO A PROVISIONAL MATHEMATICAL DEFINITION OF COULOMB BRANCHES OF 3-DIMENSIONAL $\mathcal{N} = 4$ GAUGE THEORIES

HIRAKU NAKAJIMA

概要 . この論説は、[Nak16, BFN16a]で提唱された、3次元 $\mathcal{N} = 4$ 超対称性ゲージ理論のクーロン枝の、暫定的な数学的定義に関する入門である。

This is an introduction to a provisional mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric gauge theories, studied in [Nak16, BFN16a].

1. 複素シンプレクティック多様体と変形量子化

G を複素簡約群とし、 \mathbf{M} をそのシンプレクティックな表現とする。すなわち、 \mathbf{M} は \mathbb{C} 上のシンプレクティック形式を持つベクトル空間であり、 G はシンプレクティック形式を保って線形に作用している。

Coulomb枝 $\mathcal{M}_C \equiv \mathcal{M}_C(G, \mathbf{M})$ は、理論物理における場の量子論の研究に動機付けられて発見された、 (G, \mathbf{M}) からアファイン複素シンプレクティック多様体¹を作るレシピである。

$$(G, \mathbf{M}) \rightsquigarrow \mathcal{M}_C(G, \mathbf{M})$$

作り方は、これまで知られている代数多様体の与え方、多項式の零点、商空間、等々とはかなり毛色が異なる。まず座標環 $\mathbb{C}[\mathcal{M}_C]$ を、幾何学的表現論でよく使われるホモロジー群とその上の合成積を考える方法で作る。そしてその可換環のスペクトラムとして \mathcal{M}_C を定め、その幾何学的な性質を調べる、という手法を取る。

あとで説明するように、 \mathcal{M}_C は T^*T^\vee/W と双有理同型である。

$$\mathcal{M}_C \approx T^*T^\vee/W = \mathfrak{t} \times T^\vee/W$$

ここで、 T^\vee は G の極大トーラス T の双対トーラスであり、 W はワイル群である。 T^*T^\vee は T^\vee のco-tangent bundleで、 \mathfrak{t} は T のリー環である。特に、 \mathcal{M}_C の双有理類は表現 \mathbf{M} には依存しない。

上で言及したように、ホモロジー群とその上の合成積を用いて環を作るレシピは、幾何学的表現論ではよく使われてきた。表現論の研究が目的であるから、そこでは、非可換環を構成するのが普通である。実際、Coulomb枝においてもその構成法から、 \mathcal{M}_C の変形量子化 \mathcal{A}_\hbar が同時に作られる。ここで、変形量子化とは、 $\mathbb{C}[\hbar]$ 上で定義された非可換環 \mathcal{A}_\hbar であつて、 $\mathcal{A}_\hbar/\hbar\mathcal{A}_\hbar$ が \mathcal{M}_C の座標環 $\mathbb{C}[\mathcal{M}_C]$ に等しく、Poisson 括弧

$$\{f, g\} = \left. \frac{\tilde{f}\tilde{g} - \tilde{g}\tilde{f}}{\hbar} \right|_{\hbar=0}, \quad \tilde{f}|_{\hbar=0} = f, \quad \tilde{g}|_{\hbar=0} = g$$

¹一般には特異点を持つ。高々Beauvillの意味でシンプレクティックな特異点しか持たないと期待されているが、証明は与えられていない。

が、シンプレクティック構造から来るものに一致しているものをいう。これを量子化されたCoulomb枝とよぶ。

振り返って考えれば、表現論で研究されてきた非可換環は、可換環の変形として得られているものが多い。しかし、合成積を用いて可換環を新しく系統的に構成しようという発想は、今回の研究で初めて現れたものだと思われている。

最初の論文[Nak16]では、一般の \mathbf{M} を考えていたが $\mathbb{C}[\mathcal{M}_C]$ のベクトル空間としての構成にとどまり、積の定義はあとの[BFN16a]で与えられた。その際に、 $\mathbf{M} = \mathbf{N} \oplus \mathbf{N}^*$ という形であると仮定した。この仮定は技術的なものなのか、もしくはより本質的なものなのかはまだ分からないが、物理ではこの仮定を満たさないCoulomb枝も考察されており、どんな条件が満たされていれば定義ができるのか、検討の余地が残されている。なお $\mathbf{M} = \mathbf{N} \oplus \mathbf{N}^*$ を仮定する次々節以降では、 $\mathcal{M}_C(G, \mathbf{N})$ という記号を使うが、混乱のおそれはないと思われる。

(G, \mathbf{M}) に対して、アファイン複素シンプレクティック多様体を与える、よく知られたレシピがある。それは、シンプレクティック商

$$\mathbf{M} // G = \mu^{-1}(0) // G$$

であり、物理ではHiggs枝とよばれる。Coulomb枝に対応して $\mathcal{M}_H \equiv \mathcal{M}_H(G, \mathbf{M})$ であらわす。上の式で、 $\mu: \mathbf{M} \rightarrow \text{Lie } G^*$ は運動量写像であり、 $\mu^{-1}(0)$ を G で(幾何学的不変式論の意味で)割ってできる商空間が $\mu^{-1}(0) // G$ である。

$\mathbf{M} = \mathbf{N} \oplus \mathbf{N}^*$ となっているときには、 \mathbf{N} の上の多項式係数の微分作用素の全体のなす非可換環 $\mathcal{D}(\mathbf{N})$ が、 \mathbf{M} の変形量子化になる。 $(\hbar$ を入れるには、次数によるフィルターに関してRees代数を作る。) シンプレクティック商と同様に、 $\mathcal{D}(\mathbf{N})$ の G 作用に関する‘商’を作る構成法が、量子シンプレクティック簡約として知られており、それが \mathcal{M}_H の変形量子化を与える。

Higgs枝として、簾多様体やトーリック超ケーラー多様体を例として、表現論的に興味深いシンプレクティック多様体や、その変形量子化が現れることを経験している。一方、Coulomb枝の研究は始まったばかりであるが、Higgs枝としては得られないシンプレクティック多様体(正確には、有限次元のシンプレクティック・ベクトル空間のシンプレクティック商としての記述が知られていない空間)も現れるので、今後重要性が高まるレシピであると期待している。

また、同じ (G, \mathbf{M}) からできるHiggs枝とCoulomb枝は、Braden-Licata-Proudfoot-Webster [BLPW14]の意味で、シンプレクティック双対であることが期待されている。シンプレクティック双対は、複素シンプレクティック多様体のペアの間に不可思議な関係があることを期待するもので、全体像はまだまだ研究途中で見えていないが、少なくともHiggs枝とCoulomb枝の両方を同時に研究することに意味があり、重要であることを示唆している。[BLPW14]においては、そのような複素シンプレクティック多様体のペアの例が例示されていたにとどまっていたが、Coulomb枝による系統的な構成が与えられたことになる。ただし、[BLPW14]で期待されている不可思議な関係のチェックは、今後の課題である。特に、[BLPW14]は定式化において二つの複素シンプレクティック多様体は、ともにシンプレクティックな特異点解消を持つことが仮定されていたが、多くのHiggs枝、Coulomb枝においてこの仮定は成立しないので、何を期待するのか、ということまで含めて検討する必要がある。

2. 物理的な背景

前節の説明で、Coulomb枝の数学的な研究に意味があることが伝えられたと期待するが、今節では物理的な背景について、筆者の理解できる範囲内で説明を試みる。ここに書いてあ

ることを理解する必要はないし、筆者自身もよく理解したとは思っていないが、次節で説明する定義がどこから発見されたのかを理解するためと、今後新たな研究成果を上げるためには、背景にある物理のある程度の理解が必要であろうと思っている。

先を急ぐ読者は、この節を飛ばして読んでも構わないが、より深い理解を求める方は、今節を読み、また物理の文献に挑戦していただきたい。物理の文献は[Nak16]にあげたので、これを参照すること。

また、この論説は[BFN16a]と同様に、この節以外は物理を知らなくても読めるように書かれており、物理の文献の引用をしない。これは、あくまで読みやすさのためのもので、原典は[Nak16]の文献表から見つけてあたってもらいたい。

物理では、微分幾何と同様に複素簡約群 G の代わりに、その極大コンパクト部分群 G_c を取り扱う。同様に、 \mathbf{M} には G_c で保たれる内積が入っているものとする。

組 (G_c, \mathbf{M}) に対して、物理学者は3次元の $N = 4$ 超対称ゲージ理論を定める。これは、場の全体のなす無限次元の空間の上の汎関数(ラグランジアン)を与え、量子化して得られる場の量子論の例である。場のうちで主要なものは、 \mathbb{R}^3 上の G_c 主束 P 上の接続と、 \mathbf{M} に値を持つような P の切断である。さらにいくつかのベクトル束の切断を場に加える。足される場は物理的には必要であるが、ここでは雑な理解しか与えないので、説明は省く。いずれにせよ、物理学者は、接続の曲率や切断の微分を含んだラグランジアンを書き、場の量子論を考える。ラグランジアンが極小値を取るような接続や切断(と説明を省略した場)のconfigurationは、量子力学でいうところの古典解に対応しており、基本的な対象である。今の状況では、極小値をとる場は、ただ一つではなく、有限自由度を持った空間になっている。これは、物理では真空のモジュライ空間とよばれる。

上に述べたように、ラグランジアンは接続の曲率や切断の微分などの和として与えられる。極小値を与える場は、和のうちのいくつかの項が消えているものであり、どの項が消えているかで分けて、真空の枝という考え方をする。その中の典型的なものがHiggs枝 M_H とCoulomb枝 M_C である。Higgs枝 M_H は前節に述べたシンプレクティック商であり、微分幾何学的には超ケーラー商である。接続は自明接続で、定数な切断だけが生き残るので、 \mathbf{M} の情報だけが残って超ケーラー商になる。ここでは、超ケーラー商の定義は復習しないので、例えば [Nak92] を参照してほしい。例えば筆者が長年に渡り研究している籠多様体や、トーリック超ケーラー多様体は、Higgs枝の例になっている。

一方、Coulomb枝は $(T_c^\vee \times (\mathbb{R}^3 \otimes \mathfrak{t}_c))/W$ となる。 T_c^\vee は、 G_c の極大トーラス T_c の双対であり、 \mathfrak{t}_c は T_c のリー環で、 W はワイル群である。前節にでてきた T^*T^\vee/W と同じものである。Coulomb枝では、切断は0であり、 $(\mathbb{R}^3 \otimes \mathfrak{t}_c)$ は、ここで省略した場の成分から来るものである。 T_c^\vee 成分は接続から来るのだが、物理で‘双対’とよんでいる、無限次元の接続の空間でのFourier変換を取るために、双対トーラス T_c^\vee に値をとり、かつスカラーになっている。この議論は、そのまま数学にのせるのは難しいと思うが、§4(i)と定理5.1で見ると数学的に厳密な定義から出発して、 T^*T^\vee/W を再現することができ、なぜ双対トーラスになるのかも説明される。

M_C と M_H 、より一般に真空のモジュライ空間は、超対称ゲージ理論の重要な情報を含んでおり、物理的にはゲージ理論を解析する上で、これを理解することは大切なステップである。特に、最初に与えた超対称性ゲージ理論が、真空のモジュライ空間をtargetにするような写像にいろいろな場を足して定められる超対称性場の理論と、低エネルギーにおいて等価になる。(ここで出てくる超対称性場の理論は、トポロジカル捻りをするとRozansky-Witten不変量を与えるものである。)

しかし、古典解に対応するような、ラグランジアン の最小値だけを見ていて、量子的な効果を含んだ場の理論の等価性を導くのは、過度な期待である。物理学者は、そこでCoulomb枝は量子補正を受ける、と主張する。すなわち、Coulomb枝が $(T_c^V \times (\mathbb{R}^3 \otimes \mathfrak{t}_c))/W$ であるのは古典的な記述であって、量子的な効果を受けたあとのCoulomb枝は、変更される、と主張する。ただし、超対称性から超ケーラー多様体であることは量子効果のあとも保たれる。この変更が、超ケーラー構造の存在以外にどの程度 $(T_c^V \times (\mathbb{R}^3 \otimes \mathfrak{t}_c))/W$ を変更するのか、筆者には想像がでないが、数学的な定義のもとでは、 \mathcal{M}_C は $(T_c^V \times (\mathbb{R}^3 \otimes \mathfrak{t}_c))/W$ と双有理同値であり、確かに変更していると取れなくもない。

というわけで、物理学者による \mathcal{M}_C の定義は、 \mathcal{M}_H とは違って数学的には厳密とはいえず、そのままでは数学的に取り扱うことができない。筆者は、1996年11月にケンブリッジのニュートン研究所に滞在中に、Wittenの連続講演で初めてCoulomb枝の説明を聞いたが、研究対象として扱うことは長らくできなかった。出てくる超ケーラー多様体はよく知っているものであったので、頭の隅にずっと置いていたが、解決するのは難しいと考えていた。

新しい着想を得たのは、2014年秋にウォーリックでHananyの講演を聞いたときである。Hananyは、 \mathcal{M}_C の座標環 $\mathbb{C}[\mathcal{M}_C]$ の \mathbb{C}^\times 作用に関する指標を与える一般的な公式(モノポール公式)が成立すると説明した。この公式は、 G のコウエイトに関する和で与えられ、足される項はコウエイトで定める具体的な式である。そして、知られているCoulomb枝の多くの例で、モノポール公式が確かに成立していることが、確かめられていた。

そこで、モノポール公式を再現するような空間を実現するためにはどうしたらいいかを逆に考えて発見したのが、[Nak16]であり、その修正版の[BFN16a]である。私が、どのように試行錯誤したかは[Nak16]に説明したので、興味ある読者は参照されるとよいだろう。特に、3次元の位相的場の理論があると仮想して試行をしているところは、今後の発展の手がかりになるはずである、と期待しているところである。

3. 数学的な定義

この節以降は、 G は複素簡約群、 \mathbf{N} はその有限次元表現とする。 \mathbf{N} は既約でなくてもよく、0であってもよい。最初の節で述べた \mathbf{M} は $\mathbf{N} \oplus \mathbf{N}^*$ として与えられるが、ここから先は \mathbf{M} は少なくとも表面上は出てこない。

$D = \text{Spec } \mathbb{C}[[z]]$ をformal disk、 $D^\times = \text{Spec } \mathbb{C}((z))$ をformal punctured diskとする。 $\mathbf{N}((z))$ 、 $\mathbf{N}[[z]]$ をそれぞれ \mathbf{N}_K 、 \mathbf{N}_O で表す。同様に $G_K = G((z))$ 、 $G_O = G[[z]]$ とする。

アファイン・グラスマン Gr_G は、モジュライ空間

$$\left\{ (\mathcal{P}, \varphi) \left| \begin{array}{l} \mathcal{P} \text{ は } D \text{ 上の (代数的な) } G\text{-主束} \\ \varphi: \mathcal{P}|_{D^\times} \rightarrow G \times D^\times \text{ は、} \mathcal{P} \text{ の } D^\times \text{ 上での自明化} \end{array} \right. \right\} / \text{isom.}$$

として定義される。射影多様体の直極限としてのind-schemeの構造を持つことが知られている。集合論的には $\text{Gr}_G = G_K/G_O$ と表される。すなわち、 \mathcal{P} の D 上での自明化をとって、 φ を G_K の元で表し、最初の自明化のambiguityの分の G_O で割って、 G_K/G_O となる。

さらに、これに表現 \mathbf{N} に付随したベクトル束 $\mathcal{P} \times_G \mathbf{N}$ の切断 s を付け加えた三つ組 $(\mathcal{P}, \varphi, s)$ のモジュライ空間を \mathcal{T} で表す。集合論的には $G_K \times_{G_O} \mathbf{N}_O$ である。 s の展開を途中で止めることによって、 \mathcal{T} は射影多様体上のベクトル束の逆極限の直極限になる。以下では、 \mathcal{T} や、その閉部分多様体のホモロジー群を取り扱うが、厳密には有限次元の空間のホモロジー群の極限として取り扱われる。

\mathcal{T} の閉部分多様体 \mathcal{R} として、 $\varphi(s)$ が D まで伸びるという条件を課して、定められる空間と定義する。

$$\mathcal{R} = \{(\mathcal{P}, \varphi, s) \mid \varphi(s) \in \mathbf{N}_0\} / \text{isom.}$$

φ は D^\times 上の自明化でしかないから、 $\varphi(s)$ は一般には原点に極を持つ有理型切断であって、その特異部分が0であるという条件を課したものが \mathcal{R} である。集合論的には、 $\mathcal{R} = \{[g, s] \in G_{\mathcal{K}} \times_{G_0} \mathbf{N} \mid gs \in \mathbf{N}_0\}$ と記述できる。

この空間 \mathcal{R} が主要登場人物である。その意味は、より大きな空間

$$\{(\mathcal{P}_1, \varphi_1, s_1, \mathcal{P}_2, \varphi_2, s_2) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \mid \varphi_1(s_1) = \varphi_2(s_2)\} / \text{isom.}$$

を考えると、分かりやすいだろう。これは、 D 上の G 主束と D^\times 上の自明化および \mathbf{N} に付随したベクトル束の切断の組が二つあって、切断が D^\times 上で自明化を通じて等しい、というファイバー積 $\mathcal{T} \times_{\mathbf{N}_{\mathcal{K}}} \mathcal{T}$ に他ならない。 $(\mathcal{P}_2, \varphi_2)$ が Gr_G の原点、すなわち φ_2 が D 上の自明化に伸びているもの、になっているものが \mathcal{R} に他ならない。逆に、 \mathcal{R} への G_0 の作用を用いて $G_{\mathcal{K}} \times_{G_0} \mathcal{R}$ を考えると、これが上で出てきた空間 $\mathcal{T} \times_{\mathbf{N}_{\mathcal{K}}} \mathcal{T}$ に他ならない。

ゲージ理論的な視点では、 $\mathcal{T} \times_{\mathbf{N}_{\mathcal{K}}} \mathcal{T}$ は、二次元空間の上にある接続と切断の組が、原点のまわりでひねられている様子をあらわす空間である。 $(\mathcal{P}_1, \varphi_1, s_1)$ がひねられる前で、 $(\mathcal{P}_2, \varphi_2, s_2)$ がひねられる後であり、原点でひねられるだけなので、原点の外では一致している。本来は3次元のゲージ理論であるが、時間方向の動きは見ずに、前後の二つの瞬間だけを切り取って比べているので、2次元の記述になっている。

空間を準備し、次に \mathcal{R} の G_0 -同変Borel-Mooreホモロジー群 $H_*^{G_0}(\mathcal{R})$ を考える。厳密には、 \mathcal{T} の原点におけるファイバーの基本類が次数0になるように、次数をうまく定義する必要があるが、この点の詳細は略す。また、奇数次のホモロジーが消えていること、 $H_G^*(\text{pt})$ 上自由な加群になっていることなどは、アファイン・グラスマン多様体のSchubert胞体分割を考えると、ただちに従う。

$H_*^{G_0}(\mathcal{R})$ には合成積

$$*: H_*^{G_0}(\mathcal{R}) \otimes H_*^{G_0}(\mathcal{R}) \rightarrow H_*^{G_0}(\mathcal{R})$$

が定義される。詳しい定義は、技術的なのでここでは略す。同変ホモロジー群のinduction $H_*^{G_{\mathcal{K}}}(\mathcal{T} \times_{\mathbf{N}_{\mathcal{K}}} \mathcal{T}) \cong H_*^{G_0}(\mathcal{R})$ が有限次元の空間のときと同様に成り立っていると仮想的に考えて、さらに \mathcal{T} は非特異であるとする、通常の合成積の定義が、 (i, j) 成分への射影

$$\mathcal{T} \times_{\mathbf{N}_{\mathcal{K}}} \mathcal{T} \times_{\mathbf{N}_{\mathcal{K}}} \mathcal{T} \xrightarrow{p_{ij}} \mathcal{T} \times_{\mathbf{N}_{\mathcal{K}}} \mathcal{T} \quad (i, j) = (1, 2), (2, 3), (1, 3)$$

を用いて

$$c * c' = p_{13*}(p_{12}^*c \cap p_{23}^*c')$$

と定義される。 $H_*^{G_{\mathcal{K}}}(\mathcal{T} \times_{\mathbf{N}_{\mathcal{K}}} \mathcal{T})$ が定義されるかどうかは不明であり、 \mathcal{T} は非特異でないので、このままの定義がうまくできているのかどうかは分からないが、実際には $H_*^{G_0}(\mathcal{R})$ の上に合成積 $*$ が定義される。

このとき次が成立する。

定理 3.1. $(H_*^{G_0}(\mathcal{R}), *)$ は可換環である。

合成積で環を構成する手法は、幾何学的表現論で広く使われており、ワイル群の群環がSteinberg多様体から作られること、Kac-Moody Lie環の普遍展開環が旗多様体におけるSteinberg多様体の類似物から作られることなどが知られている。これらの例では得られるも

のは、非可換環であり、合成積の一般論からは*が可換になる理由はなく、上の定理は今の状況の特殊性を表している。

ただし、幾何学的佐武対応を思い起こせば、可換性は不思議ではない。幾何学的佐武対応では、アファイン・グラスマン Gr_G 上の G_O -同変な偏屈層のなすアーベル圏を考え、その上に合成積によってテンソル圏の構造を導入し、これが G のLanglands双対の有限次元表現の全体のなすテンソル圏と同値であることを主張する。後者のテンソル圏は可換、すなわち $V \otimes W \cong W \otimes V$ であるので、前者もそうである。この同型を幾何学的に説明するのがBeilinson-Drinfeldによるアファイン・グラスマンの1-パラメータ変形であり、これを使って上の定理が証明される。(論文では、計算による直接証明も与えている。)

さて、 $(H_*^{G_O}(\mathcal{R}), *)$ は可換環になったので、そのスペクトラムとしてアファイン多様体を導入することができる。これが、Coulomb枝の数学的な定義である。

$$\mathcal{M}_C = \text{Spec}(H_*^{G_O}(\mathcal{R}), *)$$

さらに、 $(H_*^{G_O}(\mathcal{R}), *)$ が有限生成であることや、整であることを証明できるので、 \mathcal{M}_C は既約なアファイン多様体である。また正規であることも示されている。

変形量子化は、次のようにして与えられる。formal disk D に、 \mathbb{C}^\times がloop rotation $z \mapsto tz$ により作用する。この作用は、今まで使ってきた様々な空間への作用を引き起こす。特に、 G_O に作用して、半直積 $G_O \rtimes \mathbb{C}^\times$ を考えることができ、 \mathcal{R} に $G_O \rtimes \mathbb{C}^\times$ が作用する。そこで、同変Borel-Mooreホモロジー群 $H^{G_O \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathcal{R})$ を考え、合成積を同じように導入する。こうして量子化されたCoulomb枝を

$$\mathcal{A}_\hbar = (H^{G_O \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathcal{R}), *)$$

と定義する。

なお、アファイン・グラスマン多様体や、その類似の合成積を考えるのは、以前から[VV10, BFM05, BF08]で考えられており、合成積の定義を厳密に書き下す際には、それを参考にした。[VV10]では、アファイン・グラスマンの代わりにアファイン旗多様体、同変ホモロジー群の代わりに同変K群が用いられているが、 $\mathbf{N} = \mathfrak{g}$ の場合を扱っていると思ってよい。出てくる代数は、Cherednikの二重アファイン・ヘッケ代数(DAHA)である。Coulomb枝のようにアファイン・グラスマン多様体にすれば、そのspherical partになり、同変ホモロジー群になれば楕円版の代わりに三角関数版のDAHAになる。対応するCoulomb枝は $\mathfrak{t} \times T^\vee / W$ であり、量子補正がない、ということになる。

[BFM05, BF08]では、 $\mathbf{N} = 0$ の場合を取り扱っている。出てくるものは、 G のLanglands双対の戸田格子であるが、詳細は略す。

4. 例

前節の構成は、無限次元空間のホモロジーを使うもので、ずいぶんと回りくどい構成に見えるかもしれないので、簡単な例をあげよう。

4(i). $G = \mathbb{C}^\times$ とし、 $\mathbf{N} = 0$ とする。これは、一番自明な例である。 $\mathbf{N} = 0$ なので、 \mathcal{R} はアファイン・グラスマン Gr_G に他ならず、また $G = \mathbb{C}^\times$ なので、 Gr_G は D 上の直線束とその D^\times 上での自明化のモジュライ空間に他ならない。reduced schemeを取ると、 Gr_G は整数 \mathbb{Z} でパラメライズされた離散的な空間になる。実際、 $\varphi(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{Z}$)が対応する点をあらわす。よって

$$H_*^{G_O}(\mathcal{R}) = \bigoplus_n H_*^{\mathbb{C}^\times}(\text{pt})$$

となる。 $H_*^{\mathbb{C}^\times}(\text{pt})$ は、一変数の多項式環 $\mathbb{C}[w]$ である。これが各整数 n の上に乗っているの
で、 m の上の多項式と n の上の多項式を掛けるとどうなるかを、合成積の定義に戻って計算す
る。合成積の定義を説明しなかったので、チェックすることはできないが、 $G = \mathbb{C}^\times$ の場合には、
テンソル積を取る写像

$$\text{Gr}_{\mathbb{C}^\times} \times \text{Gr}_{\mathbb{C}^\times} \xrightarrow{\otimes} \text{Gr}_{\mathbb{C}^\times}$$

があり、これがホモロジー群に引き起こすpushforward準同型が $*$ に他ならない。すると m の上
の $f(w)$ と n の上の $g(w)$ を掛けたものは、 $m+n$ の上の $f(w)g(w)$ になる。すなわち、 $n=1$ の上
の1(基本類に対応する)を x であらわすと、

$$H_*^{G \circ}(\mathcal{R}) \cong \mathbb{C}[w, x^\pm] = \mathbb{C}[\mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times]$$

となる。したがって、今のばあいのCoulomb枝は $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$ である。これは $\mathbb{R}^3 \times S^1$ であるから、こ
の場合のCoulomb枝は量子補正を受けないことを意味しており、ゲージ理論が自明なことの
反映である。

もう一步、精密に見るために G はトーラス T で、表現はやはり0であるとする。 Gr_T は離散的な
空間で、 $\text{Hom}(\mathbb{C}^\times, T)$ でパラメライズされている。従って、 $H_*^{T \circ}(\mathcal{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Hom}(\mathbb{C}^\times, T)} H_T^*(\text{pt})$
である。 $H_T^*(\text{pt})$ は、 T のLie環 \mathfrak{t} 上の多項式環 $\mathbb{C}[\mathfrak{t}]$ である。一方、 λ に対応する元を e^λ と書くと、上と
同様に $e^\lambda * e^\mu = e^{\lambda+\mu}$ となる。これは、 T の双対 T^\vee の指標($\text{Hom}(T^\vee, \mathbb{C}^\times) = \text{Hom}(\mathbb{C}^\times, T)$)と
見なすことができるから、Coulomb枝は $\mathfrak{t} \times T^\vee = T^*T^\vee$ である。

4(ii). 次に G は \mathbb{C}^\times のまま、表現を $\mathbb{N} = \mathbb{C}$ と標準表現に取ろう。 $\text{Gr}_{\mathbb{C}^\times}$ は上で説明したよう
に \mathbb{Z} でパラメライズされる離散的な空間であり、 \mathcal{R} は各整数 n の上にベクトル空間が乗ってい
るものである。条件は $\varphi(z) = z^n$ によって原点に特異点が生じないというものであるから、

$$\mathcal{R} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} z^n \mathbb{C}[z] \cap \mathbb{C}[z] = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} z^{\max(0, n)} \mathbb{C}[z]$$

である。各整数の上に乗っているものは、ベクトル空間でありThom同型により $H^{G \circ}(\mathcal{R}) \cong$
 $\bigoplus_n H_*^{\mathbb{C}^\times}(\text{pt})$ となる。すなわちベクトル空間としては、上の例と同じである。しかし合成積は、上
の例とは $n > 0$ の上のホモロジー類と $n < 0$ の上のホモロジー類の積が変わってくる。定義を
省略したので、最後のポイントだけ言うと、 $n=1$ の基本類と $n=-1$ の基本類を掛けたものが

$$z\mathbb{C}[z] \rightarrow \mathbb{C}[z]$$

の押し出し写像による、基本類の像になる。これは余次元1の部分空間であるから、同変ホ
モロジー群の元としては、 w を基本類に掛けたものになる。したがって $n=1$ の基本類を x 、
 $n=-1$ の基本類を y とすると、 $xy = w$ が成り立つ。この計算から

$$H_*^{G \circ}(\mathcal{R}) \cong \mathbb{C}[w, x, y]/(w = xy) \cong \mathbb{C}[x, y] = \mathbb{C}[\mathbb{C}^2]$$

が従う。よって今の場合のCoulomb枝は \mathbb{C}^2 である。

表現をウェイトが N の一次元表現に取り替えると、最後の部分の計算が $z^{|N|}\mathbb{C}[z] \rightarrow$
 $\mathbb{C}[z]$ のpushforwardに置き換わり、座標環は $\mathbb{C}[w, x, y]/(w^{|N|} = xy)$ となる。これは、 $A_{|N|-1}$ 型
の単純特異点に他ならない。

5. いくつかの構造

この節では、Coulomb枝 \mathcal{M}_C が持つ構造について解説する。いずれも物理的には発見されていたが、これが§3の定義のもとで数学的に厳密に実現されることがポイントである。

5(i). $H_*^{G\circ}(\mathcal{R})$ は、ホモロジーの次数の半分により次数付けられた環になる。つまり、 $\mathbb{C}[\mathcal{M}_C] = \bigoplus_d \mathbb{C}[\mathcal{M}_C]_d$ と分解し、 $\mathbb{C}[\mathcal{M}_C]_d \cdot \mathbb{C}[\mathcal{M}_C]_{d'} \subset \mathbb{C}[\mathcal{M}_C]_{d+d'}$ となる。これは、 \mathcal{M}_C に \mathbb{C}^\times の作用が与えられていることを意味する。実際、 $\mathbb{C}[\mathcal{M}_C]_d$ は、 \mathbb{C}^\times がウェイト d で作用するウェイト空間である。

上の例では、 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$ と $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ のそれぞれ第一成分への標準的な作用になっている。(正確には、後者は x がウェイト1で、 y がウェイト0である。)

なお、次数の定義を省いたので説明が不足しているが、次数は非負とは限らず、一般にはすべての整数の値を取りうる。従って、 \mathcal{M}_C は一般的には錘であるとは限らない。ここで、 \mathcal{M}_C が錘であるとは、 $\mathbb{C}[\mathcal{M}_C]_d = 0$ ($d < 0$)、 $\mathbb{C}[\mathcal{M}_C]_0 = \mathbb{C}$ が成り立つときをいう。

物理的には、この \mathbb{C}^\times 作用は、 $SU(2)$ 作用の S^1 への制限から来るものに、ある修正のあと一致すると期待されている。修正については説明しないが、次に述べる \mathcal{M}_C へのハミルトニアンなトラス作用を適当に組み合わせるものである。特に、 G が半単純のときには、修正は必要ない。 $SU(2)$ 作用は、超ケーラー構造 I, J, K がなす二次元球面 $S^2 = \{aI + bJ + cK \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$ に $SU(2) \rightarrow SO(3)$ を通じて標準的に作用するもので、一つの複素構造 I を固定すると、 I を保つ S^1 の作用しか見えない。現在のところ、超ケーラー構造の定義は与えられていないので、 $SU(2)$ の作用を数学的に与えることはできていないが、制限の S^1 だけが見えている。

上の例では、 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times = \mathbb{R}^3 \times S^1$ として \mathbb{R}^3 を $\mathfrak{su}(2)$ と見れば、確かに $SU(2)$ の作用がある。ウェイトは半分になっている。 \mathbb{C}^2 の場合は、 x, y がそれぞれウェイト $-1/2, 1/2$ のハミルトニアンな S^1 作用と合わせて、ウェイトが共に $1/2$ の作用に直せば、やはりウェイトが半分になっていることを除き、 \mathbb{C}^2 を四元数体 \mathbb{H} とみた $SU(2) = Sp(1)$ の作用に一致する。(複素線形でないので、 $SU(2)$ の \mathbb{C}^2 への標準的な表現とは異なり、四元数の右掛け算と左掛け算の違いがある。)

5(ii). $H_*^{G\circ}(\mathcal{R})$ は同変ホモロジー群であるから、 $H_{G\circ}^*(\text{pt}) \cong H_G^*(\text{pt})$ からの準同型を持つ。(ただし、 $H_G^*(\text{pt})$ 上の代数ではなく、合成積 $c * c'$ は第二成分 c' に関しては、自然には $H_G^*(\text{pt})$ -線形にはならず、変形量子化したものについては、確かに線形でない。)

このスペクトラムを取ると、

$$\varpi: \mathcal{M}_C \rightarrow \text{Spec } H_G^*(\text{pt})$$

を得る。よく知られているように、

$$H_G^*(\text{pt}) = \mathbb{C}[\text{Lie } G]^G = \mathbb{C}[\mathfrak{t}]^W$$

であるから、 $\text{Spec } H_G^*(\text{pt}) = \mathfrak{t}/W$ であり、これはアファイン空間である。ここで、 $\mathfrak{t} = \text{Lie } T$ である。

この構成は、変形量子化したあとも残り、

$$H_*^{G \times \mathbb{C}^\times}(\text{pt}) \rightarrow \mathcal{A}_\hbar = H^{G \circ \times \mathbb{C}^\times}(\mathcal{R})$$

という単射な環準同型がある。これは、変形量子化が大きな可換環を含んでいることを意味しており、これの $\hbar = 0$ を考えることにより、 ϖ はポアソン可換であることを導く。すなわち、 $\text{Lie } T/W$ 上の関数 f, g を ϖ で引き戻したものは、Poisson可換である： $\{\varpi^* f, \varpi^* g\} = 0$ 。

さらに次が成立する。

定理 5.1. ϖ のgenericなファイバーは、 T^\vee である。より強く、次の可換図式がある。上の横矢印は双有理写像である。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_C & \dashrightarrow & T^*T^\vee/W = \mathfrak{t} \times T^\vee/W \\ & \searrow \varpi & \swarrow \text{第一射影} \\ & & \mathfrak{t}/W \end{array}$$

これは、同変ホモロジー群の局所化定理の帰結である。局所化定理は、 $H_T^*(\text{pt})$ の商体を \mathbb{F} とするとき、

$$H_*^{T\circ}(\mathcal{R}) \otimes_{H_T^*(\text{pt})} \mathbb{F} \cong H_*^{T\circ}(\mathcal{R}^T) \otimes_{H_T^*(\text{pt})} \mathbb{F}$$

が成り立つという主張である。ここで、 \mathcal{R}^T は \mathcal{R} の T -固定点の集合であり、同型写像は、包含写像 $\mathcal{R}^T \hookrightarrow \mathcal{R}$ のpushforward準同型である。これと、 $H_*^{G\circ}(\mathcal{R})$ は、 $H_*^{T\circ}(\mathcal{R})$ の W -不変部分であるという事実を組み合わせると、 \mathcal{R}^T の同変ホモロジー群を決定すれば良いことになるが、 \mathcal{R}^T が $\text{Gr}_T \times \mathbf{N}^T$ であることと、§4(i)の計算から、 $\mathfrak{t} \times T^\vee$ であることが分かる。

操作 $\otimes_{H_T^*(\text{pt})} \mathbb{F}$ は、 \mathfrak{t}/W のgeneric pointに制限することであり、同変ホモロジー群を考えることが \mathfrak{t}/W 上の族を考えるという幾何学的な描像に対応しているという、よく知られた哲学の有効性をあらわす典型的な議論である。

以上で、 ϖ はポアソン交換していて、ファイバーが代数的トーラスであることから、 ϖ はLiouvilleの意味で可積分系である。変形量子化 \mathcal{A}_\hbar はその量子化である。

5(iii). アファイン・グラスマン Gr_G は位相的には基点付きループ群 ΩG であることが知られており、特にその連結成分は G の基本群 $\pi_1(G)$ に一致する。ホモロジー群は連結成分に応じて分解するが、これは合成積とcompatibleである。すなわち $\gamma \in \pi_1(G)$ に対応する \mathcal{R} の連結成分を \mathcal{R}_γ と書くとき、 $H_*^{G\circ}(\mathcal{R}_\gamma) * H_*^{G\circ}(\mathcal{R}_{\gamma'}) \subset H_*^{G\circ}(\mathcal{R}_{\gamma+\gamma'})$ となる。 $(\pi_1(G)$ が可換であることはよく知られている。) 従って $H_*^{G\circ}(\mathcal{R})$ は、 $\pi_1(G)$ で次数付けられた環である。

これを $\mathcal{M}_C = \text{Spec } H_*^{G\circ}(\mathcal{R})$ 側で考えると、 $\pi_1(G)$ のポントリヤーギン双対 $\text{Hom}(\pi_1(G), \mathbb{C}^\times)$ が \mathcal{M}_C に作用することになる。たとえば、上の例では $\pi_1(G) = \pi_1(\mathbb{C}^\times) = \mathbb{Z}$ であり、ポントリヤーギン双対は \mathbb{C}^\times である。 \mathbb{C}^\times 作用は、最初の例では $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$ の第二成分への自然な作用であり、二番目の例の場合は x がウェイト1で、 y がウェイト-1である。

この作用は、変形量子化 $H_*^{G\circ \times \mathbb{C}^\times}(\mathcal{R})$ にも自然に伸びていることから、シンプレクティック形式を保っていることも従う。

G が半単純のときには、 $\pi_1(G)$ は有限群で、そのポントリヤーギン双対も有限群になってしまうが、トーラスが現れるのは $\text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ が自明でない場合である。このとき、運動量写像は ϖ に $\text{Lie } G \rightarrow \text{Lie } \mathbb{C}^\times$ を合成したもので与えられ、特に作用はハミルトニアンである。

5(iv). \mathbf{N} が、 G を正規部分群として含む大きな群 \tilde{G} の表現の制限として現れている場合を考える。物理では、商群 \tilde{G}/G はフレーバー対称性の群とよばれる。これを G_F で表わす。

\tilde{G}_\circ は \mathcal{R} に作用するので、大きな群の同変ホモロジー $H_*^{\tilde{G}\circ}(\mathcal{R})$ を考えることができる。合成積により、 $H_{G_F}^*(\text{pt})$ 上の代数になり、対応するスペクトラムは、 $\text{Spec } H_{G_F}^*(\text{pt}) = \mathbb{C}[\text{Lie } G_F]^{G_F}$ 上の多様体の族になり、原点のファイバーが元の \mathcal{M}_C である。すなわち、 \mathcal{M}_C は $\text{Lie } G_F // G_F$ でパラメトライズされた変形を持つ。

また、説明は省略するが、変形に対応するような \mathcal{M}_C の部分特異点解消(の候補)を構成することもできる。

この節と前節では、 $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ と G_F が \mathcal{M}_C に導く構造を調べたが、Higgs枝 \mathcal{M}_H に導く性質を考えることは有用である。まず、 G_F であるが、 $\mathcal{M}_H = \mathbf{M} // G$ であるから、 G_F は \mathcal{M}_F に作用する。一方で、 $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ があると、対応する $\zeta \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Lie} G, \mathrm{Lie} \mathbb{C}^\times)$ を考えて、運動量写像のレベル集合を $\mu = 0$ から $\mu = \zeta$ に変形することができる。すなわち、 $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ と G_F が \mathcal{M}_C と \mathcal{M}_H に誘導する構造は、それぞれ群作用と変形であるが、両者は \mathcal{M}_C と \mathcal{M}_H で入れ替わっている。

5(v). 前節と、前々節の構造の例として、トーリック超ケーラー多様体を考える。これには、トーラスの完全列

$$1 \rightarrow T = (\mathbb{C}^\times)^{d-n} \rightarrow \tilde{T} = (\mathbb{C}^\times)^d \rightarrow T_F = (\mathbb{C}^\times)^n \rightarrow 1$$

が与えられたとする。 \tilde{T} の標準的な表現 $\mathbf{N} = \mathbb{C}^d$ を取り、その T への制限も \mathbf{N} で表わす。さて、 $\mathcal{M}_C(\tilde{T}, \mathbf{N})$ は §4(ii)の計算より \mathbb{C}^{2d} となる。前々節の構成により $\pi_1(\tilde{T})$ のポントリヤージン双対が \mathbb{C}^{2d} に作用するが、これは \tilde{T} の双対トーラス \tilde{T}^\vee に他ならない。 T_F の双対トーラスは T_F^\vee はその部分トーラスであり、前々節の構成をもう少し進めると T に関するCoulomb枝 $\mathcal{M}_C(T, \mathbf{N})$ は、 \mathbb{C}^{2d} の T_F^\vee に関するシンプレクティック商 $\mathbb{C}^{2d} // T_F^\vee$ に他ならない。これは、双対トーラスの完全列

$$1 \rightarrow T_F^\vee \rightarrow \tilde{T}^\vee \rightarrow T^\vee \rightarrow 1$$

を考えて、 \tilde{T}^\vee の表現 $\mathbf{M} = \mathbb{C}^d \oplus (\mathbb{C}^d)^*$ に関するHiggs枝ということもできる。すなわち、 T と T_F^\vee を入れ替えることによって、Higgs枝とCoulomb枝が入れ替わっている。

6. 籠ゲージ理論

現在のところ、Higgs枝が籠多様体になるような (G, \mathbf{N}) に対応するCoulomb枝についてが一番よく調べられている。 Q を籠とし、 Q_0 をその頂点の集合、 Q_1 を向きの付けられた辺の集合とする。 $h \in Q_1$ に対し、その始点と終点を $o(h)$ 、 $i(h)$ で表わす。二つの Q_0 で次数付けられたベクトル空間 $V = \bigoplus V_i$ 、 $W = \bigoplus W_i$ が与えられたとき、

$$G = \prod_{i \in Q_0} \mathrm{GL}(V_i),$$

$$\mathbf{N} = \bigoplus_{h \in Q_1} \mathrm{Hom}(V_{o(h)}, V_{i(h)}) \oplus \bigoplus_{i \in Q_0} \mathrm{Hom}(W_i, V_i)$$

が、籠ゲージ理論である。ただし、 G の \mathbf{N} への作用は自然なものである。

Q がADE型の場合には、 \mathcal{M}_C は原点に特異点を持った \mathbb{R}^3 の上のモノポールのモジュライ空間になると物理的には洞察されていたが、この空間の代数幾何的な対応物が、先の数学的な定義のもとで示されている。([BFN16b]) ここで、モノポールの構造群は、 Q に対応する(adjoint型の)複素単純リー群 G_Q であり、 V の次元は、モノポールの次数に対応し、 W の次元は特異点の情報を与える。代数幾何的な対応物は、一般の場合は記述は簡単ではないが、 $\mu = \sum \dim W_i \varpi_i - \sum \dim V_i \alpha_i$ が支配的などときには、 G_Q のアファイン・グラスマンを考

え、 $\lambda = \sum \dim W_i \varpi_i$ と μ に対応する Schubert 多様体 $\overline{\text{Gr}}_{G_Q}^\lambda$, $\overline{\text{Gr}}_{G_Q}^\mu$ を取って、 $\overline{\text{Gr}}_{G_Q}^\mu$ の横断切片と $\overline{\text{Gr}}_{G_Q}^\lambda$ の交わりが M_C である。

幾何学的佐竹対応によってアファイン・グラスマンは G_Q のラングランズ双対の表現論と結びついてきたが、一方で籠多様体のホモロジー群には、 G_Q の表現の構造が入っていた。始めに述べたシンプレクティック双対性は、この二つの構成が‘双対’によって結びついていることを主張するように定式化される(べきである)。

この結果の証明のためには、 M_C を決定する次のような処方箋を用いる。

- (1) まず、 M_C の候補になる空間を作る。これは、多くの場合は、物理学者の答えを採用する。
- (2) 次に、その候補の空間に、 ϖ に対応すると期待される可積分系を作る。
- (3) その可積分系が平坦な族であること、 M_C が正規であることをチェックする。
- (4) M_C とその候補の間の T^*T^V/W を通じた双有理写像が t/W の余次元2の集合を除いて拡張することをチェックする。

最後の余次元2の集合を除けば十分であるところは、正規性の帰結である。同変ホモロジーの局所化定理の応用で、genericには T^*T^V であることを説明したが、余次元1のところも同様の議論で、階数1の群のCoulomb枝を決定する問題に帰着できる。階数1の場合は、Coulomb枝は \mathbb{C}^3 の超曲面として実現できることが示されており、決定されている。したがって、(4)は、易しいステップである。現状では、(3)を示す部分が、ケースバイケースで行われていてキーポイントになっている。

アファインADE型の場合は、有限型のモノポールの代わりにインスタントンを考えればよい。ただし、 \mathbb{R}^4 上のインスタントンではなく、Taub-NUT空間上のインスタントンにするのが正確なので、微妙な問題があり、特に上でいうところの μ が支配的な場合は \mathbb{R}^4 上でも Taub-NUT空間上でも、複素シンプレクティック多様体としては変わらないと期待されている。

インスタントンのモジュライ空間については、(3)の性質が証明されていないので、現在のところCoulomb枝の決定までは至っていない。

(3)は微妙な性質である。例えばべき零軌道は、A型るときは常に正規であるが、一般にはそうでない。一方、Coulomb枝は常に正規である。古典型のべき零軌道やそのSlodowy横断切片は、Higgs枝として現れることが知られているので、対応するCoulomb枝も、そうなっていると安直には考えられるが、正規性の問題から、そうそう単純ではなさそうである。Hananyらは、正規化を取ればよいと考えているようであるが、まだまだ十分な根拠があるとはいえないのではないだろうか？

アファインA型るときには、インスタントンのモジュライ空間を直接取り扱う代わりに、Cherkisの弓箭多様体(bow varietyの和訳)を用いる。弓箭多様体は、Nahm方程式とよばれる非線形常微分方程式の解を用いてあらわされているので、そのままでは取扱いにくいだが、[NT16]により、籠多様体の変種として書き直し、(3)の性質を証明した。したがって、アファインA型の籠ゲージ理論のCoulomb枝は決定された。

7. 量子化されたCOULOMB枝

量子化されたCoulomb枝 \mathcal{A}_h については、多様体の決定に比べると分かっている例は少ない。

前に、随伴表現 $N = \mathfrak{g}$ のときに spherical DAHA が出てくることを言及したが、 $G = GL(k)$ のときは、ジョルダン叢に対応する叢ゲージ理論で、 $V = \mathbb{C}^k$, $W = 0$ の場合であると思うことができる。これを一般化して $V = \mathbb{C}^k$, $W = \mathbb{C}^r$ と変えると、 \mathcal{A}_h は wreath 積 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \wr S_k = (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^k \rtimes S_k$ の有理 Cherednik 代数の spherical part になる。[KN16] 対応する Coulomb 枝は $\text{Sym}^k \mathbb{C}^2 / (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})$ である。

有限 ADE 型の叢ゲージ理論の場合は、[BFN16b] の Appendix において \mathcal{A}_h が shifted Yangian として同型であることが示された。ただし、前節で言及した μ が支配的という条件を仮定した下で証明されており、一般の場合は未解決である。

REFERENCES

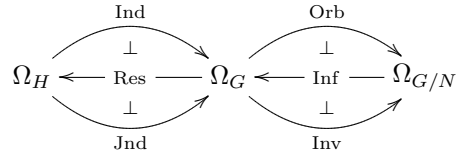
- [BF08] R. Bezrukavnikov and M. Finkelberg, *Equivariant Satake category and Kostant-Whittaker reduction*, Mosc. Math. J. **8** (2008), no. 1, 39–72, 183.
- [BFM05] R. Bezrukavnikov, M. Finkelberg, and I. Mirković, *Equivariant homology and K-theory of affine Grassmannians and Toda lattices*, Compos. Math. **141** (2005), no. 3, 746–768.
- [BFN16a] A. Braverman, M. Finkelberg, and H. Nakajima, *Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $\mathcal{N} = 4$ gauge theories, II*, ArXiv e-prints (2016), [arXiv:1601.03586 \[math.RT\]](#).
- [BFN16b] ———, *Coulomb branches of 3d $\mathcal{N} = 4$ quiver gauge theories and slices in the affine Grassmannian (with appendices by Alexander Braverman, Michael Finkelberg, Joel Kamnitzer, Ryosuke Kodera, Hiraku Nakajima, Ben Webster, and Alex Weekes)*, ArXiv e-prints (2016), [arXiv:1604.03625 \[math.RT\]](#).
- [BLPW14] T. Braden, A. Licata, N. Proudfoot, and B. Webster, *Quantizations of conical symplectic resolutions II: category \mathcal{O} and symplectic duality*, ArXiv e-prints (2014), [arXiv:1407.0964 \[math.RT\]](#).
- [KN16] R. Kodera and H. Nakajima, *Quantized Coulomb branches of Jordan quiver gauge theories and cyclotomic rational Cherednik algebras*, ArXiv e-prints (2016), [arXiv:1608.00875 \[math.RT\]](#).
- [Nak92] 中島 啓, Einstein 計量の収束定理と ALE 空間, 数学 **44** (1992), no. 2, 133–146.
- [Nak16] H. Nakajima, *Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $\mathcal{N} = 4$ gauge theories, I*, Adv. Theor. Math. Phys. **20** (2016), no. 3, 595–669, [arXiv:1503.03676 \[math-ph\]](#).
- [NT16] H. Nakajima and Y. Takayama, *Cherkis bow varieties and Coulomb branches of quiver gauge theories of affine type A*, ArXiv e-prints (2016), [arXiv:1606.02002 \[math.RT\]](#).
- [VV10] M. Varagnolo and E. Vasserot, *Double affine Hecke algebras and affine flag manifolds, I*, Affine flag manifolds and principal bundles, Trends Math., Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2010, pp. 233–289.

〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 数理解析研究所
 E-mail address: nakajima@kurims.kyoto-u.ac.jp

AN INTERPRETATION OF BISSET FUNCTORS AS MACKEY FUNCTORS ON FINITE GROUPOIDS, AND ITS RELATION TO DERIVATORS

中岡 宏行 (HIROYUKI NAKAOKA)

Mackey 関手・丹原関手・biset 関手はいずれも有限群に付随する代数系のあいだの演算を記述する概念である．例えば，有限群 G に Burnside 環 Ω_G を対応させると，部分群 $H \leq G$ および正規部分群による剰余 G/N に対して 6 種の写像



が得られる．大雑把に言うと Mackey 関手はこの 6 つのうち Ind, Res の二つを，丹原関手は Ind, Res, Jnd の三つを，biset 関手は Ind, Res, Inf, Orb(= Def) の 4 つを扱う概念である．そのため，上記全てを包括的に扱う枠組みを与えるために，「丹原 biset 関手」とでも呼ぶべき，biset 関手と丹原関手の融合を目指すのは自然である．

1. MACKEY 関手

有限群 G 上の Mackey 関手の定義を記す．Mackey 関手の基本的な性質については [Bo97], [TW95], [W00]などを参照．

定義 1.1. G 上の Mackey 関手 $M = \{M_H, \text{res}_K^H, \text{ind}_K^H, c_{g,H}\}$ とは，

- 部分群 $H \leq G$ に対し，加群 M_H
- 部分群の列 $K \leq H \leq G$ に対し，制限と呼ばれる準同型 $\text{res}_K^H: M_H \rightarrow M_K$ および推移と呼ばれる準同型 $\text{ind}_K^H: M_K \rightarrow M_H$
- 部分群 $H \leq G$ および元 $g \in G$ に対し，共役と呼ばれる準同型 $c_{g,H}: M_H \rightarrow M_{gH}$

からなる加群と準同型の族であり，以下を満たすものをいう．

- (i) 任意の $H \leq G, h \in H$ に対して， $\text{res}_H^H = \text{ind}_H^H = c_{h,H} = \text{id}$.
- (ii) 任意の $H \leq G$ および $g, g' \in G$ に対して， $c_{g',gH} \circ c_{g,H} = c_{g'g,H}$.
- (iii) 任意の $L \leq K \leq H \leq G$ に対して， $\text{res}_L^K \circ \text{res}_K^H = \text{res}_L^H, \text{ind}_K^H \circ \text{ind}_L^K = \text{ind}_L^H$.
- (iv) 任意の $K \leq H \leq G$ および $g \in G$ に対して， $c_{g,K} \circ \text{res}_K^H = \text{res}_{gK}^{gH} \circ c_{g,H}, c_{g,H} \circ \text{ind}_K^H = \text{ind}_{gK}^{gH} \circ c_{g,K}$.
- (v) 任意の $K, L \leq H$ に対して

$$(1.1) \quad \text{res}_L^H \circ \text{ind}_K^H = \sum_{LhK \in L \backslash H / K} \text{ind}_{hK \cap L}^L \circ c_{h, K \cap Lh} \circ \text{res}_{K \cap Lh}^K.$$

この (v) は Mackey 条件と呼ばれる．

以下，共役をどのように与えるかについてはしばしば省略する．

例 1.2. 各 $H \leq G$ に対して Burnside 環 Ω_H を対応させ、部分群の列 $K \leq H \leq G$ に通常の制限 $\text{res}_K^H: \Omega_H \rightarrow \Omega_K$ および推移 $\text{ind}_K^H: \Omega_K \rightarrow \Omega_H$ を対応させると、**Burnside 関手** Ω が得られる。

例 1.3. Q を G -加群とする。次の対応で Mackey 関手 $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{(Q)}$ が得られる。これを固定点関手と呼ぶことにする。

- 各 $H \leq G$ に対して、部分加群 $Q^H = \{q \in Q \mid hq = q \ (\forall h \in H)\}$ を対応させる。
- 部分群の列 $K \leq H \leq G$ に対して、制限 $\text{res}_K^H: Q^H \hookrightarrow Q^K$ は包含写像とし、推移 $\text{ind}_K^H: Q^K \rightarrow Q^H$ は

$$\text{ind}_K^H(x) = \sum_{h \in H/K} hx \quad (\forall x \in Q^K)$$

なる写像とする。

下記は、有限 G 集合の圏 ${}_G\text{set}$ を用いた同値な言い換えである。部分群 $H \leq G$ からは対象 $G/H \in \text{Ob}({}_G\text{set})$ が得られ、部分群の包含 $K \leq H \leq G$ からは射 $G/K \rightarrow G/H$ が得られることに注意。

定義 1.4. 反変関手 $M^*: {}_G\text{set} \rightarrow \text{Ab}$ と共変関手 $M_*: {}_G\text{set} \rightarrow \text{Ab}$ の対 $M = (M_*, M^*)$ が以下を満たすとき、これを Mackey 関手という。ただし、 Ab はアーベル群の圏を表す。

- (1) $M^*(X) = M_*(X)$ が任意の $X \in \text{Ob}({}_G\text{set})$ に対して成立。これを $M(X)$ で表す。この条件は、 $M = (M_*, M^*)$ が共変性と反変性を併せ持つ「両変」関手であることを意味している。
- (2) M^* は加法的である。すなわち、 ${}_G\text{set}$ における任意の有限直和を Ab における有限直積にうつす。
- (3) ${}_G\text{set}$ における任意のファイバー積

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ x \downarrow & \square & \downarrow y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

に対し、 $M_*(x)M^*(f') = M^*(f)M_*(y)$ 。

Mackey 関手 $M = (M^*, M_*)$ から $N = (N^*, N_*)$ への射 $\varphi = \{\varphi_X\}_{X \in \text{Ob}({}_G\text{set})}$ とは、加群の射 $\varphi_X: M(X) \rightarrow N(X)$ の族であって共変部分と反変部分の両方に関し自然であるものをいう。これにより、 G 上の Mackey 関手の圏 $\text{Mack}(G)$ が得られる。

終域の Ab を、単位元付き可換半群の圏 Mon で置き換えると、**半 Mackey 関手** の圏 $\text{SMack}(G)$ が得られる。 Mon を集合の圏 Set で置き換えても、自然に Mon を経由するため結果は同じとなる。 $\text{Mack}(G) \subseteq \text{SMack}(G)$ は充満部分圏である。

上記の様に関手の対としても定義される Mackey 関手であるが、スパン圏上の単一の関手と見做すこともできる。この結果は Lindner[L76] による。

定義 1.5. ${}_G\text{set}$ から生じるスパン圏 $\mathcal{S} = \mathcal{S}({}_G\text{set})$ とは、以下で定まる圏をいう。

- 対象は有限 G -集合。すなわち、 $\text{Ob}(\mathcal{S}) = \text{Ob}({}_G\text{set})$ 。
- 対象 X, Y の間の射は、 ${}_G\text{set}$ における射の対

$$(X \xleftarrow{f} V \xrightarrow{g} Y)$$

の同値類とする. ただし, $(X \xleftarrow{f} V \xrightarrow{g} Y)$ と $(X \xleftarrow{f'} V' \xrightarrow{g'} Y)$ が同値であるとは, $f' \circ v = f$ および $g' \circ v = g$ を満たす同型射 $v \in {}_G\text{set}(V, V')$ が存在するときをいう.

射の合成はファイバー積を用いて定義される. 圏 \mathcal{S} において, 二つの対象 X_1, X_2 の直積が, ${}_G\text{set}$ における直和 $X_1 \amalg X_2$ で与えられる. また, 空集合 \emptyset は終対象となる.

事実 1.6. ([L76]) 圏同値 $\text{Prod}(\mathcal{S}, \text{Set}) \xrightarrow{\cong} \text{SMack}(G)$ および $\text{Prod}(\mathcal{S}, \text{Ab}) \xrightarrow{\cong} \text{Mack}(G)$ が存在する. ただし Prod で, 有限積を保つ関手の圏を表す.

2. 丹原関手

Mackey 関手が制限・推移 (および共役) の関係を記述しているのに対し, 丹原関手はこれに乗法的推移を加えた演算の関係を記述する概念である.

定義 2.1. 射 $f \in {}_G\text{set}(X, Y)$ の定める引き戻し関手 $f^*: {}_G\text{set}/Y \rightarrow {}_G\text{set}/X$ は左随伴 $f \circ -$ および右随伴 Π_f を持つことに注意する. この随伴性を用いると, 射 $p \in {}_G\text{set}(A, X)$ に対し, 次を可換にする e が得られる.

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{p} & A \xleftarrow{e} X \times_Y \Pi_f(A) \\ f \downarrow & \square & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{\pi} & \Pi_f(A) \end{array}$$

ただし, 外周はファイバー積とする. この図式を f と p から定まる**指数図式** とよぶ.

定義 2.2. ([Ta93, Br05]) 関手の3つ組 $T = (T^*, T_+, T_\bullet)$ が**丹原関手** (resp. **半丹原関手**) であるとは, 以下を満たすときをいう.

- (i) 加法部分 $T^\alpha = (T^*, T_+)$ は Mackey 関手 (resp. 半 Mackey 関手).
- (ii) 乗法部分 $T^\mu = (T^*, T_\bullet)$ は半 Mackey 関手.
- (iii) 任意の指数図式 (2.1) に対して, $T_\bullet(f)T_+(p) = T_+(\pi_+)T_\bullet(f')T^*(e)$.

条件 (iii) を分配則とよぶ. 任意の対象 X に対し, $T(X)$ には (i) から加法群 (resp. 加法的半群) の構造が, (ii) から乗法的半群の構造が入り, 分配則によりこれは可換環 (resp. 可換半環) となる.

(半) 丹原関手のあいだの射とは, 加法部分・乗法部分のいずれについても半 Mackey 関手の射を与えるような写像の族とする. 半丹原関手の圏を $STam(G)$, その充満部分圏である丹原関手の圏を $Tam(G)$ で表す.

例 2.3. Burnside 環は丹原関手をなす. また, 半 Burnside 環は半丹原関手をなす.

Mackey 関手の圏 $\text{Mack}(G)$ はアーベル圏であると同時に, Burnside 関手をユニットとする対称モノイダル圏である. さらに, G が自明な群の場合には Ab に圏同値となる. これらのことから, Mackey 関手はアーベル群の G -同変な拡張とみなされる. 丹原関手は

- 加法的には Mackey 関手 … アーベル群の G -同変版
- 乗法的には半 Mackey 関手 … 単位元付き可換半群の G -同変版

からなり, さらに分配則の G -同変版を満たす対象である. G が自明な場合は, $Tam(G)$ は通常の可換環の圏に同値となる. そのため, 丹原関手は可換環の G -同変版と見做せる ([Y06]).

注 2.4. 可換 G -代数 R に付随する固定点関手 $\mathcal{P}^{(R)}$ は丹原関手となる. これにより忠実充満な関手

$$\mathcal{P}: G\text{-Ring} \rightarrow Tam(G)$$

が得られる．この意味で，丹原関手は G -代数よりも広いクラスの対象を扱っていると言える．

可換環の G -同変版であるという観点から，可換環論における基本的な構成が丹原関手に拡張されると期待できる．例えば，次の結果は可換半環の Grothendieck 環をとる構成の拡張を与える．

事実 2.5. ([Ta93]) 包含関手 $Tam(G) \rightarrow STam(G)$ は左随伴関手をもつ．

この他にも，

- (a) 丹原関手の，乗法的部分半 Mackey 関手による fraction \cdots [N12a]，
- (b) 丹原関手のイデアルによる剰余 \cdots [N12b]，
- (c) 丹原関手上の，「多項式環」をとる操作の類似 \cdots [N13]，
- (d) 半 Mackey 関手から丹原関手を得る，群環をとる操作の G -同変版 \cdots [N11]

などが可能である．特に，(c) は丹原関手に対する Dress 構成 ([OY11]) とも関連する．また，(b) を用いて丹原関手の素スペクトラムを構成することもできる．以下は， $G = \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ (p は素数) の場合の Burnside 関手の $Spec$ を，各点の閉包を図示したものである ([N14]) ．

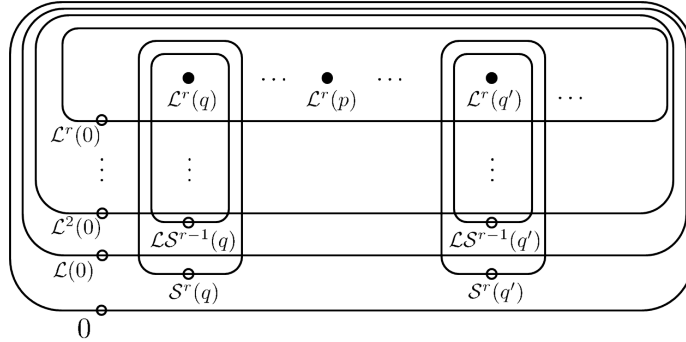


FIGURE 1. $Spec \Omega$ for $G = \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$

3. MACKEY 関手としての BISSET 関手

G の部分群に限らない有限群とその間の包含準同型に対して定義 1.1 と同様の条件を課した族を，大域的 Mackey 関手という．さらに，群のあいだの任意の準同型を扱うのは自然である．実際には次の様に両側集合を用いて，Bouc により **biset 関手** という概念が定義された [Bo10]．

定義 3.1. G, H を有限群とし， U を有限集合とする． U が左 H -作用と右 G -作用を持ち，

$$(hu)g = h(ug) \quad (\forall h \in H, g \in G, u \in U)$$

を満たすとき， U を H - G -biset とよぶ．このとき， ${}_H U_G$ のように表す． U が H - G -biset であることは，有限 $H \times G^{\text{op}}$ -集合であることと同値である．

注 3.2. 有限群の準同型 $\varphi: G \rightarrow H$ から，biset として ${}_H G_G$ および ${}_G G_H$ が得られることに注意する．特に，次のような基本的な biset が得られる．

- 部分群の包含 $H \hookrightarrow G$ に対し， $\text{Res}_H^G = {}_H G_G$ および $\text{Ind}_H^G = {}_G G_H$ ．

- 正規部分群による剰余 $G \rightarrow G/N$ に対し, $\text{Inf}_{(G/N)}^G = {}_G(G/N)_{(G/N)}$ および $\text{Def}_{(G/N)}^G = (G/N)(G/N)_G$.
- 群の同型 $\varphi: G \rightarrow G'$ に対し, $\text{Iso}_\varphi = {}_{G'}G'_G$.

定義 3.3. 有限群の biset 圏 \mathcal{B} を以下のように定義する ([Bo10]).

- (1) \mathcal{B} の対象は有限群とする.
- (2) 有限群 G, H に対し, 射集合は $\mathcal{B}(G, H) = \Omega_{(H \times G^{\text{op}})}$ とする.

${}_K V_H$ と ${}_H U_G$ の合成は商集合

$$V \times_H U = (V \times U)/(vh, u) \sim (v, hu)$$

で定め, \mathcal{B} に加法的に延長する. \mathcal{B} はプレ加法圏となる.

定義 3.4. \mathcal{B} 上の加法関手 $F: \mathcal{B} \rightarrow \text{Ab}$ のことを, **biset 関手** と呼ぶ. 自然変換を射とすることで, biset 関手の圏が得られる. この圏を \mathcal{F} で表すこととする.

この定義は, Mackey 関手に対する Lindner の結果と通ずるものがある. Bouc により得られた, biset の次の様な分解に注意しよう ([Bo10]).

事実 3.5. ${}_H U_G$ が既約ならば, 有限群の包含・剰余・同型からなる準同型の列

$$(3.1) \quad H \leftarrow C \rightarrow C/D \xleftarrow[\cong]{f} B/A \leftarrow B \rightarrow G.$$

が存在して, 必ず次の様に分解できる.

$$U \cong \text{Ind}_C^H \times \text{Inf}_{C/D}^C \times_{C/D} \text{Iso}_{B/A} \times \text{Def}_{B/A}^B \times \text{Res}_B^G.$$

列 (3.1) はファイバー積をとることで, 次の様に「折り返す」ことができる.

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ H & \leftarrow & C & & B & \rightarrow & G \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & C/D \cong B/A & & \end{array}$$

従って同型を除き, 群準同型のスパン

$$H \xleftarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} G$$

と見做せる. Lindner の結果との類似を追い「丹原 biset 関手」を定義するならば, まず biset 圏を「半分」にした圏上で Mackey 関手を考察する必要が生じる. 実際には, これは以下の様な 2-圏で実現できる.

定義 3.6. 2-圏 \mathbb{S} を次の様に定義する. ([N16c])

- (0) 0-セルは有限群 G と有限 G -集合 X の対とする. この対を $\frac{X}{G}$ で表す.
- (1) 0-セル $\frac{X}{G}, \frac{Y}{H}$ に対し, 1-セル $\frac{\alpha}{\theta}: \frac{X}{G} \rightarrow \frac{Y}{H}$ とは写像 $\alpha: X \rightarrow Y$ および写像の族 $\{\theta_x: G \rightarrow H\}_{x \in X}$ の対であつて
 - (i) $\alpha(gx) = \theta_x(g)\alpha(x)$
 - (ii) $\theta_x(gg') = \theta_{g'x}(g)\theta_x(g')$
を任意の $x \in X$ および $g, g' \in G$ に対して満たすものをいう. 特に $G = H$ のとき, $\theta_x = \text{id}$ を満たすような 1-セルを (G -) 同変な 1-セルといい $\frac{\alpha}{G}: \frac{X}{G} \rightarrow \frac{Y}{G}$ のように表す.

- (2) 1-セル $\frac{\alpha}{\theta}, \frac{\alpha'}{\theta'}: \frac{X}{G} \rightarrow \frac{Y}{H}$ に対し, 2-セル $\varepsilon: \frac{\alpha}{\theta} \Rightarrow \frac{\alpha'}{\theta'}$ とは H の元の族 $\{\varepsilon_x \in H\}_{x \in X}$ であつて
- (i) $\alpha'(x) = \varepsilon_x \alpha(x)$,
 - (ii) $\varepsilon_{gx} \theta_x(g) \varepsilon_x^{-1} = \theta'_x(g)$
- を任意の $x \in X$ および $g \in G$ に対して満たすものをいう.

合成などの詳細は [N16c] を参照. 次の様に有限亜群の 2-圏 finGpd との同値が存在するので, これで合成等を引き戻して与えてもよい.

命題 3.7. ([N16a]) 以下の対応で 2-関手 $\iota: \mathbb{S} \hookrightarrow \text{finGpd}$ が得られ, 2-圏の同値を与える.

- (1) 0-セル $\frac{X}{G} \in \mathbb{S}^0$ に対して, 有限亜群 $\iota(\frac{X}{G})$ を
- $\text{Ob}(\iota(\frac{X}{G})) = X$.
 - 任意の対象 $x, x' \in X$ に対して, 射集合は $\iota(\frac{X}{G})(x, x') = \{g \in G \mid gx = x'\}$.
- と定める.
- (2) 0-セル $\frac{X}{G}, \frac{Y}{H}$ に対して, 1-セルのあいだの全単射
- $$\iota: \mathbb{S}^1(\frac{X}{G}, \frac{Y}{H}) \xrightarrow{\cong} \text{finGpd}^1(\iota(\frac{X}{G}), \iota(\frac{Y}{H}))$$
- が存在.
- (3) 1-セル $\frac{\alpha}{\theta}, \frac{\beta}{\tau}: \frac{X}{G} \rightarrow \frac{Y}{H}$ に対し, 2-セルのあいだの全単射
- $$\iota: \mathbb{S}^2(\frac{\alpha}{\theta}, \frac{\beta}{\tau}) \xrightarrow{\cong} \text{finGpd}^2(\iota(\frac{\alpha}{\theta}), \iota(\frac{\beta}{\tau})),$$

が存在.

この同値の存在から, 以下では \mathbb{S} を finGpd で置き換えても本質的な差異は無い.

補題 3.8. 2-圏 \mathbb{S} は以下の性質を持つ.

- (1) 任意の 0-セル $\frac{X}{G}, \frac{Y}{H}$ に対し *bicoproduct* $\frac{X}{G} \amalg \frac{Y}{H}$ が存在. これは ι で圏の直和にうつる.
- (2) 任意の 1-セル $\frac{\alpha}{\theta}: \frac{X}{G} \rightarrow \frac{Z}{K}, \frac{\beta}{\tau}: \frac{Y}{H} \rightarrow \frac{Z}{K}$ に対し, *bipullback* $\frac{X}{G} \times_{\frac{Z}{K}} \frac{Y}{H}$ が存在. これは ι でコンマ図式にうつる.

これを用いて, \mathbb{S} 上の Mackey 関手を次の様に定義する.

定義 3.9. \mathbb{S} 上の **Mackey 関手** (resp. **半 Mackey 関手**) とは, \mathbb{S} から Ab (resp. Set) への反変および共変的な 2-関手の対 $M = (M^*, M_*)$ であつて以下を満たすものをいう. ただしここで, Ab (resp. Set) は自明な 2-セルを与えて 2-圏とみなす. 従つて, \mathbb{S} の 2-セルは M^*, M_* により全て id にうつる.

- (i) 任意の 0-セル $\frac{X}{G}$ に対して $M^*(\frac{X}{G}) = M_*(\frac{X}{G})$ が成立. これを $M(\frac{X}{G})$ で表す.
- (ii) M^* は *bicoproduct* を積にうつす. また, $M(\emptyset)$ は終対象.
- (iii) 任意の *bipullback*

$$\begin{array}{ccc} \frac{W}{L} & \xrightarrow{\delta} & \frac{Y}{H} \\ \gamma \downarrow & \Downarrow \varepsilon & \downarrow \beta \\ \frac{X}{G} & \xrightarrow{\alpha} & \frac{Z}{K} \end{array}$$

に対して, $M^*(\alpha)M_*(\beta) = M_*(\gamma)M^*(\delta)$ が成立.

このとき, 次が成り立つ.

定理 3.10. *Biset* 関手 $F \in \text{Ob}(\mathcal{F})$ に対し, $M_F = i(F)$ を

- 有限群 G に対し $M_F(\frac{1}{G}) = F(G)$. ここで, $\mathbf{1}$ は一点集合を表す.
- 群の準同型 $\varphi: G \rightarrow H$ に対し $M_F^*(\frac{1}{\varphi}) = F({}_G H_H)$, $(M_F)_*(\frac{1}{\varphi}) = F({}_H H_G)$.
ここで, 一点への定値写像を同じ記号で $\mathbf{1}$ と表す.

となるよう定めることができる. この対応は, 以下を満たす関手 $i: \mathcal{F} \rightarrow \text{Mack}(\mathbb{S})$ を与える.

- (1) $\ell \circ i \cong \text{Id}$ となる左随伴関手 ℓ を持ち, i は忠実充満である.
- (2) $M \in \text{Ob}(\text{Mack}(\mathbb{S}))$ が i の本質的像に属することは, 等式

$$(3.2) \quad M_*\left(\frac{\mathbf{1}}{\varphi}\right)M^*\left(\frac{\mathbf{1}}{\varphi}\right) = \text{id}$$

を任意の全射準同型 $\varphi: G \rightarrow H$ に対して満たすことに同値. ここで $\frac{1}{\varphi}$ は $\frac{1}{\varphi}: \frac{1}{G} \rightarrow \frac{1}{H}$ なる 1-セル.

従って, (3.2) を満たす Mackey 関手が *biset* 関手との関係において重要となる.

定義 3.11. Mackey 関手 M が任意の全射準同型 $\varphi: G \rightarrow H$ に対して (3.2) を満たすとき, M は **deflative** であるという. Deflative Mackey 関手のなす充満部分圏を $\text{Mack}_{\text{def}}(\mathbb{S}) \subseteq \text{Mack}(\mathbb{S})$ で表す.

定理 3.10 から, *biset* 関手の圏と deflative Mackey 関手の圏のあいだの圏同値が得られる. より精密には, 次が成り立つ.

定理 3.12. 以下が成立する.

- (1) 圏 $\text{Mack}(\mathbb{S})$ は対称モノイダル圏となる.
- (2) (1) のモノイダル構造を $\text{Mack}_{\text{def}}(\mathbb{S})$ に制限すると, $\text{Mack}_{\text{def}}(\mathbb{S})$ も対称モノイダル圏となる.
- (3) 関手 i はモノイダル同値 $i: \mathcal{F} \xrightarrow{\cong} \text{Mack}_{\text{def}}(\mathbb{S})$ を与える.

また定理 3.10 から, \mathbb{S} 上の Mackey 関手 M から *biset* 関手 $\ell(M)$ が得られる. さらに, Mackey 関手 M は例えば次のような形で得ることができる.

命題 3.13. finGpd 上の *prederivator* ([G13] を参照) $\mathbb{D}: \text{finGpd}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ が以下の条件を満たすとする. ただし \mathcal{C} は *skeletally small* な圏のなす 2-圏とする.

- finGpd の 0-セルの任意の有限直和は, \mathbb{D} により直積にうつる.
- finGpd の任意の 1-セル f に対し, $\mathbb{D}(f) = f^*$ は左随伴 f_+ (*resp.* 右随伴 f_\bullet) を持つ.
- finGpd における任意のコンマ図式

$$\begin{array}{ccc} v/u & \xrightarrow{q} & \mathcal{D} \\ p \downarrow & \Downarrow & \downarrow v \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{u} & \mathcal{E} \end{array}$$

に対して, 関手の同型 $q_+p^* \cong v^*u_+$ (*resp.* $p_\bullet q^* \cong u^*v_\bullet$) が存在.

このとき,

- \mathbb{S} の 0-セル $\frac{X}{G}$ に対して, $M(\frac{X}{G}) = \text{Ob}(\mathbb{D}(\iota(\frac{X}{G})))$ とする.
- \mathbb{S} の 1-セル $\frac{\alpha}{\theta}: \frac{X}{G} \rightarrow \frac{Y}{H}$ に対して, 関手 $\iota(\frac{\alpha}{\theta})^*$, $\iota(\frac{\alpha}{\theta})_+$ (*resp.* $\iota(\frac{\alpha}{\theta})_\bullet$) が誘導する写像をそれぞれ $M^*(\frac{\alpha}{\theta}): M(\frac{Y}{H}) \rightarrow M(\frac{X}{G})$ および $M_+(\frac{\alpha}{\theta}): M(\frac{X}{G}) \rightarrow M(\frac{Y}{H})$ (*resp.* $M_\bullet(\frac{\alpha}{\theta}): M(\frac{X}{G}) \rightarrow M(\frac{Y}{H})$) とする.

と定めると, $M = (M^*, M_+)$ (*resp.* $M = (M^*, M_\bullet)$) は \mathbb{S} 上の半 Mackey 関手をなす ([N16a]).

注 3.14. \mathbb{D} が例えば有限な圏のなす 2-圏 finCat 上の derivator ([G13]) であれば, 上記の条件は満たされ, \mathbb{S} 上の 2-関手の 3 対 (M_+, M^*, M_\bullet) であって

- (M^*, M_+) および (M^*, M_\bullet) はそれぞれ半 Mackey 関手を満たすものが得られる.

例 3.15. 有限集合のなす圏 set の表現する derivator に以上の構成を行うと, 半 Burnside 環のなす \mathbb{S} 上の半 Mackey 関手が得られる.

以上のことを踏まえると, 「丹原 biset 関手」は,

- (i) 加法的には \mathbb{S} 上の (deflative) Mackey 関手
- (ii) 乗法的には \mathbb{S} 上の半 Mackey 関手
- (iii) 何らかの「分配則」を満たす

と言う条件で定義するのが適切であろう. (3) の「分配則」の完全な形は未だ得られていないが, 同変な 1-セル $\frac{\alpha}{G}: \frac{X}{G} \rightarrow \frac{Y}{G}$ に対しては bipullback を用いて得られる関手 $(\frac{\alpha}{G})^*: {}_G\text{set}/Y \rightarrow {}_G\text{set}/Y$ が左随伴および右随伴を持つことが確かめられ, これを用いて指数図式が定義できる. Burnside 関手は, この指数図式に関し定義 2.2(iii) と同様の分配則を満たすことが示されている ([N16b]).

REFERENCES

- [Bo10] Bouc, S.: *Biset functors for finite groups*, Lecture Notes in Mathematics, 1990, Springer-Verlag, Berlin (2010).
- [Bo97] Bouc, S.: *Green functors and G-sets*, Lecture Notes in Mathematics, 1671, Springer-Verlag, Berlin (1997).
- [Br05] Brun, M.: *Witt vectors and Tambara functors*, Adv. Math. **193** (2005) 233–256.
- [G13] Groth, M.: *Derivators, pointed derivators and stable derivators*. *Algebr. Geom. Topol.* **13** (2013) no. 1, 313–374.
- [L76] Lindner, H.: *A remark on Mackey-functors*, *Manuscripta math.* **18** (1976), 273–278.
- [N16a] Nakaoka, H.: *Biset functors as module Mackey functors and its relation to derivators*, *Comm. Alg.* **44** (2016) 5105–5148.
- [N16b] Nakaoka, H.: *Partial Tambara structure on the Burnside biset functor, induced from a derivator-like system of adjoint triplets*, *J. Algebra* **451** (2016) 166–207.
- [N16c] Nakaoka, H.: *A Mackey-functor theoretic interpretation of biset functors*, *Adv. in Math.* **289** (2016) 603–684.
- [N14] Nakaoka, H.: *The spectrum of the Burnside Tambara functor on a finite cyclic p-group*, *J. Algebra* **398** (2014) 21–54.
- [N13] Nakaoka, H.: *A generalization of the Dress construction for a Tambara functor, and its relation to polynomial Tambara functors*. *Adv. in Math.* **235** (2013) 237–260.
- [N12a] Nakaoka, H.: *On the fractions of semi-Mackey and Tambara functors*. *J. Algebra* **352** (2012) 79–103.
- [N12b] Nakaoka, H.: *Ideals of Tambara functors*. *Adv. in Math.* **230** (2012) 2295–2331.
- [N11] Nakaoka, H.: *Tambarization of a Mackey functor and its application to the Witt-Burnside construction*. *Adv. in Math.* **227** (2011) 2107–2143.
- [OY11] Oda, F.; Yoshida, T.: *The crossed Burnside rings III. The Dress construction for a Tambara functor*, *J. Algebra* **327** (2011) 31–49.
- [Ta93] Tambara, D.: *On multiplicative transfer*, *Comm. Algebra* **21** (1993) 1393–1420.
- [TW95] Thévenaz, J.; Webb, P.J.: *The structure of Mackey functors*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995) 1865–1961.
- [W00] Webb, P.: *A guide to Mackey functor*, *Handbook of algebra*, Vol. 2, (2000) 805–836.
- [Y06] 吉田 知行: 丹原ファンクター係数の多項式環 (有限群のコホモロジー論とその周辺), 数理解析研究所講究録 **1466** (2006) 21–34.

890-0065 鹿兒島市郡元 1-21-35, 鹿兒島大学学術研究院理工学域理学系
E-mail address: nakaoka@sci.kagoshima-u.ac.jp

Bethe 仮説へのいざない

坂本玲峰 (東京理科大学)

目次

| | | |
|------|----------------------------|----|
| 1 | はじめに—量子可積分系とは | 1 |
| 2 | Heisenberg 模型 | 4 |
| 3 | Bethe 仮説法 | 6 |
| 4 | Bethe 仮説方程式を解く | 11 |
| 5 | Bethe 仮説方程式の特異解 | 14 |
| 6 | Bethe の量子数 | 17 |
| 7 | 量子群の場合の文献紹介 | 19 |
| 8 | 結晶基底との関連 | 20 |
| 8.1 | はじめに | 20 |
| 8.2 | 概要: $A_1^{(1)}$ 型ベクトル表現の場合 | 21 |
| 8.3 | $A_n^{(1)}$ 型臙装配位 | 28 |
| 8.4 | $A_n^{(1)}$ 型臙装配位写像のアルゴリズム | 34 |
| 8.5 | 超離散タウ関数 | 37 |
| 8.6 | Cylindric Loop Schur 関数 | 41 |
| 8.7 | $D_n^{(1)}$ 型臙装配位 | 45 |
| 8.8 | $D_n^{(1)}$ 型臙装配位写像のアルゴリズム | 54 |
| 8.9 | Littlewood–Richardson タブロー | 59 |
| 8.10 | その他の話題 | 65 |

1 はじめに—量子可積分系とは

はじめに 本稿は量子可積分系における代表的な理論の一つである Bethe 仮説 (Bethe ansatz) 法についての入門的内容及び最近の進展についての解説です。読者としては物理学者、数学者の両方を念頭に置いて執筆しました。Bethe 仮説法には従来不透明な面が多くあり、数学者には接近しがたい印象を持たれていた方も多いようですが、最近の進展によりだいぶ色々様子が分かってきたようです。本稿の内容は、本質的には最高ウェイトベクトルの具体的構成ですので、多くの数学者の方々にご興味をお持ちいただければと思います。内容は 2016 年 9 月 7 日に第 61 回代数学シンポジウム (日本数学会、佐賀大学) で行った筆者の講演に基づきます。講演で使用した資料は下記 URL

<https://sites.google.com/site/affinecrystal/resources>

にて入手可能です（本稿では色つき文字にはハイパーリンクがついています）。

Bethe 仮説法の分野ではすでに膨大な数の論文（Google Scholar で “Bethe ansatz” と検索すると約 2 万件表示される）が出版されています。本稿では Bethe の原論文に沿った内容を紹介しますが、他にも多くの切り口（例えば Gaudin 模型と幾何学的ラングランズ対応 [F95] など）が存在しますので、本稿の内容に限らず、ご専門、ご関心の方向に応じて興味をお持ちいただければ幸いです。

古典力学における積分可能な系 さて、表題の量子可積分系とはいかなる分野なのか、簡単に紹介するところから始めよう。歴史的経緯に基づきまずは解析力学について振り返ることから始めよう（詳細は、例えば優れた教科書 [A] を参照）。解析力学は古典力学の理論的研究であり、Euler, Lagrange, Jacobi, Poincaré 等をはじめとする多くの研究者によって研究され、力学のみならず物理学、数学の広範な領域にわたって多大な影響を与えた。20 世紀に入り、原子、分子などの微視的領域では古典力学は成立せず、量子力学と呼ばれる全く異なる力学によって記述されることが発見された。古典力学と量子力学は大きく性格が異なる理論であるから、量子力学の場合にも解析力学と同様に「深い」理論的研究を進めようとするのは自然な事と思われる。

ただしここで「深い」理解と述べたのは、何か特定の結果を想定している訳ではない。むしろ折角量子力学という新しい力学がある以上、古典力学の結果にこだわりすぎることなく、新しく面白い数学が見つければ十分有益であると思う。そうは言っても我々にはすでに古典力学における数世紀にわたる蓄積があるのであるから、その過程、とくに研究者の問題意識と、その結果として得られた成果は大変参考になる。ここでは Jacobi¹の研究について見てみよう（詳細は [L] の XVI 章や [H] を参照）。Jacobi の有名な力学の教科書 [J] では彼の研究の方針について次のような言明がある。

この講義は、運動方程式の積分に際して、方程式の特別な形から得られる手法に関するものである。ラグランジュの『解析力学』には、定式化や微分方程式の変換の問題に関するあらゆることを見出せるが、それらの積分に関してはほとんど議論されていない。...

結果として Jacobi の研究が挙げた重要な成果を鑑みれば、彼の問題意識は大変興味深いものと思われる。その後の展開を見れば、可積分な力学系の性質が深く理解されるとともに、逆にその他大多数の積分不能な系について正確に認識できるようになった点も見逃せない（実際には、ほとんどの古典力学系は、数値計算すら原理的に不可能で、人間の論理のはるかに及ばない領域に存在するのであった²）。

¹Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851). 若いころから Poisson の研究などに興味を持っていたようであるが、Hamilton の力学の研究 (1835 年) に触発されて本格的に力学の研究に参入し、1843 年に過労で倒れるまで精力的に研究を行った。生前に研究を完成させることはできなかったが、他界後に出版された原稿は膨大なものであった。これらの力学の研究は文字通り Jacobi 先生が命を削って行ったものだと思う思わず襟を正したくなる。Poisson 可換な保存量の存在と系の可積分性に関する有名な Liouville の定理も、元々は Jacobi によって得られた定理を自身の講義 (1842–43 年) において紹介したものがかなり広い範囲に流布したものだった様である。Jacobi の研究は力学の発展に重大な影響をもたらしたのみならず、Sophus Lie による連続群の研究に直接の影響を及ぼす（いまでも Lie 代数の定義式に名前が残っている）など意義深いものであった。

²蛇足ながらももう少し説明を加えておくと、複雑な古典力学系では大抵の場合初期値の誤差が指数関数的に増大して伝播する。従って有限精度の数値計算では長時間の時間発展は計算不能であるし、無限精度の数値計算を行うことは原理的に不可能である。もちろん厳密解など得られるはずもないのであるから、結局大抵の古典力学系は人間の論理の力では決して理解することができない。平たく言えば、例えば地球大気が平均して地球を数周回程度の未来について天気予報のような形で予言することは原理的に不可能である。これらは

量子力学における積分可能な系 量子力学は、古典力学と異なり、出来てからまだ百年にも満たない若い分野であるから、まだいろいろと未開拓の領域も残っているかもしれない。そこで本稿では量子力学における積分可能な系を考えたい。まず量子力学において解くべき方程式など、量子力学の基礎事項で必要となる部分から始めたい（量子力学の入門書としては、例えば [M] は洞察に富んでいて興味深い）。量子力学における基礎方程式は Schrödinger 方程式とよばれ、次のような固有値方程式の形をしている。

$$H\psi = E\psi \quad (1)$$

各項の意味づけは以下の通り。

- H : 演算子 (Hamiltonian と呼ばれ物理系を表す)
- ψ : 固有ベクトル (波動関数、系の運動の状態— $|\psi|^2$ が粒子の確率分布となる)
- E : 固有値 (観測される系のエネルギー)

物理量を通常のスカラーではなく作用素と考える点が古典力学と大きく異なる点である。その固有値が実際に実験的に観測される物理量となる。Hamiltonian は古典力学における全エネルギーに対応する演算子で、通常微分演算子となるが、本稿では有限サイズの行列となる場合を主に扱う。

古典力学における複雑さから容易に想像されるように、Schrödinger 方程式は解くことが非常に難しい。特に相互作用する多数の粒子が存在するような場合は一般には非常に大規模な数値計算に頼らざるを得ない。しかし時として驚くほど深く数学的な解析が可能な量子系が存在する。本稿の主題である Heisenberg 模型はその代表的な例であり、その解析手段である Bethe 仮説法は数学的にみても大変興味深い内容である。

一つの例 考え方の方向性を見るために、量子可積分系について本稿で関心を寄せる側面と通じるものが現れる他の典型的な例について触れておくのも興味深いかもしれない。周の長さが L の円周上に N 個の量子力学的な粒子を配置し、それぞれが距離の 2 乗分の 1 の相互作用ポテンシャルを持つ時 (相互作用そのものは距離の 3 乗分の 1 に比例する) Calogero–Sutherland 模型と呼ばれる。参考までに、ハミルトニアンは

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} p_i^2 + \beta(\beta - 1) \sum_{i < j} \frac{(\frac{\pi}{L})^2}{\sin^2 \frac{\pi}{L} (q_i - q_j)},$$

ここで q_i ($0 \leq q_i \leq L$) は各粒子の円周上の座標であり、 $p_i = -\sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial q_i}$ は運動量に対応する微分演算子である (β は複素パラメータ)。

この模型は驚くほどすっきりと解く事 (全ての波動関数 ψ を求める事) ができる [Su71, Su72]。類似の積分可能な系と比べても際立って性質の良い模型である。その様な場合背後に深い数学的構造が潜んでいると考えるのが自然である。実際無限次元 Lie 代数の著名な例である Virasoro 代数 (例えば [KR] 参照) の表現の特異ベクトルが Calogero–Sutherland 模型の波動関数 (Jack 多項式と呼ばれる) の特殊な場合と一致することが知られていた [MY]。実はこの関係はより一般的なものであり、Jack 多項式を Virasoro 代数の表現の基底として

Poincaré 以来の研究によりすでに確立された事実である。しばしば、特に量子力学との比較の文脈で、「古典力学は決定論的な系である」などと耳にするが、このような事実を踏まえればその様な言明は誤りである。

選ぶと、Virasoro 代数の作用が深い数学的背景があることを窺わせる形（組み合わせ論的意味がつく正整数係数一次式に因数分解される有理関数の和）で具体的に表示されるという極めて非自明な予想がある [SSAFR]。この予想は特殊な場合には解決しているが [CJ]、一般的な解決は容易ではなさそうである。ともあれ、以上の結果は Virasoro 代数の表す無限次元対称性の核心部に Jack 多項式が深くかかわっていることを示しており、未知の深い構造の存在を示している。

本稿の内容 §2 では本稿で主に対象とする Heisenberg 模型を定義する。§3 では、Faddeev 等の定式化に沿って Bethe 仮説法の天下りの紹介をする。§4 では、理論全体のかなめとなる Bethe 仮説方程式 (9 ページ (5) 式) の解について必要な事項を解説する。Bethe ベクトルとは Bethe 仮説方程式の解によって記述される最高ウェイトベクトルであり、Heisenberg 模型の波動関数となっている。§5 では、Bethe ベクトルを求める際に障害となる特異解について最近の進展を紹介する。§6 では、Bethe 仮説方程式の解の構造を理解する上で長年障害となっていたストリングの概念の問題に対して、新しい量子数を定義して解決する提案について紹介する。§7 は量子群に関係する場合の文献の紹介である。

最後の §8 では、以上のような理論から生み出された数学の例として、結晶基底に関わる一連の研究についてかなり詳細に紹介する。上記ストリングの概念に触発されて発展した理論であり、関連する対称性は著名な無限次元代数の一つアフィン量子群である。本節の内容は単独で見ても代数的組み合わせ論における重要な進展となっており興味深い。なお §8 の内容は本稿の他の部分とは独立して読むことができる。本節の概要については §8.1 および §8.2 を参照されたい。

話題 本稿執筆中に 2016 年度ノーベル物理学賞の発表があった。受賞した Haldane, Kosterlitz, Thouless のお三方とも本稿の内容と関連のある分野での研究に対する受賞であった。特に Haldane 氏は本稿の主題である一次元 Heisenberg 模型を基盤とする研究 (1983 年) に対しての受賞であった (氏は上記 Calogero 系に関する研究でも有名である)。なお、他のお二方の研究は二次元の古典的 Heisenberg 模型に関するものである。

2 Heisenberg 模型

本稿では主に Heisenberg³ 模型と呼ばれる磁性体のモデルを扱う。これは Schrödinger⁴ 方程式 (1) で Hamiltonian H が行列となる場合である。具体的には、電子が N 個一次元格子状に並んだ系を考える。本稿の内容を理解するにあたって物理的な詳細を理解する必要はないが、記号の導入もかねて簡単に背景にも触れておく。日常的に目にする磁石の起源である電子は、それぞれが小さな磁石としての性質を持っている。ただし量子的な効果により上向きまたは下向きの二つの状態しか持たないという一風変わった性質を持ち、一般にはそれら二状態の重ね合わせとなる。数学的に表示するために、上向きと下向きの状態をそれぞれ

$$v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

³Werner Heisenberg (1901–1976). 量子力学の建設に大きな功績を残した。1932 年ノーベル物理学賞受賞。

⁴Erwin Schrödinger (1887–1961). 1926 年に量子力学を完成させたが、一連の論文は半年程度の間集中して全て単著で著されており、その後の量子力学の教科書の入門的事項がほぼ達成されているという驚異的ペースだった。それらの論文では解析力学の深い造詣も披露されている。1933 年ノーベル物理学賞受賞。

とベクトル表示し、電子のスピン状態を二次元の状態空間 $V \simeq \mathbb{C}^2$ の元とみなす。今電子が N 個一次元状に並んでいるのであるから、考える波動関数 ψ は空間

$$\mathfrak{H}_N = \bigotimes_{j=1}^N V_j, \quad V_j \simeq \mathbb{C}^2.$$

の元であると考えよう。

さて、以前 Schrödinger 方程式を導入した時に、量子力学の基本的枠組みとして、物理量を作用素として考えることを紹介した。現在の場合重要となる物理量は角運動量であり、空間の x, y, z 軸方向に応じて以下の Pauli 行列で与えられる (sl_2 の生成子である)

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

上で定義された v_+ と v_- は角運動量の z 軸成分 σ^3 のそれぞれ固有値 1 および -1 の固有ベクトル (物理的状態) となっている。

ウォームアップ Heisenberg 模型を定義するために、基本となる長さ $N = 2$ の場合を考えてみよう。記号として空間 \mathfrak{H}_N の k 番目だけに非自明に作用する作用素を

$$\sigma_k^a = I \otimes \cdots \otimes \underbrace{\sigma^a}_k \otimes \cdots \otimes I$$

などと表すことにする。さて \mathfrak{H}_2 上の次の作用素 h を考えてみよう。

$$h := \sum_{a=1}^3 \sigma_1^a \sigma_2^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

この行列を対角化すると以下の結果を得る。

| 固有値 | 固有ベクトル |
|-----|---------------|
| 1 | (1, 0, 0, 0) |
| 1 | (0, 1, 1, 0) |
| 1 | (0, 0, 0, 1) |
| -3 | (0, 1, -1, 0) |

固有ベクトルをベクトル v_+ と v_- を用いて具体的に表示してみると (記号については必要ならば §3 参照) 作用素 h は $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 内の sl_2 の 3 次元表現

$$\{v_+ \otimes v_+, v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+, v_- \otimes v_-\}$$

の上で固有値 1、1 次元表現

$$\{v_+ \otimes v_- - v_- \otimes v_+\}$$

の上で固有値 -3 を持つことが分かった。

さて、量子力学の基本的思想に立ち帰り、作用素 h を隣接する二つの電子間に作用する相互作用を表す作用素であると考えよう。その場合観測される物理量 (h の固有値—電子間の相互作用エネルギー) は同じ対称性 (表現) に属する電子の組み合わせの間で同じ値を持つことになるので、相互作用として自然であろうと考えられる。

Heisenberg 模型の定義 ここで物理的な仮定（単純化）として、隣り合う二つの電子間には \hbar と同じ相互作用が生じ、それより遠方の電子とは何らの相互作用も持たないでしょう。具体的には次のハミルトニアンを考察する。

$$\mathcal{H}_N = \frac{J}{4} \sum_{k=1}^N (\sigma_k^1 \sigma_{k+1}^1 + \sigma_k^2 \sigma_{k+1}^2 + \sigma_k^3 \sigma_{k+1}^3 - \mathbb{I}_N) \quad (2)$$

ただし \mathbb{I}_N は 2^N 次元単位行列で J はパラメータである（これらの部分は、さしあたってはおまけのような部分である）。この系を Heisenberg 模型 ([H], 1928 年) とよぶ。ただし上記のような \mathcal{H}_N の定式化は Dirac⁵ による ([D], 1929 年)。

どのような条件の物質に対して上述の仮定が正しいか、は物理として難しい問題であるが、実際に Heisenberg 模型で記述されると考えられている物質が存在する。物理学における文献については [SRFB] を参照。

3 Bethe 仮説法

相互作用する多数の量子力学的な粒子が存在するような系に対し Schrödinger 方程式 (1) を厳密に解くことは一般には不可能である。しかしながら一次元系に限れば、物理的に大変興味深い系も含め、ある程度系統的に解を求める方法が存在する。このような方法は Heisenberg 模型 (2) に対して Bethe⁶ によって 1931 年に導入された方法 [B] に基づく。この方法に対してつけられた Bethe 仮説法という名称は、原論文 [B] において波動関数が導入される際に “Wir machen den Ansatz” と述べられている事に基づき C. N. Yang⁷ ら [YY] によって命名されたのが始まりのようである。

なお、Mermin–Wagner 理論 [MM] によれば一次元系では量子揺らぎが強すぎて相転移が起こらないとされている。よって二次元以上の系が解けるほうが興味深いのではあるが、現状では散在的な結果 [K06] は知られているものの一般性のある方法は絶望的なようである。

Bethe 仮説法はその後多くの拡張等が行われ、膨大な数の論文が出版されているが、本稿では Bethe の原論文と全く同じ設定の下で解説する。具体的には Hamiltonian (2) を周期境界条件 $\sigma_{N+1}^a = \sigma_1^a$ の下で考察することとする。

重要な性質として、Hamiltonian \mathcal{H}_N は状態空間 \mathfrak{H}_N 上の sl_2 作用と可換になる。従って解の構成では sl_2 作用に対する最高ウェイトベクトルのみを具体的に構成できれば、後は sl_2 の下降演算子を用いて残りの波動関数が求まることになる。結果として最高ウェイトベクトルの具体的構成という数学的にも興味深い問題を考察することになる。

⁵Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984). 量子力学の開拓者の一人で、電子の相対論的な波動方程式の導出などの業績で 1933 年ノーベル物理学賞受賞。解析力学に関する造詣が深く、有名な量子力学における経路積分法の導入 (1933 年) も正準変換の深い考察に基づく。

⁶Hans Albrecht Bethe (1906–2005). 特に量子力学の各方面への応用について多くの業績を挙げた。本稿で扱う Bethe 仮説法も同様であり、彼の最も有名な業績の一つ。1967 年ノーベル物理学賞受賞。

⁷Chen-Ning Yang (b. 1922). 素粒子標準理論の屋台骨を成す非可換ゲージ理論—Yang–Mills 理論の導入 (1954 年) や、量子可積分系で重要な Yang–Baxter 方程式などで有名。パリティの非保存（自然界では右と左は等価ではない）の発見により 1957 年ノーベル物理学賞受賞。彼の業績を調べてみると、Yang 先生は数理物理学者であると言って良いのではないかとと思われるほどである（因みに最初の論文は Bull. Amer. Math. Soc. から出版）。実際 Faddeev 氏のエッセイ [F00] によれば、Yang–Mills 理論の発見において数学的直観が重要であったとご自身がよく述べておられたそうである。20 世紀最大級の物理学者の一人といって良いであろう。

代数的 Bethe 仮説法 以下では Faddeev⁸らによる定式化に基づいて天下りの紹介する。詳細は [F96, TS, LR]などを参照して頂きたい。

代数的 Bethe 仮説法では、元々の状態空間 \mathfrak{h}_N の代わりに空間 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{h}_N$ を考える。ここで左側につけた \mathbb{C}^2 は補助空間と呼ばれ、特に強調したいときには 0 番目の成分と考え \mathbb{C}_0^2 と書く。以下の議論では $\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{h}_N$ 上の作用素を \mathbb{C}_0^2 に関する 2 行 2 列の行列の形で表すと便利な事が多い。その場合各成分は \mathfrak{h}_N 上の作用素 (つまり 2^N 次元行列) となる。

簡単な例で準備体操しておこう。二つの行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

を考える。するといわゆる Kronecker 積 $A \otimes B$ は $\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{h}_1 = (\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$ に作用する作用素となる。具体的には

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

で与えられる。この式の真ん中のような表式を「 \mathbb{C}_0^2 に関する 2 行 2 列の行列」と呼んでいる。この Kronecker 積の定義では $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$ の基底を

$$\{v_+ \otimes v_+, v_+ \otimes v_-, v_- \otimes v_+, v_- \otimes v_-\}.$$

と選んでいる事になる。重要な性質として $(C \otimes D)(A \otimes B) = CA \otimes DB$ が成り立っている。実際、

$$\begin{aligned} (C \otimes D)(A \otimes B) &= \begin{pmatrix} c_{11}D & c_{12}D \\ c_{21}D & c_{22}D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c_{11}a_{11} + c_{12}a_{21})DB & (c_{11}a_{12} + c_{12}a_{22})DB \\ (c_{21}a_{11} + c_{22}a_{21})DB & (c_{21}a_{12} + c_{22}a_{22})DB \end{pmatrix} = CA \otimes DB. \end{aligned}$$

参考までに $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 3}$ では基底を

$$\begin{aligned} &\{v_+ \otimes v_+ \otimes v_+, v_+ \otimes v_+ \otimes v_-, v_+ \otimes v_- \otimes v_+, v_+ \otimes v_- \otimes v_-, \\ &v_- \otimes v_+ \otimes v_+, v_- \otimes v_+ \otimes v_-, v_- \otimes v_- \otimes v_+, v_- \otimes v_- \otimes v_-\}. \end{aligned}$$

と選ぶ。

さて、本題に戻り、 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{h}_N$ 上に以下の Lax⁹作用素を定義する (右側の等号は直接計算で示される)。

$$L_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{I}_N + \frac{i}{2} \sigma_k^3 & \frac{i}{2} \sigma_k^- \\ \frac{i}{2} \sigma_k^+ & \lambda \mathbb{I}_N - \frac{i}{2} \sigma_k^3 \end{pmatrix} = \lambda I \otimes \mathbb{I}_N + \frac{i}{2} \sum_a^3 \sigma^a \otimes \sigma_k^a. \quad (3)$$

⁸Ludvig Faddeev (b. 1934). 非可換ゲージ理論における Feynman 則の導出や可積分系の研究などで著名な数理物理学者。

⁹Peter David Lax (b. 1926). 言わずと知れた解析学の大家だが、可積分系に関する業績を数多く残している。2005 年アーベル賞受賞。

ここで、

$$\sigma_k^+ = \sigma_k^1 + i\sigma_k^2 = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_k, \quad \sigma_k^- = \sigma_k^1 - i\sigma_k^2 = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_k$$

であり、 λ はある複素パラメータ（スペクトルパラメータと呼ばれる）である。 $L_k(\lambda)$ は $\mathbb{C}_0^2 \otimes \mathfrak{H}_N$ の 0 番目と k 番目の \mathbb{C}^2 にのみ非自明に作用する。

代数的 Bethe 仮説法では、Lax 行列から以下のようにして定義される転送行列が重要である。

$$T_N(\lambda) = L_N(\lambda)L_{N-1}(\lambda)\cdots L_1(\lambda). \quad (4)$$

転送行列を \mathbb{C}_0^2 に関する 2 行 2 列の行列で表示したときの各成分には通常以下の名前が付けられる。

$$T_N(\lambda) = \begin{pmatrix} A_N(\lambda) & B_N(\lambda) \\ C_N(\lambda) & D_N(\lambda) \end{pmatrix}.$$

以上の定式化と、もともと考えていた Heisenberg 模型との関係は以下の重要な定理によって理解される。

定理

$\tau_N(\lambda) = \text{tr}_{\mathbb{C}_0^2} T_N(\lambda) = A_N(\lambda) + D_N(\lambda)$ とするとき

$$\mathcal{H}_N = \frac{iJ}{2} \frac{d}{d\lambda} \log \tau_N(\lambda) \Big|_{\lambda=\frac{i}{2}} - \frac{NJ}{2} \mathbb{I}_N.$$

この定理の証明の鍵は $L_k(\frac{i}{2}) = iP_{0,k}$ 、ここで $P_{0,k}$ は $\mathbb{C}_0^2 \otimes \mathfrak{H}_N$ 上 0 番目と k 番目を置換する作用素、となることに基づく。

以上まとめると、Hamiltonian \mathcal{H}_N の対角化（Schrödinger 方程式の解を求める事）は $\tau_N(\lambda)$ の対角化の問題に帰着される。この様な定式化をすると、 $\tau_N(\lambda)$ をパラメータ λ により展開することにより、Hamiltonian を含む可換な作用素の族を構成することができて、Heisenberg 模型の量子可積分性が証明できるというご利益がある。

Bethe ベクトル 以上の準備の下で固有ベクトルの構成をする。次の特別なベクトルから出発する。

$$|0\rangle_N = v_+ \otimes \cdots \otimes v_+ \in \mathfrak{H}_N.$$

その時 Bethe ベクトルは

$$\Psi_N(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) := B_N(\lambda_1) \cdots B_N(\lambda_\ell) |0\rangle_N \in \mathfrak{H}_N$$

で定義される。ここで $B_N(\lambda)$ どうしの可換性（下記定理に続く脚注を参照）

$$[B_N(\lambda), B_N(\mu)] = 0$$

が示されるため、Bethe ベクトルを定義する際のパラメータ $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ の順序は重要ではない。この時基本的な性質は以下の通り。

定理

Bethe ベクトル $\Psi_N(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ はパラメータが Bethe 仮説方程式

$$\left(\frac{\lambda_k + \frac{i}{2}}{\lambda_k - \frac{i}{2}} \right)^N = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\ell} \frac{\lambda_k - \lambda_j + i}{\lambda_k - \lambda_j - i}, \quad (k = 1, \dots, \ell) \quad (5)$$

を満たす時 $T_N(\lambda)$ の固有ベクトルとなる。

定理の証明では Yang-Baxter 関係式から従う関係式¹⁰ を用いて直接作用

$$\begin{aligned} & \{A_N(\lambda) + D_N(\lambda)\} B_N(\lambda_1) \cdots B_N(\lambda_\ell) |0\rangle_N \\ &= \Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \prod_{j=1}^{\ell} B(\lambda_j) |0\rangle_N + \sum_{k=1}^{\ell} \left\{ \Lambda_k(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_\ell) B(\lambda) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\ell} B(\lambda_j) |0\rangle_N \right\} \end{aligned}$$

を計算し¹¹、右辺第二項が消える条件を書き下すと Bethe 仮説方程式が得られる。

重要な性質として、パラメータが Bethe 仮説方程式を満たす時 Bethe ベクトルは \mathfrak{sl}_2 上の sl_2 作用に対する最高ウェイトベクトルとなる (表現の次元は $N - 2\ell + 1$) ことが示される。

以上の構成は既に数十年前までに十分確立された内容であり、数学的にも特に問題となる点はないはずである。

長さ 3 の例 少し具体的な例 ($N = 3$) を見てみることにしよう。直接計算 (例えば次の項目参照) により $B_3(\lambda)$ は以下の形になる。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i(\lambda - \frac{i}{2})^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i(\lambda^2 + \frac{1}{4}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i(\lambda - \frac{i}{2})^2 & i(\lambda^2 + \frac{1}{4}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i(\lambda + \frac{i}{2})^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i(\lambda^2 + \frac{1}{4}) & -i & 0 & i(\lambda^2 + \frac{1}{4}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i(\lambda^2 + \frac{1}{4}) & 0 & i(\lambda + \frac{i}{2})^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i(\lambda - \frac{i}{2})^2 & 0 & i(\lambda^2 + \frac{1}{4}) & i(\lambda + \frac{i}{2})^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

表現論の知識からすると $\mathfrak{sl}_3 = (\mathbb{C}^2)^{\otimes 3}$ は sl_2 の 4 次元表現一つと 2 次元表現二つに分解するはずである。それぞれの表現を Bethe 仮説法により構成してみよう。まず $\ell = 0$ の時は $|0\rangle_3 = v_+ \otimes v_+ \otimes v_+$ が確かに 4 次元表現の最高ウェイトベクトルとなる。

¹⁰ $A_N(\lambda)B_N(\mu) = \frac{\lambda - \mu - i}{\lambda - \mu} B_N(\mu)A_N(\lambda) + \frac{i}{\lambda - \mu} B_N(\lambda)A_N(\mu)$ および $D_N(\lambda)B_N(\mu) = \frac{\lambda - \mu + i}{\lambda - \mu} B_N(\mu)D_N(\lambda) - \frac{i}{\lambda - \mu} B_N(\lambda)D_N(\mu)$ 。この様な A_N, B_N, C_N, D_N 作用素間の交換関係の導出の概略は、 R -行列

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda) & c(\lambda) & 0 \\ 0 & c(\lambda) & b(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda + i} \left(\left(\frac{\lambda}{2} + i \right) I \otimes I + \frac{\lambda}{2} \sum_{a=1}^3 \sigma^a \otimes \sigma^a \right), \quad b(\lambda) = \frac{i}{\lambda + i}, \quad c(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda + i}$$

を用いて $\mathbb{C}_0^2 \otimes \mathbb{C}_0^2$ 上の関係式 $R(\lambda - \mu) (L_k(\lambda) \otimes L_k(\mu)) = (L_k(\mu) \otimes L_k(\lambda)) R(\lambda - \mu)$ を直接示し、その積を取って $R(\lambda - \mu) (T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu)) = (T_N(\mu) \otimes T_N(\lambda)) R(\lambda - \mu)$ を示すことによる。

¹¹最後に関係式 $A_N(\lambda)|0\rangle_N = (\lambda + \frac{i}{2})^N |0\rangle_N$ および $D_N(\lambda)|0\rangle_N = (\lambda - \frac{i}{2})^N |0\rangle_N$ を用いる。これらは転送行列の定義から直接示される。

次に $\ell = 1$ の時、Bethe 仮説方程式は、右辺が自明となって、

$$\left(\frac{\lambda_1 + \frac{i}{2}}{\lambda_1 - \frac{i}{2}}\right)^3 = 1,$$

であり、解は $\lambda_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{12}}$ である。そのとき、先ほどの $B_3(\lambda)$ を用いると、

$$B_3\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)|0\rangle_3 = \left(0, -\frac{i - \sqrt{3}}{6}, \frac{i}{3}, 0, -\frac{i + \sqrt{3}}{6}, 0, 0, 0\right)^t$$

$$B_3\left(-\frac{1}{\sqrt{12}}\right)|0\rangle_3 = \left(0, -\frac{i + \sqrt{3}}{6}, \frac{i}{3}, 0, -\frac{i - \sqrt{3}}{6}, 0, 0, 0\right)^t$$

が得られる。これらは互いに異なる二つの2次元表現の最高ウェイトベクトルとなっている。

表現論からの結果を見れば、以上で全ての最高ウェイトベクトルを尽くしているはずである。しかし、興味深いので、更に計算を進めることにする。 $\ell = 2$ の場合、Bethe 仮説方程式は

$$\left(\frac{\lambda_1 + \frac{i}{2}}{\lambda_1 - \frac{i}{2}}\right)^3 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + i}{\lambda_1 - \lambda_2 - i}, \quad \left(\frac{\lambda_2 + \frac{i}{2}}{\lambda_2 - \frac{i}{2}}\right)^3 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 + i}{\lambda_2 - \lambda_1 - i}$$

となる（ようやく右辺が非自明になる）。この解は

$$\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{0, 0\}, \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}, \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}, \left\{\frac{i}{2}, -\frac{i}{2}\right\}, \left\{-\frac{i}{2}, \frac{i}{2}\right\}$$

と求まるが、直接計算すると $B_3(\lambda_1)B_3(\lambda_2) = 0$ となることが確かめられる。更に $\ell = 3$ の場合には、1次元の解が4つと0次元の解が12個求まりそのすべてについて $B_3(\lambda_1)B_3(\lambda_2)B_3(\lambda_3) = 0$ が確かめられる。

Mathematica による実装 Mathematica をご利用にならない方でも、実際の計算がどのような調子であるのかを知ることは有益であると思うので、ここにコードの例を与える。以下本節では“n”はチェインの長さ N を表し、“1”はスペクトルパラメータ λ を表すこととする。なお以下の内容は“Mathematica Summer School on Theoretical Physics—4th edition (2012) Integrability and Super Yang–Mills”における下記の内容

http://msstp.org/sites/default/files/Exercise_byJoao.nb

を参考にして、現在の定義と合うように改変した。

まず Pauli 行列

```
s=PauliMatrix
```

を定義する。この定義より Pauli 行列は $s[a] = \sigma^a$ （左辺の様に Mathematica に入力する）として得られる。次に 2^n 次元の単位行列

```
id[n_]:=IdentityMatrix[2^n, SparseArray]
```

と定義する。一旦“SparseArray”と宣言しておくこと、以下の計算結果は全て疎な配列として扱われ、大幅に高速化する。そのとき Hamiltonian (2) は

```
H[n_, J_] := (J/4) (Sum[KroneckerProduct[s[a], id[n-2], s[a]], {a, 3}]
  + Sum[KroneckerProduct[id[k-1], s[a], s[a], id[n-k-1]], {k, n-1}, {a, 3}]
  - n*id[n])
```

となる。ただし和は $k = N$ と $k = 1, 2, \dots, N - 1$ の二つの部分に分けてある。式 (3) 右端の表示式による Lax 作用素 $L_k(\lambda)$ は

```
L[n_, k_, l_] := l*id[n+1] +
  (I/2) Sum[KroneckerProduct[s[a], id[k-1], s[a], id[n-k]], {a, 3}]
```

また式 (4) の転送行列は、積を取ることで

```
tm[n_, l_] := Dot@@Table[L[n, k, l], {k, n, 1, -1}]
```

作用素 $B_N(\lambda)$ は、転送行列の部分集合を取ることで

```
b[n_, l_] := tm[n, l] [[1;; 2^n, 2^(n+1);; 2^(n+1)]]
```

最後にベクトル $|0\rangle_N$ は

```
hw[n_] := UnitVector[2^n, 1]
```

例えばベクトル $B_4(l_1)B_4(l_2)|0\rangle_4$ は

```
Factor[b[4, l1] . b[4, l2] . hw[4]]
  %//MatrixForm
```

として得られる。

4 Bethe 仮説方程式を解く

ここまでの議論より Bethe 仮説方程式の解が求まれば固有ベクトルが求まることが分かった。しかし Bethe 仮説方程式は複雑な方程式であるし、むしろ量子多体系の解の構成という難しい問題の重要な一部分を一組の代数方程式の形に昇華したかのような印象を持つ。従って Bethe 仮説方程式そのものの理解を深めることは本質的に重要な課題であると考えている。

もちろん Bethe 仮説方程式そのものの研究も行われてきた。例えば Langlands¹²–Saint-Aubin [LS94, LS97] の研究は最近 ASEP と呼ばれる系の研究に応用された [BDS]。しかしながら Bethe 仮説方程式にはなお研究すべき余地が多く存在すると考えられる。本稿では Bethe 仮説方程式の研究で古くから用いられている艦装配位 (rigged configuration) と呼ばれる対象を軸として解説する。

艦装配位はもともと Bethe の原論文 (1931 年) において Bethe 仮説方程式の解の性質を研究する目的で導入された組み合わせ論的对象である。その後 1986 年に Kerov, Kirillov, Reshetikhin ら [KKR, KR] によって大幅に拡張され、また艦装配位の組み合わせ論的研究が開始された。詳細は §8 で述べるが、後者の研究では Bethe 仮説方程式と Bethe ベクトルの対応の組み合わせ論的類似を構成することに主眼があり、それ自身極めて深い数学的内容を持つことが明らかになっている。

¹²Robert Pbelan Langlands (b. 1936). 整数論における業績とは別に数理論理学でも多くの業績を挙げている。ここでふれた Bethe 仮説に関する研究のほか Virasoro 代数や共形場の理論の研究なども有名である。

臙装配位の定義 ここでは現在の設定を若干拡張して sl_2 の同じ次元 (2次元とは限らない) の表現がテンソル積で並んでいる状況で定義を解説する。必要なデータとして二つの分割 μ と ν を準備する。以下では整数の分割と Young 図は自由に同一視して考えることとする。一つ目のデータ μ は状態空間の形状を表す。例えば本稿で主に扱っている状態空間 $\mathfrak{h}_N = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ では $\mu = (1^N)$ とする。一方状態空間 $(\mathbb{C}^3)^{\otimes N}$ に対する一般化された Heisenberg 模型の場合であれば $\mu = (2^N)$ とする、といった具合である。

更に進むためにいくつか重要な用語を定義する。分割 λ に対し $Q_k(\lambda)$ を Young 図形 λ の左側 k 列分のます目の数とする。その時 vacancy number を

$$P_k(\mu, \nu) = Q_k(\mu) - 2Q_k(\nu)$$

で定義する (係数の 1, -2 という数列は実は A 型の Cartan データの一部である)。その時臙装配位 $(\mu, (\nu, J))$ は次のように定義される (以下しばしば μ を略記して (ν, J) と表す)。 (ν, J) を具体的に書くと、Young 図 ν の各行 ν_i に対して整数 J_i を対応させた

$$(\nu, J) = \{(\nu_1, J_1), (\nu_2, J_2), \dots, (\nu_l, J_l)\}$$

なる集合であり、ここに以下の二つの条件を課す (整数 J_i を rigging と呼ぶ)。

- 分割 ν の各行は $0 \leq P_{\nu_i}(\mu, \nu)$ を満たす。
- 整数 J_i は $0 \leq J_i \leq P_{\nu_i}(\mu, \nu)$ を満たす。

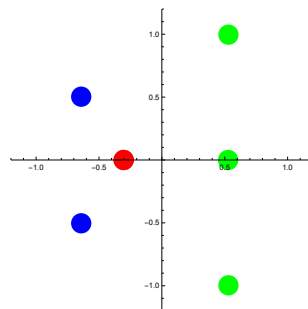
この時 (ν, J) を (最高ウェイトベクトルの場合の) 臙装配位と呼ぶ。以下に述べる理由により組 (ν_i, J_i) の事をしばしばストリングと呼ぶ。なお、臙装配位では同じ長さの複数の行に対する riggings の順番は重要ではない。

様子を見るために簡単な例を考えてみよう。 sl_2 の 3次元表現が二つ並んでいる $(\mathbb{C}^3)^{\otimes 2}$ の場合、 $\mu = (2, 2)$ となる。その時以下の三つの臙装配位が存在する。

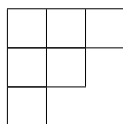
$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad \emptyset, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad 0 \square 0, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad 0 \square \square 0$$

上図では左側に μ を、右側に ν を配置し、 ν の各行の左側には対応する vacancy number を、右側には rigging を書いた。右側二つの臙装配位の場合 vacancy numbers が 0 なので riggings としては 0 のみが許される。例えば右端の臙装配位の場合 $\nu_1 = 2$ なので、対応する vacancy number は $P_2((2, 2), (2)) = 4 - 2 \cdot 2 = 0$ となる。一方 $\nu = (1, 1)$ とすると、対応する vacancy number は $P_1((2, 2), (1, 1)) = 2 - 2 \cdot 2 < 0$ となって臙装配位の条件を満たさない。

Bethe 仮説法との関係 では、この様にして定義される臙装配位と Bethe 仮説法との関係は何であろうか。それは、もともとは Bethe 自身が発見したように、Bethe 仮説方程式の解には非常に特徴的なパターンがみられるという観察である。雰囲気をつかむために、Bethe 仮説方程式の解の典型的な例を複素平面上で図示したものを示そう ($N = 12, \ell = 6$ の例)。



この例で観察されるように、根はいくつかのグループ(ストリングと呼ぶ)に分けられ、それぞれのストリングに属する根は、実部が「大体」同じであり、根どうしの間隔は「大体」 $\sqrt{-1}$ である、というものである。そのような観察に基づき、ストリングの長さが n (n -ストリングと呼ぼう)であれば Young 図の長さ n の行を対応させたい。例えば上で掲げた例であれば 3-ストリング(緑) 2-ストリング(青) 1-ストリング(赤)の三種類がそれぞれ一つずつあるので、以下の Young 図と対応させたい。



もちろんここでの記述から明らかなように、以上の観察はかなり大雑把なものである。その点をどのように科学的にするのかは §6 で改めて議論したい。しかしながら、結果的には Bethe 仮説方程式の“物理的な解”は rigged configurations と一対一に対応するであろうと考えている。その際 rigging は各ストリングの実部の位置を表すこととなる。

$N = 12$ の場合の実例 艦装配位と Bethe 仮説方程式の根の対応について具体的な状況を見るために長さ $N = 12$ で $\ell = 5$ の場合の例を考えてみよう。これらは次節で述べる「物理的特異解」となっている(実は以下の 5 つの解で $N = 12$ 、 $\ell = 5$ の場合の物理的特異解を全て尽くしている—詳細は [Sa15, Appendix B] 参照)。この場合の Bethe 仮説方程式

$$\left(\frac{\lambda_k + \frac{i}{2}}{\lambda_k - \frac{i}{2}} \right)^{12} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^5 \frac{\lambda_k - \lambda_j + i}{\lambda_k - \lambda_j - i}, \quad (k = 1, \dots, 5)$$

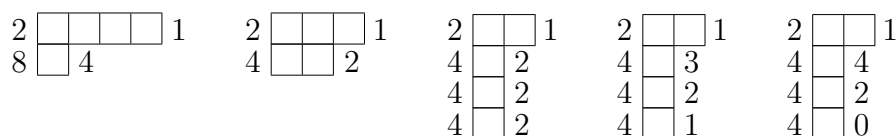
において $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i/2, \lambda_3 = -i/2$ となる解を求めると、重根となる場合を除いて λ_4 および λ_5 は以下の 5 次方程式

$$5120\xi^5 + 11520\xi^4 - 4992\xi^3 - 9312\xi^2 + 2020\xi - 55 = 0 \quad (6)$$

の五つの実数解から $\lambda_4 = \sqrt{\xi}$ および $\lambda_5 = -\sqrt{\xi}$ として得られる。方程式 (6) は、少なくとも Mathematica では厳密解が求められず、数値解としては

$$\xi_1 = -2.29679, \xi_2 = -0.999662, \xi_3 = 0.0320332, \xi_4 = 0.173735, \xi_5 = 0.840679$$

が得られ、それぞれの平方根は $\pm 1.51551i, \pm 0.999831i, \pm 0.178978, \pm 0.416816, \pm 0.916886$ となる。こうして得られる五つの解を複素平面上に図示すると図 1 のようになる。黄色のドットが λ_4 および λ_5 を表す。対応する艦装配位は順に以下の通り (riggings は §6 で説明する方法で決定した)



こうしてみると方程式 (6) の根が実に絶妙な位置に存在していることが分かる。

なお文献 [KS15] の補助ファイルとして $N = 12$ の Bethe 仮説方程式の根を複素平面上にプロットしたものが多数含まれているのでご利用頂きたい。

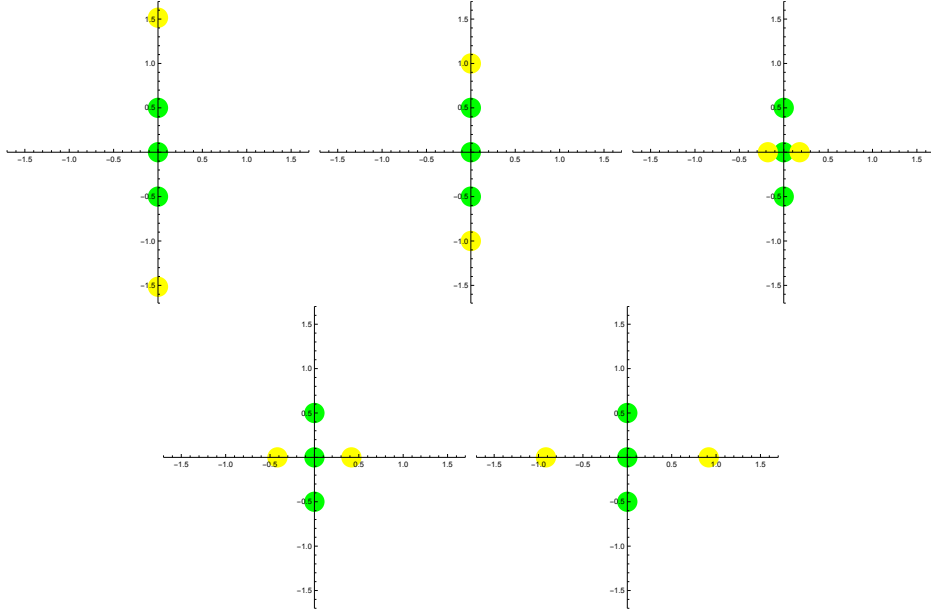


図 1: $N = 12$, $\ell = 5$ の物理的特異解

5 Bethe 仮説方程式の特異解

更に進んで Bethe 仮説方程式の解を解析しようとする、いわゆる特異解の問題を避けて通ることはできない。今までの議論をおさらいすると、我々に関心のある Schrödinger 方程式とは固有値問題のことであり、ここまで構成した固有ベクトルについてエネルギー固有値を計算すると、結局以下のような解を得たことになる（本質的には Bethe [B] による結果）。

$$\mathcal{H}_N \Psi_N(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = \mathcal{E}_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell} \Psi_N(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell),$$

$$\mathcal{E}_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell} := -\frac{J}{2} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{\lambda_j^2 + \frac{1}{4}}.$$

さてこの結果を観察すると、Bethe 仮説方程式の解 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell\}$ の中に $i/2$ または $-i/2$ が含まれると固有値 $\mathcal{E}_{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell}$ が発散することが分かる。そこでこの様な解を特異解とよぶ。

以下では Bethe 仮説方程式の解 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell\}$ が互いに相異なり、かつ $i/2$ および $-i/2$ を含まないとき正則な解と呼ぶことにする。ここで厄介になるのは、正則な解のみを考えるのでは固有ベクトルが不足し（わずかに $N = 4$ の場合からこの問題が発生する）一方 Bethe 仮説方程式の互いに相異なる解を全て持ってきてしまうと固有ベクトルの数を超過してしまうことである。従って特異解のうち物理的な意味づけを持つ適切な部分集合（物理的特異解と呼ぶ）を選択する必要がある。

参考までに、Bethe 仮説方程式の相異なる解の総数と物理的特異解の総数は二項係数を用いて記述されると予想されている [KS14a]。例えば与えられた共に偶数の N および ℓ に対して物理的特異解の総数は

$$\binom{\frac{N-2}{2}}{\frac{\ell-2}{2}}$$

であると予想されている（関連する情報について、[DG14] および [Sa15, Appendix B] も参照）。

先に進む前に、一旦議論を中断して、Bethe 仮説について証明はまだ出来ていないのではないかとと思われるが、おそらく正しいと思われる性質をまとめておくことにしよう。

- 正則な解と以下で述べる物理的特異解から構成される Bethe ベクトルは 1 次独立であると思われる。
- Bethe 仮説方程式の正則な解以外に対する Bethe ベクトルは 0 になると思われる。例えば 1 次元以上の解も存在するが、具体例で計算すると対応する Bethe ベクトルは 0 になる。
- 現在の $\mathfrak{h}_N = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ の場合は Bethe 仮説方程式の互いに相異なる解だけを考えれば十分であると考えられているが、より一般の場合には重根も考察しなければならないことが数値計算の結果により示唆されている [HNS14]。

さて特異解の問題に戻ることにしよう。Bethe 仮説法の思想に基づけば、ある条件を満たす特異解から出発して、何らかの正則化の手続きに基づき Bethe ベクトルを構成できるような方法を構築することが望ましい。この様な方向の研究は、最初 Avdeev と Vladimirov [AV] によって $N = 4$ の場合に提唱された（1986 年）。彼らの提案した方法はその後 Beisert ら [BMSZ] によってより一般的な例に対して拡張され（2003 年）、最終的に Nepomechie と Wang [NW] によって一般的な状況で計算された（2013 年）。ここでは [NW] に従って最終的な結果を紹介することとする（証明については、例えば [Sa15, Appendix A] を参照）。

一般的な特異解を

$$\left\{ \frac{i}{2}, -\frac{i}{2}, \lambda_3, \dots, \lambda_\ell \right\} \quad (7)$$

と表すことにする。この特異解が以下の Nepomechie–Wang の条件

$$\left(-\prod_{j=3}^{\ell} \frac{\lambda_j + \frac{i}{2}}{\lambda_j - \frac{i}{2}} \right)^N = 1, \quad (8)$$

を満たす場合物理的特異解とよばれ、次のような方法で対応する Bethe ベクトルを構成できる。定数 c を

$$c = 2i^{N+1} \prod_{j=3}^{\ell} \frac{\lambda_j + \frac{3i}{2}}{\lambda_j - \frac{i}{2}}. \quad (9)$$

と定める。

条件 (8) を満たす物理的特異解 (7) に対し次の極限は 0 でないベクトルに収束する [NW].

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^N} B_N \left(\frac{i}{2} + \epsilon + c \epsilon^N \right) B_N \left(-\frac{i}{2} + \epsilon \right) B_N(\lambda_3) \cdots B_N(\lambda_\ell) |0\rangle_N.$$

このベクトルは固有値

$$\mathcal{E}_{\frac{i}{2}, -\frac{i}{2}, \lambda_3, \dots, \lambda_\ell} = -J - \frac{J}{2} \sum_{j=3}^{\ell} \frac{1}{\lambda_j^2 + \frac{1}{4}}.$$

に対する固有ベクトルとなる [KS14b].

Hao–Nepomechie–Sommese [HNS13] は Bethe 仮説方程式に対する大規模な数値計算を行い、Bethe 仮説方程式の重根を含まない解の総数および正則な解と物理的特異解の総数を求めた。その結果に基づき彼らは以下の予想を定式化した。

$$\begin{aligned} & (\mathcal{N}_N \text{の最高ウェイトベクトルの総数}) \\ & = (\text{正則な解の個数}) + (\text{物理的特異解の個数}). \end{aligned}$$

この予想は同論文において $N = 14$ の場合まで数値的に確認された。この予想と、前述した対応する Bethe ベクトルが一次独立であるという予想が共に証明されれば、Bethe 仮説法によって全ての固有ベクトルが求められ、Heisenberg 模型に対する Schrödinger 方程式の完全な解が得られたことになる。しかしながら、筆者の知る限り、これら二つの予想は未解決であると思われる。

臙装配位を用いて Bethe 仮説方程式の解を解析すると、物理的特異解についてより立ち入った情報を得ることができる。臙装配位の上にフリップ

$$\kappa : (\nu_i, J_i) \mapsto (\nu_i, P_{\nu_i}(\mu, \nu) - J_i) \quad (10)$$

と呼ばれる involution を定義する (全ての rigging を対応する vacancy number と rigging の差に置き換える)。§6 で見るように、この操作は解の上では、全ての根を (-1) 倍する

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell\} \rightarrow \{-\lambda_1, \dots, -\lambda_\ell\}$$

という操作に対応する。

さて、論文 [KS14a] において、Bethe 仮説方程式の解を臙装配位と対応付けるとき、系の長さ N が偶数の場合の物理的特異解は以下の性質を持つ臙装配位 (ν, J) に対応する解として特徴づけられる事が予想された ([Sa15, Appendix B] も参照)。

- (i) フリップ不変であり、かつ
- (ii) 長さ ν_i が偶数の行の総数が奇数である臙装配位。

すなわち該当する臙装配位を書き下して物理的特異解の大体の形を決定することができる。長さ $N = 12$ かつ $\ell = 5$ の場合の例が §4 に与えられている。この観察は臙装配位を使った Bethe 仮説方程式の解の解析の自然さを表す例であると考えている。

なお、上記特徴づけでは長さ N が奇数の場合には一見物理的特異解が存在しないように見えるが、数は少ないながらも散在的に物理的特異解が見出される場合がある。この点については [KS14a, §4.1] 等を参照されたい。

6 Bethe の量子数

Bethe 仮説方程式の解を臙装配位 (ν, J) を用いて解析すると、同じ形 ν に属するいくつかの解に正しくラベル J を割り当てる必要がある。量子力学では、固有状態に対する「良い」ラベル（厳密な定義があるわけではない）のことを通常量子数と呼ぶ。従って個々の解に対して rigging J という量子数を定義することが問題となる。

Heisenberg 模型に対しては、Takahashi の量子数 ([T], 1971 年) と呼ばれるものがあり、近似的には大変うまく行くことで有名であった。例えば熱力学的量の導出など、物理として意義深い帰結をもたらした。Takahashi の量子数に基づく解析は、文献ではしばしば「ストリング仮説」などとして言及される。

ただし Takahashi の量子数の定義では、前提として各ストリングが厳密に

$$a + bi, a + (b - 1)i, a + (b - 2)i, \dots, a - bi, \quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}/2)$$

という形をとると仮定している。しかしながら、具体例を検討してみれば、長さ 3 以上のストリングであればほとんど常に各根は異なる実部を持っているし、また隣り合う根どうしの間隔も $\sqrt{-1}$ とは異なる値を持つ。従って Takahashi の量子数を具体的な解について計算しようとするれば通常一意的には定まらないし、また数値も整数（または半整数）ではない複雑な数になってしまう。このようないわゆるストリング仮説をめぐる問題は Bethe 仮説の研究において少なからぬ混乱をもたらしたようであり、しばしばストリング仮説の破れに関する議論を耳にしたり、場合によっては Bethe 仮説そのものの数学的正当性を疑うかのような見解を耳にする事すらあった。

筆者としては、このような混乱は、Heisenberg 模型や Bethe 仮説そのものの欠陥によるものではなく、むしろそれらは数学的に正当化されるべきものであると考えたい。そのため、以下では Kirillov 氏と共同で行った研究 [KS15] に基づき、数学的に正当化可能であると考えられる方法で量子数を定義する提案について解説したい。

出発点として Bethe が原論文 [B] で述べている次のような考察から始めよう（詳細は [KS15, §3] を参照）。 $\text{Arctan } z$ を実軸上の $\arctan x$ ($\arctan 0 = 0$) を複素平面上 $(i, +i\infty)$ と $(-i, -i\infty)$ に branch cuts を入れて一価に拡張した関数とする。そのとき関係式

$$\log \frac{z - i}{z + i} = 2i \text{Arctan}(z) + (2n + 1)\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (11)$$

が、両辺を微分することにより示される。ここで左辺の \log は多価性を持ったフルバージョンの対数関数である。この式を用いて Bethe 仮説方程式（の右辺を左辺に移したもの）の対数

$$\log \left[\left(\frac{\lambda_k + \frac{i}{2}}{\lambda_k - \frac{i}{2}} \right)^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\ell} \frac{\lambda_k - \lambda_j - i}{\lambda_k - \lambda_j + i} \right], \quad (k = 1, \dots, \ell)$$

を計算してみよう。この式は Bethe 仮説方程式により $\log 1$ に等しいはずであるが、ここから複素平面上の位相因子に由来する整数が得られる。具体的に計算を実行してみれば、次のような整数（半整数）

$$J_k = \frac{N}{2\pi} \left(2 \text{Arctan}(2\lambda_k) - \frac{2}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\ell} \text{Arctan}(\lambda_k - \lambda_j) \right) \quad (12)$$

を導出することができる。この数を Bethe の量子数と呼ぶことにする。不思議なことに Bethe の量子数は Bethe の原論文に登場しているにもかかわらず、その後 80 年以上にわたり十分な注目を浴びてこなかったようである。

以下で例を見るように Bethe の量子数はそのままでは扱いづらい。そこで、新しい量子数として、 S を一つのストリングとするとときそれに属する各根に対する Bethe の量子数の和

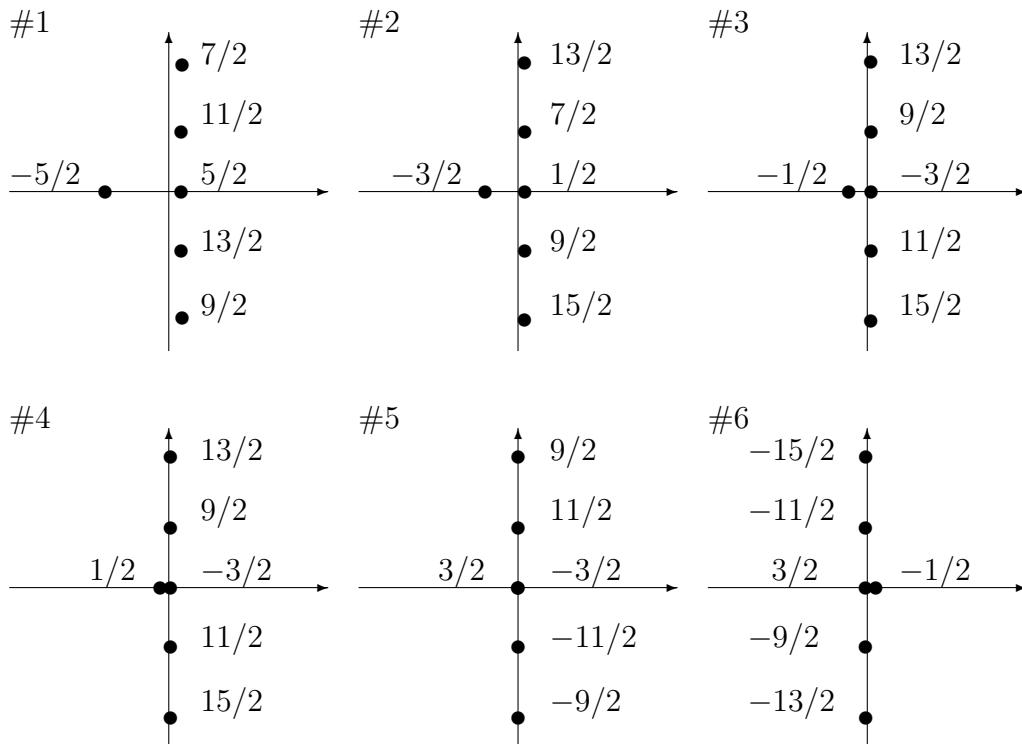
$$J(S) = \sum_{\eta \in S} J_{\eta} \quad (13)$$

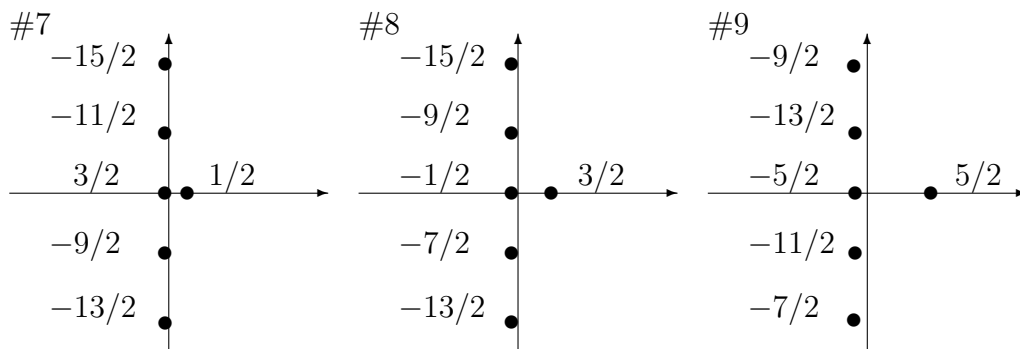
を考察することが重要となる。この様に定義すると本来は“ストリング”という概念そのものに由来するあいまいさが存在する。例えば隣り合うストリング同士が混ざってしまって分離できない場合などがあり、その様なあいまいさの処理方法はよく分かっていなかった。しかしこの定義 (13) を $N = 12$ の全ての解について詳しく検討すると、様々なタイプの不定性に対して、そのあいまいさの処理の仕方によらず一意的な結論が得られる。これは状態空間の次元が $2^{12} = 4096$ であるからかなり非自明な例である。

重要な観察として、 $J(S)$ は極めて安定なふるまいをする。例として、 $N = 12$ 、 $\ell = 6$ で 5-string がひとつ、1-string がひとつ含まれるような場合を考える。対応する rigged configurations は、 $r = 0, 1, \dots, 8$ に対して、次の 9 つ

$$\begin{array}{c} 0 \\ 8 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ r \end{array}$$

が存在する。以下それらの解を複素平面上にプロットしたものを掲げるが、経験則として解は最も大きなストリング S の実部 $\Re(S)$ によって並べると構造が分かりやすい。ここで $\Re(S)$ とは S の両端の根の実部によって定義する (Vladimirov の結果 [V] より両者は一致する)。





この例で分かるように個々の Bethe の量子数は複雑な挙動を示す一方、(13) で定義される新しい量子数は 5-string S にたいして $\Re(S) > 0$ なら $J(S) = 45/2$ 、 $\Re(S) < 0$ なら $J(S) = -45/2$ と非常に安定なふるまいをすることが分かる。

論文 [KS15] では、数値計算の結果 [GD, HNS13] に基づき、長さ $N = 12$ の場合には量子数 $J(S)$ によって全ての解が分類でき、対応する rigging を特定できることが確認されている。この際 $J(S)$ の具体的値まで特定できれば良いのだが、意外と複雑な挙動を示すため現状のデータでは推定できていない。しかし与えられた ν をもつ解全体を考え（もともと解全体が完全かどうか、などといった問題を考察しているので、解の全体が手元にあることを仮定するのは不都合ではないだろう）、その中で最大の $J(S)$ をもつ状態を探せば、後は帰納的に決定していくことができる。この際非自明な性質として、 k -string と l -string との相対的な右左の位置関係が入れ替わるときに因子 $\Delta(k, l) = k + l - 3$ を $J(S)$ に加えるまたは減ずる必要がある様である。

今後の課題としては、まず Bethe の量子数とは何なのかを理解すること、特に可能であればより内在的な定義を見つけられれば理解が進むのではないかと期待している。もちろん以上の観察自体も、非常に非自明な例について確認されているとはいえ、証明された結果ではないので今後様々な修正が必要となる可能性がある。

最後にストリングに関する他の話題として、 $\ell = 2$ の場合に現れる例外的実数解 ([EKS], 1992 年) と呼ばれる現象がある事に触れておこう。通常この現象は、存在するはずの 2-ストリングのうちいくつかが消え、その分実数解の個数が増える場合が存在する、といったように説明されることが多いようである。もう少し踏み込んで例外的実数解がどのように例外的なのかは好奇心をそそるところであるが、[Sa15] において具体例に対して実数解全体の集合を分析してみたところ、通常型の実数解は臙装配位の構造にきれいに従って出現し、例外型実数解は明瞭に臙装配位の構造を破っていることを確認した。量子数も問題なく定まる。従って例外型実数解の問題については必要以上に神経質になる事では無いのではないかという感触を持っている。

7 量子群の場合の文献紹介

以上通常 Lie 代数 sl_2 に関わる内容を紹介してきた。対称性が量子群となる場合にどのような現象が発生するのか興味をお持ちの読者もいらっしゃるかもしれないので、便宜のためにここで文献を紹介しておく。

量子群 $U_q(sl_2)$ の対称性を持つ模型が Pasquier–Saleur ([PS], 1990 年) によって考察され

ている。この模型の Hamiltonian は

$$H_N = \sum_{k=1}^{N-1} \left[\sigma_k^1 \sigma_{k+1}^1 + \sigma_k^2 \sigma_{k+1}^2 + \frac{1}{2}(q + q^{-1}) \sigma_k^3 \sigma_{k+1}^3 \right] - \frac{1}{2}(q - q^{-1}) (\sigma_1^3 - \sigma_N^3)$$

で与えられる。 $q \rightarrow 1$ とすれば今まで考察してきた Hamiltonian に戻る。この場合にも代数的 Bethe 仮説法が適用でき、特に Bethe 仮説方程式はこの場合も本質的には多項式方程式系になる。

参考までに、次の作用素

$$e_k = -\frac{1}{2} (\sigma_k^1 \sigma_{k+1}^1 + \sigma_k^2 \sigma_{k+1}^2) - \frac{1}{4}(q + q^{-1}) (\sigma_k^3 \sigma_{k+1}^3 - 1) + \frac{1}{4}(q - q^{-1}) (\sigma_k^3 - \sigma_{k+1}^3)$$

を定義すると、上記 Hamiltonian は

$$H_N = -2 \sum_{k=1}^{N-1} e_k$$

と書き直すことができる。ここで作用素 e_k は Temperley–Lieb 代数を生成する ($|j - k| > 1$)。

$$e_k^2 = (q + q^{-1})e_k, \quad e_k e_{k\pm 1} e_k = e_k, \quad e_k e_j = e_j e_k.$$

最近この系の Bethe 仮説方程式についても数値計算が実行されており [GHNS]、表現論における結果との比較がなされている。またこの場合も Bethe 仮説法が適用できることが主張されている [GN]。特に変形パラメータ q が 1 の冪根となる最も興味深い場合においても Bethe 仮説法により正しく表現が構成されることが主張されている。これらの内容についてご興味をお持ちの場合は、詳細についてはそれぞれの論文をご参照ください。

8 結晶基底との関連

8.1 はじめに

Bethe 仮説法からくみ取られる数学には色々な種類がありうるであろうが、以下ではその典型的な一例としてアフィン量子群や関連する組み合わせ論への応用について解説する。なお以降の内容は前節までの内容とは独立して理解できるものである。

この様な方向の研究は 1986 年の Kerov, Kirillov, Reshetikhin [KKR, KR] による研究を嚆矢とする。基本的な思想は以下のようにまとめられる。

| | |
|---------------------------------|--|
| Bethe 仮説法 | 組み合わせ論的類似 |
| Bethe ベクトル | 結晶基底のテンソル積 |
| Bethe 仮説方程式の解 (艤装配位との非自明な対応) | 艤装配位 |
| B_N 作用素の積 | 艤装配位写像 Φ (結晶基底のテンソル積と艤装配位の全単射) |

今の所両者の間の関係は分かっていないのだが、以下で述べるように両者の間の対応関係は非常に深くまた密接なものである。筆者の印象では、組み合わせ論的類似物と呼んでいるも

のは Bethe 仮説に対する単なる簡便なモデルという段階をはるかに超えてそれ自身として実質的な数学を含んでいると思われる。もしそうであれば、実は Bethe 仮説法とその組み合わせ論的類似物の両者を含むようなより大きな数学的枠組みが存在し、我々はその二つの相異なる切り口を覗いていたのだった、という可能性もある。両面からの研究が今後長い時間をかけて深化していく過程で色々と予想外の景色を見せていってくれることを期待したい。

組み合わせ論サイドの研究はその後 Kashiwara の結晶基底の理論 [K91] を巻き込んで深く研究が進められ、また現在も活発な研究の対象となっている。個人的な研究の動機としては、Young 盤に関わる Lascoux–Schützenberger 理論などに見られるようないわゆる代数的組み合わせ論の分野に新しい研究の軸を与えたいというものであった。筆者が艦装配位の研究を開始したころは、この課題の研究に対する風当たりが非常に強くずいぶん苦労させられた。経験により艦装配位の重要性を確信していたため、私が適任ではないにせよせめて他の方にバトンを渡せるまでは旗を掲げていたいという一心で孤軍奮闘してきたような状態だったと認識している。その後 10 年を経て少しは事態は改善しただろうか。

以下 §8.2 ではもっとも単純な場合に基本的なアイデアを解説し、その後の内容の概説とした。引き続く節ではもう少し技術的内容にも立ち入るが、各節は概ね独立したトピックスを扱うので、興味のあるところを拾い読みして頂くことができると思う。艦装配位の理論は今の所何の問題もなく様々な種類の代数や表現のクラスに拡張され続けており、また今までの組み合わせ論の方法では到達できなかった領域にも奥深く立ち入るようになってきているので、代数的組み合わせ論の一つの大きな枠組みとなる可能性は十分あると考えている。何より艦装配位自身に数学的意味があることも分かっているので、今後の進展を期待しているところである。

8.2 概要： $A_1^{(1)}$ 型ベクトル表現の場合

以下アフィン Lie 代数の種類や関連する Cartan データ等は Kac [K90] の記号法に従って表記することにする。理論の大まかな雰囲気を知るために前節までで扱った sl_2 の 2 次元表現のテンソル積と同じ設定で様子を見てみよう。この場合は様々な異なる方法で解析することができるため文献もいろいろと存在するが¹³、その点についての詳細は筆者による別の解説 [Sa12a, Sa12b] 等を参照していただく事にして、ここでは以降の節で述べる結果の概観を与えることに専念することにする。

艦装配位写像 この設定において、登場人物の片方である艦装配位は §4 で導入したものと一致する (12 ページ)。そこで関連する記号や用語はそちらで定義したものをそのまま流用することにしよう。一方、Bethe ベクトルの類似は結晶基底のテンソル積となる。 $B^{r,s}$ を縦 r 、横 s の長方形型 Young 準標準盤¹⁴で各ます目には $A_n^{(1)}$ の場合文字 $1, 2, \dots, n+1$ のいずれかを書き込んだ物の全体としよう。現在の場合、2 次元表現は二つのベクトル $\boxed{1}, \boxed{2} \in B^{1,1}$ で表され、それらの間に Chevalley 作用素の類似物 (柏原作用素と呼ばれる) が以下のように作用する：

$$\tilde{f} : \boxed{1} \mapsto \boxed{2}, \quad \tilde{f} : \boxed{2} \mapsto 0, \quad \tilde{e} : \boxed{2} \mapsto \boxed{1}, \quad \tilde{e} : \boxed{1} \mapsto 0.$$

¹³一つだけ有名な例を挙げておくと、Tokihiro グループによって箱玉系の初期値問題の解析 [MIT] に用いられた “10-elimination” という手法は以下に述べる艦装配位による方法と同値であることが知られている [KS09]。

¹⁴semi-standard tableau: Young 図のます目に縦方向には真に増加、横方向には非減少に増加するよう数字を書き込んだもの。

これらの元のテンソル積を考えることもできて、その上での柏原作用素は簡明な作用を持つ（詳細は [KN] を参照）。こうして得られるテンソル積（物としては数字 1 と 2 の列）を path と呼ぶことにしよう。その時艦装配位写像¹⁵ Φ

$$\Phi : \text{path} \mapsto \text{rigged configurations}$$

が次のようにして定義される。

path が最高ウェイトベクトルである時、結果としてできる艦装配位は §4 で述べた条件、つまり $P_{\nu_i}(\mu, \nu) \geq 0$ かつ $0 \leq J_i \leq P_{\nu_i}(\mu, \nu)$ が成り立っているが、一般の path の場合は $P_{\nu_i}(\mu, \nu) \leq 0$ または $J_i \leq 0$ となることも可能である。例えば、与えられた path が

$$b = 1 \otimes 2 \otimes 2 \otimes 1 \otimes 2 \otimes 2 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 2 \otimes 2 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 2 \in (B^{1,1})^{\otimes 14}$$

である場合、対応する艦装配位は

$$\Phi(b) = \begin{array}{ccc|c} 0 & & & -2 \\ 2 & & & 1 \\ 6 & & 6 & \\ 6 & & & 1 \end{array}$$

となる。しかしいつでも $J_i \leq P_{\nu_i}(\mu, \nu)$ は成り立っており、rigging が許される最大値を持つ場合、つまり $J_i = P_{\nu_i}(\mu, \nu)$ である時、ストリング (ν_i, J_i) は特異であるという。

さて現在の設定での艦装配位写像 Φ は次のようなアルゴリズムで与えられる。出発点となる艦装配位は空集合であるとする。以下艦装配位には必ず $(0, 0)$ という特異なストリングが含まれていると考えたと記述が簡明になるので、そのように仮定しよう（一般性は失われない）。path b の文字 2 の位置を左端から数えて k_1, k_2, \dots 番目とすると、順に以下の手続きを繰り返して再帰的に艦装配位を成長させていく。

1. 位置 k_{j-1} まで行った結果、途中段階の艦装配位 (η, I) が得られたとする。
2. 次の位置 k_j に対して以下の操作を行う。まず (η, I) を長さ $k_j - 1$ の状態に対する艦装配位と考え、vacancy number $P_{\eta_i}(1^{k_j-1}, \eta)$ を全ての行に対し計算し、 η の特異なストリングを全て特定する。
3. 最も長い特異なストリングから任意に一つ選び、その行の長さを 1 増やす¹⁶。こうして得られた新しいヤング図を η' を書く。
4. 新しい rigging I' を以下のように定める。 $\eta \rightarrow \eta'$ において変化しなかった行に対応する成分は変化させない。一方 $\eta \rightarrow \eta'$ において変化した行を η'_i とする時、対応する rigging I'_i は (η'_i, I'_i) が特異なストリングとなるように $I'_i = P_{\eta'_i}(1^{k_j}, \eta')$ と定める。
5. 以上の手続きを全ての k_j について行い最終的に得られる結果を (ν, J) とするとき $\Phi(b) = (\nu, J)$ と定める。

¹⁵この写像を Kerov–Kirillov–Reshetikhin 写像等々と研究者の名前をつけて呼ぶこともある。しかし理論の主要な創設者である Kirillov 氏自身はこの写像に人名をつけて呼ぶことに強く反対しておられ、様々な場所でそのように述べておられる。まことに尤もなお考えだと思うので、2008 年に初めて共同研究をさせて頂いた機会に相談の上、艦装配位全単射 (rigged configuration bijection) という中立的な名称を提唱している。大方のご賛同を頂ければ幸いです。

¹⁶考えている艦装配位に $(0, 0)$ 以外の特異なストリングが存在しない場合には、ストリング $(0, 0)$ を変化させて長さ 1 のストリングが生成されると考える

計算例は次項であたえる。なお以上の手続きを逆にすると逆写像 Φ^{-1} が得られる。

艦装配位写像の Mathematica によるプログラム例が

<https://sites.google.com/site/affinecrystal/rigged-configurations>

にあるのでご利用いただきたい (コード自体はより一般的に $D_n^{(1)}$ 型の場合も含んでいる)。

箱玉系 量子群に関する最も重要な対象の一つは R 行列と呼ばれ、表現のテンソル積の左右を入れ替える非自明な同型写像である。その結晶基底における類似物である同型写像 $R : B \otimes B' \mapsto B' \otimes B$ を組み合わせ R 行列と呼ぶ。Drinfeld の普遍 R 行列の理論なども存在するが、結晶基底の場合でも組み合わせ R 行列を具体的に求めるのは非常に難しい。§8.3 や §8.7 で述べる様にこのような問題に艦装配位は強力な手段を提供する。

ただし現在の設定では以下のように簡単な表示を持つ。 $B^{1,k}$ の元は長さ k の文字 1 と 2 による準標準盤であり、 (a, b) で文字 1 が a 個、文字 2 が b 個含まれる元を表すとすれば、組み合わせ R 行列

$$R : (a, b) \otimes (c, d) \mapsto (c', d') \otimes (a', b')$$

は具体的に

$$\begin{aligned} a' &= a + \min(b, c) - \min(a, d) \\ b' &= b - \min(b, c) + \min(a, d) \\ c' &= c - \min(b, c) + \min(a, d) \\ d' &= d + \min(b, c) - \min(a, d) \end{aligned}$$

と表示される。

箱玉系は $u_l = (l, 0)$ なる特別な元と、与えられた path $b = b_1 \otimes \cdots \otimes b_L$ に対して時間発展 T_l を次のように定義することにより与えられる力学系である。まず左側から繰り返し R 行列を作用させて

$$\begin{aligned} \underline{u_l} \otimes b_1 \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_L &\xrightarrow{R} b'_1 \otimes \underline{u_l^{(1)}} \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_L \xrightarrow{R} b'_1 \otimes b'_2 \otimes \underline{u_l^{(2)}} \otimes \cdots \otimes b_L \\ &\xrightarrow{R} \cdots \xrightarrow{R} b'_1 \otimes b'_2 \otimes \cdots \otimes b'_L \otimes \underline{u_l^{(L)}} \end{aligned} \quad (14)$$

としたときに

$$T_l(b) := b'_1 \otimes b'_2 \otimes \cdots \otimes b'_L$$

と時間発展を定める。すなわち

$$R : u_l \otimes b \mapsto T_l(b) \otimes u_l^{(L)} \quad (15)$$

となる。結晶基底の場合の Yang–Baxter 関係式により T_l どうしは可換な時間発展の族を成すので、箱玉系は量子可積分系である。箱玉系の研究は数学上の進展を結果としてもたらしただので¹⁷、その意味で意義のある研究であると考えている。

¹⁷艦装配位写像の研究は当初ある組み合わせ論的恒等式の証明を主な目的として研究が進められていたが、その後他の方法でも当該恒等式を証明することが可能であることが分かった。しかし箱玉系の研究という観点からは艦装配位写像のようなより深い理論を避けて通ることはできず、結果として艦装配位の研究を継続することとなった。実は研究の動機となったばかりではなく、艦装配位の数学的構造には箱玉系が本質的に関わっていることが分かっている (33 ページ参照)。

非常に簡単な例を見てみよう。path $b \in (B^{1,1})^{\otimes L}$ は文字 1 と 2 の列とみなせるのでテンソル積の記号を略記すると以下のような時間発展を考えることができる。

$$\begin{aligned} t = 0 &: 22211112111111 \\ t = 1 &: 11122211211111 \\ t = 2 &: 11111122122111 \\ t = 3 &: 11111111211222 \end{aligned}$$

ここで時刻 t における状態とは $(T_3)^t(b)$ を表す。文字 2 の塊はソリトン系における孤立波とみなすことができ、箱玉系はソリトン系となっている。具体的には、文字 2 の長さ k の塊は他の孤立派の影響のない状況では速度 k で自由伝搬し、他の孤立派と衝突すると非自明な相互作用ののち、元の孤立派が再現する（ただし位置には位相差と呼ばれる変化が生じる）。さて各時刻に対する艦装配位を計算してみよう。前項におけるアルゴリズムの定義を参考に計算すると、 $t = 0$ の場合文字 2 の位置 k_j は 1, 2, 3, 8 であり、写像 Φ の計算は以下の通り。

$$\emptyset \xrightarrow{1} \square \xrightarrow{-1} \square \square \xrightarrow{-2} \square \square \square \xrightarrow{-3} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{-3}$$

一方 $t = 2$ の場合は以下ようになる。

$$\emptyset \xrightarrow{7} \square \xrightarrow{5} \square \square \xrightarrow{4} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{10} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{4} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{11} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{3}$$

各 t に対する計算をまとめると以下のような結果となる。

$$\Phi(T_\infty^t(b)) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \begin{matrix} -3 + 3t \\ 4 + t \end{matrix}$$

Young 図の形は時間によって変化せず、各 ν_i は孤立波の長さに対応していることが分かる。また riggings は対応する ν_i の長さに比例して $\nu_i t$ と変化することが分かる¹⁸。

もう一つ大きめの例を見てみよう。先ほども見た $(B^1)^{\otimes 27}$ での箱玉系の例:

$$\begin{aligned} t = 0 &: 12212211122112111111111111 \\ t = 1 &: 11121122211221211111111111 \\ t = 2 &: 11112111122112122211111111 \\ t = 3 &: 11111211111221211122211111 \\ t = 4 &: 11111121111112122111122211 \\ t = 5 &: 11111112111111211221111222 \end{aligned}$$

各時刻に対応する艦装配位:

$$\Phi(T_\infty^t(b)) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \begin{matrix} -2 + 3t \\ 1 + 2t \\ 6 + t \\ 1 + t \end{matrix}$$

この場合も長さ ν_i の孤立波を表すストリングの rigging が $\nu_i t$ のように変化することが見て取れる。実は Bethe 仮説方程式の解に現れるストリングも、対応する Bethe ベクトルで下向きスピンの塊（マグノンと呼ばれる）に対応すると考えられているので、これも Bethe 仮説とその組み合わせ論的類似の間に存在する非常に深い関係の一端を表しているといえよう。

§8.3 で述べるように、一般に箱玉系の時間発展に対して艦装配位の Young 図は保存量（作用変数）を与え、rigging は線形に時間発展する（角変数）。すなわち艦装配位自身が明瞭な数学的意味を持つことを保証している。同じく §8.3 で述べるように、この結果は艦装配位を結晶基底の言葉で理解するための鍵を与える。その様な結果は、例えば §8.6 で述べるような艦装配位写像の Loop Schur 関数による表示の導出などに応用されている。

¹⁸一般の時間発展 T_l に対しては rigging は $\min(\nu_i, l)t$ と変化する。よって $\max_i \nu_i \leq l$ なら $T_l = T_\infty$ となる。

周期系 箱玉系には周期境界条件を課したバージョンも存在する。周期系の結果は、今の所 $A_1^{(1)}$ 型ベクトル表現の場合でのみ完成しているのここで触れておくことにする。本項の内容は以降は登場しないので、ここでは文献についてもある程度触れておくことにする。

箱玉系の周期版はそれ以前から知られていたが [YT]、ここでは [KTT] による結晶基底を用いた定式化を紹介する。path $b \in (B^{1,1})^{\otimes L}$ で、文字 2 の個数が $L/2$ 以下のものを考える。 b に周期境界条件を課すと、元来は円周状のものが得られるが、適当に切り口を入れて直線状の通常の path として取り扱う。切り口としては、便宜上 b が最高ウェイト条件を満たすものを考えよう。このとき、定義 (15) にならって書くと次のような性質がある。

$$R : u_l \otimes b \mapsto T_l(b) \otimes v, \quad R : v \otimes b \mapsto \bar{T}_l(b) \otimes v.$$

すなわち左側の同型で得られた v を用いると、右側の様に周期境界条件と適合する時間発展が定義できる。そこで \bar{T}_l を周期箱玉系の定義とするのである。この場合も量子可積分系となっていることが分かる。周期箱玉系のデモンストレーションが

<http://demonstrations.wolfram.com/PeriodicBoxBallSystem>

にあるのでご参照頂きたい。

直線状の箱玉系の時と同様にこの場合も臙装配位上で Young 図が作用変数、rigging が角変数となることは同様である (rigging は適当な同値関係で割る必要がある)。興味深い問題として、臙装配位上で線形に時間発展させた後に結晶基底のテンソル積 (文字 1 と 2 の並び) を与える解析的表示式を求める問題を考えよう [KS06]。通常の変数テータ関数の超離散極限¹⁹ (トロピカル極限) からスタートしよう。

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{z}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} \exp \left(-\frac{t \mathbf{n} \mathbf{A} \mathbf{n} / 2 + t \mathbf{n} \mathbf{z}}{\epsilon} \right) \right) \\ &= -\min_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} \{ t \mathbf{n} \mathbf{A} \mathbf{n} / 2 + t \mathbf{n} \mathbf{z} \}. \end{aligned} \quad (16)$$

ここで簡単のため臙装配位の Young 図が

$$\nu = \{i_1 < i_2 \cdots < i_g\} \quad (17)$$

という形をしていたと仮定しよう。そのとき各 i_k を添え字とする行列 A を

$$A_{i,j} = \delta_{i,j} p_i + 2 \min(i, j), \quad (18)$$

と定める (ここで $p_i = P_i(1^L, \nu)$ と書いた)。 (17) に対する riggings が J_1, \dots, J_g である時ベクトル $\mathbf{J} = (J_1, \dots, J_g)$ と定める。またベクトル $\mathbf{h}_l = (\min(i, l))_{i \in \nu}$ と $\mathbf{p} = (p_i)_{i \in \nu}$ を定めるとき、path b の k 番目の要素 b_k に含まれる文字 2 の個数 $x(k)$ は

$$\begin{aligned} x(k) &= \Theta \left(\mathbf{J} - \frac{\mathbf{p}}{2} - k \mathbf{h}_1 \right) - \Theta \left(\mathbf{J} - \frac{\mathbf{p}}{2} - (k-1) \mathbf{h}_1 \right) \\ &\quad - \Theta \left(\mathbf{J} - \frac{\mathbf{p}}{2} - k \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_\infty \right) + \Theta \left(\mathbf{J} - \frac{\mathbf{p}}{2} - (k-1) \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_\infty \right) \end{aligned} \quad (19)$$

¹⁹正整数係数の有理関数の場合なら形式的に $\times \mapsto +$, $/ \mapsto -$, $+ \mapsto \min$ と置き換えればよい。超離散化された有理関数は入力も整数、出力も整数のデジタルな世界となる。43 ページも参照。

と表される²⁰。この表示では、周期境界条件に由来する rigging の同値関係による商は自動的に満たされる。よって単純に $J \mapsto J + h_t$ とするだけで周期箱玉系の時間発展 \bar{T}_t が実現される。この結果は Dubrovin, Matveev, Novikov²¹ による有名な結果 [DMN] (KdV 方程式の周期解のtau関数が多変数テータ関数となり解はその対数の2階微分となること、1976年)の完全な離散化が達成されたことを意味している。

超離散極限について 連続的な関数の世界になじみが深い方々にとっては超離散極限(またはトロピカル極限)を取った後の世界は連続的な世界のおもちゃのように感じられてしまう事がしばしばあるようである。確かに例えば多項式であれば超離散化すると係数の情報がすべて吹き飛んでしまうし、一見実に情報不足な世界に見えてしまうのもうなずける。そのような方々のために、超離散化されることによって初めて生じる新しい性質も確かに存在するというを紹介しよう。ここでは例として超離散化によって新たに粒子性を獲得するような状況を見てみよう。以下の例が実際に数学的に重要であるのか、という問題はさておき、少なくとも離散化された世界が連続的な世界に従属する存在ではなく、それ自身独立した固有の世界であることをお示ししたいと思う。

ここで紹介するのは Box-Basket-Ball 系 [LPS1] (略して BBB 系) と呼ばれるソリトン系である(解説 [Sa12a] も参照)。その後 Yura [Y13] によりソリトン理論の観点から研究が進められ、他の既知の系との相違点も検討された。箱玉系における状態 (a, b) を拡張して状態 $(a, b, c) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^3$ を考える。組み合わせ R 行列の代わりに whurl 関係式

$$R : (a, b, c) \otimes (d, e, f) \mapsto (d', e', f') \otimes (a', b', c')$$

を考え、 $u_t = (t, 0, 0)$ から出発して箱玉系の場合 (15) と同様に時間発展 T_t を定義すると BBB 系が定義され、量子可積分系となる。ここで whurl 関係式とは、具体的には

$$\begin{aligned} a' &= a - \min(a+b, a+c, b+f) + \min(e+c, d+c, d+b) \\ b' &= b - \min(a+b, a+c, b+f) + \min(a+e, d+f, e+f) \\ c' &= c - \min(e+c, d+c, d+b) + \min(a+e, d+f, e+f) \\ d' &= d + \min(a+b, a+c, b+f) - \min(e+c, d+c, d+b) \\ e' &= e + \min(a+b, a+c, b+f) - \min(a+e, d+f, e+f) \\ f' &= f + \min(e+c, d+c, d+b) - \min(a+e, d+f, e+f) \end{aligned}$$

で与えられる変換である。このような変換を与えるような有理関数を構成することは容易であり、かつ多数構成することができるが、BBB 系ではそのような連続的な世界には見られない以下のような粒子的性質が存在する。

²⁰ 証明は周期境界条件を課さない一般の b に対して、艦装配位 $(\nu, J) = (\nu_i, J_i)_{i=1}^g$ (ここで $\nu_i, i = 1, 2, \dots$ は重複も許す) から

$$\begin{aligned} x(k) &= \tau_0(k) - \tau_0(k-1) - \tau_1(k) + \tau_1(k-1), \\ \tau_r(k) &= - \min_{n \in \{0,1\}^g} \left\{ \sum_{i=1}^g (J_i + r\nu_i - k)n_i + \sum_{i,j=1}^g \min(\nu_i, \nu_j)n_i n_j \right\} \quad (r = 0, 1), \end{aligned}$$

という式で求まることを用いる。ここで $n = (n_1, n_2, \dots, n_g)$ 。詳細は §8.5 を参照。

²¹ Sergei Petrovich Novikov (b. 1938). 初期のトポロジーにおける重要な研究ののち数理論理学において多大な功績を残している。1970年フィールズ賞受賞。

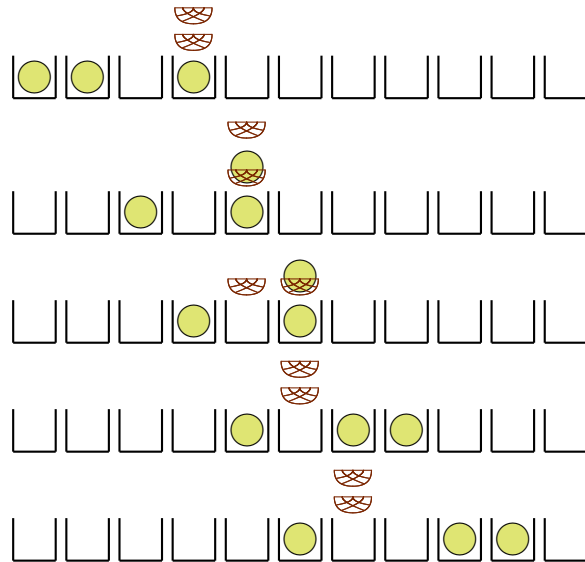


図 2: BBB 系の時間発展の例.

状態 (a, b, c) の各成分について、 a を空きスペースの数、 b はバスケットの数、 c はボールの数と解釈する。最初に容量 1 の箱を直線状に並べ、箱の上にはバスケットをいくらかでも重ねることができ、一方箱とバスケットにはそれぞれ 1 つずつボールを入れられると考える (そうすると条件 $a + c = b + 1$ を課すことになる)。そのとき whurl 関係式から定まる時間発展 T_∞ は次のようにして粒子的に記述することができる。

時間発展の手順: バスケットのうち空のものを全て一つ右の箱の上に移し、それ以外のものはそのままにしておく。次に玉を左側から順に見ていって、それぞれの玉より右側にある空箱または空きバスケットのうち最も左側のものに順に移していく。ただし既に動かした玉にはそれ以上触れない。

この手順はバスケットが一つもない場合は前述の箱玉系の時間発展 T_∞ と一致する事を注意しておく (箱玉系では文字 1 を空き箱、文字 2 をボールが一つ入った箱と解釈する)。簡単な例を図 2 に挙げておこう。物理の用語でまとめておくと、ボールは一つの場所に一つしか入ることのできない Fermi 粒子、バスケットは一つの場所にいくらかでも入る Bose 粒子 (この二種類が自然界に存在する量子力学的粒子の大分類を与える) であり両者の間にはボールがバスケットに入るといって非自明な相互作用を持つ。この様にして定義される BBB 系はソリトン系となっている (どのような孤立波が存在するかは解説 [Sa12a] 参照)。以上の様な性質は whurl 関係式から見て全く非自明な結果であることを指摘しておく。

まとめると、粒子とは本質的に離散的で無くてはならないので、超離散化された世界 (デジタルな世界) には連続な世界には存在しない性質が存在することについてはご理解いただけたのではないかと思う。逆に超離散的な世界から出発して連続的な類似物を構成しようとすると、同一の関係式から無数の対応する連続関数を構成できてしまう。その様な中からどのような基準でもって数学的に正当性を持った関数を選び出すのは今の所はっきりとした指針がある様には感じられないし、そもそも連続な世界での類似物が超離散的な世界で持っていたのと匹敵するような顕著な興味深い性質を持っているのかも非自明な問題であろう。筆者としては結晶基底自体も超離散化された世界で最も自然に認識できる対象なのではないかと思っているのだが、連続な世界で類似物を構成するために多大な労力を払っている方々

が多くいらっしゃるので、研究の成果を見守っているところである。

8.3 $A_n^{(1)}$ 型臙装配位

$A_n^{(1)}$ 型の結晶基底 (Kirillov–Reshetikhin crystal) のテンソル積に対応する臙装配位について述べる。その様な写像は Kerov–Kirillov–Reshetikhin ([KKR, KR]、1986 年) によって先駆的な研究が行われ、最終的に Kirillov–Schilling–Shimozono ([KSS]、1999 年) によって $A_n^{(1)}$ 型一般の場合に確立された ([K01] も参照)。

クリスタル $B^{r,s}$ $A_n^{(1)}$ 型の場合 KR クリスタル $B^{r,s}$ とは、集合としては文字 $1, 2, \dots, n+1$ による縦 r 横 s の長方形型 Young 準標準盤であった。テンソル積 $B^{r,s} \otimes B^{r',s'}$ が自然に定義され、代数構造も簡明に入る。具体的な形は $a \neq 0$ に対する \tilde{e}_a, \tilde{f}_a については [KN] を、 \tilde{e}_0, \tilde{f}_0 については [Sh98] をそれぞれ参照。

テンソル積 $\bigotimes_{k=1}^L B^{r_k, s_k} = B^{r_1, s_1} \otimes \dots \otimes B^{r_L, s_L}$ の元を path とよぶ。path の形状から Young 図 $\mu^{(a)}$ ($a = 0, \dots, n-1$) を以下のように定める。すなわち $\bigotimes_{k=1}^L B^{r_k, s_k}$ の中に $B^{a+1, l}$ が m 個含まれる場合、Young 図 $\mu^{(a)}$ に長さ l の行が m 本存在する。

臙装配位写像 Φ は全単射

$$\Phi : \text{path} \mapsto \text{rigged configuration}$$

を与えるが、そのアルゴリズムの定義は次節 §8.4 に回すことにする。

最高ウェイトベクトルに対する臙装配位 前項で定義した Young 図 $\mu^{(a)}$ ($a = 0, \dots, n-1$) と Young 図 $\nu^{(a)}$ ($a = 1, \dots, n$) の各行 $\nu_i^{(a)}$ に整数 $J_i^{(a)}$ を付け加えた以下のような対象を考える (以下 μ の部分は適宜略記する)。

$$(\nu, J) = \left(\mu^{(0)}, \dots, \mu^{(n-1)}, (\nu^{(1)}, J^{(1)}), \dots, (\nu^{(n)}, J^{(n)}) \right). \quad (20)$$

Young 図 η に対し $Q_l(\eta)$ を Young 図 η の左側 l 列分に含まれるます目の総数としよう。 (ν, J) に対し vacancy number を以下の通り定義する：

$$P_l^{(a)}(\mu, \nu) = Q_l(\mu^{(a-1)}) + Q_l(\nu^{(a-1)}) - 2Q_l(\nu^{(a)}) + Q_l(\nu^{(a+1)}). \quad (21)$$

Bethe 仮説での性質に基づき、組 $(\nu_i^{(a)}, J_i^{(a)})$ をストリングと呼び、 $\nu_i^{(a)}$ をその長さと呼ぼう。

その時 (ν, J) が最高ウェイトベクトルに対する臙装配位であるとは以下の条件を満たす場合である。

- 全ての $\nu_i^{(a)}$ に対し $P_{\nu_i^{(a)}}^{(a)}(\mu, \nu) \geq 0$ 。
- 全ての $J_i^{(a)}$ が $0 \leq J_i^{(a)} \leq P_{\nu_i^{(a)}}^{(a)}(\mu, \nu)$ を満たす。

$\nu^{(a)}$ の事を configuration、 $J_i^{(a)}$ の事を rigging と呼ぶ。rigging が許される最大値を持つとき、そなわち $J_i^{(a)} = P_{\nu_i^{(a)}}^{(a)}(\mu, \nu)$ であるとき、特異なストリングと呼ぶ。

一般の臙装配位 本項目の内容はやや技術的であり、飛ばしてそのまま先に進んでいただいても問題はありません。組み合わせ R 行列に関する話題は次項で、また箱玉系に関する基本的結果は 32 ページから始まります。

他の一般の臙装配位は Schilling [Sc06] にならって臙装配位上に柏原作用素を定義することによって得られる。用語としてストリング $(\nu_i^{(a)}, J_i^{(a)})$ の corigging とは

$$P_{\nu_i^{(a)}}^{(a)}(\mu, \nu) - J_i^{(a)}$$

の事を表す。以下 $(\nu^{(a)}, J^{(a)})$ に $(0, 0)$ という特異なストリングを付け加えておくこと記述が簡明になる。 x_ℓ を $(\nu^{(a)}, J^{(a)})$ の最小の rigging とする。今の規約より $x_\ell \leq 0$ となる。

- (1) もし $x_\ell = 0$ ならば $\tilde{e}_a(\nu, J) = 0$ と定める。一方 $x_\ell < 0$ ならば $(\nu^{(a)}, J^{(a)})$ のストリングで rigging が x_ℓ であるようなもののうち長さが最小のものの長さを ℓ とする。その時 $\tilde{e}_a(\nu, J)$ はストリング (ℓ, x_ℓ) を $(\ell - 1, x_\ell + 1)$ に変化させ、他の rigging を元の corigging を保つように変化させる。
- (2) $(\nu^{(a)}, J^{(a)})$ のストリングで rigging が x_ℓ であるようなもののうち長さが最大のものの長さを ℓ とする。そのとき $\tilde{f}_a(\nu, J)$ はストリング (ℓ, x_ℓ) を $(\ell + 1, x_\ell - 1)$ に置き換え、他の rigging を元の corigging を保つように変化させる。その結果 rigging が対応する vacancy number より真に大きなものが存在する場合 $\tilde{f}_a(\nu, J) = 0$ と定める。

\tilde{f}_a の定義において、 $(\nu^{(a)}, J^{(a)})$ の rigging が全て 0 より大きかった場合には、 $(0, 0)$ というストリングに \tilde{f}_a が作用してストリング $(1, -1)$ が生成されることになることに注意。例えば $(B^{1,1})^{\otimes 8}$ の元 (つまり $\mu^{(0)} = (1^8)$ となる)

$$b = \boxed{1} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1}$$

を考え $\Phi(b)$ に \tilde{f}_1 を順に作用させていくと以下ようになる。

$$\begin{array}{c} 3 \quad \boxed{} \quad 2 \quad 0 \quad \boxed{} \quad 0 \\ 5 \quad \boxed{} \quad 1 \end{array} \xrightarrow{\tilde{f}_1} \begin{array}{c} 1 \quad \boxed{} \quad 0 \quad 1 \quad \boxed{} \quad 1 \\ 3 \quad \boxed{} \quad -1 \\ 3 \quad \boxed{} \quad -1 \end{array} \xrightarrow{\tilde{f}_1} \begin{array}{c} -1 \quad \boxed{} \quad -2 \quad 1 \quad \boxed{} \quad 1 \\ -1 \quad \boxed{} \quad -2 \\ 3 \quad \boxed{} \quad -1 \end{array} \xrightarrow{\tilde{f}_1} \begin{array}{c} -3 \quad \boxed{} \quad -3 \quad 1 \quad \boxed{} \quad 1 \\ -1 \quad \boxed{} \quad -2 \\ 3 \quad \boxed{} \quad -1 \end{array}$$

もう一度 \tilde{f}_1 を作用させると 0 となる。ここで臙装配位の表示として、左から $(\nu^{(1)}, J^{(1)})$ 、 $(\nu^{(2)}, J^{(2)})$ を書き、 $\nu^{(a)}$ の右側に rigging を、左側に vacancy number を書いた。

この様にして定義される柏原作用素がクリスタルの定義を満たすことは最初 [Sc06] によって証明されたが、Stembridge の結果に依存した証明であったためそのまま拡張することはできない証明法であった。その点は [Sa14] において一般性のある方法に改められ、その後の臙装配位におけるクリスタル構造の導入において標準的な方法となった²²。

重要な性質として臙装配位写像 Φ は柏原作用素を保つこと

$$[\tilde{e}_a, \Phi] = [\tilde{f}_a, \Phi] = 0 \tag{22}$$

が知られている [DS, Sa14]。写像 Φ が複雑なため極めて非自明な結果である。後で $D_n^{(1)}$ 型の場合にもふれるが、これらの性質は代数や表現の種類によらず非常に広い範囲で確認されており、臙装配位の著しい自然さを表す例となっている。

²²例えば結晶構造の公理に現れる ε_a という関数は [Sa14] において臙装配位上に導入され、その後 $B(\infty)$ クリスタルの構造を臙装配位に導入するときに本質的であった [SaScr14]。

組み合わせ R 行列とエネルギー関数 この項目と引き続く計算例もアルゴリズムの詳細に興味のない方は細部は軽く流して「箱玉系の逆散乱形式」の項 (32 ページ) に進んでいただいて構いません。

組み合わせ R 行列とは表現の左右を入れ替える同型写像 $R : B^{r,s} \otimes B^{r',s'} \rightarrow B^{r',s'} \otimes B^{r,s}$ の事であった (以下 $\stackrel{R}{\simeq}$ と記述する)。クリスタル B のアフィン化を

$$\text{Aff}(B) = \{b[d] \mid b \in B, d \in \mathbb{Z}\} \quad (23)$$

と定義する。組み合わせ R 行列により元 $b \otimes b' \in B^{r,s} \otimes B^{r',s'}$ が $\tilde{b}' \otimes \tilde{b} \in B^{r',s'} \otimes B^{r,s}$ に写されるとき、 $\text{Aff}(B)$ の上での R 行列を

$$b[d] \otimes b'[d'] \stackrel{R}{\simeq} \tilde{b}'[d' - H(b \otimes b')] \otimes \tilde{b}[d + H(b \otimes b')] \quad (24)$$

で定める。ここでエネルギー関数 $H : B \otimes B' \rightarrow \mathbb{Z}$ とは、(24) で定まる R 行列が $\text{Aff}(B) \otimes \text{Aff}(B') \otimes \text{Aff}(B'')$ 上で Yang–Baxter 関係式

$$(R \otimes 1)(1 \otimes R)(R \otimes 1) = (1 \otimes R)(R \otimes 1)(1 \otimes R) \quad (25)$$

を満たすように定義されたものである [(KMN)²]。

組み合わせ R 行列は一般には極めて非自明な写像であるが、 $A_n^{(1)}$ 型の場合は既存の代数的組み合わせ論の成果を使用して以下のように具体的に記述することができる²³。

Young 盤の各行が上から順に y_1, y_2, \dots, y_r であったとしよう。その時各行から得られる数列を並べて、 Y の row word を $\text{row}(Y) = y_r y_{r-1} \dots y_1$ と定義しよう。また $x = (x_1, x_2, \dots)$ と $y = (y_1, y_2, \dots)$ を二つの分割とすると、 x と y の連結を $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$ と表す。 $Y \leftarrow a$ で Young 盤に文字 a を Schensted–Knuth²⁴[K70] の row insertion²⁵ することを表し、更に $Y \leftarrow ab = (Y \leftarrow a) \leftarrow b$ 等と書くしよう。

定理 [Sh98]

元 $b \otimes b' \in B^{r,s} \otimes B^{r',s'}$ と $\tilde{b}' \otimes \tilde{b} \in B^{r',s'} \otimes B^{r,s}$ が組み合わせ R 行列によって

$$b \otimes b' \stackrel{R}{\simeq} \tilde{b}' \otimes \tilde{b} \quad (26)$$

となることと

$$(b' \leftarrow \text{row}(b)) = (\tilde{b}' \leftarrow \text{row}(\tilde{b}')) \quad (27)$$

となることは同値。更に $H(b \otimes b')$ の値は $(b' \leftarrow \text{row}(b))$ のます目のうち分割 (s^r) と $(s'^{r'})$ を連結したものの外側に存在するます目の個数で与えられる。

従って $(b' \leftarrow \text{row}(b))$ の情報から \tilde{b} と \tilde{b}' を見つけるアルゴリズムを記述すればよいことになる。Young 図 Y とその (左上部分の) 部分集合である Young 図 Y' から作られる集合 $\theta = Y \setminus Y'$ のます目の総数が r であり、かつ θ には同じ行に 2 つ以上のます目が存在しないとき、 θ は vertical r -strip と呼ばれる。

²³アフィン柏原作用素 \tilde{e}_0 や \tilde{f}_0 では jeu de taquin と呼ばれるアルゴリズムを使用したりと、 A 型 KR クリスタルの理論は代数的組み合わせ論の成果が総動員という感じである

²⁴Donald Ervin Knuth (b. 1938). \LaTeX でも日々お世話になっている数学者。

²⁵ $Y \leftarrow a$ とは行 y_1 の文字で a より真に大きな文字のうち最も左のもの (文字 x_1 としよう) と a を交換し、そうして得られる x_1 を用いて第二行 y_2 で同様の操作を行い、以下同様の操作をどこかで行 y_k 中に x_{k-1} より大きな文字が存在しなくなるまで繰り返す。その時 y_k の右に x_{k-1} を付け加えて終了する。

Young 盤 $Y = (b' \leftarrow \text{row}(b))$ の左上部分の長方形 (s^r) 型の部分集合を Y' とする。集合 $\theta = Y \setminus Y'$ の文字に以下のようにして番号 $1, 2, \dots, r's'$ を振る。 θ_1 を θ の中でなるべく上方かつ右側を取った vertical r' -strip とする。その時 θ_1 のます目に対し下から順に番号 $1, 2, \dots, r'$ を振る。次に $\theta \setminus \theta_1$ に対して同様に vertical r' -strip θ_2 をとり、同様に番号 $r' + 1, \dots, 2r'$ を振る。同様にして帰納的に θ の全てのます目に番号を振っていく。

さて θ に振られた番号の順に row insertion の逆を行う。番号 1 が振られた文字に対して row insertion の逆を行って Young 盤から放出される文字を u_1 とし、 Y_1 を $(Y_1 \leftarrow u_1) = Y$ となるような Young 盤とする。次に Young 盤 Y_1 で番号 2 が振られていたます目にある文字から row insertion の逆を行って文字 u_2 と Young 盤 Y_2 を得る。同様にして帰納的に文字 $u_{r's'}$ と Young 盤 $Y_{r's'}$ まで得る。最終的に

$$\tilde{b}' = (\emptyset \leftarrow u_{r's'} u_{r's'-1} \cdots u_1), \quad \tilde{b} = Y_{r's'} \quad (28)$$

が答えとなる。

例 以上のアルゴリズムの計算例として次のテンソル積を考える。

$$b \otimes b' = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \in B^{2,2} \otimes B^{3,2}.$$

b の row word は $\text{row}(b) = 2411$ なので

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \leftarrow 2411 \right) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 4_3 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 3_6 & 5_2 & \\ \hline 4_5 & 6_1 & \\ \hline 5_4 & & \\ \hline \end{array}$$

を得る。ここで数字につけた添え字は row insertion の逆を行う順番を示す。最初に文字 6_1 から出発すると

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 3 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \leftarrow 1 \right) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}, \quad \text{従って,} \quad Y_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 4_3 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 3_6 & 6_2 & \\ \hline 4_5 & & \\ \hline 5_4 & & \\ \hline \end{array}, \quad u_1 = 1.$$

次に Y_1 のます目 6_2 から同様に計算する。最後まで繰り返すと $u_6 u_5 \cdots u_1 = 321541$ および

$$Y_6 = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \text{を得る。} (\emptyset \leftarrow 321541) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array} \text{なので、結局}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array}, \quad H \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \right) = 3.$$

ここでエネルギー関数は b と b' を連結した

| | | | |
|--|--|--|--|
| | | | |
| | | | |
| | | | |

 から求めた。

箱玉系の逆散乱形式 \tilde{e}_0 を除く A_n 部分に対する $B^{a,l}$ の最高ウェイト元を $u^{a,l}$ で表す。具体的に $u^{a,l}$ を Young 準標準盤として表すと、1 行目は全て文字 1、2 行目は全て文字 2、等々となる。一般のテンソル積 $b \in \bigotimes_{k=1}^L B^{r_k, s_k}$ と $u^{a,l}$ から出発して 23 ページの定義 (15) と同様にして箱玉系の時間発展作用素 $T^{a,l}$ が定義される [HHIKTT, FOY]。箱玉系は量子可積分系であり [FOY]、またソリトン系としてふるまうことも観察されている (箱玉系として最も基本的な $r_k = 1$ の場合は [Sa06] で一般的な状況で示されている)。

基本的な事実として、艦装配位写像を用いると、箱玉系の作用角変数の完全な系が得られる。より正確には：

定理 [KOSTY]

与えられた path b に必要ならば右側に $u^{a,l}$ を十分付け加えて、 $u^{a,l} \otimes b \stackrel{R}{\simeq} T^{a,l}(b) \otimes u^{a,l}$ となるようにしよう。その時 b に対する艦装配位が

$$\Phi(b) = \left((\nu^{(1)}, J^{(1)}), \dots, (\nu^{(a)}, J^{(a)}), \dots, (\nu^{(n)}, J^{(n)}) \right)$$

であれば、時間発展した path に対する艦装配位は

$$\Phi(T^{a,l}(b)) = \left((\nu^{(1)}, J^{(1)}), \dots, (\nu_i^{(a)}, J_i^{(a)} + \min(\nu_i^{(a)}, l))_i, \dots, (\nu^{(n)}, J^{(n)}) \right) \quad (29)$$

となる。すなわち Young 図 $\nu^{(1)}, \dots, \nu^{(n)}$ は運動の保存量 (作用変数) であり、rigging $J^{(a)}$ のみが線形に変化する (角変数)。

この事実を箱玉系の逆散乱形式と呼んでいる²⁶。例は 39 ページ参照。なおこの結果より $l \geq \max_i \nu_i^{(a)}$ ならば $T^{a,l} = T^{a,l+1} = \dots =: T^{a,\infty}$ となる。特に $T^{1,\infty} = T_\infty$ と書く。

この定理の本質は、下記の艦装配位の理論において最も深い定理の一つである。

定理 [KSS] ($A_n^{(1)}$ 型艦装配位の R 不変性)

任意の $A_n^{(1)}$ 型 KR クリスタルのテンソル積 b と b' が $b \stackrel{R}{\simeq} b' \iff \Phi(b) = \Phi(b')$ 。

艦装配位写像 Φ は非常に複雑な写像であるので、この事実は極めて非自明であり、証明もとても難しい。

さて、 $\Phi(b)$ と $\Phi(u^{a,l} \otimes b)$ とを比べると、28 ページの艦装配位 (20) において後者の方が $\mu^{(a-1)}$ の長さ l の行が一つ多いが他の $\mu^{(a)}$ と $\nu^{(a)}$ は同一である ($\Phi(u^{a,l})$ は $\nu^{(a)}$ 部分が全て空集合)。その場合、§8.4 で与えられる写像 Φ^{-1} のアルゴリズムより、同じ b を像の一部として得るためには rigging $J_i^{(a)}$ を $J_i^{(a)} + \min(\nu_i^{(a)}, l)$ に変化させればよい。あとは $u^{a,l} \otimes b \stackrel{R}{\simeq} T^{a,l}(b) \otimes u^{a,l}$ と艦装配位の R 不変性から箱玉系の逆散乱形式が従う。

なお艦装配位の R 不変性を 2 つのテンソル積の場合 $B \otimes B' \ni b \otimes b' \stackrel{R}{\simeq} \tilde{b}' \otimes \tilde{b}$ に適用すると、組み合わせ R 行列が

$$\Phi_{B' \otimes B}^{-1} \circ \Phi_{B \otimes B'}(b \otimes b') = \tilde{b}' \otimes \tilde{b} \quad (30)$$

のようにして艦装配位の R 不変性の特殊な場合として得られることになる。すなわち艦装配位写像は組み合わせ R 行列の親玉のような存在である。

²⁶論文 [KOSTY] では著者間の見解の相違により明確な形でこの結果を述べることができなかった。そこでその直後に発表した論文 [KSY] の Theorem 3.5 において $a = 1$ の場合にここで述べた形の定理を与えた。本質的に大きな違いはないが、 $a > 1$ の一般的な形は、例えば [Sa07] の Remark 3.5 で述べられている。

箱玉系の数学的応用 こうして艦装配位に関する数学的定理が箱玉系という数理物理の問題に有効に利用できることが分かった。逆に箱玉系との関連が明らかになったことにより下記のような数学的に重要な性質が発見された。筆者の印象としては、箱玉系が物理として応用される可能性はあまり高くないと思われるのだが、一方既に数学的な応用があるわけなので、その意味で箱玉系の研究は十分に意義があると考えている。

$b \in \bigotimes_{k=1}^L B^{r_k, s_k}$ とする。23 ページで箱玉系を定義した式 (14) の記号を変更した

$$\underline{u^{a,l} \otimes b_1} \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_L \stackrel{R}{\simeq} b'_1 \otimes \underline{v_1^{a,l} \otimes b_2} \otimes \cdots \otimes b_L \stackrel{R}{\simeq} b'_1 \otimes b'_2 \otimes \underline{v_2^{a,l} \otimes b_3} \cdots \otimes b_L \stackrel{R}{\simeq} \cdots \quad (31)$$

から出発しよう。以下では $v_0^{a,l} = u^{a,l}$ と書くことにする。[FOY] になって和

$$E^{a,l}(b) = \sum_{k=1}^L H \left(v_{k-1}^{a,l} \otimes b_k \right) \quad (32)$$

を考える。その時、

定理 [Sa07]

艦装配位 $(\nu, J) = \Phi(b)$ に対して

$$Q_l(\nu^{(a)}) = E^{a,l}(b). \quad (33)$$

写像 Φ は複雑なアルゴリズムで定義されるので、この結果は大変非自明である。実際艦装配位の R 不変性という深い結果をフルに使用して証明される。この等式は §8.6 で Loop Schur 関数との関連を考察するうえで鍵となる。

ここでは等式 (33) の別の応用として、艦装配位写像 Φ のアルゴリズムが実は代数的に記述できるものであることを指摘しておこう。Young 盤 b_k の各列が左から c_1, c_2, \dots, c_{s_k} だったとしよう。その時途中段階のテンソル積として

$$C_j := b_1 \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_{k-1} \otimes c_{s_k} \otimes c_{s_k-1} \otimes \cdots \otimes c_{j+1} \otimes c_j \quad (34)$$

を考えよう。 c_i の順番を入れ替えたのは現在の Kashiwara 流のテンソル積と Young 盤の相性が悪いためであるが、筆者は他の著者からの強い要請があった場合を除き、Kashiwara 流を使うことにしている（結晶基底のテンソル積の場合も異なる流儀が存在することによって時として混乱が生じてしまっているのは大変残念である）。この C_j に対しても式 (32) に倣って和 $E^{a,l}(C_j)$ を定義できる。この時量

$$\{E^{a,l}(C_j) - E^{a,l-1}(C_j)\} - \{E^{a,l}(C_{j+1}) - E^{a,l-1}(C_{j+1})\} \quad (35)$$

は再帰的な定義を持つ Φ のアルゴリズムにおいて列 c_j に対応する部分を計算するときに途中段階の $\nu^{(a)}$ の第 l 列目に付け加えられるます目の総数を表している。なお式 (35) には重複が多く、整理すれば実際には局所的に決まる量である。実は [Sa07] で議論されているようにこの情報だけで rigging も含め必要な全ての情報を読み取ることができる。従って写像 Φ のアルゴリズムは、箱玉系の定義を用いると、結晶基底の言葉で記述できる代数的な性質のアルゴリズムであることが分かった。

写像 Φ のアルゴリズムを良く理解するとこれは驚くべき結果であると理解して頂けると思う。実際艦装配位の理論を数学化するのに重要な貢献をした Mark Shimozono 氏と議論した際も「あんな不思議なアルゴリズムが代数的な起源を持っていたとは衝撃的だ」と言って

おられたと記憶している。実際筆者もそれまでは艦装配置写像のアルゴリズムは精巧だが不思議なもの、といった印象を持っていた。しかしそれが実は無限次元の対称性に由来するものだったと分かり、艦装配置は単なる便利なモデルというよりそれ自身が数学的意味を持ち、従ってそれ自身を研究することに意味があると納得することができたと記憶している。

無限次元の対称性があると Young 盤も長方形のものしか現れないし一見特殊に感じる方もいらっしやるかもしれないが、これは大雑把に言えば対称性が大きいために縛りがきつい事の反映である。数学の大海の中から特別に性質の良いものを見つけ出すのは、何の方針もなく探すのではあまり簡単なことではないであろう。そのような時無限次元の対称性のような強力な武器を使うと自然と性質の良いものが見つかる様に感じられる。

8.4 $A_n^{(1)}$ 型艦装配置写像のアルゴリズム

ここでは写像

$$\Phi^{-1} : \text{rigged configuration} \mapsto \text{path}$$

のアルゴリズムを $A_n^{(1)}$ 型一般の場合に紹介する。すなわち path として最も一般的な $b \in \otimes_{k=1}^L B^{r_k, s_k}$ の場合を考える。28 ページの式 (20) のように艦装配置を

$$(\nu, J) = \left(\mu^{(0)}, \dots, \mu^{(n-1)}, (\nu^{(1)}, J^{(1)}), \dots, (\nu^{(n)}, J^{(n)}) \right) \quad (36)$$

としよう。

Φ^{-1} のアルゴリズム Φ^{-1} の計算は $\mu^{(a)}$ ($0 \leq a \leq n-1$) のどの行からスタートするのかを選ぶところから始まる。 $\mu^{(a)}$ やその行の選び方を変えると異なる paths が得られるが、それらは艦装配置の R 不変性 (32 ページ) により全て R 同型となる。 $\mu_i^{(a)}$ を選んだとしよう。すると $B^{a+1, \mu_i^{(a)}}$ の元が以下のようにして得られる。ここでは艦装配置を Young 図を用いて図式的に表示して考えることにする。その時ストリングは Young 図の各行とその rigging の組と同一視される。

1. $\ell^{(a)}$ を $\mu_i^{(a)}$ の長さとする。 $\nu^{(a+1)}, \nu^{(a+2)}, \dots$ の特異な行 (ストリング) を以下のようにして順に定める。 $\ell^{(j)}$ まで定まっているとする。その時 $\nu^{(j+1)}$ に長さ $\ell^{(j)}$ 以上の特異な行が存在する場合、そのうち最も短いものを選び、その長さを $\ell^{(j+1)}$ として同じ手続きを $\nu^{(j+2)}$ に対して繰り返す。一方 $\nu^{(j_a-1)}$ まではそのような特異な行を選べたが $\nu^{(j_a)}$ には該当する特異な行が存在しなかった場合、文字 j_a を出力として手続きを終了する。
2. 前項で選んだ各行の右端のます目を一つずつ削り、 $\mu^{(a-1)}$ には長さ 1 の行を付け加えて新しい艦装配置を作る。新しい rigging は以下の通り。前項で選択されなかった行の rigging は変更しない。一方前項で選択され、ます目を一つ削られた行の rigging は、新しい艦装配置に対する vacancy number について特異な行となるように定める。
3. $\mu^{(a-1)}$ に付け加わった長さ 1 の行からスタートし、新たに $\ell^{(a-1)} = 1$ と定めて Step 1 と Step 2 を繰り返して出力 j_{a-1} を得る。次に $\mu^{(a-2)}$ に付け加わった長さ 1 の行からスタートし、... と繰り返し、最終的に $\mu^{(0)}$ に付け加わった長さ 1 の行からスタートし

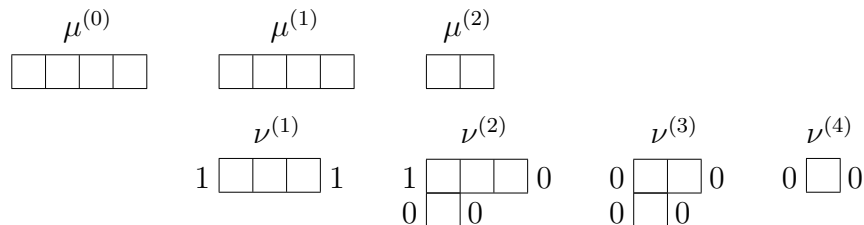
て出力 j_0 を得る。その時 j_a, \dots, j_1, j_0 を $(a+1) \times \nu_i^{(a)}$ 型 Young 盤の空きスペースの左端に下から順に書き込む。

| | | | | |
|----------|--|--|--|--|
| j_0 | | | | |
| j_1 | | | | |
| \vdots | | | | |
| j_a | | | | |

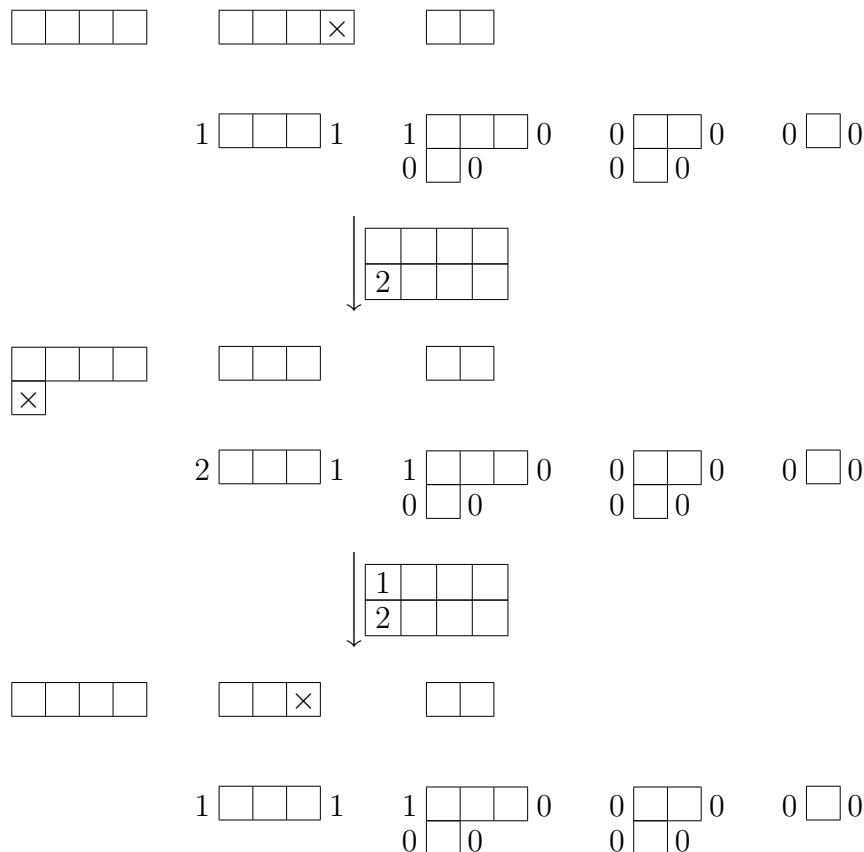
4. Step 1 から Step 3 を $\mu_i^{(a)}$ (の残り) の右端からスタートして繰り返し、最終的に $\mu_i^{(a)}$ が全て取り去られるまで行う。すると上記長方形のます目がすべて埋まり、 $B^{a+1, \mu_i^{(a)}}$ の元が一つ定まる。

残りの $\mu^{(0)}, \dots, \mu^{(n-1)}$ の行についても上記 Step 1 から Step 4 を繰り返していき、全ての行が取り尽くされるまで続ける。得られた長方形を、テンソル積を挟んで右から左に並べたものを $b = \Phi^{-1}(\nu, J)$ とする。以上の手続きは矛盾なく定義されていることが知られている [KSS]。

例 以下の艦装配位を考える。



ここで riggings および vacancy number を対応する行のそれぞれ右と左に書き込んだ。最初に $\mu^{(1)}$ から削ることになると、以下のように計算が進む (削られるます目に \times を書き込んだ)。



| | | | |
|---|---|--|--|
| 1 | | | |
| 2 | 2 | | |

| | | | |
|---|--|--|--|
| | | | |
| × | | | |

| | |
|--|--|
| | |
|--|--|

| | |
|--|--|
| | |
|--|--|

$$2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} 1 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & \square & \square & \square \\ \hline 0 & \square & 0 & \end{array} 0 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \square & \square \\ \hline 0 & \square & 0 \\ \hline \end{array} 0 \quad 0 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} 0$$

| | | | |
|---|---|--|--|
| 1 | 1 | | |
| 2 | 2 | | |

| | | | |
|--|--|--|--|
| | | | |
|--|--|--|--|

| | |
|--|---|
| | × |
|--|---|

| | |
|--|--|
| | |
|--|--|

$$1 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} 1 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & \square & \square & \times \\ \hline 0 & \square & 0 & \end{array} 0 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \square & \square \\ \hline 0 & \square & 0 \\ \hline \end{array} 0 \quad 0 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} 0$$

| | | | |
|---|---|---|--|
| 1 | 1 | | |
| 2 | 2 | 3 | |

| | | | |
|---|--|--|--|
| | | | |
| × | | | |

| |
|--|
| |
|--|

| | |
|--|--|
| | |
|--|--|

$$1 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \times \\ \hline \end{array} 1 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & \square & \square \\ \hline 0 & \square & 0 \\ \hline \end{array} 0 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \square & \square \\ \hline 0 & \square & 0 \\ \hline \end{array} 0 \quad 0 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} 0$$

| | | | |
|---|---|---|--|
| 1 | 1 | 2 | |
| 2 | 2 | 3 | |

| | | | |
|--|--|--|--|
| | | | |
|--|--|--|--|

| |
|---|
| × |
|---|

| | |
|--|--|
| | |
|--|--|

$$1 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} 1 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & \square & \square \\ \hline 0 & \times & 0 \\ \hline \end{array} 0 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \square & \square \\ \hline 0 & \times & 0 \\ \hline \end{array} 0 \quad 0 \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \end{array} 0$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | |
| 2 | 2 | 3 | 5 |

| | | | |
|---|--|--|--|
| | | | |
| × | | | |

\emptyset

| | |
|--|--|
| | |
|--|--|

$$1 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \times \\ \hline \end{array} 1 \quad 0 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \times \\ \hline \end{array} 0 \quad 0 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \times \\ \hline \end{array} 0 \quad \emptyset$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 4 |
| 2 | 2 | 3 | 5 |

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \emptyset & \boxed{} & \boxed{} \\
& & & & & & \\
0 \boxed{} & 0 & 0 \boxed{} & 0 & 0 \boxed{} & 0 & \emptyset
\end{array}$$

残りの計算も行うと以下の像が得られる。

$$\boxed{1 \ 1 \ 1 \ 1} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}.$$

Φ のアルゴリズム 基本的には上記 Φ^{-1} のアルゴリズムを逆向きに行えばよい。 $A_1^{(1)}$ かつ $(B^{1,1})^{\otimes L}$ 型の場合のアルゴリズムは 22 ページに与えた。

一般の場合に最も基本となる操作は以下の通り。path の Young 盤の文字 j を考えるとき、 $\nu^{(j-1)}$ から以下の手続きを順に繰り返す ($\ell^{(j)} = \infty$ と仮定する)。 $\nu^{(a)}$ の長さ $\ell^{(a)}$ の特異な行が選ばれたとき、 $\nu^{(a-1)}$ の長さ $\ell^{(a)}$ 以下の特異な行のうち最大のものを選び、まず目を一つ加える。その様なものがなければ、 $(0, 0)$ という特異なストリングが存在すると考えて、長さ 1 の行を $\nu^{(a-1)}$ に付け加える。新しい rigging は、変更を受けた行については新しい艦装配位において特異な行となるように定め、他のものは元のままとする。

8.5 超離散タウ関数

$A_n^{(1)}$ 型 $\otimes_{k=1}^L B^{1,s_k}$ の場合、すなわち path の Young 盤が全て一行型の場合、 Φ^{-1} の明示的公式が存在する [KSY]。32 ページで述べたように箱玉系の運動は艦装配位上で線形化されるので、 Φ^{-1} の明示的公式と併せて箱玉系の初期値問題の完全な解が構成されたことになる。

定式化 具体的な式を記述するため本節内で使用する記号をいくつか用意しよう。与えられた分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ に対し

$$|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_N, \quad \lambda_{[k]} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \quad (1 \leq k \leq N)$$

と書くことにしよう。更にもう一つの分割 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_M)$ に対し

$$\min(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \min(\lambda_i, \mu_j)$$

と書くことにする。

(ν, J) を与えられた艦装配位としよう。本節では艦装配位としては最高ウェイト元に限らず一般的なものを考えてよい。 $A_n^{(1)}$ 型で最も一般的な艦装配位は 28 ページの式 (20) で与えたものであるが、現在は $\otimes_{k=1}^L B^{1,s_k}$ 型の path のみを考察しているので $\mu^{(1)} = \dots = \mu^{(n-1)} = \emptyset$ とする。そこで $\mu^{(0)}$ を改めて $\nu^{(0)}$ と書くことにすれば、現在の設定での艦装配位は

$$(\nu, J) = \left(\nu^{(0)}, (\nu^{(1)}, J^{(1)}), \dots, (\nu^{(n)}, J^{(n)}) \right) \quad (37)$$

と表される。 $\mu^{(a)}$ の添え字 a をずらしていたのはこの様な状況を念頭に置いての事だったが、実は現在の状況では更に踏み込んで艦装配位に以下のような再帰的構造が存在する事が分かる。具体的には

$$(\nu, J)^{(a)} := \left(\nu^{(a)}, (\nu^{(a+1)}, J^{(a+1)}), \dots, (\nu^{(n)}, J^{(n)}) \right) \quad (38)$$

を艦装配位と考え Φ^{-1} を求める。その時得られた像と $J^{(a)}$ の情報とを合わせると結晶基底を用いた代数的な方法で

$$\Phi^{-1} \left(\nu^{(a-1)}, (\nu^{(a)}, J^{(a)}), \dots, (\nu^{(n)}, J^{(n)}) \right)$$

を決定することができる [Sa06]。特にこの時艦装配位の上にアフィン組み合わせ R 行列 (24) の構造が入る。

艦装配位 (ν, J) の上にチャージ関数と呼ばれる量

$$c(\nu, J) = \frac{1}{2} \sum_{a,b} C_{a,b} \min(\nu^{(a)}, \nu^{(b)}) - \min(\nu^{(0)}, \nu^{(1)}) + \sum_{a,i} J_i^{(a)} \quad (39)$$

を定義する。ここで $(C_{ab})_{1 \leq a,b \leq n}$ は A_n 型の Cartan 行列である。数学的な背景として、いわゆる Kostka–Foulkes 多項式は艦装配位上のチャージ関数の母関数となっている [KSS]。なお、以下では艦装配位 (ν, J) を考えるとき $\nu^{(0)} = (\nu_1^{(0)}, \dots, \nu_N^{(0)})$ の並び方は単調非増加に限らず任意の並び方を選ぶことにして、一つ固定しておこう。これは Φ^{-1} の像として $B^{1, \nu_1^{(0)}} \otimes \dots \otimes B^{1, \nu_N^{(0)}}$ を考察することに対応する。

さて艦装配位を拡張して

$$(\nu, J)_{[k]} = \left((\nu^{(0)})_{[k]}, (\nu^{(1)}, J^{(1)}), \dots, (\nu^{(n)}, J^{(n)}) \right) \quad (40)$$

という量を考えよう。 $\nu^{(0)}$ の長さが N であれば $(\nu, J)_{[N]} = (\nu, J)$ である。更に

$$(\mu, I) \subseteq (\nu, J)_{[k]}$$

と書いた時、 $(\nu, J)_{[k]}$ をストリング $(\nu_i^{(a)}, J_i^{(a)})$ の集合と考えた場合の部分集合であって、 $(\nu^{(0)})_{[k]}$ は固定したものを考える。そうして得られる集合 $(\mu, I) \subseteq (\nu, J)_{[k]}$ の上にも形式的にチャージ関数 $c(\mu, I)$ を定義することにしよう。ここで超離散タウ関数を

$$\tau_{k,d} = \max_{(\mu, I) \subseteq (\nu, J)_{[k]}} \left\{ -c(\mu, I) - |\mu^{(d)}| \right\} \quad (1 \leq d \leq n+1), \quad (41)$$

$$\tau_{k,0} = \tau_{k,n+1} - |(\nu^{(0)})_{[k]}|$$

と定義する。ただし $\nu^{(n+1)} = \emptyset$ と仮定した。この時、主要な結果は

定理 [KSY]

像 $b = \Phi^{-1}(\nu, J)$ の k 番目の因子 b_k に含まれる文字 d の個数 $x_{k,d}$ は

$$x_{k,d} = \tau_{k,d} - \tau_{k-1,d} - \tau_{k,d-1} + \tau_{k-1,d-1}.$$

右辺は艦装配位 (ν, J) によって表される関数であるから、写像 Φ^{-1} を解析的に表示したことになる。大きな式なのですぐには構造が分かりにくいかもしれないが、もっとも単純な $A_1^{(1)}$ 型 $(B^{1,1})^{\otimes L}$ の場合の式が 26 ページの脚注に記載されている。

組み合わせ論的解釈 超離散タウ関数の重要な性質として、箱玉系を用いた組み合わせ論的解釈をもつ。path $b = b_1 \otimes \cdots \otimes b_L \in \bigotimes_{k=1}^L B^{1, \nu_k^{(0)}}$ の Young 盤による表示において、文字 1 を空きスペース、文字 2, 3, ..., $n+1$ をそれぞれの文字でラベル付された玉と解釈する。 $T_\infty^t(b) = b_1^{(t)} \otimes \cdots \otimes b_L^{(t)}$ と書く。path b を 1 行目、 $T_\infty(b)$ を 2 行目、 $T_\infty^2(b)$ を 3 行目、...、と並べたもの考えるときに、 $1 \leq k \leq L$ に対し関数 $\rho_{k,d}$ を以下のように定める。

$$\rho_{k,d} = (b_1 \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_k \text{ における玉 } 2, 3, \dots, d \text{ の総数}) + \sum_{i \geq 1} (b_1^{(i)} \otimes b_2^{(i)} \otimes \cdots \otimes b_k^{(i)} \text{ の全ての玉の個数}). \quad (42)$$

箱玉系の時間発展は右向きに進行するので、第二項の和は有限和となる。

さて超離散タウ関数は

$$\tau_{k,d} = \rho_{k,d} \quad (43)$$

という性質を持つ。この等式が示されれば、 $\rho_{k,d}$ の意味を考えれば先ほどの定理はただちに従う。

ここで $L = 20$ の T_∞ 時間発展の例を見てみよう。以下テンソル積の記号は省略してスペースで表し、また Young 盤は内部の文字だけを並べて表すことにしよう。

$t = 0$: 1 2 23 124 3 1111 3 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 $t = 1$: 1 1 12 123 2 1134 1 3 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 $t = 2$: 1 1 11 112 1 1223 4 1 3 3 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 $t = 3$: 1 1 11 111 2 1111 3 4 2 2 3 3 1 1 1 1 1 1 1 1
 $t = 4$: 1 1 11 111 1 1112 1 3 1 1 2 2 4 3 3 1 1 1 1 1
 $t = 5$: 1 1 11 111 1 1111 2 1 3 1 1 1 2 2 1 4 3 3 1 1

$\rho_{k,d}$ ないし $\tau_{k,d}$ の値は以下の通り。

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|--------------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $\rho_{k,1}$ | 0 | 0 | 1 | 4 | 6 | 12 | 15 | 19 | 23 | 27 | 31 | 35 | 39 | 43 | 47 | 51 | 55 | 59 | 63 | 67 |
| $\rho_{k,2}$ | 0 | 1 | 3 | 7 | 9 | 15 | 18 | 22 | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 | 58 | 62 | 66 | 70 |
| $\rho_{k,3}$ | 0 | 1 | 4 | 8 | 11 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 37 | 41 | 45 | 49 | 53 | 57 | 61 | 65 | 69 | 73 |
| $\rho_{k,4}$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 12 | 18 | 22 | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 | 58 | 62 | 66 | 70 | 74 |

なお各 t に対する艦装配位を計算すれば以下のようなになる (vacancy number は略)。

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} -2 + 3t \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} 0 \quad \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} 0$$

これは 32 ページで述べた箱玉系の逆散乱形式の例となっている。

証明の概略 上述のように主要な目標は等式 (43) の証明である。まず箱玉系の玉と運搬車による時間発展の解釈 [HHIKTT] を用いると、箱玉系の運動を表す $\rho_{k,d}$ が

$$\bar{\rho}_{k,d-1} + \rho_{k-1,d} = \max(\bar{\rho}_{k,d} + \rho_{k-1,d-1}, \bar{\rho}_{k-1,d-1} + \rho_{k,d} - \nu_k^{(0)}) \quad (44)$$

という超離散 Hirota 双線形形式を満たすこと [KSY, Proposition 4.2] に注意する。ここで $\bar{\rho}_{k,d}$ とは $T_\infty(b)$ に対する $\rho_{k,d}$ の事を表す。

続いて $\tau_{k,d}$ も同一の方程式を満たすこと

$$\bar{\tau}_{k,d-1} + \tau_{k-1,d} = \max(\bar{\tau}_{k,d} + \tau_{k-1,d-1}, \bar{\tau}_{k-1,d-1} + \tau_{k,d} - \nu_k^{(0)}) \quad (45)$$

を証明する [KSY, §5]。ここで $\bar{\tau}_{k,d}$ は $\rho_{k,d}$ の場合と同様の記号法であり、箱玉系の逆散乱形式により rigging を $J_i^{(1)} \mapsto J_i^{(1)} + \nu_i^{(1)}$ と変化させた $\tau_{k,d}$ の事を表す。この式を直接証明するのは難しいので、少々技巧的な方法を用いる。すなわち超離散極限で定義 (41) を与えるような行列式を見つけてくることができ (43 ページに補足あり)、後は本質的には行列式 of 非自明な恒等式 (KP 階層の理論 [JM] で現れる双線形形式) に証明を帰着させる。なお今の所この様にしてソリトン系と関連付けられたという事実自体が数学的に意味のある結果なのか、あるいはただの計算上の方便なのかははっきりとしていない。

以上式 (44) と式 (45) が示されたことにより、 $\rho_{k,d}$ と $\tau_{k,d}$ は同じ箱玉系の力学系に従うことが分かり、従って系がもっとも単純化する十分時間発展した後の状態 $T_\infty^S(b)$ ($S \gg 1$) について $\tau_{k,d} = \rho_{k,d}$ を確かめればよいことが分かった (この様な状態を漸近状態と呼ぼう)。写像 Φ^{-1} の定義は組み合わせ論的なものであり、そのままでは何も進まないで、ここから先は本格的に組み合わせ論の深い議論が必要となる場面である。

まず path b が最高ウェイト元である場合には艦装配位のはっきりとした特徴づけが存在するのでその場合の漸近状態について $\tau_{k,d} = \rho_{k,d}$ を確かめる。証明は代数 $A_n^{(1)}$ のランク n による帰納法による。 $A_1^{(1)}$ の場合は [Sa06] における艦装配位写像とエネルギー関数の関係を用いて直接示せる。一般の場合を考察するために、まず補助的にアフィンクリスタルに対する Yang–Baxter 関係式を用いて $\rho_{k,d}$ のエネルギー関数を用いた表示 ([KSY, §4] 参照) を準備する。さて、帰納法を走らせるために式 (38) 周辺で指摘した艦装配位の帰納的構造を用いる。この時 $(\nu, J)^{(a)}$ に対して定義したタウ関数を $\tau_{k,d}^{(a)}$ と書くことにすれば、タウ関数に対しても帰納的構造

$$\tau_{k,d}^{(a-1)} = \max_{(\mu, I) \subseteq (\nu^{(a)}, J^{(a)})} \left\{ \min(\nu_{[k]}^{(a-1)}, \mu) - \min(\mu, \mu) - \sum_i I_i^{(a)} + \tau_{\ell(\mu), d}^{(a)}(\mu, I) \right\}, \quad (46)$$

ここで $\ell(\mu)$ は分割 μ の長さ、が成り立つことに注意する。この式を漸近状態について詳しく解析すると、[Sa06] で艦装配位上に導入されたエネルギー関数の構造を絶妙に利用することができ、帰納法の仮定を用いて証明が完成する (かなめは [KSY, Lemma 6.6])。元々論文 [Sa06] はここでの使用を念頭に置いて執筆されたもので、艦装配位上にエネルギー関数の構造を導入するにはかなりハードな組み合わせ論的証明が要求される。

最終的に最高ウェイト元に限らない一般のテンソル積に対して $\tau_{k,d} = \rho_{k,d}$ を証明するには、明らかに技巧的なやり方で ([KSY, §7] 参照) 最高ウェイト元の場合から一般の結果を切り出して証明できる。箱玉系の運動の特性を巧妙に使用した議論となる。

証明に関するコメント 箱玉系の初期値問題の解決は当時懸案の難問となっていたが、逆散乱形式 (32 ページ) にみられるように、一目で見ることのできるソリトン $(\nu^{(1)}, J^{(1)})$ だけでなく、一段奥まったところにある他のソリトン $(\nu^{(a)}, J^{(a)})$ まで考慮しなければならない点が難関だったのだろうと思われる。実際上記証明中で [JM] におけるソリトン理論と比較した際もそれらすべてのソリトンが独立した形で寄与してくる。艦装配位写像のような強力な理論的枠組みがなければとても解けなかったのではないかと考えている。

8.6 Cylindric Loop Schur 関数

$A_{n-1}^{(1)}$ 型 $\otimes_{k=1}^L B^{1,s_k}$ の場合、 Φ によって得られる分割 $\nu^{(a)}$ は Cylindric Loop Schur 関数によって記述できることが知られている [LPS2]。この節の内容について Mathematica によるプログラム例が

<https://sites.google.com/site/affinecrystal/rigged-configurations>

にて入手可能ですのでご利用ください。

以下本節では超離散極限における変数を x_i 、対応する連続関数の世界における変数を x_i などと区別して表示することにする。また理解しやすくするために文字 n と L はそれぞれ $A_{n-1}^{(1)}$ (ないし $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$) と $\otimes_{k=1}^L B^{1,s_k}$ に出てくるものとして固定しておこう。

Loop 対称関数 Loop 対称関数は組み合わせ R 行列の連続関数版に対する不変式の研究に伴って Yamada [Y00] によって導入された Loop 基本対称式と呼ばれるものを嚆矢とする一連の関数のクラスである。Loop 対称関数は変数 $x_i^{(j)}$ に対する関数であり、上付きの添え字 $\bullet^{(j)}$ を $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元であるとみなすところが特徴である。

その後の Lam–Pylyavskyy による研究の解説は [L] に与えられている。特に彼らの未公表の結果 [L, Theorem 4.4] によれば全ての R 不変量は Loop 基本対称式により生成される環 LSym と一致する。艦装配位も R 不変量であるから原理的には Loop 対称関数による表示を持つはずである。しかし「原理的に表示可能」と「実際に表示可能」は別物であるし、むしろその差が大きければ大きいほど数学としては興味深い問題と言えるだろう。実際以下で見るように艦装配位のうち $\nu^{(a)}$ の部分についてはまずまず納得のいく結果が得られているが、rigging $J^{(a)}$ の方は難しく、時間発展を十分させた後の状態 $T_\infty^S(b)$ ($S \gg 1$) —40 ページで漸近状態と呼んだもの—について部分的な結果が得られている [Scr16] のみである。そしてそれらは既に (33 ページの式 (33) や 40 ページの議論で) 示したように、艦装配位の理論の中では単純化することが知られている領域であるし、かなり正体のはっきりしている部分でもある。残る rigging の部分から興味深い数学が見つければ良いと思う (§6 における Bethe 仮説方程式の解の解析でもその部分に興味深い構造が隠されていたのであった)。

艦装配位との関連では [LPS2] によって導入された Cylindric Loop Schur 関数が重要である。定義は通常の Schur 関数に対するタブローを用いた定義と並行したやり方でなされる。以下順を追って導入して行こう。 $r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を一つ選んだ時、タブローの各文字 $T(i, j)$ と変数との対応を以下の規則によって定める。

| | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|---|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------|
| $T(1, 1)$ | $T(1, 2)$ | $T(1, 3)$ | $T(1, 4)$ | \cdots | → | $x_{T(1,1)}^{(r)}$ | $x_{T(1,2)}^{(-1+r)}$ | $x_{T(1,3)}^{(-2+r)}$ | $x_{T(1,4)}^{(-3+r)}$ | \cdots |
| $T(2, 1)$ | $T(2, 2)$ | $T(2, 3)$ | $T(2, 4)$ | \cdots | | $x_{T(2,1)}^{(1+r)}$ | $x_{T(2,2)}^{(r)}$ | $x_{T(2,3)}^{(-1+r)}$ | $x_{T(2,4)}^{(-2+r)}$ | \cdots |
| $T(3, 1)$ | $T(3, 2)$ | $T(3, 3)$ | $T(3, 4)$ | \cdots | | $x_{T(3,1)}^{(2+r)}$ | $x_{T(3,2)}^{(1+r)}$ | $x_{T(3,3)}^{(r)}$ | $x_{T(3,4)}^{(-1+r)}$ | \cdots |
| $T(4, 1)$ | $T(4, 2)$ | $T(4, 3)$ | $T(4, 4)$ | \cdots | | $x_{T(4,1)}^{(3+r)}$ | $x_{T(4,2)}^{(2+r)}$ | $x_{T(4,3)}^{(1+r)}$ | $x_{T(4,4)}^{(r)}$ | \cdots |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots |

(47)

右辺に現れる変数の積を $x^{\text{wt}^{(r)}(T)}$ と書くことにすれば、Loop Schur 関数とは

$$s_{\lambda/\mu}^{(r)}(\mathbf{x}) = \sum_T x^{\text{wt}^{(r)}(T)} \quad (48)$$

で定義される。ここで和は文字 $1, 2, \dots, L$ による λ/μ 型 Young 準標準盤の全体をわたる。

例 $n = 3$ とする。 $\lambda = (2, 1)$ および $L = 3$ の場合以下のタブローが存在する。

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}
 \end{array} \tag{49}$$

$r = 1$ とした上で対応 (47) を用いると、各 Young 盤から以下の多項式が得られる。

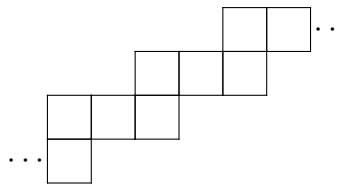
$$\begin{aligned}
 s_{2,1}^{(1)}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^{(1)} x_1^{(3)} x_2^{(2)} + x_1^{(1)} x_2^{(3)} x_2^{(2)} + x_1^{(1)} x_2^{(3)} x_3^{(2)} + x_1^{(1)} x_3^{(3)} x_2^{(2)} + \\
 & x_1^{(1)} x_1^{(3)} x_3^{(2)} + x_2^{(1)} x_2^{(3)} x_3^{(2)} + x_1^{(1)} x_3^{(3)} x_3^{(2)} + x_2^{(1)} x_3^{(3)} x_3^{(2)},
 \end{aligned}$$

$x_i^{(1)} = x_i^{(2)} = x_i^{(3)} = x_i$ と置けば通常の Schur 多項式 $s_{2,1}(x_1, x_2, x_3)$ が得られる。

Cylindric Loop Schur 関数 Loop Schur 関数を以下のように拡張する。二つの分割 λ と μ から歪分割 λ/μ を作る。その時 $\mathcal{D}_a(\lambda/\mu)$ とは分割 λ/μ を 2 次元平面に配置したと考え、 $(n - a, a)$ ずつシフトさせていって無限につなげた円柱状分割とする。同様にしてタブローに対しても円柱版を考えるが、そうしてできたタブローの各行、各列が準標準盤の条件を満たす時、円柱状タブローと呼ぶことにしよう。対応 (47) においてシフト $(n - a, a)$ は添え字 $\bullet^{(j)}$ に影響しないので、Loop Schur 関数 (48) と同様にして円柱状タブローについても多項式が定まり、Cylindric Loop Schur 関数とよぶ。もし $\lambda_1 < n - a$ であれば円柱状分割は通常の分割の非連結和となることから $s_{\mathcal{D}_a(\lambda/\mu)}^{(r)} = s_{\lambda/\mu}^{(r)}$ となる。

重要な性質として、Cylindric Loop Schur 関数は全て R 不変量となっている [LPS2, Theorem 4.4]。

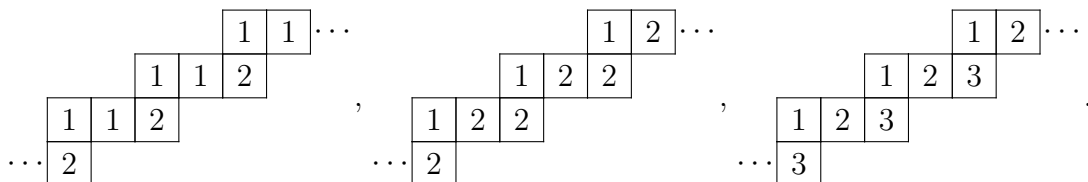
例 $n = 3$ および $a = 1$ の時シフトとしては $(n - a, a) = (2, 1)$ を考える。分割 $\lambda = (2, 1)$ を考えると対応する円柱状分割 $\mathcal{D}_1(\lambda)$ は以下の通り：



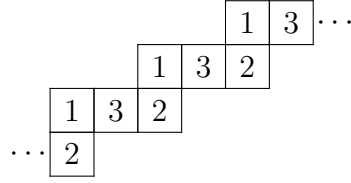
先ほどの例と同じ状況で考えよう。 $L = 3$ とすると、Cylindric Loop Schur 関数は以下の通り。

$$\begin{aligned}
 s_{\mathcal{D}_1(2,1)}^{(1)}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^{(1)} x_1^{(3)} x_2^{(2)} + x_1^{(1)} x_2^{(3)} x_2^{(2)} + x_1^{(1)} x_2^{(3)} x_3^{(2)} + \\
 & x_1^{(1)} x_1^{(3)} x_3^{(2)} + x_2^{(1)} x_2^{(3)} x_3^{(2)} + x_1^{(1)} x_3^{(3)} x_3^{(2)} + x_2^{(1)} x_3^{(3)} x_3^{(2)}.
 \end{aligned}$$

円柱状ではない場合 (49) にあげた 8 個の Young 準標準盤が存在する。そのうち最初の 3 つをシフト $(2, 1)$ により円柱状に伸ばすと、以下のように準標準盤の条件を満たす。



しかしながら 4 つ目のタブローは以下のように円柱状タブローとはならない。



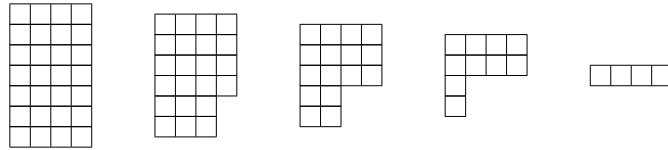
従ってこの項は $s_{\mathcal{D}_1(2,1)}^{(1)}$ には寄与しない。残る 4 つのタブローは $s_{\mathcal{D}_1(2,1)}^{(1)}$ に寄与することも同様にして確かめることができる。

臙装配位との関連 結果を定式化するためにいくつか準備をしよう。テンソル積 $b = b_1 \otimes \dots \otimes b_L \in B^{1,s_1} \otimes \dots \otimes B^{1,s_L}$ をタブロー表示したときに $x_j^{(i+j-1)}$ で b_{L+1-j} における文字 i の個数を表すものとする。例えば $n = 3$ かつ $L = 4$ の時

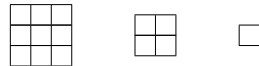
$$\boxed{1x_4^{(1)} 2x_4^{(2)} 3x_4^{(3)}} \otimes \boxed{1x_3^{(3)} 2x_3^{(1)} 3x_3^{(2)}} \otimes \boxed{1x_2^{(2)} 2x_2^{(3)} 3x_2^{(1)}} \otimes \boxed{1x_1^{(1)} 2x_1^{(2)} 3x_1^{(3)}}$$

となる。

次に $1 \leq a \leq (n-1)$ に対し分割 $\lambda(a, i)$ を以下のように再帰的に定める。最初に $\lambda(a, 0) = (n-a)^L$ 、すなわち長さ $(n-a)$ の行 L 本からなる長方形とする。 $\lambda(a, i)$ まで定まったとき、 $\lambda(a, i+1)$ は $\lambda(a, i)$ の最も左下のます目からスタートして、右または上向きに $\lambda(a, i)$ の外縁のます目を最大 n 個削除して得られる分割とする。 i が十分大きくなると $\lambda(a, i)$ は空集合となる。例えば $n = 6, a = 2$ および $L = 7$ の時は以下のようなになる。



一方 $n = 6, a = 3$ および $L = 3$ の時は各ステップで必ずしも n 個のます目を取ることはできず、以下のようなになる。



最後に有理関数 $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$ の超離散化ないしトロピカル化 $\text{trop}(P)(x_1, x_2, \dots, x_r)$ とは有理関数 $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$ の中で形式的に $+ \mapsto \min, \times \mapsto +$ および $\div \mapsto -$ と置き換えることとする。この極限の概念的問題については既に 26 ページから始まる項目『超離散極限について』で詳しく検討したが、ここでは技術的側面について若干補足しておこう。今与えた定式化では $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$ は負符号が含まれない正整数係数多項式の商であることが望ましいが、対数と極限を用いた理解 (25 ページ式 (16) 参照) によればこれは本質的な問題ではなく、特異性の問題を何らかの形で回避できればより一般的な係数を持っていても良いことになる。実際 40 ページでの議論はそのようなものであり、結果として行列式の超離散極限を取っている。式 (16) の場合も厳密に言えば正整数係数有理関数の範疇を超えている。よって超離散化の問題を考察するときに頭から正整数係数有理関数であることを仮定する訳にはいかない。なお、当然のことながら超離散化の過程で係数の情報は消し去られてしまっているので、超離散化された式から元の式を復元することは不可能である。

以上の準備の下で結果を述べよう。 $\Phi(b)$ に現れる分割 $\nu^{(a)} = (\nu_1^{(a)}, \nu_2^{(a)}, \dots)$ は

$$\nu_i^{(a)} = \text{trop} \left(\frac{s_{\mathcal{D}_a(\lambda(a, i-1))}^{(0)}}{s_{\mathcal{D}_a(\lambda(a, i))}^{(0)}} \right) (x_i^{(k)}) \quad (50)$$

で与えられる。 $a = 1$ の場合これは定理であり [LPS2, Theorem 6.1]、 $a > 1$ の場合は予想である [LPS2, Conjecture 5.3]。証明は 33 ページの式 (33) で与えた $\nu^{(a)}$ のエネルギー関数による表示と [LP] によるエネルギー関数の Loop Schur 関数による表示とを用いる。

$a = 1$ の場合の定理 (50) から得られる興味深い結果の一つは、 $A_{n-1}^{(1)}$ 型の長さ L の path に含まれるソリトンの個数は最大

$$\left\lceil \frac{(n-1)L}{n} \right\rceil$$

である。ここで天井関数 $\lceil N \rceil$ とは N 以上の最小の整数とする。

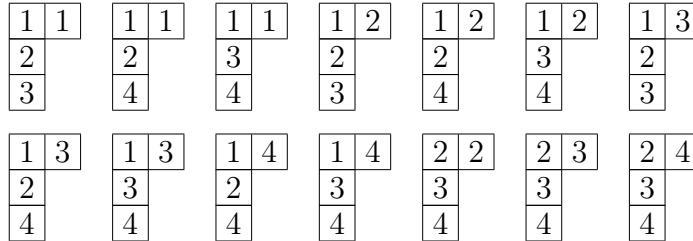
例 $a = 2$ の場合の予想 (50) の例を考えよう。具体的には $n = 4$ および $L = 4$ の場合を考える。この時 $\lambda(2, 0), \lambda(2, 1), \dots$ は以下の通り。



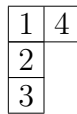
ここから $\mathcal{D}_2(\lambda(a, i))$ を構成するにはシフト $(n-a, a) = (2, 2)$ を考えればよい。文字 $1, \dots, L$ によるタブローを考えるので、 $s_{\mathcal{D}_2(2,2,2,2)}^{(0)}$ は一項のみである。

$$s_{\mathcal{D}_2(2,2,2,2)}^{(0)} = x_1^{(4)} x_1^{(3)} x_2^{(1)} x_2^{(4)} x_3^{(2)} x_3^{(1)} x_4^{(3)} x_4^{(2)}.$$

次に $s_{\mathcal{D}_2(2,1,1)}^{(0)}$ には以下の 14 個のタブローが該当するが



次のタブローは円柱状タブローの条件を満たさず $s_{\mathcal{D}_2(2,1,1)}^{(0)}$ には含まれない。



従って以下のような多項式を得る。

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{D}_2(2,1,1)}^{(0)} = & x_1^{(4)} x_1^{(3)} x_2^{(1)} x_3^{(2)} + x_1^{(4)} x_1^{(3)} x_2^{(1)} x_4^{(2)} + x_1^{(4)} x_1^{(3)} x_3^{(1)} x_4^{(2)} + x_1^{(4)} x_2^{(3)} x_2^{(1)} x_3^{(2)} \\ & + x_1^{(4)} x_2^{(3)} x_2^{(1)} x_4^{(2)} + x_1^{(4)} x_2^{(3)} x_3^{(1)} x_4^{(2)} + x_1^{(4)} x_3^{(3)} x_2^{(1)} x_3^{(2)} + x_1^{(4)} x_3^{(3)} x_2^{(1)} x_4^{(2)} \\ & + x_1^{(4)} x_3^{(3)} x_3^{(1)} x_4^{(2)} + x_1^{(4)} x_4^{(3)} x_2^{(1)} x_4^{(2)} + x_1^{(4)} x_4^{(3)} x_3^{(1)} x_4^{(2)} + x_2^{(4)} x_2^{(3)} x_3^{(1)} x_4^{(2)} \\ & + x_2^{(4)} x_3^{(3)} x_3^{(1)} x_4^{(2)} + x_2^{(4)} x_4^{(3)} x_3^{(1)} x_4^{(2)}. \end{aligned}$$

path $b = b_1 \otimes b_2 \otimes b_3 \otimes b_4$ に対して以下のような座標を用いることにしよう。

$$\begin{aligned} b = & \boxed{1x_4^{(4)} 2x_4^{(1)} 3x_4^{(2)} 4x_4^{(3)}} \otimes \boxed{1x_3^{(3)} 2x_3^{(4)} 3x_3^{(1)} 4x_3^{(2)}} \otimes \boxed{1x_2^{(2)} 2x_2^{(3)} 3x_2^{(4)} 4x_2^{(1)}} \otimes \boxed{1x_1^{(1)} 2x_1^{(2)} 3x_1^{(3)} 4x_1^{(4)}} \\ = & \boxed{1^a 2^b 3^c 4^d} \otimes \boxed{1^e 2^f 3^g 4^h} \otimes \boxed{1^i 2^j 3^k 4^l} \otimes \boxed{1^m 2^n 3^o 4^p}. \end{aligned}$$

その時

$$\begin{aligned} \text{trop } s_{\mathcal{D}_2(2,2,2,2)}^{(0)} &= p + o + l + k + h + g + d + c, \\ \text{trop } s_{\mathcal{D}_2(2,1,1)}^{(0)} &= \min(p + o + l + h, p + o + l + c, p + o + g + c, p + j + l + h, \\ &\quad p + j + l + c, p + j + g + c, p + e + l + h, p + e + l + c, \\ &\quad p + e + g + c, p + d + l + c, p + d + g + c, k + j + g + c, \\ &\quad k + e + g + c, k + d + g + c). \end{aligned}$$

すると式 (50) は $\nu_1^{(2)} = \text{trop } s_{\mathcal{D}_2(2,2,2,2)}^{(0)} - \text{trop } s_{\mathcal{D}_2(2,1,1)}^{(0)}$ および $\nu_2^{(2)} = \text{trop } s_{\mathcal{D}_2(2,1,1)}^{(0)}$ となる。
数値的な例を考えると、以下の paths

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p\} = \{3, 2, c, 3, 3, 3, 1, 0, 0, 3, 0, 2, 1, 0, 3, 3\}$$

に対して $\Phi(b)$ は以下ようになる。

| c | $(\nu_1^{(1)}, J_1^{(1)})$ | $(\nu_2^{(1)}, J_2^{(1)})$ | $(\nu_3^{(1)}, J_3^{(1)})$ | $(\nu_1^{(2)}, J_1^{(2)})$ | $(\nu_2^{(2)}, J_2^{(2)})$ | $(\nu_1^{(3)}, J_1^{(3)})$ |
|-----|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 0 | (8, -2) | (8, -2) | (4, -1) | (8, 4) | (4, 0) | (8, -7) |
| 1 | (9, -2) | (8, -1) | (4, -1) | (8, 2) | (5, -1) | (8, -6) |
| 2 | (10, -2) | (8, 0) | (4, -1) | (8, 0) | (6, -2) | (8, -5) |
| 3 | (11, -2) | (8, 1) | (4, -1) | (8, -2) | (7, -3) | (8, -4) |
| 4 | (12, -2) | (8, 2) | (4, -1) | (8, -4) | (8, -4) | (8, -3) |
| 5 | (13, -2) | (8, 2) | (4, -1) | (9, -5) | (8, -4) | (8, -3) |
| 6 | (14, -2) | (8, 2) | (4, -1) | (10, -6) | (8, -4) | (8, -3) |
| 7 | (15, -2) | (8, 2) | (4, -1) | (11, -7) | (8, -4) | (8, -3) |

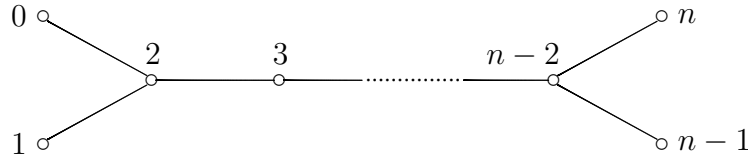
この結果は式 (50) による結果に一致する。一見して明らかなように riggings の振る舞いは $\nu^{(a)}$ の振る舞いよりはるかに複雑である。

8.7 $D_n^{(1)}$ 型艦装配位

$A_n^{(1)}$ 型艦装配位の理論を振り返ってみると、最も核心部を成す艦装配位写像とは組み合わせ R 行列の親玉のような存在である、という点に注目すべきであろう。ところが $A_n^{(1)}$ 型の場合必要となる組み合わせ論的構造は Lascoux–Schützenberger 理論等に代表される代数的組み合わせ論の世界では既によく知られた構造であり、ある意味では結晶基底導入以前に既に存在していたと言っても良いほどのものであった。この点に関する一部の研究者の不満は根深いものようであり、「あなたたちの研究は既に知られている事実の再定式化や単純な拡張に過ぎず、本質的には何も新しい発見をしていない」という意見が噴出するのやむを得ないものと思っている。

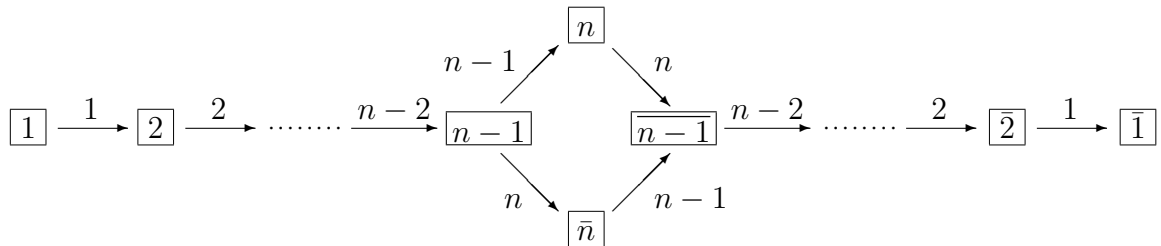
幸いにして艦装配位の理論は従来の代数的組み合わせ論の手法では全く手が付けられなかったような問題でも十分に扱える場合がある。以下ではそのような事例について詳しく紹介し、今紹介したようなご意見に対する一つの答えとしようと思う。もちろんこれまで組み合わせ論に携わる多くの研究者にとって難問であった問題であれば、艦装配位の枠組みで研究してもその過程で大きな困難を伴うのは当然のことである。壁が高ければ高いほど新しい結果を得ている証拠であると思って先へ進むことにする。

クリスタル $B^{r,s}$ 以下では $D_n^{(1)}$ 型の場合を考える。Dynkin 図は以下の通り。



$A_n^{(1)}$ 型の場合であればクリスタル $B^{r,s}$ とは長方形型の Young 準標準盤の全体、と簡単に言ってしまえるのでイメージもわかりやすいのであるが、 $D_n^{(1)}$ 型の場合はすでにこの段階からかなり厄介な問題が生じる。

手始めは簡単な $B^{1,1}$ から始めよう。この場合 $B^{1,1}$ は一ますのタブロー $\boxed{1}, \boxed{2}, \dots, \boxed{n}, \overline{\boxed{n}}, \dots, \overline{\boxed{2}}, \overline{\boxed{1}}$ からなる。柏原作用素 \tilde{f}_a を矢印にラベル a を添えて表示することになると、 $B^{1,1}$ 上の D_n の作用 (クリスタルグラフという) は以下の通り。



念のため付け加えておくと、 $D_n^{(1)}$ 型の場合これらの作用に加えて

$$\tilde{f}_0 : \overline{\boxed{2}} \mapsto \boxed{1}, \quad \tilde{f}_0 : \overline{\boxed{1}} \mapsto \boxed{2}$$

という作用が存在するので $B^{1,1}$ は最高ウェイト表現ではなくなる。

一般の $B^{r,s}$ では、部分代数 D_n に制限した時、ウェイトとして縦 r 横 s の長方形から縦ドミノ $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$ を任意個数取り除いたものを持つ表現が一つずつ発生する。Kashiwara–Nakashima タブロー $[KN]$ とはそれら古典部分代数の表現のウェイトと同じ形の Young 盤に $B^{1,1}$ の時と同じ文字を埋めて $B^{r,s}$ の元を実現するという方法である。しかし無限次元の代数 $D_n^{(1)}$ を扱う場合にはこのやり方では深刻な困難に直面する。

そもそも $D_n^{(1)}$ の Kirillov–Reshetikhin クリスタルといった場合 $B^{r,s}$ という形で表されることから想像がつくように、基本的には長方形型の対象を取り扱う方が自然である。よって Kashiwara–Nakashima タブローを縦 r 横 s の長方形に置いた時に現れる「すき間」は一見空っぽに見えるが本当は情報が含まれているべき場所である。実際 A 型の場合の真似をして組み合わせ R 行列を D 型版 row insertion によって計算してみようと思えばすぐに分かるように、重要な情報が次々消去されて「すき間」に飲み込まれていってしまい計算不能になる。

よって $D_n^{(1)}$ のクリスタル $B^{r,s}$ の表示は長方形型の対象であるべきである。その様な問題意識を持っていた研究者も存在していたが何の方針もなく探してもうまく行かなかったようである。艦装配位写像を用いることによりそのような長方形型タブローを構成することができる $[OSS11]$ 。この様なタブローは KR タブローと呼ばれ、詳細な定義は §8.8 で与えることとするが、以下で必要となる重要な点のみ述べる。

KR タブローは縦 r 横 s の長方形タブローであり、古典部分代数 D_n に関する最高ウェイト元についてのみ明示的に定義される。すなわち他のタブローは適切な \tilde{f}_a の列を作用させて定義される。その場合一般のタブローの形はかなり複雑であり、Kashiwara–Nakashima タブローにみられるような特徴づけを与えることは今の所成功していない。なお D 型以外の非例外型アフィン代数について行われた観察 $[ScSer14]$ によれば、 D 型以外でもほぼ同じ定義で良いようであり、普遍性がある。同様な方向で定義すれば、艦装配位写像を構成すると懸案だった例外型の E 型代数に対してもタブロー表示を定義できると思われる。

$D_n^{(1)}$ 型 艦装配位 $A_n^{(1)}$ 型の場合と同様にして $D_n^{(1)}$ 型でも古典部分代数 D_n 型 Dynkin 図の各頂点に Young 図 $\nu^{(a)}$ を配置することにより艦装配位を考える。以下 28 ページにおける定義と並行して定義する。rigging を $J_i^{(a)}$ と書くとき、次のような対象を考える。

$$(\nu, J) = \left(\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(n)}, (\nu^{(1)}, J^{(1)}), \dots, (\nu^{(n)}, J^{(n)}) \right). \quad (51)$$

ただし $\mu^{(a)}$ における添え字 a のつけ方は $A_n^{(1)}$ 型の場合とはずらしてあることに注意 (表現論の比重が重くなるとそのような記法の方が自然に見える)。 $\nu^{(a)}$ を D_n 型 Dynkin 図の各頂点と対応付ける必然性が生じるのは vacancy number の定義においてである。 $A_n^{(1)}$ 型の場合の定義 (21) と同様にして、Dynkin 図上で単線でつながっている頂点には係数 1 を、自分自身には係数 -2 を与えることにより以下のように定義する (Cartan データを想起されたい)。

$$\begin{aligned} P_l^{(a)}(\mu, \nu) &= Q_l(\mu^{(a)}) + Q_l(\nu^{(a-1)}) - 2Q_l(\nu^{(a)}) + Q_l(\nu^{(a+1)}) \quad (1 \leq a \leq n-3), \\ P_l^{(n-2)}(\mu, \nu) &= Q_l(\mu^{(n-2)}) + Q_l(\nu^{(n-3)}) - 2Q_l(\nu^{(n-2)}) + Q_l(\nu^{(n-1)}) + Q_l(\nu^{(n)}), \\ P_l^{(a)}(\mu, \nu) &= Q_l(\mu^{(a)}) + Q_l(\nu^{(n-2)}) - 2Q_l(\nu^{(a)}) \quad (a = n-1, n). \end{aligned} \quad (52)$$

以降の定義は $A_n^{(1)}$ 型の場合と全く同様である。念のため書くと、 (ν, J) が最高ウェイトベクトルに対する艦装配位であるとは以下の条件を満たす場合である。

- 全ての $\nu_i^{(a)}$ に対し $P_{\nu_i^{(a)}}^{(a)}(\mu, \nu) \geq 0$ 。
- 全ての rigging が $0 \leq J_i^{(a)} \leq P_{\nu_i^{(a)}}^{(a)}(\mu, \nu)$ を満たす。

一般の艦装配位は Kashiwara 作用素を艦装配位上に定義することによって得られる。ここで艦装配位上の \tilde{e}_a, \tilde{f}_a は 29 ページにおける $A_n^{(1)}$ 型の場合と全く同様である [Sc06]。艦装配位の著しい自然さの一例である。

$D_n^{(1)}$ 型 艦装配位写像の構成 詳しい定義は §8.8 に譲るが、 $D_n^{(1)}$ 型でも完全に一般の $\bigotimes_{k=1}^L B^{r_k, s_k}$ 型 path に対して艦装配位写像

$$\Phi : \text{path} \mapsto \text{rigged configuration}$$

が確立されている ([OSSS]、2016 年)。 $A_n^{(1)}$ 型の場合の達成 ([KSS]、1999 年) から 17 年もかかってしまったが、これは艦装配位の理論が新たな段階に到達したことを示す。最終的な解決は以下の三つの論文によってなされた。まず 2011 年に発表した論文 [OSS11] において艦装配位写像とそれを実現する KR タブローの定義および基本的な性質を予想した。同時に以下で述べる Dynkin 図の頂点 $0 \leftrightarrow 1$ の入れ替えに関し艦装配位が持っている重要な性質を与えた。次いで執筆された論文 [Sa14] において、艦装配位写像の持つ最も基本的な性質の一つ、柏原作用素との可換性

$$[\tilde{e}_a, \Phi] = [\tilde{f}_a, \Phi] = 0 \quad (53)$$

が確立された。証明は極めて困難であるが、 $D_n^{(1)}$ 型 艦装配位の最終的構成に当たってどうしても解決しなければならない最難関の壁として立ちはだかっていた問題であった。最終的に論文 [OSSS] において艦装配位写像の構成及びもう一つの基本定理である R 不変性が確立された。 $D_n^{(1)}$ 型の艦装配位写像の場合、アルゴリズムが複雑すぎて R 不変性の証明はそのまま

までは歯が立たない。そうした時上述の柏原作用素との可換性は強力な武器を提供する。これは path が最高ウェイト元の場合であっても同様の状況であり、本質的なステップであると考えている。

なお [OSSS] において艦装配位写像を構成する際に di Francesco–Kedem の結果 [dFK] を引用している個所があるが、筆者の印象ではおそらくそれは本質的なことではなく、除去可能なのではないかという気がしている。その場合 $D_n^{(1)}$ 型の写像を完成させた三つの論文の議論は原理的には全ての非例外型代数すべてについて適用可能な方法であろうと思われる。

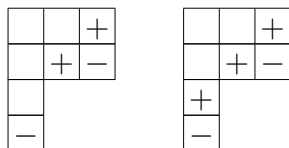
最終的な解決だけでなく、開拓者の仕事にも触れておく必要があるだろう。 $D_n^{(1)}$ 型艦装配位写像の最初の形は 2003 年の論文 [OSS03] において $(B^{1,1})^{\otimes L}$ 型の path について与えられた。その後論文 [Sc04] において $\bigotimes_{k=1}^L B^{r_k,1}$ 型の path について、また論文 [ScSh] において $\bigotimes_{k=1}^L B^{1,s_k}$ 型の path について拡張された。特に論文 [Sc04, Appendix C] において予告された結果は最終的な構成でも重要な役割を果たした結果なのだが、残念ながら現在も未出版である。しかし $D_n^{(1)}$ 型といえども以上の結果に含まれるような単純な場合はそれまでの代数的組み合わせ論の手法の拡張である程度手がつけられたので ([HKOT] 参照)、艦装配位の理論が代数的組み合わせ論にとって真に新しい領域に到達するにはどうしても一般の $\bigotimes_{k=1}^L B^{r_k,s_k}$ 型 path に対して構成しなければならないと考えた次第である。

様々な双対性 艦装配位が単なるモデルではなく、無限次元対称性の核心部とかかわる数学的に意味のある量である、という事実の一つの証左として、対称性の持っている双対性などの非常に深い性質がごく自然な形で実現するという事を指摘しておこう。組み合わせ R 行列が艦装配位上で自明化する R 不変性は一つの典型的な例である。他の例として、Lusztig involution と呼ばれる深い双対性は艦装配位上以下のように現れる。与えられた艦装配位に対して、rigging $J_i^{(a)}$ と corigging $P_{\nu_i^{(a)}}^{(a)}(\mu, \nu) - J_i^{(a)}$ の役割を全て入れ替えて定義される艦装配位写像 $\tilde{\Phi}$ を実行して得られる像は、もともとの path を Lusztig involution で写した像が所属する古典部分代数の表現の最高ウェイトベクトルと一致する [OSSS]。この様な深い性質を持った量がそういくつも存在するはずがないのは明らかであろう。なお、同様の双対性は 16 ページの式 (10) にも登場し、Bethe 仮説方程式の解の解析においても基本的であったことを注意しておく。

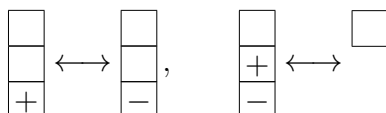
さらに次のような興味深い例がある [OSS11]。話の順序として Schilling によるアフィン柏原作用素 \tilde{e}_0, \tilde{f}_0 の構成 [Sc08] から必要な部分を見ておこう。アフィン代数としての $D_n^{(1)}$ の構造を KR クリスタル $B^{r,s}$ に導入するには避けて通れない部分であるが、単純にはいかない。そこで Dynkin 図の 0 番目と 1 番目の頂点を入れ替えるような involution σ を構成し、良く知られた (そして単純な) \tilde{e}_1 と \tilde{f}_1 の作用に帰着させることとなる。よって核心部は involution σ の構成となるが、これも一筋縄には行かない。A 型の楽園から外に出てしまうと何かと難しくなってしまう。

以下簡単のため $r \leq n - 2$ とする。Dynkin 図の頂点 $I = \{0, 1, \dots, n\}$ の部分集合 $J \subset I$ に対し、 $\tilde{e}_a b = 0$ が全ての $a \in J$ に対し成り立つ時 b を J -最高ウェイト元と呼ぶことにしよう。上で述べた involution σ を一般的に構成するのは至難の業だが、頂点 0 と 1 を除いた $J = \{2, 3, \dots, n\}$ -最高ウェイト元に対してなら構成することができる。構成の中心は J -最高ウェイト元 b から \pm -ダイアグラムと呼ばれるものへの非自明な全単射である。 \pm -ダイアグラムとは Young 盤の組 $\lambda \supset \mu$ に対し λ/μ の部分に $+$, $-$ の符号を入れたもので、各列で $+$, $-$ の符号はそれぞれ最大一つ (両方無しも可) かつ両符号が共に存在するときは上側に

+を入れるものとして。例えば、



といったものである。±-ダイアグラムの形 λ は古典部分代数 D_n の最高ウェイトの形に合わせるので (つまり Kashiwara–Nakashima タブローと同じ形) $B^{r,s}$ ならば縦 r 横 s の長方形から縦ドミノ $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$ を任意個数取り除いたものとなる。求める involution σ は ±-ダイアグラムの上で以下のような形をとる。すなわち内側の形 μ は固定したうえで、+ および -、± および空集合をそれぞれ入れ替える。図式的には、



という形である。

まとめると、 J -最高ウェイト元 b から ±-ダイアグラムへの非自明な全単射を用いると involution σ が非常に自然な実現をすることが分かった。単に「表現を構成する」という事だけが目的であればこれで十分であるかもしれない。しかし表現の構成というのは、いかに重要な課題であったとしても、「対称性そのものを理解すること」という最終的な目標に対するそれ以外の接近法の重要性を減ずるものではないだろう。殊に無限次元の対称性は有限次元の対称性とは圧倒的に異なる巨大さを持つので、従来 of 理論的枠組みに加えて何か本質的に新しい考え方が必要とされるであろうという事を常に肝に銘じておかなければならない。例えば我々の問題としている $D_n^{(1)}$ 代数が表している対称性の理解という観点からは、±-ダイアグラムおよびそこへの全単射というものをブラックボックスとせず、それらが数学的に何を表しているのかという点まで踏み込んで理解してみることも有用であろう。論文 [OSS11] で筆者が念頭としていたのはその様な問題意識であり、実際艦装配位の理論という大きな枠組みを通してみると ±-ダイアグラムの正しい居場所が明らかになる。

より具体的にいえば、以下のような対応により、±-ダイアグラムとは本質的には艦装配位の事であり、 J -最高ウェイト元からの全単射とは本質的には艦装配位写像の事であった。クリスタル $B^{r,s}$ の ±-ダイアグラム P のある列 c について考える。 c の高さが x 、また $x+y=r$ とすると、 y はタブロー P を $r \times s$ の長方形に置いた時のすき間の高さとなる。この「すき間」は縦ドミノ $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$ を取り除いて得られるので、 y は偶数となる。さてまず各列 c に対応する艦装配位を与える。以下分割 $\nu^{(a)}$ の形を一行目に、対応する rigging を二行目に書く。

(A) c が符号を含まないとき。

$$\begin{aligned} \nu &= (\overbrace{(1), (1), \dots, (1)}^x, \overbrace{(1), (1, 1), \dots, (1, \dots, 1)}^y, (1^y), \dots, (1^y), (1^{\frac{y}{2}}), (1^{\frac{y}{2}})) \\ J &= (\overbrace{(-1), (0), \dots, (0)}^x, \overbrace{(1), (0, 0), \dots, (0, \dots, 0)}^y, (0^y), \dots, (0^y), (0^{\frac{y}{2}}), (0^{\frac{y}{2}})) \end{aligned}$$

(B) c が符号 + を含むとき。

$$\begin{aligned} \nu &= (\overbrace{(\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset)}^x, \overbrace{(1), (1, 1), \dots, (1, \dots, 1)}^y, (1^y), \dots, (1^y), (1^{\frac{y}{2}}), (1^{\frac{y}{2}})) \\ J &= (\overbrace{(\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset)}^x, \overbrace{(0), (0, 0), \dots, (0, \dots, 0)}^y, (0^y), \dots, (0^y), (0^{\frac{y}{2}}), (0^{\frac{y}{2}})) \end{aligned}$$

(C) c が符号 $-$ を含むとき。

$$\nu = (\overbrace{((2), (2), \dots, (2))}^{x-1}, \overbrace{((1, 1), (1, 1, 1), \dots, (1, \dots, 1))}^{y+1}, (1^{y+2}), \dots, (1^{y+2}), (1^{\frac{y+2}{2}}), (1^{\frac{y+2}{2}}))$$

$$J = (\overbrace{((-2), (0), \dots, (0))}^{x-1}, \overbrace{((0, 0), (0, 0, 0), \dots, (0, \dots, 0))}^{y+1}, (0^{y+2}), \dots, (0^{y+2}), (0^{\frac{y+2}{2}}), (0^{\frac{y+2}{2}}))$$

(D) c が符号 \pm を含むとき。

$$\nu = (\overbrace{((1), (1), \dots, (1))}^{x-1}, \overbrace{((1, 1), (1, 1, 1), \dots, (1, \dots, 1))}^{y+1}, (1^{y+2}), \dots, (1^{y+2}), (1^{\frac{y+2}{2}}), (1^{\frac{y+2}{2}}))$$

$$J = (\overbrace{((-1), (0), \dots, (0))}^{x-1}, \overbrace{((0, 0), (0, 0, 0), \dots, (0, \dots, 0))}^{y+1}, (0^{y+2}), \dots, (0^{y+2}), (0^{\frac{y+2}{2}}), (0^{\frac{y+2}{2}}))$$

若干補足をすると、 \pm の場合の $\nu^{(x-1)}$ を除きすべて特異なストリングである。また c が空の時 (つまり $x = 0$ の時) は $+$ の場合の特別な場合として扱う。また $-$ の場合で $x = 1$ ならば $(\nu^{(1)}, J^{(1)}) = ((1, 1), (-1, -1))$ と取る。

一般の \pm -ダイヤグラム P に対応する臙装配位は、各列 c に対応する臙装配位を「加えて」得られる。ここで「加える」とは各分割 $\nu^{(a)}$ では Young 図を横に全て結合し、また rigging は対応するものを全て足しあげることによって得られる。こうして得られる臙装配位が確かに臙装配位写像 Φ の下で \pm -ダイヤグラム P に対応する臙装配位であることは、論文 [OSS11] においてクリスタル同型であることが確かめられたことと論文 [Sa14] において臙装配位写像 Φ と柏原作用素 \tilde{e}_a, \tilde{f}_a ($a = 1, \dots, n$) とが可換であることが確立されたことを合わせて証明された ([Sa14, §4.1] 参照)。 $D_n^{(1)}$ 型の臙装配位写像は複雑であるから、こういった結果を証明するのも柏原作用素との可換性のような飛び道具がないと極めて困難である。

2010 年から 2011 年にかけて $D_n^{(1)}$ 型臙装配位写像の形が大体予想出来てきたころ、折角今まで誰も足を踏み入れたことのない領域に到達したのだからちょっとは面白い現象があるだろう、と思いあれこれの論文を出来立ての写像を使って調べているうちに以上のような結果に行きつき、大変面白く感じたのを思い出す。当時写像を計算していると 8.8 節で述べる Kirillov–Reshetikhin タブローという実に奇妙なもの (特に \pm -ダイヤグラムのように最高ウェイト元でない場合) が出てきてなかなか自信が持てなかったのだが、この現象や、組み合わせ R 行列の計算をしているうちに少しずつ正しさを確信して行ったように思う。最終的には論文 [OSS11] を公表した後 Scrimshaw 氏が別のプログラムを組み私のもろもろの予想を独立に確認して頂き、ほぼ間違いがないことが分かってほっとしたことを思い出す。

最後に一つ例を見ておこう。 $D_n^{(1)}$ 型 ($n \geq 10$) のクリスタル $B^{8,5}$ の以下の元を考える：

$$P = \begin{array}{cccc} & & & + \\ & & & - \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & + & \\ - & - & & \end{array}$$

最後の列は空である。一行目に ν_P を、二行目に J_P を書くことにすると、対応する臙装配位は以下の通り：

$$((6), (6, 2), (6, 2, 2), (6, 2, 2, 2), (6, 2, 2, 2, 2), (5, 5, 2, 2, 2, 2), (5, 5, 5, 2, 2, 2, 2), \dots)$$

$$((-5), (0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \dots)$$

ここでは例として $\nu_P^{(5)}$ を見てみよう。これは P の各列に由来する下記の艦装配位の「和」である：

$$\begin{array}{c} \square\square\square \\ \square \\ \square \end{array} 0, \quad \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} 0, \quad \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} 1, \quad \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} 0, \quad \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} 0.$$

ここでは対応する riggings のみ表示した。これらを加えて $\nu_P^{(5)}$

$$\begin{array}{c} \square\square\square\square\square\square\square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} 1$$

が得られる。

箱玉系の逆散乱形式 この話は $D_n^{(1)}$ 型艦装配位写像の研究の主要な動機の一つであり、また主要な結果の一つなのであるが、論文 [OSSS] では残念ながらある共著者の強い反対により触れることができなかつたので²⁷、ここで述べることにする。

結果自体は 32 ページで述べた $A_n^{(1)}$ 型の場合と全く同様であるが、念のため結果を書いておこう。時間発展 $T^{a,l}$ は $A_n^{(1)}$ 型の場合と同じ元 $u^{a,l}$ を用いて定義される。 $D_n^{(1)}$ 型の一般的な path $b \in \bigotimes_{k=1}^L B^{r_k, s_k}$ に必要ならば右側に $u^{a,1}$ を十分付け加えて、 $u^{a,l} \otimes b \stackrel{R}{\simeq} T^{a,l}(b) \otimes u^{a,l}$ となるようにしよう。その時 b に対する艦装配位が

$$\Phi(b) = \left((\nu^{(1)}, J^{(1)}), \dots, (\nu^{(a)}, J^{(a)}), \dots, (\nu^{(n)}, J^{(n)}) \right)$$

であれば、時間発展した path に対する艦装配位は

$$\Phi(T^{a,l}(b)) = \left((\nu^{(1)}, J^{(1)}), \dots, (\nu_i^{(a)}, J_i^{(a)} + \min(\nu_i^{(a)}, l)), \dots, (\nu^{(n)}, J^{(n)}) \right) \quad (54)$$

となる。すなわち Young 図 $\nu^{(1)}, \dots, \nu^{(n)}$ は運動の保存量（作用変数）であり、rigging $J^{(a)}$ のみが線形に変化する（角変数）。スピン表現かどうかにかかわらず $A_n^{(1)}$ 型の場合と同じ結果になるわけであり、艦装配位の自然さを表している。

証明も $A_n^{(1)}$ 型の場合と全く同様である。32 ページと全く同様に以下の定理が成り立つ。

定理 [OSSS] ($D_n^{(1)}$ 型艦装配位の R 不変性)

任意の $D_n^{(1)}$ 型 KR クリスタルのテンソル積 b と b' が $b \stackrel{R}{\simeq} b' \iff \Phi(b) = \Phi(b')$.

証明はまずスピン表現と他の元のテンソル積 $B^{n,1} \otimes B^{r,s}$ の場合に不変性を証明する。といっても D 型艦装配位写像は複雑であるから直接証明するのはおそらく絶望的であり、艦装配位写像と柏原作用素の可換性 [Sa14] を用いて path と艦装配位双方に適当な柏原作用素の列を作用させていって証明することになる。この辺りは既に論文 [OSS11] を執筆している最中から共著者間の議論で認識しており、最終的な困難は柏原作用素との可換性にあり、と観念して論文 [Sa14] を準備した。さて、この部分が解決すると、あとは箱玉系の時間発展 $T^{n,1}$ を十分繰り返すことにより $D_n^{(1)}$ 型の場合の R 不変性が $A_n^{(1)}$ 型の場合の R 不変性に帰着され

²⁷結局 A 型の場合も D 型の場合もこの重要な結果はおかしな出版の形態となつてしまい誠に遺憾である。

てしまい、[KSS] の定理より結果が従う。 $A_n^{(1)}$ 型の場合も [KSS] 論文の長大な議論をほぼ完全に使って証明しているので、論文 [Sa14] の同じく長大な証明もあわせると全体の証明は膨大なものである。真に深い結果であると言えよう。

この後の式 (54) の証明は $A_n^{(1)}$ 型の場合と全く同様である。

R 不変性の定理について補足しておく。 $A_n^{(1)}$ 型の場合と同様この結果は $D_n^{(1)}$ 型の組み合わせ R 行列を特殊な場合として含んでいる。 $D_n^{(1)}$ 型の場合従来の代数的組み合わせ論的手法では全く歯が立たない難問であることが知られていたため、臙装配位の理論が代数的組み合わせ論の世界に大きな手法をもたらしたことがようやく証明されたと言えよう。

Misra–Wilson の箱玉系 せっかく非常に一般的な逆散乱形式が確立されたのだから非自明な例を考察してみよう。幸い Misra–Wilson [MW] が $D_n^{(1)}$ 型代数の $(B^{2,1})^{\otimes L}$ 型テンソル積に対する箱玉系の $T^{2,s}$ 時間発展という極めて非自明な系を考察しているため、彼らの結果を臙装配位と比較してみることにしよう。彼らの結果をかいつまんで紹介すると、 $B^{2,s} \otimes B^{2,1}$ 型の組み合わせ R 行列を書き下すことにより可能なソリトンが分類された [MW, Proposition 3]。更に二つのソルトンの散乱を考察し、それらが D_n 型 Dynkin 図の頂点 2 を取り除いて得られる代数に対する組み合わせ R 行列によって記述されることが示された。

以下では彼らの論文に出ている例を臙装配位を用いて検討してみよう。逆散乱形式 (54) から分かるように、与えられた path $b \in (B^{2,1})^{\otimes L}$ に対し $s \geq \max_i \nu_i^{(2)}$ とすれば $T^{2,s}(b) = T^{2,s+1}(b) = \dots$ が成り立つ。以下この様な時間発展を T_∞ と書くことにすると、論文 [MW, §IV-B] で解析されている以下の三つの例では確かに各ソリトンがストリング $(\nu_i^{(2)}, J_i^{(2)})$ に対応していることが確認できる。

例 1 まず $D_4^{(1)}$ 型の例を考察しよう。以下の図では第一行目に与えられた path $b \in (B^{2,1})^{\otimes 23}$ を表示し、以下第 t 行目には $T_\infty^{t-1}(b)$ を表示する。見やすくするために全てのテンソル積の記号 \otimes やタブローの枠を省略し、また今の場合真空ないし背景と解釈される元 $u^{2,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in B^{2,1}$ を $\boxed{\cdot}$ と表すことにする。

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---|---|-----------|-----------|-----------|---|-----------|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | . | . | 2 | 2 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | . | . | 4 | 3 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| . | . | . | 1 | 1 | 1 | . | 2 | 2 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| . | . | . | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | . | 4 | 3 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| . | . | . | . | . | . | . | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| . | . | . | . | . | . | . | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | 4 | 3 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 1 | 1 | $\bar{4}$ | 2 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | 4 | 3 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 1 | $\bar{4}$ | 2 | 1 | . | . | . | . | |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | 3 | 3 | . | . | . | |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 1 | 1 | . | 2 | 2 | 1 | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | . | $\bar{3}$ | 3 | 3 | . | |

状態 $T_\infty^t(b)$ に対応する臙装配位 $\Phi(T_\infty^t(b))$ は以下の通り。

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} 0 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & 5+2t \\ \hline \end{array} 1+3t \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} -1 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} -3$$

$\nu^{(2)}$ には長さ3と2の行があり、それぞれの rigging は速さ3と2で時間発展する。これは path のレベルで視覚的に了解される事実と一致する。

例2 次に同論文で解析されている $D_5^{(1)}$ 型の例について、先ほどの例と同様に表示すると以下のようになる。

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|---|---|---|-----------|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---|---|---|
| 2 | 2 | 1 | 1 | · | · | 2 | 1 | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · |
| $\bar{3}$ | 5 | 4 | 3 | · | · | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · |
| · | · | · | · | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · |
| · | · | · | · | $\bar{3}$ | 5 | 4 | 3 | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · |
| · | · | · | · | · | · | · | · | 2 | 2 | 4 | 1 | 1 | · | · | · | · | · | · | · |
| · | · | · | · | · | · | · | · | $\bar{3}$ | 5 | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | 3 | · | · | · | · | · | · | · |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | · | · | · | · |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | 5 | 4 | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | 3 | · | · | · | · |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | 2 | 1 | · | · | 2 | 2 | 1 | 1 | · |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | 5 | 4 | · | · | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | 3 | · | · |

状態 $T_\infty^t(b)$ に対応する 艦装配位 $\Phi(T_\infty^t(b))$ は以下の通り。

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} -2 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & 6+2t \\ \hline \end{array} 2+4t \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \square \\ \hline \end{array} -1 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} -1 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} 0$$

例3 最後に同論文の $D_6^{(1)}$ 型の例を見てみよう。

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|---|---|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---|---|
| 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | · | · | 2 | 2 | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · |
| $\bar{3}$ | $\bar{5}$ | 6 | 5 | 4 | · | · | $\bar{5}$ | $\bar{5}$ | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · |
| · | · | · | · | · | 2 | 2 | 1 | 1 | 4 | 2 | · | · | · | · | · | · | · | · | · |
| · | · | · | · | · | $\bar{3}$ | $\bar{5}$ | 6 | 5 | $\bar{5}$ | $\bar{5}$ | · | · | · | · | · | · | · | · | · |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | 2 | $\bar{5}$ | 6 | 2 | 1 | · | · | · | · | · | · |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | 4 | 4 | · | · | · | · | · | · |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | · | · |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | $\bar{5}$ | 6 | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | 4 | 4 | · | · |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | 1 | 1 | · | · | 2 | 2 | 2 | 2 |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | $\bar{5}$ | 6 | · | · | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | 4 | 4 |

状態 $T_\infty^t(b)$ に対応する 艦装配位 $\Phi(T_\infty^t(b))$ は以下の通り。

$$\begin{aligned} (\nu^{(1)}, J^{(1)}) &= \{(4), (-2)\}, & (\nu^{(2)}, J^{(2)}) &= \{(5, 2), (3+5t, 7+2t)\}, \\ (\nu^{(3)}, J^{(3)}) &= \{(5, 3), (-2, -1)\}, & (\nu^{(4)}, J^{(4)}) &= \{(4, 3), (0, 0)\}, \\ (\nu^{(5)}, J^{(5)}) &= \{(5), (-3)\}, & (\nu^{(6)}, J^{(6)}) &= \{(4), (-1)\}. \end{aligned}$$

ここで艦装配位を以下のように記述した。

$$(\nu^{(a)}, J^{(a)}) = \{(\nu_1^{(a)}, \nu_2^{(a)}, \dots), (J_1^{(a)}, J_2^{(a)}, \dots)\}.$$

以上 Misra–Wilson による極めて非自明な D 型箱玉系は艦装配位の理論からも明瞭に理解できることが確認された。

8.8 $D_n^{(1)}$ 型臙装配位写像のアルゴリズム

$D_n^{(1)}$ 型の path $b \in \bigotimes_{k=1}^L B^{r_k, s_k}$ と臙装配位

$$(\nu, J) = \left(\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(n)}, (\nu^{(1)}, J^{(1)}), \dots, (\nu^{(n)}, J^{(n)}) \right)$$

との間の全単射

$$\Phi^{-1} : (\nu, J) \mapsto \text{path}$$

の記述を行う。ただしここでも臙装配位の $\mu^{(a)}$ のラベル a は $A_n^{(1)}$ 型の場合とずらしてあることに注意。

主に定義すべき内容は $B^{r,s}$ を記述するための Kirillov–Reshetikhin タブローと写像 Φ^{-1} のアルゴリズムの二種類に大別される。なお以下簡単のため $r \leq n-2$ と仮定する。スピンの表現の場合については論文 [Sa14, OSSS] を参照されたい。

Kirillov–Reshetikhin タブロー KR タブローは最初論文 [OSS11] において導入された。その後論文 [ScScr14] において A 型と D 型以外の非例外型代数についても数値的に検討され、それぞれの代数に対する柏原作用素を用いれば細かな修正を除き実質的に同じ定義が使用できることが確かめられた。すなわち普遍性のある自然な概念であると言えよう。

$I_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ とする。KR タブローは $B^{r,s}$ の古典部分代数 D_n に対する最高ウェイト元 u_λ 、すなわち $\tilde{e}_a u_\lambda = 0$ ($a \in I_0$) に対してのみ明示的に定義される。その他の元は柏原作用素 \tilde{f}_a ($a \in I_0$) を通常通り作用させることにより得られる。元 u_λ のウェイト λ の形を、高さ h のコラムが k_h 個あるというように表記しよう。基本ウェイトの記号を使えば、 $\lambda = k_r \bar{\Lambda}_r + k_{r-2} \bar{\Lambda}_{r-2} + \dots$ となる。

u_λ に対応する KR タブローを $\text{fill}(u_\lambda)$ と書き、その対応を filling map と呼ぼう。以下 filling map を定義する。 k_c を数列 k_{r-2}, k_{r-4}, \dots における最初の奇数としよう。その様な k_c が存在しないときは $k_c = k_{-1}$ 、すなわち $c = -1$ とおく。 t を u_λ の Kashiwara–Nakashima タブロー表示とする。すなわち Young 図 λ の一行目には文字 1 を、二行目には文字 2 を、と順に埋めたものとする。タブロー t を $r \times s$ の長方形の左上におき、すき間を以下のように埋めていく。手続きは t の左端の列から始め、以下の手順で右向きに進む。

1. 高さ r の列には何もしない。 $c \geq 0$ である場合、高さ c の列を一つ減らし、また高さ c 未満の列を全て左に一つずらす。
2. 高さが c 以上の列の充填法。高さ h の列に対するすき間であれば以下の文字列の転置で埋める。

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bar{r} & \overline{r-1} & \cdots & \overline{h+1} \\ \hline h+1 & h+2 & \cdots & r \\ \hline \end{array}.$$

$c = -1$ であればこれで全てのすき間が埋まるので手続きが終了する。

3. 右端を除く他の列の充填法。文字 x を再帰的に再定義しながら下記の内容で埋める。初期条件として $x = c+1$ と定める。対応する列の高さが h であれば、

$$\boxed{y \quad \cdots \quad r-1 \quad r \quad \bar{r} \quad \cdots \quad \overline{x+1} \quad \bar{x}}$$

の転置をすき間に埋める。すき間のます目の数は $r-h$ なので $y = r - (x - h - 2)$ となる。 $x = y$ と再定義して次の列に同じ手順を繰り返す。

4. 最終的に得られた x を用いて

$$\boxed{1 \mid 2 \mid \cdots \mid y \mid \bar{y} \mid \cdots \mid \overline{x+1} \mid \bar{x}}$$

の転置を右端の列とする。ここで $c \geq 0$ の場合 Step 1 の結果右端の列は空白になっている事に注意。また以上の定義から $y = (r + x - 1)/2$ と定まる。

例1 $B^{8,7}$ の I_0 -最高ウェイト元 u_λ で $\lambda = \bar{\Lambda}_8 + 2\bar{\Lambda}_6 + \bar{\Lambda}_4 + 2\bar{\Lambda}_2$ なるものを考える。この場合 $(k_6, k_4, k_2, k_0) = (2, 1, 2, 1)$ なので $c = 4$ となる。 u_λ の KN タブロー表示を 8×7 の長方形の左上に置くと、

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|--|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | |
| 3 | 3 | 3 | 3 | | | |
| 4 | 4 | 4 | 4 | | | |
| 5 | 5 | 5 | | | | |
| 6 | 6 | 6 | | | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | | | | | | |

Step 1 →

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|--|--|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | | |
| 3 | 3 | 3 | | | | |
| 4 | 4 | 4 | | | | |
| 5 | 5 | 5 | | | | |
| 6 | 6 | 6 | | | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | | | | | | |

そこですき間を次のように埋める。

| | | | | | |
|----------|---|----------|----------|----------|----------|
| | | | | 5 | 1 |
| | | | | 6 | 2 |
| | | 7 | 5 | 7 | 3 |
| | | 8 | 6 | 8 | 4 |
| | | <u>8</u> | 7 | <u>8</u> | 5 |
| | | <u>7</u> | 8 | <u>7</u> | 6 |
| <u>8</u> | 7 | <u>6</u> | <u>8</u> | <u>6</u> | <u>6</u> |
| <u>7</u> | 8 | <u>5</u> | <u>7</u> | <u>5</u> | <u>5</u> |

よって, $\text{fill}(u_\lambda) =$

| | | | | | | |
|---|----------|---|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 6 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 7 | 5 | 7 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 8 | 6 | 8 | 4 |
| 5 | 5 | 5 | <u>8</u> | 7 | <u>8</u> | 5 |
| 6 | 6 | 6 | <u>7</u> | 8 | <u>7</u> | 6 |
| 7 | <u>8</u> | 7 | <u>6</u> | <u>8</u> | <u>6</u> | <u>6</u> |
| 8 | <u>7</u> | 8 | <u>5</u> | <u>7</u> | <u>5</u> | <u>5</u> |

例2 見慣れない概念でしょうからもう少し $r = 12$ の例を。

| | | | | | | | | |
|-----------|----|-----------|----|-----------|-----------|-----------|-----------|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 8 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 7 | 9 | 7 | 9 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 8 | 10 | 8 | 10 | 4 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 9 | 11 | 9 | 11 | 5 |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 10 | 12 | 10 | 12 | 6 |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 11 | <u>12</u> | 11 | <u>12</u> | 7 |
| 8 | 8 | 8 | 8 | 12 | <u>11</u> | 12 | <u>11</u> | 8 |
| 9 | 9 | <u>12</u> | 9 | <u>12</u> | <u>10</u> | <u>12</u> | <u>10</u> | 9 |
| 10 | 10 | <u>11</u> | 10 | 11 | 9 | 11 | 9 | 9 |
| <u>12</u> | 11 | <u>10</u> | 11 | <u>10</u> | 8 | <u>10</u> | 8 | 8 |
| <u>11</u> | 12 | 9 | 12 | 9 | 7 | 9 | 7 | 7 |

| | | | | | | |
|----|----|-----------|-----------|-----------|-----------|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 8 | 2 |
| 3 | 3 | 7 | 9 | 7 | 9 | 3 |
| 4 | 4 | 8 | 10 | 8 | 10 | 4 |
| 5 | 5 | 9 | 11 | 9 | 11 | 5 |
| 6 | 6 | 10 | 12 | 10 | 12 | 6 |
| 7 | 7 | 11 | <u>12</u> | 11 | <u>12</u> | 7 |
| 8 | 8 | 12 | <u>11</u> | 12 | <u>11</u> | 8 |
| 9 | 9 | <u>12</u> | <u>10</u> | <u>12</u> | <u>10</u> | 9 |
| 10 | 10 | <u>11</u> | 9 | 11 | 9 | 9 |
| 12 | 11 | 10 | 8 | 10 | 8 | 8 |
| 11 | 12 | 9 | 7 | 9 | 7 | 7 |

| | | | | | | |
|----|----|-----------|-----------|-----------|-----------|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 6 | 2 |
| 3 | 3 | 9 | 7 | 9 | 7 | 3 |
| 4 | 4 | 10 | 8 | 10 | 8 | 4 |
| 5 | 5 | 11 | 9 | 11 | 9 | 5 |
| 6 | 6 | 12 | 10 | 12 | 10 | 6 |
| 7 | 7 | <u>12</u> | 11 | <u>12</u> | 11 | 7 |
| 8 | 8 | <u>11</u> | 12 | <u>11</u> | 12 | 8 |
| 9 | 9 | <u>10</u> | <u>12</u> | <u>10</u> | <u>12</u> | 8 |
| 10 | 10 | 9 | 11 | 9 | 11 | 7 |
| 12 | 11 | 8 | 10 | 8 | 10 | 6 |
| 11 | 12 | 7 | 9 | 7 | 9 | 5 |

左から順に $(k_{10}, k_8, k_6, k_4, k_2, k_0) = (2, 3, 0, 0, 3, 1)$, $(2, \underline{1}, 0, 0, 3, 1)$, $(2, 0, \underline{1}, 0, 3, 1)$ に対する $\text{fill}(u_\lambda)$ 。下線を引いた文字が k_c を表す。 k_h に対応する列の文字 $1, 2, \dots, h$ を対応する各 Step 2, 3, 4 に応じてピンク、黄色、緑で表した。

Φ^{-1} のアルゴリズム 基本的には $A_n^{(1)}$ 型のアルゴリズムと類似であるが、46 ページに与えた古典部分代数 D_n のクリスタルグラフにそって実行されるため以下のような相違点が生じる。

$\mu^{(a)}$ のある行 $\mu_i^{(a)}$ を選択し、 $B^{a, \mu_i^{(a)}}$ の元を以下のようにして定める。 $\ell^{(a-1)} = \mu_i^{(a)}$ とする。次いで $\nu^{(a)}$ の特異なストリングで長さが $\ell^{(a-1)}$ 以上で最も短いものを選び、その長さを $\ell^{(a)}$ と定める。再帰的に以上の手続きを繰り返していき、途中 $\nu^{(j)}$ で初めて該当する特異なストリングが選べなくなった場合、 $\ell^{(j)} = \infty$ としてそこでストップし、出力の文字を $k = j$ とする。以上は $A_n^{(1)}$ 型の場合と同一であるが、 $\nu^{(n-2)}$ から先は Dynkin 図ないし D_n のクリスタルグラフが二股に分かれることから以下のような手続きとなる。

$\ell^{(n-2)} < \infty$ だったとしよう。その時 $(\nu^{(n-1)}, J^{(n-1)})$ または $(\nu^{(n)}, J^{(n)})$ の特異なストリングで $\ell^{(n-2)}$ 以上の長さで最小のものを探し、それぞれの長さから同様にして $\ell^{(n-1)}$ および $\ell^{(n)}$ を定める (該当するものがなければ ∞ とする)。

1. $\ell^{(n-1)} = \infty$ かつ $\ell^{(n)} = \infty$ ならば出力を $k = n - 1$ として停止。
2. $\ell^{(n-1)} < \infty$ かつ $\ell^{(n)} = \infty$ ならば出力を $k = n$ として停止。
3. $\ell^{(n-1)} = \infty$ かつ $\ell^{(n)} < \infty$ ならば出力を $k = \bar{n}$ として停止。
4. $\ell^{(n-1)} < \infty$ かつ $\ell^{(n)} < \infty$ ならば $\ell_{(n-1)} = \max(\ell^{(n-1)}, \ell^{(n)})$ として継続する。

以降は手続きの左右を入れ替えて繰り返す。すなわち $\ell_{(j+1)}$ が定まるときの $(\nu^{(j)}, J^{(j)})$ の特異なストリングで $\ell_{(j+1)}$ 以上のもののうち最小のものの長さを $\ell_{(j)}$ と定義する。初めて $\ell_{(j)} = \infty$ となったとき出力を $k = \bar{j} + 1$ として停止する。一方最終的に $\ell_{(1)} < \infty$ となったときには出力を $k = \bar{1}$ として停止する。

その後のステップは $A_n^{(1)}$ 型の場合と全く同一である。すなわち選択したストリングから一ますずつ削り、新しい rigging は、削られたストリングについては新しい艦装配位で特異なストリングとなるように定め、一方削られなかったストリングの rigging は変更しない。

例 1 $D_5^{(1)}$ とする。以下の $B^{3,2} \otimes B^{2,2}$ 型艦装配位を考えよう。

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} -1 & 1 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} 1 & -3 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} -3 & 0 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline \end{array} 0 & 0 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \\
 1 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} 1 & -2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} -2 & 0 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} 0 & -1 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} -1 \\
 0 \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} 0 & -2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} -2 & & & \\
 & 0 \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} 0 & & &
 \end{array}$$

$\mu^{(a)}$ は略してあるが、今のテンソル積の形状から $\mu^{(2)} = (2)$ および $\mu^{(3)} = (2)$ である。計算を見やすくするために以下の記号を使用する。 $\mu^{(a)}$ の長さ j の行から削るとき (つまり $\ell^{(a-1)} = j$ のとき) まず目を選択してから一ますずつ削除し新しい rigging を決定するまでの一連の操作を $\delta_j^{(a)}$ と表すことにしよう。与えられた艦装配位で $\mu^{(a)}$ の長さ j の行を選択すると順に $\delta_j^{(a)}, \delta_1^{(a-1)}, \delta_1^{(a-2)}, \dots, \delta_1^{(1)}$ を行うことで $B^{a,j}$ の一つの列が得られることになる。次いで $\delta_{j-1}^{(a)}, \delta_1^{(a-1)}, \delta_1^{(a-2)}, \dots, \delta_1^{(1)}$ を行うと二列目が得られる、等となる。この手順は $A_n^{(1)}$ 型の場合と共通である。

ここでは $\mu^{(2)}$ の長さ 2 の行を選択して $B^{2,2}$ の元を得るところから始めよう。すなわち最初のステップは $\delta_2^{(2)}$ であり、 $\nu^{(2)} = (4, 3, 1)$ の長さ 2 かそれ以上の特異なストリングを探すことから開始する。同様の操作を続けていって $B^{2,2}$ に対する全ての手順を実行すると以下のようなになる。まず目に “×” のしるしを付したものが選択され除去されるまず目である。また $\delta_j^{(a)}$ と矢印を挟んで途中段階の像を記述した。

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} -1 & 1 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \times & 1 \\ \hline 0 & \square & 0 & \square \\ \hline \end{array} 1 & -3 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \times \\ \hline \square & \square & \square & -2 \\ \hline \square & \square & \times & -2 \\ \hline 0 & \square & 0 & \square \\ \hline \end{array} -3 & 0 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \times \\ \hline 0 & \square & 0 & \square \\ \hline \end{array} 0 & 0 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \times \\ \hline \square & -1 \\ \hline \end{array} 0 \\
\delta_2^{(2)} \downarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline 3 & \square \\ \hline \end{array} & & & & & & \\
0 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} -1 & 1 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline 0 & \square & \square & 0 \\ \hline 0 & \square & 0 & \square \\ \hline \end{array} 1 & -2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & -2 \\ \hline 0 & \square & \square & 0 \\ \hline 0 & \square & 0 & \square \\ \hline \end{array} -2 & 0 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline 0 & \square & 0 & \square \\ \hline \end{array} 0 & -1 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline -1 & \square \\ \hline \end{array} -1 \\
\delta_1^{(1)} \downarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \square \\ \hline 3 & \square \\ \hline \end{array} & & & & & & \\
-1 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \times \\ \hline \end{array} -1 & 1 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline 0 & \square & \times & 0 \\ \hline 0 & \times & 0 & \square \\ \hline \end{array} 1 & -2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & -2 \\ \hline 0 & \square & \times & 0 \\ \hline 0 & \times & 0 & \square \\ \hline \end{array} -2 & 0 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline 0 & \times & 0 & \square \\ \hline \end{array} 0 & -1 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline -1 & \times \\ \hline \end{array} -1 \\
\delta_1^{(2)} \downarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \square \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array} & & & & & & \\
-1 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \times \\ \hline \end{array} -1 & 1 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \times \\ \hline 0 & \square & 0 & \square \\ \hline \end{array} 1 & -2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \times \\ \hline \square & \square & \square & -2 \\ \hline 0 & \square & 0 & \square \\ \hline \end{array} -2 & 0 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \times \\ \hline \square & \square & 0 & \square \\ \hline \end{array} 0 & -1 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline -1 & \square \\ \hline \end{array} -1 \\
\delta_1^{(1)} \downarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array} & & & & & & \\
-1 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} -1 & 1 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline 0 & \square & 0 & \square \\ \hline \end{array} 1 & -2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & -2 \\ \hline 0 & \square & 0 & \square \\ \hline \end{array} -2 & 1 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & 1 \\ \hline \end{array} 1 & -1 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline -1 & \square \\ \hline \end{array} -1
\end{array}$$

いくつか注釈をつけておく。

- $\delta_2^{(2)}$ の後新しい vacancy numbers を計算する時には path が $B^{3,2} \otimes B^{2,1} \otimes B^{1,1}$ であるとして計算する。つまり $\mu^{(1)} = (2, 1)$, $\mu^{(2)} = (1)$ とする。
- 最初の $\delta_1^{(1)}$ は $\nu^{(1)}$ に特異なストリングが存在しないため削れずに出力が 1 である。
- $\delta_1^{(2)}$ は $\nu^{(2)}$ から削り始めて右端まで行って折り返した後 $\nu^{(1)}$ まで削っている。

残りの計算も実行すると、最終的な像 $\Phi^{-1}(\nu, J)$ は以下の通り。

$$\Phi_{B^{3,2} \otimes B^{2,2}}^{-1}(\nu, J) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \bar{5} \\ \hline 4 & \bar{3} \\ \hline 5 & \bar{1} \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array}. \quad (55)$$

参考までに $\mu^{(a)}$ の選び方の順を逆にすると以下の像が得られる。

$$\Phi_{B^{2,2} \otimes B^{3,2}}^{-1}(\nu, J) = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \bar{5} \\ \hline 5 & 3 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 5 & \bar{2} \\ \hline 3 & \bar{1} \\ \hline \end{array}. \quad (56)$$

臙装配位写像の R 不変性により (55) と (56) は R -行列により移りあう。

$$R: \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \bar{5} \\ \hline 3 & \bar{1} \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \bar{5} \\ \hline 4 & \bar{3} \\ \hline 5 & \bar{1} \\ \hline \end{array} \mapsto \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 5 & \bar{2} \\ \hline 3 & \bar{1} \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \bar{5} \\ \hline 5 & 3 \\ \hline \end{array}.$$

よってこの場合 R -行列は $R = \Phi_{B^{3,2} \otimes B^{2,2}}^{-1} \circ \Phi_{B^{2,2} \otimes B^{3,2}}$ と実現される。長さ 2 以上のテンソル積に対して任意の回数 R -行列を作用させたものでも同様に $R = \Phi_{B'}^{-1} \circ \Phi_B$ と一回で計算できる。計算の効率だけではなく、組み合わせ R -行列を定義から原理的に計算を行ったり、又はそれを改良したような再帰的な方法ではなく、明示的なアルゴリズムによって計算する方法はおそらく存在していなかったと思われる。アルゴリズムが明示的に与えられたからこそ箱玉系の逆散乱形式などの重要な結果が導出できるのである。

例 2 今考えた例は出てくるタブローが Kashiwara–Nakashima タブローばかりだったので、そうではない例をひとつあげる。 $D_6^{(1)}$ とする。 $B^{4,3} \otimes B^{2,3} \simeq B^{2,3} \otimes B^{4,3}$ 型のテンソル積についての以下の最高ウェイト臙装配位を考える。

$$\emptyset \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & & 0 \\ \hline 0 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \\ \hline 0 & & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \\ \hline 0 & & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \\ \hline 0 & & 0 \\ \hline \end{array}$$

二通りの方法で臙装配位写像 Φ^{-1} を計算すると以下の像を得る。

$$R: \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline 4 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline 4 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$ に対応する最高ウェイト元は $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 4 & 3 \\ \hline 4 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} = \text{fill} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \right)$ 。最高ウェイト元を得るために作用させた \tilde{e}_a の列を逆順にして \tilde{f}_a の列としてかければ対応する Kashiwara–Nakashima タブローが得られる。結局上記 R -行列の結果を KN タブロー表示すれば

$$R: \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 2 \\ \hline 4 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$$

という形になる。

臙装配位写像 Φ の定義をよくご理解いただければ、KR タブローの様に風変わりな、しかし代数構造を持つ対象が発生することは誠に驚異的なこととご納得頂けると思う。しかし実際にはなかなか受け入れがたい事実であるようで、かつて関係者の方々に概念を正しく理解して頂くのに大変な労力を要したことを思い出す。

8.9 Littlewood–Richardson タブロー

本稿の締めくくりにデザートのような話題を提供しようと思う²⁸。この話題における一つの主役は Littlewood–Richardson (LR) タブローである。普通 LR タブローを扱う時はタブローそのものではなくある条件を満たす LR タブローの総数について関心をもたれる場合が多いのであるが、以下で述べる構成では LR タブローそのものに重要な意味があるところが興味深い。

考察する問題をより具体的に述べると、任意の非例外型アフィンリー代数 \mathfrak{g} の最高ウェイト表現と $A_n^{(1)}$ 型の最高ウェイト表現および LR タブローの組の間には興味深い全単射が存在する。そのような全単射は母関数のレベルでの恒等式として Shimozono–Zabrocki [SZ] により提唱され、また論文 [Sh05, LS05, LOS] において恒等式の証明が行われた。その様な恒等式の成り立つ数学的根拠として論文 [OS] において具体的に表現の間の全単射が構成されたので、以下はその内容を紹介する。Cartan データを含む詳細は原論文に譲ることとして、議論の本質的な部分をあまり細部に立ち入らずに概観することを目標とする。

なお本節では代数として一般の非例外型アフィンリー代数を考察する。代数のランクが低い場合を除き全ての代数について普遍的な構成となっている。

LR タブロー まずは LR タブローの復習から。 T が LR タブローであるとは以下の二つの条件を満たす時をいう。

- T は歪準標準盤である。つまり T は左上のある Young 図の部分を空白として他の部分に数字を書き込んだタブローであり、書き込まれた文字について通常の準標準盤としての条件を課す。
- T に書き込まれた文字を右から左、上から下へ、という順に読んで得られる数列を row word と呼ぶとき、row word $w = x_1 \cdots x_l$ が Yamanouchi 条件を満たす。ここで Yamanouchi 条件とは w を左端から任意の部分まで読んで得られる任意の部分列 $x_1 \cdots x_k$ に対して、部分列に含まれる文字 1 の総数が文字 2 の総数以上であり、文字 2 の総数が文字 3 の総数以上であり、等々という条件が満たされることをいう²⁹。

LR タブロー T の型 η/λ とは、 T の外形が η であり、左上の文字が書き込まれない領域の形が λ であることをいう。また LR タブロー T のウェイト $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ とは、 T に含まれる文字 j の個数を μ_j として得られる分割の事である。

例えば以下のタブローは $(43^3 1^2)/(2^2 1)$ 型の LR タブローであり、ウェイトは $(3, 3, 2, 2)$ である。

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 1 | 1 |
| | | 2 | |
| | 1 | 3 | |
| 2 | 2 | 4 | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |

この場合の row word は 1123142234 であり、確かに Yamanouchi 条件を満たす。

²⁸大分こっそりした味付けで胃もたれしてしまうかもしれないが。

²⁹Yamanouchi 条件は A_n 型クリスタルのテンソル積 $(B^{1,1})^{\otimes L}$ の元が最高ウェイト元であるための条件と同一である。

型 η/λ でウェイト μ の LR タブローの総数は Littlewood–Richardson 係数と呼ばれ、通常 $c_{\lambda\mu}^\eta$ と表される。良く知られているように $c_{\lambda\mu}^\eta$ は、 \mathfrak{gl}_n のウェイト λ の既約表現を V_λ と書くとき、テンソル積 $V_\lambda \otimes V_\mu$ の中に含まれる表現 V_η の重複度に等しい。

艦装配位の安定化 元々考えられていた問題では代数 \mathfrak{g} に対する KR クリスタルのテンソル積 $\bigotimes_k B^{r_k, s_k}$ を考える事になるが、我々の立場では艦装配位上で考察することになる。いくつか用語を準備しよう。KR クリスタルの議論では非例外型アフィンリー代数を Dynkin 図の 0 番目の頂点付近の形状に応じて以下のように分類すると便利ことが多い。

| ◇ | ◇ 型の \mathfrak{g} |
|---|--|
| ◇ | $A_n^{(1)}$ |
| □ | $D_{n+1}^{(2)}, A_{2n}^{(2)}$ |
| ◻ | $C_n^{(1)}$ |
| ◻ | $A_{2n-1}^{(2)}, B_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ |

ここで代数の型を表す ◇ の形は、クリスタル $B^{r,s}$ を古典部分代数の表現に分解したときに現れるウェイトの形 (すなわち Kashiwara–Nakashima タブローの取りうる形) が $r \times s$ の長方形から ◇ の形を任意個数取り除いて得られる形となることによる。以下簡単のため各型 ◇ = ◇, □, ◻, ◻ について

$$\mathfrak{g}^\diamond = A_n^{(1)}, D_{n+1}^{(2)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)} \quad (57)$$

という場合を念頭に置いて議論するが、この選択は必須のものではない³⁰。なお特に断りがない場合、本節での艦装配位は最高ウェイト元の場合を考える。

◇ 型の代数に対する艦装配位を考えよう。詳細は論文 [OSS03] に譲るが、一般の代数に対する艦装配位も Dynkin 図の 0 番を除く各頂点に $\nu^{(a)}$ を配置して

$$(\nu, J) = \left(\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(n)}, (\nu^{(1)}, J^{(1)}), \dots, (\nu^{(n)}, J^{(n)}) \right) \quad (58)$$

の様に得られる。ここで $\mu^{(a)}$ の番号付は $D_n^{(1)}$ 型と同様に行 $\mu_i^{(a)}$ はクリスタル $B^{a, \mu_i^{(a)}}$ に対応するとしよう。記号 a^\diamond を以下のように定める。

$$a^{\square} = a^{\square} = n - 1, \quad a^{\square} = n - 2.$$

その心は Dynkin 図の真ん中にある A 型的な頂点のうち最大のものを表している。一般の代数の場合の vacancy numbers も A 型的な頂点に対しては $A_n^{(1)}$ 型艦装配位と同様に定義される (例えば [OS, §2.3] を参照されたい)。

興味深い点として与えられた path に対し考察する代数のランク n を変化させていくと、 n が十分小さい場合を除き艦装配位が安定化し、特徴的な振る舞いをするようになる [OS, §2.4]。具体的には、ある k が存在して

$$\nu^{(k)} = \nu^{(k+1)} = \dots = \nu^{(a^\diamond)} \quad (59)$$

となり、かつ $\nu^{(a^\diamond)}$ は ◇ を単位として敷き詰めることのできる形状となる ($A_n^{(1)}$ 型なら空集合となる)。この時 (59) に対する vacancy numbers は全て 0 となり、艦装配位に対する最

³⁰一方 [LOS] の議論においては必須のものだった

高ウェイト条件から riggings は全て正となることと合わせると、実質的にこの部分に対する rigging の自由度は消滅する。この様な状況下では艦装配位の $\nu^{(a^\diamond)}$ より右側の部分に現れる各代数への依存性は無視することができてしまい、艦装配位は型 \diamond のみで分類されることになる。

艦装配位を用いてもウェイトを計算することができ、例えば [Sa14, Eq.(13)] や [OS, Eq.(2.7)] に一般的な式が与えられているが、さしあたって以下の議論を理解するために代数のランクが十分大きくて安定化 (59) が成立している場合の式を示す。その場合 $\lambda = \text{wt}(\nu, J)$ を Young 図で表した時の a 行目 λ_a は

$$\lambda_a = \sum_{b \geq a} |\mu^{(b)}| + |\nu^{(a-1)}| - |\nu^{(a)}| \quad (60)$$

で与えられる。ここで分割 λ に対し $|\lambda|$ でます目の総数を表す。以下型 \diamond でウェイト λ の (最高ウェイト) 艦装配位の全体を $\text{RC}^\diamond(\lambda)$ で表すことにする。path の形状を表す $\mu^{(a)}$ は固定しておき、特に明示しないことにする。

全単射の定式化 本題の全単射を定義しよう。いくつか記号を準備する。 $\text{LR}_{\lambda\mu}^\eta$ で型 η/λ をもつウェイト μ の LR タブローの全体としよう。また分割 λ に対し $\ell(\lambda)$ で分割の長さを表すことにしよう。

考察する全単射は

$$\Psi : \text{RC}^\diamond(\lambda) \longrightarrow \text{RC}^\emptyset(\eta) \times \text{LR}_{\lambda\mu}^\eta \quad (61)$$

というものである。ここで各要素の対応が

$$\Psi : (\nu, J) \longmapsto \{(\nu', J'), T\}$$

であるとき

$$\lambda = \text{wt}(\nu, J), \quad \mu = \nu^{(a^\diamond)}, \quad \eta = \text{wt}(\nu', J')$$

である。 $\diamond = \emptyset$ すなわち $A_n^{(1)}$ 型の場合も $\lambda = \eta$ として含まれている。この全単射は抽象的なものではなく具体的なものであり、本節末で述べるように代数の持っている双対性とも関連した深い内容を持ったものである。

全単射 (61) が成立するためには、代数のランクは安定化 (59) が成立しているようなものであれば十分であるが、より精密に述べることができる。一つ艦装配位 $(\nu, J) \in \text{RC}^\diamond(\lambda)$ が与えられたとしよう。この時代数のランク n が条件

$$a^\diamond \geq \ell(\text{wt}(\nu, J)) + \ell(\nu^{(a^\diamond)}) \quad (62)$$

を満たす時、写像 Ψ が成立する。この条件の意味は、具体的なアルゴリズムを見て頂ければご理解いただけと思うが、大体以下のようなものである。簡単のため $D_n^{(1)}$ 型の場合で考えよう。LR タブロー $T \in \text{LR}_{\lambda\mu}^\eta$ に対し $N_{out} = \ell(\eta)$ および $N_{in} = \ell(\lambda)$ と定義しよう。この時アルゴリズムの定義から Ψ^{-1} は代数のランク n が $N_{out} + 2 \leq n$ を満たす時定義される。一方 N_{out} と N_{in} の差の最大値は $N_{out} - N_{in} = \ell(\nu^{(a^\diamond)})$ なので合わせると $N_{in} + \ell(\nu^{(a^\diamond)}) + 2 \leq n$ すなわち (62) が得られる。割と精密な評価であるから必要に応じて定理が成立するための代数のランクに関する条件を導出するのに利用できる (例えば [OS, Remark 4.1] を参照)。

艦装配位写像 $\Phi : \text{path} \mapsto \text{rigged configuration}$ が確立されている場合は全単射 Ψ はクリスタルのテンソル積 $\otimes_k B^{r_k, s_k}$ のレベルに拡張される。その様な写像を直接求めることは非常に難しい問題のようであり [Sh05]、おそらく一般には未解決であると思われる。もちろん艦装配位上に直接柏原作用素を導入することもできるので、表現の間の全単射という意味では (61) で完成しているといっても良いが、クリスタルのテンソル積のレベルで実現されることも重要であろう。

アルゴリズムの定義 では写像 Ψ のアルゴリズムの記述をしよう。大雑把にいつてアルゴリズムは $A_n^{(1)}$ 型の艦装配位写像のアルゴリズムをそのまま左右を入れ替えたものである。これは節末で関連を述べる代数の双対性が Dynkin 図の左右を入れ替えるものであるのと見事に整合する。また LR タブローは写像の recording tableau としてごく自然に現れる。考えている問題の複雑さから見るとあっけないほど単純になってしまい、艦装配位の底知れぬ強力さに驚かされる。

アルゴリズムは $\nu^{(a^\diamond)}$ の各列を右から順に見て以下のように行う ($\nu^{(n)}$ 等には自然に拡張されるが本質的ではないので省略)。 $\nu^{(a^\diamond)}$ の右端の列が左から数えて l 列目であり、高さが h_l であるとしよう。その時操作 δ_l が以下のようにして定まる。

1. $\ell^{(a^\diamond)} = l$ とし、再帰的に $\ell^{(a)}$ を定める。 $\ell^{(a)}$ が定まっているとき、 $\nu^{(a-1)}$ の特異なストリングで長さが $\ell^{(a)}$ 以上のもののうち最小のものの長さを $\ell^{(a-1)}$ と定める。その様なものがないとき、 $\ell^{(a-1)} = \infty$ とし、出力を $k = a$ として停止する。一方 $\ell^{(1)} < \infty$ ならば出力を $k = 1$ として停止する。
2. 前項で選んだ $\nu^{(a)}$ の各行の右端から一ますずつ削る。新しい rigging は、削られなかった行に対しては元と同じとし、一方削られた行に対しては新しい艦装配位において特異なストリングとなるように定める。ただし vacancy number の計算において path の形状を表す $\mu^{(a)}$ は変化させない。
3. recording tableau T には以下の要領で文字を書き込む。写像 Ψ の過程では δ_l を h_l 回繰り返して艦装配位に作用させる。もし考えている δ_l が $\delta_l^{h_l}$ の中の j 番目であったとき、 T の k 行目の右端に文字 j を書き込む。

$\nu^{(a^\diamond)}$ の i 列目の高さが h_i である時、写像 Ψ は

$$\Psi(\nu, J) = \{(\nu', J'), T\} = \delta_1^{h_1} \circ \delta_2^{h_2} \circ \cdots \circ \delta_l^{h_l}(\nu, J)$$

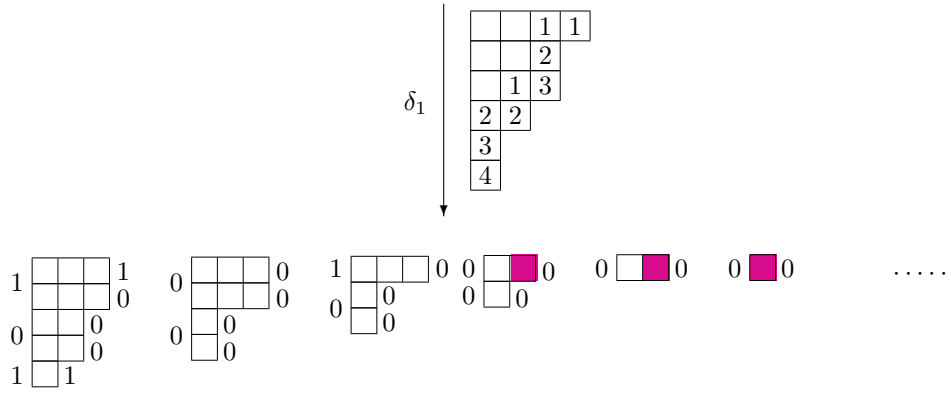
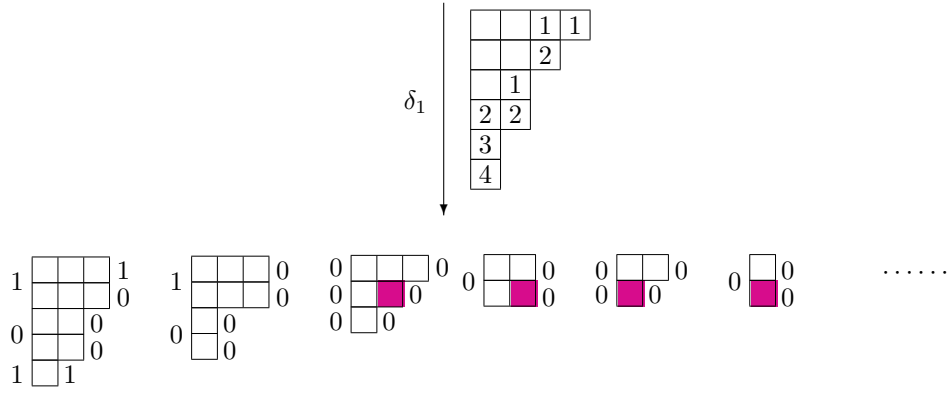
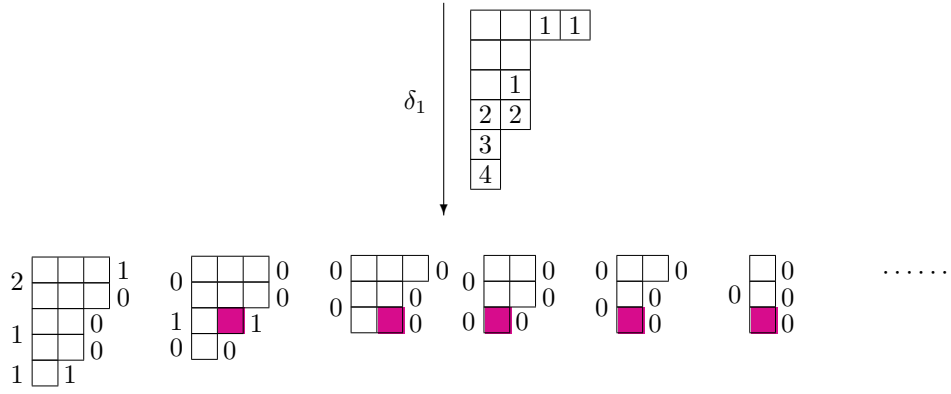
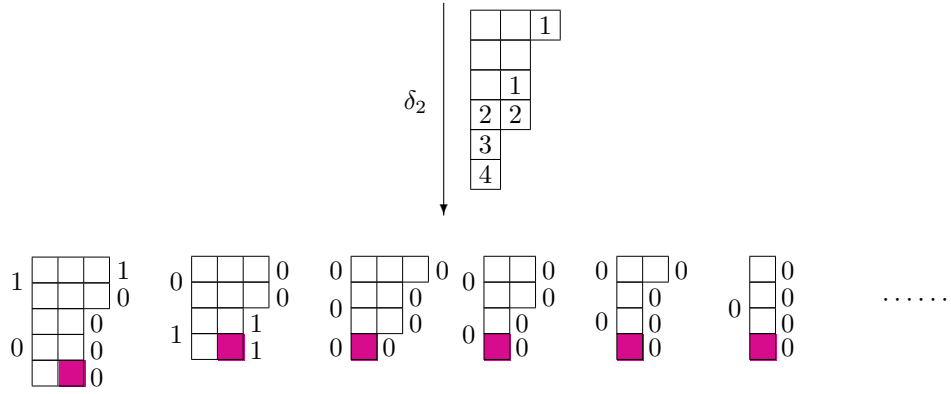
で与えられる。

写像 Ψ は各ステップで逆にすることができ、それが逆写像 Ψ^{-1} を与える。

写像の例 ここでは $D_n^{(1)}$ ($n \geq 8$) 型 $(B^{1,3})^{\otimes 3} \otimes (B^{1,2})^{\otimes 2} \otimes (B^{1,1})^{\otimes 2}$ テンソル積の以下の元を考える：

$$b = \boxed{1 \ 1 \ 1} \otimes \boxed{2 \ \bar{1} \ \bar{1}} \otimes \boxed{1 \ 2 \ \bar{2}} \otimes \boxed{2 \ 3} \otimes \boxed{2 \ \bar{2}} \otimes \boxed{\bar{2}} \otimes \boxed{2}.$$

その時対応する艦装配位上で写像 Ψ は以下のように計算される。以下の図では次のような記述をする。一番最初の艦装配位は上で与えた元 b に対応する。紫色の印をつけた箱は矢印の左側で指定されたそれぞれの操作 δ によって取り除かれるます目を表す。各段階で得られるレコーディングタブロー T はそれぞれの矢印の右側に与えた。



$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} & 1 & 0 & 0 & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} & 0 & 0 & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} & 0 & 0 & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} & 0 & 0 & 0 & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} & 0 & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} & 0 \\
0 & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} & 0 & 0 & 0 & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} & 0 & 0 & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} & 0 & 0 & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} & 0 & 0 & 0 & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} & 0 & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} & 0 \\
1 & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} & 1 & 1 & 1 & \otimes & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} & 2 & 2 & 2 & \otimes & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} & 1 & 3 & 3 & \otimes & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} & 4 & 4 & \otimes & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} & 3 & 5 & \otimes & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} & 4 & \otimes & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} & 6.
\end{array}$$

図式の最後に与えられた艦装配位および T が今の場合の写像 Ψ の像となる。特に T は標準盤となっており、更にその row word は 1123142234 となっていて確かに Yamanouchi 条件を満たしていることが確かめられる。なお艦装配位写像 Φ^{-1} のもとで最終的な艦装配位は以下のテンソル積の元に対応している：

$$b' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}.$$

なお逆写像 Ψ^{-1} の計算は上記の計算を完全に逆にたどっていけばよい。

双対性 b および b' は先ほどの例で与えられたものと同じとし、それらを $D_8^{(1)}$ の元であるとみなす。これらを文献 [LOS] 第 5.3 節に与えられた対合 (involution) σ と比較してみよう。 σ は Dynkin 図の左右を入れ替える双対性、すなわち

$$\sigma \circ \tilde{e}_a = \tilde{e}_{n-a} \circ \sigma$$

が任意の $a \in I = \{0, 1, \dots, n\}$ について成り立つものとしよう。今考えている path b について具体的に計算すると、

$$\sigma(b) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & 8 & 8 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & 8 & 7 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 8 & 6 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 6 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 6 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}.$$

すると b' は $\sigma(b)$ に対応する I_0 -最高ウェイト元と一致する ($I_0 = I \setminus \{0\}$)。同様の関係が任意の Ψ の像に対して成り立っているものと予想している。

なお σ の定義では代数として (57) に与えたものを取る必要があるが、艦装配位上の全単射 Ψ の定義では任意の非例外型アフィンリー代数を選ぶことができ、その定式化は代数の種類にほとんど依存しない普遍性のあるものであった。これもまた艦装配位のもつ顕著に深い性質の一つであり、艦装配位自身が数学的に意味のある量であることの証左となっている。

8.10 その他の話題

本稿では触れられなかったが興味深い結果について簡単に紹介して本稿の \sphericalangle とする。

他の代数への拡張 艦装配位写像 Φ は様々な代数に対して拡張されている。現状を知るために筆者の知る範囲での星取表を以下に載せておく。

- $A_n^{(1)}$ 型：完全に一般の場合に完成 [KSS]。
- $D_n^{(1)}$ 型：完全に一般の場合に完成 [OSSS]。
- その他の非例外型代数：[OSS03] により $(B^{1,1})^{\otimes L}$ 型のテンソル積について完成。
- $E_6^{(1)}$ 型：[OSano] により $(B^{1,1})^{\otimes L}$ 型のテンソル積について完成。
- $D_4^{(3)}$ 型：[Scr15] により $(B^{1,1})^{\otimes L}$ 型のテンソル積について完成。

様子を見るために代数が simply laced ではない場合の例として $C_n^{(1)}$ 型の場合を紹介することにしよう。[OSS03] により完成されているのは $(B^{1,1})^{\otimes L}$ 型の場合なので $\mu^{(1)} = (1^L)$ としよう。すると艦装配位は

$$(\nu, J) = ((\nu^{(1)}, J^{(1)}), (\nu^{(2)}, J^{(2)}), \dots, (\nu^{(n)}, J^{(n)}))$$

となる。ここで $\nu^{(n)}$ の各行の長さは偶数 $\nu_i^{(n)} \in 2\mathbb{Z}$ とする。vacancy numbers は

$$\begin{aligned} P_l^{(1)}(\nu) &= L - 2Q_l(\nu^{(1)}) + Q_l(\nu^{(2)}), \\ P_l^{(a)}(\nu) &= Q_l(\nu^{(a-1)}) - 2Q_l(\nu^{(a)}) + Q_l(\nu^{(a+1)}), \quad (1 < a < n), \\ P_l^{(n)}(\nu) &= Q_l(\nu^{(n-1)}) - Q_l(\nu^{(n)}). \end{aligned}$$

今までと異なるのは $a = n$ の場合である。最高ウェイト元の場合の艦装配位の定義は $A_n^{(1)}$ 型や $D_n^{(1)}$ 型の場合と全く同一である。すなわち全ての vacancy numbers が 0 以上であり、かつ rigging は常に 0 以上対応する vacancy number 以下であることとする。

艦装配位写像のかなめであるます目を選択し除去する手続き δ は以下ようになる。

1. $\ell^{(0)} = 1$ とし以下のように再帰的に $\ell^{(a)}$ を定めていく。 $\ell^{(a-1)}$ まで定まったとする。その時 $\nu^{(a)}$ の特異なストリングで長さが $\ell^{(a-1)}$ 以上のものが存在するとき、そのうち最小のものの長さを $\ell^{(a)}$ と定め、手順を続行する。もし $\nu^{(a)}$ に該当する特異なストリングが存在しない時は $\ell^{(a)} = \infty$ と定め、出力を a として手続きを停止する。
2. もし $\ell^{(n)} < \infty$ であった場合、 $\nu^{(n)}$ の長さ $\ell^{(n)}$ の行からは二ます並んで削ることとする（そうすると $\nu^{(n)}$ の行はいつでも偶数にできる）。 $\bar{\ell}^{(n)} = \ell^{(n)}$ と定義し、 $\ell^{(n)} = \bar{\ell}^{(n)} - 1$ と再定義すると、 $\nu^{(n)}$ の $\ell^{(n)}$ 列目と $\bar{\ell}^{(n)}$ 列目のます目が削られることになる。
3. もし $\bar{\ell}^{(a+1)} = \ell^{(a)}$ であった場合 Case (S) であると言い、以下のように該当する各 $\nu^{(a)}$ の行から二ますずつ削る。 $\bar{\ell}^{(a)} = \ell^{(a)}$ と定義し、 $\ell^{(a)} = \bar{\ell}^{(a)} - 1$ と再定義し、 $\nu^{(a)}$ の特異なストリングの右端二ます（ $\ell^{(a)}$ 列目と $\bar{\ell}^{(a)}$ 列目）を並んで削る。
4. もし $\bar{\ell}^{(a+1)} > \ell^{(a)}$ であれば、 $\nu^{(a)}$ の特異なストリングで長さが $\bar{\ell}^{(a+1)}$ 以上であるもののうち最少のものの長さを $\bar{\ell}^{(a)}$ と定義する。もし $\bar{\ell}^{(a+1)} < \infty$ かつ $\nu^{(a)}$ に該当する特異なストリングが存在しなかった場合、 $\bar{\ell}^{(a)} = \infty$ とおき、出力を $\overline{a+1}$ として停止する。一方 $\bar{\ell}^{(1)} < \infty$ ならば出力を $\bar{1}$ として停止する。

こうして選んだ特異なストリングから一ますないし二ますずつ削り、 $\mu^{(1)} = (1^{L-1})$ とする。新しい rigging は、変化しなかったストリングに対しては元と同じものを、削除されたストリングに対しては新しい艦装配位において該当するストリングが特異になるように与えることは $A_n^{(1)}$ 型や $D_n^{(1)}$ 型の場合と同様である。

一般の $\bigotimes_{k=1}^L B^{r_k, s_k}$ の場合にも数値的に実験がなされている [ScScr14]。結果として、 $B^{r, s}$ を表示するタブローは §8.8 で与えた $D_n^{(1)}$ 型の場合と全く同様である。より詳しく述べると、クリスタル $B^{r, s}$ を古典部分代数の表現として分解すると、 $r \times s$ 型の長方形から横ドミノ \square を任意個数取り除いたものが得られる。従って $D_n^{(1)}$ 型 KR タブローの定義で現れた奇数のステップ k_c は存在せず、かえって単純なものになってしまう。もちろん他の KR タブローを得るために用いる柏原作用素 \tilde{f}_a には $C_n^{(1)}$ 型のものを用いる。また艦装配位上の柏原作用素の定義も $A_n^{(1)}$ 型や $D_n^{(1)}$ 型の場合と全く同じ定義で良いようである。

代数の種類が異なるのであるから、全ての種類に対して全く同じ結果が成り立つのでは各代数の個性を見落としてしまっている可能性が高い。一方代数の種類ごとに全く異なる構成をしているのでは普遍性の面で難がある。艦装配位の場合ここで見たように、各代数で共通すべき部分では共通の定義が成り立ち、一方各々の代数の個性が最も発揮されるであろう部分には適切な違いが発生するので、筆者には好ましく感じられる³¹。

$B(\infty)$ -クリスタル 最近 Salisbury–Scrimshaw により KR クリスタルとは別の興味深いクリスタルのクラスである $B(\infty)$ -クリスタルの構造が艦装配位上に導入された [SalScr14]。この場合 0 番目の頂点も含む全ての Dynkin 図の頂点に $\nu^{(a)}$ が配置される。柏原作用素の定義など代数構造の面だけに限れば一般の対称化可能な Kac–Moody リー代数の場合にも全く同様にして定義することができる [SalScr15b]。なお、このような考え方では本稿で考えてきた KR クリスタルの場合は 0 番目の頂点には何も配置していないので有限型と呼ばれるが、KR クリスタルの場合にはアフィン代数による無限次元対称性が深くかかわっているので、ここで議論とはかなり異なる話なのかもしれない。

もう少し詳細に彼らの構成を記述しておこう。本稿で述べてきた艦装配位と異なる点として、 $B^{r,s}$ の形状を記述している $\mu^{(a)}$ は全て空集合として扱い、vacancy number から $\mu^{(a)}$ の関わる項を消去する。次に柏原作用素 \tilde{e}_a と \tilde{f}_a であるが、基本的な定義は本稿で述べてきた KR クリスタルの場合と全く同様である。唯一の相違点は、 \tilde{f}_a の定義において rigging が対応する vacancy number を超過した場合 \tilde{f}_a の作用を 0 と定めていたのを、その様な場合でも構わず（形式的に全く同じ手順で）そのまま計算を続けていってしまう点である。元々の Schilling [Sc06] による KR クリスタルの構造の導入では \tilde{f}_a の作用が 0 となる場合を含む定義である事を本質的に用いて Stembridge の方法に帰着させていたので $B(\infty)$ -クリスタルの状況には適用できない議論であった。一方論文 [Sa14] による方法は関数 ε_a を艦装配位上に導入する直接的な方法であるため $B(\infty)$ -クリスタルの場合にもそのまま通用し、実際論文 [SalScr14] ではその方法で導入されている。

最終的に $B(\infty)$ -クリスタルは、 $\nu^{(a)} = \emptyset$ が全ての頂点 a について成り立つような空の艦装配位から出発して、柏原作用素 \tilde{f}_a を任意の仕方で作用させたものの全体として定義される。

$B(\infty)$ -クリスタルに対する艦装配位の持つ著しい性質として、Kashiwara involution と呼ばれる重要な双対性が非常に単純な形をとることがあげられる [SalScr16]。具体的には各ストリングの rigging と corigging を入れ替える操作

$$\left(\nu_i^{(a)}, J_i^{(a)}\right) \mapsto \left(\nu_i^{(a)}, P_{\nu_i^{(a)}}(\nu) - J_i^{(a)}\right)$$

で移った先で柏原作用素 \tilde{e}_a と \tilde{f}_a を定義すればよい。実にすっきりとした状況である。同じ操作は 48 ページで Lusztig involution を実現した際にも用いたし、また Bethe 仮説方程式の解析でも 16 ページの式 (10) で登場して基本的であった。

$B(\infty)$ -クリスタルは空の艦装配位から柏原作用素で得られるもの全体として定義されたが、最も単純な A_n 型の場合にはより詳細な情報を得ることができる [SalScr15a, HL]。組み合わせ論的な記述には marginally large (reverse) tableaux と呼ばれる対象が登場する。

$B(\infty)$ -クリスタルの場合の艦装配位の理論は現状では柏原作用素が定義され、表現が構成されました、という段階の様に筆者には感じられる。その意味では著者らも述べているようにまだ一つの「モデル」というべき段階であろう。モデルを超えてどのように本質的な意味が存在するのか解明するのは将来の重要な課題である。

³¹老子 第 48 章 『無為にして為さざるは無し』

組み合わせ論等との関連 元々臙装配位の理論は Kostka–Foulkes 多項式やその一般化に関わる組み合わせ論的な恒等式の証明を目的として導入されたものだった。これはチャージ関数 (38 ページ (39) 参照) の生成母関数が Kostka–Foulkes 多項式となることによる。この方面についても多くの研究がなされており、例えば [K01, HKOTT] を参照されたい。また Kostka–Macdonald 多項式との関連 [F95] や二重 Kostka 多項式との関連 [Liu] 等も議論されている。なおアフィン量子群の表現論との関連は、例えば [Her, dFK] を参照。

おわりに 臙装配位の研究は 1980 年代中ごろの Kirillov 氏らの研究を嚆矢として現在まで 30 年ほどの間様々な研究者により研究が進められてきた。本稿では、少なくとも筆者の視野に収まっている範囲でその全体像をお示ししたつもりである。ようやく広がりのある世界が見えてきたところだと思う。

臙装配位の研究は、単に表現を構成する、という地点を超えて、我々の扱っている代数の表す無限次元の対称性とは何なのか、という問題について考える際に深い洞察を与えてくれるようである。無限次元代数の表す対称性は有限次元代数における感覚からは想像もつかないほど大きいため、系に強い制限を課し適用可能な対象は限定されてしまう一方、驚くほど精緻で意外性のある現象が発生することが多い。従って有限次元代数の研究において伝統的に育まれてきた方法に加え、全く異なる発想からの研究も重要になると思われる。無限次元代数の表す対称性が本格的に研究されるようになったのは歴史的に見て決して長い期間ではなく、その特有の世界についてはまだまだ解明の余地が残っているように感じられる。その時本稿で述べた様な観点からの研究も一つの考え方を提供するであろう。

臙装配位は人間の頭の中で論理的に作られたようなものではなく、無限次元の対称性に由来した自然界に実在する数学的量であると言って良いであろう。今後とも臙装配位の研究が進み、様々な姿を見せてくれるのを楽しみにしている。

謝辞 本稿は筆者が 2016 年 9 月 7 日に第 61 回代数学シンポジウム (日本数学会、佐賀大学) において行った講演の議事録として執筆されました。講演の機会を与えて下さった鈴木武史様をはじめとする運営委員の皆様深く感謝いたします。また本稿の一部は 2013 年度に東京大学大学院数理科学研究科で行った集中講義における講義ノートに基づいており、今回の執筆に当たっても講義を聴講して下さった方々からの鋭いコメントが大変役に立ちました。集中講義のホストをして下さった寺田至様にもこの場を借りて感謝いたします。最後になりましたが、本稿の内容にかかわる共同研究を行い、色々なことを教えて下さった Anatol N. Kirillov 様にもお礼申し上げます。

参考文献

- [A] V. I. Arnold, 『古典力学の数学的方法』(岩波書店, 1980 年)
- [AV] L. V. Avdeev and A. A. Vladimirov, *Exceptional solutions to the Bethe ansatz equations*. *Theor. Math. Physics* **69** (1986) 1071–1079.
- [BMSZ] N. Beisert, J. A. Minahan, M. Staudacher and K. Zarembo, *Stringing spins and spinning strings*. *JHEP* **09** (2003) 010 (27pp). [arXiv:hep-th/0306139](https://arxiv.org/abs/hep-th/0306139)
- [B] H. A. Bethe, *Zur theorie der metalle*. *Zeit. für Physik* **71** (1931) 205–226.

- [BDS] E. Brattain, N. Do and A. Saenz, *The completeness of the Bethe ansatz for the periodic ASEP*. [arXiv:1511.03762](#)
- [CJ] W. Cai and N. Jing, *Applications of a Laplace–Beltrami operator for Jack polynomials*. *Eur. J. Comb.* **33** (2012) 556–571. [arXiv:1101.5544](#)
- [DG14] T. Deguchi and P. R. Giri, *Non self-conjugate strings, singular strings and rigged configurations in the Heisenberg model*, *J. Stat. Mech: Theor. Exp.* (2015) P02004. [arXiv:1408.7030](#)
- [DS] L. Deka and A. Schilling: *New fermionic formula for unrestricted Kostka polynomials*, *Journal of Combinatorial Theory, Series A* **113** (2006) 1435–1461. See also the preprint version: [arXiv:math/0509194](#)
- [dFK] P. Di Francesco and R. Kedem. *Proof of the combinatorial Kirillov–Reshetikhin conjecture*. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2008** Art. ID rnn006, 57 pages. [arXiv:0710.4415](#)
- [D] P. A. M. Dirac, *Quantum mechanics of many-electron systems*. *Proc. Royal Soc. of London* **A123** (1929) 714–733.
- [DMN] B. A. Dubrovin, V. B. Matveev and S. P. Novikov, *Non-linear equations of Korteweg–de Vries type, finite-zone linear operators, and Abelian varieties*, *Russian Math. Surveys* **31** (1976) 59–146.
- [EKS] F. H. L. Essler, V. E. Korepin and K. Schoutens, *Fine structure of the Bethe ansatz for the spin- $\frac{1}{2}$ Heisenberg XXX model*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** (1992) 4115–4126.
- [F96] L. D. Faddeev, *How Algebraic Bethe Ansatz works for integrable model*. [arXiv:hep-th/9605187](#)
- [F00] L. D. Faddeev, 『現代の数理解物理はどのようなものであるべきか』*数理科学* 2000年11月号 5–11.
- [F95] S. Fishel, *Statistics for special q, t -Kostka polynomials*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995) 2961–2969.
- [F95] E. Frenkel, *Affine algebras, Langlands duality and Bethe ansatz*, in *Proceedings of the International Congress of Mathematical Physics, Paris, 1994*, ed. D. Iagolnitzer, pp. 606–642, International Press, 1995). [arXiv:q-alg/9506003](#)
- [FOY] K. Fukuda, M. Okado and Y. Yamada: *Energy functions in box ball systems*, *Int. J. Modern Phys.* **A15** (2000) 1379–1392. [arXiv:math/9908116](#)
- [GHNS] A. M. Gainutdinov, W. Hao, R. I. Nepomechie and A. J. Sommesé, *Counting solutions of the Bethe equations of the quantum group invariant open XXZ chain at roots of unity*, *J. Phys. A* **48** (2015) 494003 (38pp). [arXiv:1505.02104](#)
- [GN] A. M. Gainutdinov and R. I. Nepomechie, *Algebraic Bethe ansatz for the quantum group invariant open XXZ chain at roots of unity*, *Nucl. Phys* **B909** (2016) 796–839. [arXiv:1603.09249](#)

- [GD] P. R. Giri and T. Deguchi, *Heisenberg model and rigged configurations*, J. Stat. Mech: Theor. Exp. P07007 (2015). [arXiv:1501.07801](#)
- [HNS13] W. Hao, R. I. Nepomechie and A. I. Sommesse, *Completeness of solutions of Bethe's equations*, Phys. Rev. E **88** (2013) 052113 (8pp plus supplementary materials). [arXiv:1308.4645](#)
- [HNS14] W. Hao, R. I. Nepomechie and A. J. Sommesse, *Singular solutions, repeated roots and completeness for higher-spin chains*, J. Stat. Mech. **2014** (2014) P03024 (20pp). [arXiv:1312.2982](#)
- [HHIKTT] G. Hatayama, K. Hikami, R. Inoue, A. Kuniba, T. Takagi and T. Tokihiro: *The $A_M^{(1)}$ automata related to crystals of symmetric tensors*, J. Math. Phys. **42** (2001) 274–308. [arXiv:math/9912209](#)
- [HKOT] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado and T. Takagi *Combinatorial R matrices for a family of crystals: $B_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $A_{2n}^{(2)}$ and $D_{n+1}^{(2)}$ cases*, J. Algebra **247** (2002) 577–615. [arXiv:math/0012247](#)
- [HKOTT] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Z. Tsuboi, *Paths, Crystals and Fermionic Formulae*, Prog. Math. Phys. **23** (2002) 205–272. [arXiv:math/0102113](#)
- [H] T. Hawkins, *Jacobi and the birth of Lie's theory of groups*. Archive for History of Exact Sciences **42** (1991) 187–278.
- [H] W. Heisenberg, *Zur theorie des ferromagnetismus*. Zeit. Physik **49** (1928) 619–636. D. Delphenich 氏による英訳が以下の場所にある (項目は Physics: Electromagnetism) <http://www.neo-classical-physics.info>
- [Her] D. Hernandez, *The Kirillov-Reshetikhin conjecture and solutions of T-systems*. J. für die reine und angewandte Math. **596** (2006) 63–87. [arXiv:math/0501202](#)
- [HL] J. Hong and H. Lee, *Rigged Configuration Descriptions of the Crystals $B(\infty)$ and $B(\lambda)$ for Special Linear Lie Algebras*, [arXiv:1604.04357v1](#)
- [J] C. G. J. Jacobi, *Lectures on dynamics* (1842–43). English translation by K. Balaganadharan (Hindustan Book Agency, 2009).
- [JM] M. Jimbo and T. Miwa, *Solitons and infinite dimensional Lie algebras*, Publ. RIMS. Kyoto Univ. **19** (1983) 943–1001.
- [K90] V. G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, third edition, Cambridge Univ. Press (1990).
- [KR] V. G. Kac and A. K. Raina, *Bombay lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras*. (World Scientific, 1987).
- [(KMN)²] S. J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Affine crystals and vertex models*. Int. J. Modern Phys. **A7** (1992), 449–484.

- [K91] M. Kashiwara, *On crystal bases of the q -analogue of universal enveloping algebras*. Duke Math. J. **63** (1991), 465–516.
- [KN] M. Kashiwara and T. Nakashima, *Crystal graphs for representations of the q -analogue of classical Lie algebras*. J. Algebra **165** (1994), 295–345.
- [KKR] S. V. Kerov, A. N. Kirillov and N. Y. Reshetikhin, *Combinatorics, Bethe Ansatz, and representations of the symmetric group*. J. Sov. Math. **41** (1988) 916–924.
- [K01] A. N Kirillov, *Bijjective correspondences for rigged configurations*, (Russian) Algebra i Analiz **12** (2000) 204–240, translation in St. Petersburg Math. J. **12** (2001) 161–190.
- [KR] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin: *The Bethe ansatz and the combinatorics of Young tableaux*, J. Sov. Math. **41** (1988) 925–955.
- [KS09] A. N. Kirillov and R. Sakamoto, *Relationships Between Two Approaches: Rigged Configurations and 10-Eliminations*, Lett. Math. Phys. **89** (2009) 51–65. [arXiv:0902.2286](#)
- [KS14a] A. N. Kirillov and R. Sakamoto, *Singular solutions to the Bethe ansatz equations and rigged configurations*, J. Phys. A: Math. Theor. **47** (2014) 205207 (20pp). [arXiv1402.0651](#)
- [KS14b] A. N. Kirillov and R. Sakamoto, *Some remarks on Nepomechie–Wang eigenstates for spin 1/2 XXX model*, Moscow Math. J. **15** (2015) 337–352. [arXiv:1406.1958](#)
- [KS15] A. N. Kirillov and R. Sakamoto, *Bethe’s Quantum Numbers And Rigged Configurations*, Nucl. Phys. **B905** (2016) 359–372. [arXiv:1509.02305](#)
- [KSS] A. N. Kirillov, A. Schilling and M. Shimozono, *A bijection between Littlewood–Richardson tableaux and rigged configurations*, Selecta Math. (N.S.) **8** (2002) 67–135. [arXiv:math/9901037](#)
- [K06] A. Kitaev, *Anyons in an exactly solved model and beyond*. Ann. Phys. **321** (2006) 2–111. [arXiv:cond-mat/0506438](#)
- [K70] D. E. Knuth, *Permutations, matrices, and generalized Young tableaux*, Pacific J. Math. **34** (1970) 709–727.
- [KOSTY] A. Kuniba, M. Okado, R. Sakamoto, T. Takagi and Y. Yamada, *Crystal interpretation of Kerov–Kirillov–Reshetikhin bijection*, Nucl. Phys. **B740** (2006) 299–327. [arXiv:math/0601630](#)
- [KS06] A. Kuniba and R. Sakamoto, *The Bethe ansatz in a periodic box-ball system and the ultradiscrete Riemann theta function*, J. Stat. Mech. (2006) P09005 (12pp). [arXiv:math/0606208](#)
- [KSY] A. Kuniba, R. Sakamoto and Y. Yamada, *Tau functions in combinatorial Bethe ansatz*, Nucl. Phys. **B786** (2007) 207–266. [arXiv:math/0610505](#)

- [KTT] A. Kuniba, T. Takagi and A. Takenouchi *Bethe ansatz and inverse scattering transform in a periodic box-ball system*, Nucl. Phys. **B747** (2006) 354–397. [arXiv:math/0602481](#)
- [L] T. Lam, *Loop symmetric functions and factorizing matrix polynomials*. Fifth International Congress of Chinese Mathematicians. Part 1, 2, 609–627, AMS/IP Stud. Adv. Math., 51, pt. 1, 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012. [arXiv:1012.1262](#)
- [LP] T. Lam and P. Pylyavskyy, *Intrinsic energy is a loop Schur function*. J. Comb. 4 (2013) 4 387–401. [arXiv:1003.3948](#)
- [LPS1] T. Lam, P. Pylyavskyy and R. Sakamoto, *Box-Basket-Ball Systems*, Rev. Math. Phys. **24** (2012) 1250019 [23 pages]. [arXiv:1011.5930](#)
- [LPS2] T. Lam, P. Pylyavskyy and R. Sakamoto, *Rigged Configurations and Cylindric Loop Schur Functions*, Ann. Inst. Henri Poincaré (to appear). [arXiv:1410.4455](#)
- [LS94] R. P. Langlands and Y. Saint-Aubin, *Algebraic-geometric aspects of the Bethe equations*. in Proceedings of the Gursay Memorial Conference I—Strings and Symmetries, ed. G. Atkas, C. Saclioglu, M. Serdaroglu, Lecture Notes in Physics, vol. 447, Springer Verlag (1994), pp40–53.
- [LS97] R. P. Langlands and Y. Saint-Aubin, *Aspects combinatoires des équations de Bethe*. in Advances in Mathematical Sciences: CRM 's 25 years, ed. Luc Vinet, CRM Proceedings and Lecture Notes vol.11 Am. Math. Soc. (1997) pp231–301.
- [LS05] C. Lecouvey and M. Shimozono, *Lusztig's q -analogue of weight multiplicity and one-dimensional sums for affine root systems*, Adv. Math. **208** (2007) 438–466. [arXiv:math/0508511](#)
- [LOS] C. Lecouvey, M. Okado and M. Shimozono, *Affine crystals, one-dimensional sums and parabolic Lusztig q -analogues* Math. Zeit. **271** (2012) 819–865. [arXiv:1002.3715](#)
- [LR] S.-S. Lin and S.-S. Roan, *Bethe Ansatz for Heisenberg XXX Model*, [arXiv:cond-mat/9509183](#)
- [Liu] S. Liu, *Fermionic formula for double Kostka polynomials*. [arXiv:1602.08792](#)
- [L] J. Lützen, *Joseph Liouville 1809–1882. Master of pure and applied mathematics*. (Springer, 1990).
- [MIT] J. Mada, M. Idzumi and T. Tokihiro, *On the initial value problem of a periodic box-ball system*, J. Phys. A: Math. Gen. **39** L617–L623. [arXiv:nlin/0608037](#)
- [MM] D. N. Mermin and H. Wagner, *Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-or two-dimensional isotropic Heisenberg models*. Phys. Rev. Lett. **17** (1966) 1133–1136.
- [MY] K. Mimachi and Y. Yamada, *Singular vectors of the Virasoro algebra in terms of Jack symmetric polynomials*. Comm. Math. Phys. **174** (1995) 447–455.

- [MW] K. C. Misra and E. A. Wilson, *Soliton cellular automaton associated with $D_n^{(1)}$ -crystal $B^{2,s}$* , J. Math. Phys. **54** (2013) 043301 (33pp)
- [M] N. F. Mott, 『初歩の量子力学』(共立出版, 1977) .
- [NW] R. I. Nepomechie and C. Wang, *Algebraic Bethe ansatz for singular solutions*, J. Phys. A: Math. Theor. **46** (2013) 325002 (8pp). [arXiv:1304.7978](#)
- [OS] M. Okado and R. Sakamoto, *Stable Rigged Configurations for Quantum Affine Algebras of Nonexceptional Types*, Adv. Math. **228** (2011) 1262–1293. [arXiv:1008.0460](#)
- [OSS11] M. Okado, R. Sakamoto and A. Schilling: *Affine crystal structure on rigged configurations of type $D_n^{(1)}$* , J. Algebraic Comb. **37** (2013) 571–599. [arXiv:1109.3523](#)
- [OSSS] M. Okado, R. Sakamoto, A. Schilling and T. Scrimshaw, *Type $D_n^{(1)}$ rigged configuration bijection*. [arXiv:1603.08121](#)
- [OSano] M. Okado and N. Sano, *KKR type bijection for the exceptional affine algebra $E_6^{(1)}$* , Contemp. Math. **565** (2012) 227–242. [arXiv:1105.1636](#)
- [OSS03] M. Okado, A. Schilling and M. Shimozono: *A crystal to rigged configuration bijection for nonexceptional affine algebras*, in “Algebraic Combinatorics and Quantum Groups” (Ed. N. Jing), World Scientific (2003), 85–124. [arXiv:math/0203163](#)
- [PS] V. Pasquier and H. Saleur, *Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups*. Nucl. Phys. **B330** (1990) 523–556.
- [Sa06] R. Sakamoto, *Crystal Interpretation of Kerov-Kirillov-Reshetikhin Bijection II. Proof for sl_n Case*, J. Algebr. Comb. **27** (2008) 55–98. [arXiv:math/0601697](#)
- [Sa07] R. Sakamoto, *Kirillov–Schilling–Shimozono bijection as energy functions of crystals*, Int. Math. Res. Notices (2009) 2009: 579–614. [arXiv:0711.4185](#)
- [Sa12a] R. Sakamoto, 超離散ソリトン系と組み合わせ的表現論、数理科学 2012 年 1 月号
- [Sa12b] R. Sakamoto, *Ultradiscrete Soliton Systems and Combinatorial Representation Theory*, RIMS Kokyuroku 1913 (2014) 141–158. [arXiv:1212.2774](#)
- [Sa14] R. Sakamoto, *Rigged Configurations and Kashiwara Operators*, SIGMA 10 (2014), 028, 88 pages. [arXiv:1302.4562](#) (式番号などはリンク先の v2 に基づく)
- [Sa15] R. Sakamoto, *Rigged configurations approach for the spin-1/2 isotropic Heisenberg model*. J. Phys. A: Math. Theor. **48** (2015) 165201. [arXiv:1501.00532](#)
- [SSAFR] R. Sakamoto, J. Shiraishi, D. Arnaudon, L. Frappat and E. Ragoucy, *Correspondence between conformal field theory and Calogero–Sutherland model*. Nucl. Phys. **B704** (2005) 490–509. [arXiv:hep-th/0407267](#)
- [SalScr14] B. Salisbury and T. Scrimshaw, *A rigged configuration model for $B(\infty)$* , J. Combin. Theory Ser. A 133 (2015), 29–57. [arXiv:1404.6539](#)

- [SalScr15a] B. Salisbury and T. Scrimshaw, *Connecting marginally large tableaux and rigged configurations via crystals*. *Algebr. Represent. Theory* **19** (2016), 523–546. [arXiv:1505.07040](#)
- [SalScr15b] B. Salisbury and T. Scrimshaw, *Rigged configurations for all symmetrizable types*. [arXiv:1509.07833](#)
- [SalScr16] B. Salisbury and T. Scrimshaw, *Rigged configurations and the *-involution*. [arXiv:1601.06137](#)
- [Sc04] A. Schilling: *A bijection between type $D_n^{(1)}$ crystals and rigged configurations*, *J. Algebra* **285** (2005) 292–334. [arXiv:math/0406248](#)
- [Sc06] A. Schilling, *Crystal structure on rigged configurations*, *Int. Math. Res. Notices* **2006** (2006) Article ID 97376, Pages 1–27. [arXiv:math/0508107](#)
- [Sc08] A. Schilling: *Combinatorial structure of Kirillov–Reshetikhin crystals of type $D_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $A_{2n-1}^{(2)}$* , *J. Algebra* **319** (2008) 2938–2962. [arXiv:0704.2046](#)
- [ScScr14] A. Schilling and T. Scrimshaw, *Crystal structure on rigged configurations and the filling map*. *Electronic J. Comb.* **22** (2015) #P1.73 (54 pages) [arXiv:1409.2920](#)
- [ScSh] A. Schilling and M. Shimozono: *$X = M$ for symmetric powers*, *J. Algebra* **295** (2006) 562–610. [arXiv:math/0412376](#)
- [SRFB] U. Schollwöck, J. Richter, D. J. J. Farnell and R. F. Bishop (Eds.), *Quantum magnetism*. *Lecture Notes in Physics* 645 (Springer, 2004).
- [Scr16] T. Scrimshaw, *Rigged configurations as tropicalizations of loop Schur functions*. [arXiv:1607.03232](#)
- [Scr15] T. Scrimshaw, *A crystal to rigged configuration bijection and the filling map for type $D_4^{(3)}$* , *J. Algebra* **448** (2016) 294–349. [arXiv:1505.05910](#)
- [Sh98] M. Shimozono, *Affine type A crystal structure on tensor products of rectangles, Demazure characters, and nilpotent varieties*, *J. Algebraic Combin.* **15** (2002) 151–187. [arXiv:math/9804039](#)
- [Sh05] M. Shimozono, *On the $X = M = K$ conjecture*, [arXiv:math/0501353](#)
- [SZ] M. Shimozono and M. Zabrocki, *Deformed universal characters for classical and affine algebras*, *J. of Algebra* **299** (2006) 33–61. [arXiv:math/0404288](#)
- [Su71] B. Sutherland, *Exact results for a quantum many-body problem in one dimension*. *Phys. Rev.* **A4** (1971) 2019–2021.
- [Su72] B. Sutherland, *Exact results for a quantum many-body problem in one dimension II*. *Phys. Rev.* **A5** (1972) 1372–1376.

- [T] M. Takahashi, *One-dimensional Heisenberg model at finite temperature*, Prog. Theor. Phys. **46** (1971) 401–415.
- [TS] 武部 尚志, 関谷 信寛, 『可解格子模型と共形場理論の話題から』上智大学数学講究録 47 (2006).
- [YY] C. N. Yang and C. P. Yang, *One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. I. Proof of Bethe's hypothesis for ground state in a finite system*. Phys. Rev. **150** (1966) 321–327.
- [Y00] Y. Yamada, *A birational representation of Weyl group, combinatorial R-matrix and discrete Toda equation*, in Physics and Combinatorics (Nagoya, 2000), Editors A. N. Kirillov and N. Liskova, World Sci. Publ., River Edge, NJ (2001), 305–319.
- [Y13] F. Yura, 箱とバスケットと玉の系におけるソリトン解、九州大学応用力学研究所研究集会報告 No.24AO-S3, (2013) 156–161.
- [YT] F. Yura and T. Tokihiro, *On a Periodic Soliton Cellular Automaton*, J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002) 3787–3801. [arXiv:nlin/0112041](https://arxiv.org/abs/nlin/0112041)
- [V] A. A. Vladimirov, *Proof of the invariance of the Bethe-ansatz solutions under complex conjugation*, Theor. Math. Phys. **66** (1986) 102–105.

(2016年12月14日提出)

Invitation to the Bethe ansatz (by Reiho Sakamoto)

Proceedings for the 61st Symposium on Algebra (Mathematical Society of Japan, 2016)

ABSTRACT: We review the algebraic Bethe ansatz for the Heisenberg model. The exposition includes some of recent advancements with the emphasize on a relation with the rigged configurations. We also provide somewhat thorough review of the crystal bases and the rigged configurations.

In particular, we provide the inverse scattering transform for the type $D_n^{(1)}$ box-ball systems, see (54) at page 51. The result is analogous to the type $A_n^{(1)}$ case and is a consequence of [OSSS]. We compare the result with Misra–Wilson’s box-ball system [MW].

We also provide a reformulation of a result of [Sa07] at page 33. More precisely, we provide a crystal interpretation of the algorithm of the type $A_n^{(1)}$ rigged configuration bijection by the simplified quantity (35), instead of $\varepsilon_{l,j,k}^{(a)}$ of [Sa07]. Let the columns of a tableau $b_k \in B^{r_k, s_k}$ be c_1, c_2, \dots, c_{s_k} from left to right. Then we introduce the intermediate tensor product C_j as in (34). Here we use the Kashiwara convention for the tensor products of crystals. Then we compute the sum of energy functions as in (32) to derive (35). As for the definitions used in the sum (32), see (31) where $u^{a,l} \in B^{a,l}$ is the classical highest weight element and \simeq^R stands for the isomorphism under the combinatorial R -matrix.

CONTENTS:

- §1 Introduction—Quantum integrable models.
- §2 The Heisenberg model.
- §3 The Bethe ansatz.
- §4 Solving the Bethe ansatz equations.
- §5 Singular solutions to the Bethe ansatz equations.
- §6 Bethe’s quantum numbers.
- §7 Literature on the quantum group setting.
- §8 Relation with the crystal bases.
- §8-1 Introduction.
- §8-2 Overview: The case of type $A_1^{(1)}$.
- §8-3 Type $A_n^{(1)}$ rigged configurations.
- §8-4 Algorithm of the type $A_n^{(1)}$ rigged configuration bijection.
- §8-5 Ultradiscrete tau functions.
- §8-6 The cylindric loop Schur function.
- §8-7 Type $D_n^{(1)}$ rigged configurations.
- §8-8 Algorithm of the type $D_n^{(1)}$ rigged configuration bijection.
- §8-9 Littlewood–Richardson tableaux.
- §8-10 Miscellaneous topics.

Date: Dec. 14, 2016

頂点代数の表現と結合的代数

田辺顕一郎 (北海道大学大学院理学研究院数学部門)

e-mail : ktanabe@math.sci.hokudai.ac.jp

1 はじめに

頂点代数 V とは、物理における共形場理論の代数的定式化や、ムーンシャイン予想の解決等を目的として 1986 年に Borcherds[4] によって導入された可換環的な性質を持つ代数系である。頂点代数に、Virasoro 元 (共形ベクトル) ω の存在を仮定し、付随するいくつかの条件を追加したものを頂点作用素代数 (cf. [11],[14]) という。筆者は頂点代数上の加群、特に不変部分頂点代数 $V^G = \{a \in V \mid \text{任意の } g \text{ に対して } ga = a\}$ 上の加群を研究している。ここで、 G は頂点代数 V の有限位数の自己同型群である。 V^G 加群は、Borcherds によるムーンシャイン予想の解決 [5] で中心的役割を果たしたムーンシャイン頂点代数の構成に用いられていることもあり、活発に研究されている。 V^G の表現論でまず興味があるのは、当然 V 加群と V^G 加群との関係である。 V 加群は自然に V^G 加群となるが、さらに次のことが予想されている:

予想 1.1. [6] 頂点作用素代数 V が “よい性質” を持つならば、任意の既約 V^G 加群 M に対して、ある $g \in G$ とある既約 g -twisted V 加群 N (定義 2.4 を参照) が存在して、 M は N の部分加群になっている (1-twisted V 加群が V 加群である)。

ここで “よい性質” についての説明は省略する。自己同型の位数が小さい場合は、ハイゼンベルグ頂点代数 $M(1)$ ([8],[10]) や正定値偶格子に付随する頂点代数 ([1],[9],[20],[21]) 等で予想 1.1 が正しいことが検証されてきた。これらの検証は、いずれも頂点作用素代数に付随する Zhu 代数を詳細に調べることによってなされている。Zhu[22] により、頂点作用素代数の既約加群 (正しくは \mathbb{N} 次数付き既約弱加群) と、付随する Zhu 代数の既約加群とが一対一に対応していることが示されているからである。

最近、頂点作用素代数の表現論において重要な性質である C_2 余有限性に関して大きな進展 [17] があり、それを用いて予想 1.1 および関連する問題の解明が進んでいる。

さて、ここでは V 加群ではなく、そこから次数付けの条件をはずした、弱 V 加群とよばれる対象を考察する。弱加群は頂点代数の表現の研究の様々な場面で自然に現れてくる (cf. [15])。予想 1.1 は加群を弱加群に変えても意味をなすことから、

弱加群の場合に予想が成り立つかどうかは、筆者自身は昔から気になっていた。しかし、一般の弱 V 加群では範囲が広すぎることで、また Zhu 代数のような便利が道具がないことから、予想を具体例で確かめてみようとどうすればよいのか分からなかった。最近になってリー環の表現において、Whittaker 加群という最高ウェイト加群ではない加群のクラスがあるのを知った。Whittaker 加群 (Whittaker ベクトル) は、リー環 $sl_2(\mathbb{C})$ の既約加群の研究 [3] において初めて現れた後、[13] において一般の複素数体上の有限次元半単純リー環の場合に研究された。Whittaker 加群は三角分解を持つリー環ならば、いつでも定義できるものであるため、その後様々なリー環に対して調べられているようである。特に Virasoro 代数の Whittaker 加群 [18] およびその拡張 [16] は、Virasoro 頂点代数の既約弱加群であるが、加群とならない例を与えていることが分かる。Virasoro 代数の Whittaker 加群はまた、[12] においても用いられている。[2] では $A_1^{(1)}$ 型のアフィンリー環の Whittaker 加群が考察されている。一般の頂点代数に関しては、三角分解のような構造が期待出来ないため、Whittaker 加群の類似が定義できるかどうかは不明である。しかし、頂点作用素代数は Virasoro 元を持つので、Virasoro 代数としての Whittaker ベクトルをもつ頂点代数の加群を考えることは出来る。そこでハイゼンベルグ頂点代数の不変部分代数 $M(1)^+$ に対して、Whittaker ベクトルをもつ既約弱加群の分類をおこない、この場合にも予想 1.1 の類似が正しいことを検証できたというのが今回の報告である。

2 頂点 (作用素) 代数とその加群

まず頂点代数の定義を書いておく。

定義 2.1. 次の条件を満たす $(V, Y, \mathbf{1})$ を頂点代数という:

- (1) V は \mathbb{C} 上のベクトル空間.
- (2) x を形式的変数として、 Y は線形写像

$$Y(\cdot, x) : \begin{array}{ccc} V \otimes_{\mathbb{C}} V & \longrightarrow & V((x)) \\ \cup & & \cup \\ a \otimes b & \longmapsto & Y(a, x)b \end{array}$$

である。 $Y(a, x)b = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i b x^{-i-1}$ と展開を書く。

- (3) $\mathbf{1} \in V$ で $Y(\mathbf{1}, x) = \text{id}_V$ (V 上の恒等写像). つまり、 $\mathbf{1}_{-1} = \text{id}_V$ と $\mathbf{1}_i = 0$ ($i \neq -1$). また、 $a \in V$ に対して、 $Y(a, x)\mathbf{1} = a + \sum_{i \leq -2} a_i \mathbf{1} x^{-i-1} \in V[[x]]$.

(4) $a, b, c \in V$ に対して, $Y(a, b, c|x, y) \in V[[x, y]][x^{-1}, y^{-1}, (x-y)^{-1}]$ が存在して

$$\begin{aligned}\iota_{x,y}Y(a, b, c|x, y) &= Y(a, x)Y(b, y)c \in V((x))((y)), \\ \iota_{y,x}Y(a, b, c|x, y) &= Y(b, y)Y(a, x)c \in V((y))((x)), \\ \iota_{y,x-y}Y(a, b, c|x, y) &= Y(Y(a, x-y)b, y)c \in V((y))((x-y)).\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}V[[x]] &= \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} v_{(i)}x^i \mid v_{(i)} \in V \ (i = 0, 1, \dots) \right\}, \\ V[[x, y]] &= \left\{ \sum_{i,j=0}^{\infty} v_{(i,j)}x^i y^j \mid v_{(i,j)} \in V \ (i, j = 0, 1, \dots) \right\}, \\ V((x)) &= \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} v_{(i)}x^i \mid v_{(i)} \in V \ (i \in \mathbb{Z}) \text{ で } v_{(i)} = 0 (i \ll 0) \right\}, \\ V((x))((y)) &= (V((x))((y)))\end{aligned}$$

等である. $V((x))((y)) \neq V((y))((x))$ に注意する. また $\iota_{x,y}f$ は, f を $|x| > |y|$ と思って形式的に展開したものである. $\iota_{y,x}, \iota_{x,y-x}$ も同様に定める. つまり, $a \in V$ に対して $\iota_{x,y}(a) = \iota_{y,x}(a) = \iota_{y,x-y}(a) = a$ で, $j, k, l \in \mathbb{Z}$ に対して二項展開を用いて

$$\begin{aligned}\iota_{x,y}(x^j y^k (x-y)^l) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{l}{i} (-1)^i x^{j+l-i} y^{k+i} \in \mathbb{C}((x))((y)), \\ \iota_{y,x}(x^j y^k (x-y)^l) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{l}{i} (-1)^{l-i} y^{k+l-i} x^{j+i} \in \mathbb{C}((y))((x)), \\ \iota_{x,y-x}(x^j y^k (x-y)^l) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{k}{i} x^{j+k-i} (-1)^l (y-x)^{l+i} \in \mathbb{C}((y))((x-y))\end{aligned} \quad (2.1)$$

と定める. 例えば

$$\begin{aligned}\iota_{x,y}(x-y)^{-1} &= \sum_{i=0}^{\infty} x^{-i-1} y^i, & \iota_{y,x}(x-y)^{-1} &= - \sum_{i=0}^{\infty} y^{-i-1} x^i, \\ \iota_{y,x-y}x^{-1} &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i y^{-i-1} (x-y)^i\end{aligned}$$

となる. 頂点代数の例は 3 節で与える.

定義 2.1 中の (4) は, 条件 (2) の下で, Borchers 恒等式と呼ばれる次の条件と同値である: $a, b, c \in V$ と $l, m, n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} (a_{l+i}b)_{m+n-i}c = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{l}{i} (a_{m+l-i}b_{n+i}c + (-1)^{l+1} b_{n+l-i}a_{m+i}c).$$

こちらを用いたものが、よく見かける頂点代数の定義である。

頂点代数 V に対して Virasoro 元 ω の存在を仮定し、いくつかの条件を追加したものを頂点作用素代数 (cf. [11],[14]) という:

定義 2.2. $(V, Y, \mathbf{1})$ を頂点代数で, $\omega \in V$ とする. 次の条件を満たすとき, $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ を頂点作用素代数という.

(1) $L(i) = \omega_{i+1}$ ($i \in \mathbb{Z}$) としたとき, $c_V \in \mathbb{C}$ が存在して

$$[L(i), L(j)] = (i-j)L(i+j) + \delta_{i+j,0} \frac{i(i^2-1)}{12} c_V \quad (2.2)$$

を満たす. さらに $a \in V$ に対して $L(-1)a = a_{-2}\mathbf{1}$ となる.

(2) $i \in \mathbb{Z}$ に対して, $V_i = \{a \in V \mid L(0)a = ia\}$ とおくと, $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$ と直和分解する. さらに各 i に対して $\dim_{\mathbb{C}} V_i < \infty$ で $V_i = 0$ ($i \ll 0$).

以下 V は頂点作用素代数とする. 次に頂点作用素代数上の弱加群を次のように定める.

定義 2.3. 次の条件を全て満たす組 (M, Y_M) を弱 V 加群という.

(1) M は \mathbb{C} 上のベクトル空間.

(2) $Y_M(\cdot, x) : \begin{array}{ccc} V \otimes_{\mathbb{C}} M & \longrightarrow & M((x)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ a \otimes u & \longmapsto & Y_M(a, x)u \end{array}$ は \mathbb{C} 線形写像. $Y_M(a, x)b = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i u x^{-i-1}$

と展開を書く.

(3) $Y_M(\mathbf{1}, x) = \text{id}_M$.

(4) $a, b \in V, u \in M$ に対して, $Y_M(a, b, u|x, y) \in M[[x, y]][x^{-1}, y^{-1}, (x-y)^{-1}]$ が存在して

$$\begin{aligned} \iota_{x,y} Y_M(a, b, u|x, y) &= Y_M(a, x)Y_M(b, y)u \in M((x))((y)), \\ \iota_{y,x} Y_M(a, b, u|x, y) &= Y_M(b, y)Y_M(a, x)u \in M((y))((x)), \\ \iota_{y,x-y} Y_M(a, b, u|x, y) &= Y_M(Y(a, x-y)b, y)u \in M((y))((x-y)) \end{aligned}$$

となる.

頂点作用素代数 V に対して, $g \in GL(V)$ で $g(Y(a, x)b) = Y(ga, x)gb$ ($a, b \in V$), $g(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, g(\omega) = \omega$ をみたすものを, V の自己同型という. V の自己同型の全体を $\text{Aut } V$ で表す. $g \in \text{Aut } V$ を有限位数 T の自己同型として

$$V^{(g,r)} = \{a \in V \mid ga = e^{-2\pi\sqrt{-1}r/T}a\}, \quad r = 0, 1, \dots, T-1$$

とおく.

定義 2.4. 上の設定の下で, 次の条件を全て満たす組 (M, Y_M) を弱 g -twisted V 加群という.

(1) M は \mathbb{C} 上のベクトル空間.

(2) $Y_M(\cdot, x): \underset{\Psi}{V \otimes_{\mathbb{C}} M} \rightarrow \underset{\Psi}{M((x^{1/T}))}$ は \mathbb{C} 線形写像. $Y_M(a, x)u = \sum_{i \in (1/T)\mathbb{Z}} a_i u x^{-i-1}$
 $a \otimes u \mapsto Y_M(a, x)u$

と展開を書く.

(3) $a \in V^{(g,r)}$ のとき, $i \notin r/T + \mathbb{Z}$ ならば $a_i b = 0$. つまり $Y_M(a, x)b = \sum_{i \in r/T + \mathbb{Z}} a_i b x^{-i-1}$.

(4) $Y_M(\mathbf{1}, x) = \text{id}_M$.

(5) $a, b \in V, u \in M$ に対して, $Y_M(a, b, u|x, y) \in M[[x^{1/T}, y^{1/T}]] [x^{-1/T}, y^{-1/T}, (x-y)^{-1}]$ が存在して

$$\begin{aligned} \iota_{x,y} Y_M(a, b, u|x, y) &= Y_M(a, x) Y_M(b, y) u \in M((x^{1/T}))((y^{1/T})), \\ \iota_{y,x} Y_M(a, b, u|x, y) &= Y_M(b, y) Y_M(a, x) u \in M((y^{1/T}))((x^{1/T})), \\ \iota_{y,x-y} Y_M(a, b, u|x, y) &= Y_M(Y(a, x-y)b, y) u \in M((y^{1/T}))((x-y)) \end{aligned}$$

となる. ここで $\iota_{x,y}$ 等は (2.1) を適切に拡張して定義する.

G を $\text{Aut } V$ の部分群としたとき, 不変部分空間 $V^G = \{a \in V \mid \text{任意の } g \text{ に対して } ga = a\}$ は, V の $\mathbf{1}$ と Virasoro 元を持つ頂点作用素代数となる. $g \in G$ を有限位数の自己同型とすると, g -twisted 弱 V 加群は弱 V^G 加群になる.

次に V 加群の定義を紹介する.

定義 2.5. M を弱 V 加群とする. M が $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{C}} M_i, M_i = \{u \in M \mid L(0)u = iu\}$ と $L(0)$ の固有空間に分解し

(1) 任意の $i \in \mathbb{C}$ に対して $\dim_{\mathbb{C}} M_i < \infty$ である.

(2) 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, $M_{\lambda+n} = 0, \mathbb{Z} \ni n \ll 0$ となっている.

とき, M を V 加群という.

定義 2.6. $g \in \text{Aut } V$ を有限位数 T の自己同型とする. M を弱 g -twisted V 加群とする. M が $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{C}} M_i, M_i = \{u \in M \mid L(0)u = iu\}$ と $L(0)$ の固有空間に分解し

(1) 任意の $i \in \mathbb{C}$ に対して $\dim_{\mathbb{C}} M_i < \infty$ である.

(2) 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, $M_{\lambda+n/T} = 0, \mathbb{Z} \ni n \ll 0$ となっている.

とき, M を g -twisted V 加群という.

3 ハイゼンベルグ頂点作用素代数

ここでは本稿の考察の対象であるハイゼンベルグ頂点作用素代数とその不変部分代数を紹介する. H を 1次元ベクトル空間 (有限次元としても以下同様のことが成り立つ) で, 非退化双線形形式 $\langle -, - \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ を一つ固定しておく. K を記号として \mathbb{C} 上のベクトル空間 $\hat{H} = H \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ に, リー環の構造を

$$[\alpha(i), \beta(j)] = \delta_{i+j,0} \langle \alpha, \beta \rangle K, \quad [\hat{H}, K] = 0$$

で定める. ただし, ここで $\alpha(i) = \alpha \otimes t^i$ ($\alpha \in H, i \in \mathbb{Z}$) とおいている. \hat{H} の部分リー環 $\hat{H}^{\geq 0} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H \otimes t^i \oplus \mathbb{C}K$ をとる. $\hat{H}^{\geq 0}$ 加群 U であって, 任意の $\alpha \in H$ と任意の $u \in U$ に対して

$$\alpha(i)u = 0, i \gg 0, \quad Ku = u \quad (3.1)$$

を満たしているものを考える. U に対して, \hat{H} への誘導加群

$$M(1, U) = \mathcal{U}(\hat{H}) \otimes_{\mathcal{U}(\hat{H}^{\geq 0})} U$$

を取る. ここで $\mathcal{U}(\hat{H})$ は, \hat{H} の包絡環を表している.

$\alpha \in H$ に対して, 一次元 $\hat{H}^{\geq 0}$ 加群 $\mathbb{C}e^\alpha$ を

$$\beta(i)e^\alpha = \begin{cases} \langle \beta, \alpha \rangle e^\alpha, & i = 0, \\ 0, & i \geq 1, \end{cases} \quad (\beta \in H), \quad Ke^\alpha = e^\alpha$$

で定める. $\mathbb{C}e^\alpha$ は条件 (3.1) を満たしていることに注意する. $\alpha = 0$ のとき, $1 \otimes e^0 \in M(1, \mathbb{C}e^0)$ を $\mathbf{1}$ と書いて, $M(1, \mathbb{C}e^0)$ の元 $\alpha_1(-j_1) \cdots \alpha_k(-j_k) \otimes e^0$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_k \in H, j_1, \dots, j_k \in \mathbb{Z}_{>0}$) を, $\alpha_1(-j_1) \cdots \alpha_k(-j_k) \mathbf{1}$ と表すことにする.

$\alpha_1, \dots, \alpha_k \in H$ とする. $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{Z}$ に対して写像

$$\circ\alpha_1(i_1) \cdots \alpha_1(i_k)^\circ : M(1, U) \rightarrow M(1, U)$$

を帰納的に

$$\begin{aligned} \circ\alpha_1(i_1)^\circ &= \alpha_1(i_1), \\ \circ\alpha_1(i_1) \cdots \alpha_1(i_k)^\circ &= \begin{cases} \alpha_1(i_1)^\circ \alpha_2(i_2) \cdots \alpha_1(i_k)^\circ & i_1 < 0 \\ \circ\alpha_2(i_2) \cdots \alpha_1(i_k)^\circ \alpha_1(i_1) & i_1 \geq 0. \end{cases} \quad (k \geq 2) \end{aligned}$$

で定め, $\alpha_1(-j_1) \cdots \alpha_k(-j_k) \mathbf{1} \in M(1, \mathbb{C}e^0)$, ($j_1, \dots, j_k \in \mathbb{Z}_{>0}$) に対して

$$\begin{aligned} &Y_{M(1,U)}(\alpha_1(-j_1) \cdots \alpha_k(-j_k) \mathbf{1}, x) \\ &= \circ\left(\frac{1}{(j_1-1)!} \frac{d^{j_1-1}}{dx^{j_1-1}} \sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} \alpha_1(m_1) x^{-m_1-1}\right) \cdots \left(\frac{1}{(j_k-1)!} \frac{d^{j_k-1}}{dx^{j_k-1}} \sum_{m_k \in \mathbb{Z}} \alpha_k(m_k) x^{-m_k-1}\right)^\circ \end{aligned}$$

とおく. 例えば

$$\begin{aligned}
Y_{M(1,U)}(\alpha(-1)\mathbf{1}, x) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha(m)x^{-m-1}, \\
Y_{M(1,U)}(\alpha_1(-1)\alpha_2(-1)\mathbf{1}, x) &= \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} \circ\alpha_1(m_1)\alpha_1(m_2)\circ x^{-m_1-m_2-2} \\
&= \sum_{m_2 \in \mathbb{Z}} \sum_{m_1 < 0} \alpha_1(m_1)\alpha_2(m_2)x^{-m_1-m_2-2} + \sum_{m_2 \in \mathbb{Z}} \sum_{m_1 \geq 0} \alpha_2(m_2)\alpha_1(m_1)x^{-m_1-m_2-2}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

となる. 条件 (3.1) より, $a \in M(1, \mathbb{C}e^0)$ と $b \in M(1, U)$ に対して $Y_{M(1,U)}(a, x)b$ の各 x^i ($i \in \mathbb{Z}$) の係数はちゃんと定まっていることが分かる. 次のことはよく知られている:

定理 3.1. (1) $(M(1, \mathbb{C}e^0), Y_{M(1, \mathbb{C}e^0)}, \mathbf{1}, h(-1)^2\mathbf{1}/2)$ は頂点作用素代数となる. ここで, $h \in H$ は $\langle h, h \rangle = 1$ となる元である. 頂点作用素代数 $M(1, \mathbb{C}e^0)$ を (ランク 1 の) ハイゼンベルグ頂点作用素代数といい, 以降, $M(1)$ で表すことにする.

(2) 任意の $\alpha \in H$ に対して, $(M(1, \mathbb{C}e^\alpha), Y_{M(1, \mathbb{C}e^\alpha)})$ は既約 $M(1)$ 加群となる. また $\{M(1, \mathbb{C}e^\alpha) \mid \alpha \in H\}$ は既約 $M(1)$ 加群の同型類の完全代表系となっている.

(3) 条件 (3.1) を満たす $\hat{H}^{\geq 0}$ 加群 U に対して, $M(1, U)$ は弱 $M(1)$ 加群になる.

$\theta: M(1) \rightarrow M(1)$ を

$$\theta: \alpha(-j_1) \dots \alpha_k(-j_k)\mathbf{1} \mapsto (-1)^k \alpha(-j_1) \dots \alpha_k(-j_k)\mathbf{1}.$$

で定められる $M(1)$ の位数 2 の自己同型とし

$$M(1)^\pm = \{a \in M(1) \mid \theta a = \pm a\} \tag{3.3}$$

とおく. 頂点作用素代数 $M(1)^+ (= M(1)^{\langle \theta \rangle})$ は Virasoro 元 $\omega = h(-1)^2\mathbf{1}/2$ と

$$J = h(-1)^4\mathbf{1} - 2h(-3)h(-1)\mathbf{1} + \frac{3}{2}h(-2)^2\mathbf{1} \in M(1)^+ \tag{3.4}$$

で生成されており [7, Theorem 2.7 (2)], さらに ω, J は次の関係式

$$\begin{aligned}
[\omega_i, J_j] &= (3i - j)J_{i+j-1}, \\
[J_i, J_j] &= \left(-\frac{1392}{5}\omega_{-6}\mathbf{1} - \frac{2784}{5}\omega_{-4}\omega_{-1}\mathbf{1} + 120\omega_{-3}\omega_{-2}\mathbf{1} + \frac{1632}{5}\omega_{-2}\omega_{-1}^2\mathbf{1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{56}{5}\omega_{-2}J_{-1}\mathbf{1} - \frac{56}{5}\omega_{-1}J_{-2}\mathbf{1} + \frac{6}{5}J_{-4}\mathbf{1}\right)_{i+j} + \dots
\end{aligned} \tag{3.5}$$

を満たしている. $M(1)^+$ に対しては予想 1.1 が成り立つことが知られている:

定理 3.2. [8, Theorem 4.5] $M(1)^\pm, M(1, \mathbb{C}e^\alpha)$ ($0 \neq \alpha \in H$), $M(1)(\theta)^\pm$ は既約 $M(1)^+$ の完全代表系である。ここで, $M(1)(\theta)$ は θ -twisted 既約 $M(1)$ 加群で, $M(1)(\theta)^\pm = \{u \in M(1)(\theta) \mid \theta u = \pm u\}$ である。

4 ハイゼンベルグ頂点作用素代数の不変部分代数と Whittaker ベクトル

ここでは本稿の主結果である, $M(1)^+$ の既約弱加群のあるクラスの分類について述べる。まず, Virasoro 代数の Whittaker ベクトルを [18],[16] に沿って紹介する。Vir = $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}L(i) \oplus \mathbb{C}C$ を Virasoro 代数とし, $1 \leq s \in \mathbb{Z}$ に対して部分リー環 $\text{Vir}^{\geq s} = \bigoplus_{i=s}^{\infty} \mathbb{C}L(i) \oplus \mathbb{C}C$ を考える。 $\chi : \text{Vir}^{\geq s} \rightarrow \mathbb{C}$ を 0 でないリー環の準同型写像とする。

定義 4.1. M を Vir 加群とする。 $0 \neq w \in M$ は, 任意の $a \in \text{Vir}^{\geq s}$ に対して

$$aw = \chi(a)w$$

を満たすとき, **Whittaker** ベクトルであるという。一つの Whittaker ベクトルで生成されている Vir 加群を **Whittaker 加群** という。

Remark 4.2. (1) w を Whittaker ベクトルとするとき, (2.2) より, $i \geq 2s + 1$ ならば $\chi(L(i)) = 0$ が分かる。したがって $(\chi(L(s)), \dots, \chi(L(2s)))$ を指定すれば χ が定まる。 $(\chi(L(2s-1)), \chi(L(2s))) \neq (0, 0)$ ならば, w から生成される Whittaker 加群は既約となる ([18],[16])。

(2) 定義 4.1 で $s = 1$ の場合が, もともとの Whittaker ベクトルの定義である [18]。

一般の頂点作用素代数に対しては, 三角分解を持つことが期待できないため, Whittaker 加群の類似があるかどうかは不明である。 Whittaker 加群を考える代わりに, (2.2) が頂点作用素代数の Virasoro 元 ω が Vir の表現を与えていることに着目して次のように Whittaker ベクトルを定める。

定義 4.3. $2 \leq m \in \mathbb{Z}, \lambda = (\lambda_{\lfloor m/2 \rfloor + 1}, \lambda_{\lfloor m/2 \rfloor + 2}, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^{m - \lfloor m/2 \rfloor}$ で $\lambda_m \neq 0$ とする。 M を V 加群とする。 $0 \neq w \in M$ は

$$\omega_i w (= L(i-1)w) = \lambda_i w, \quad i = \lfloor m/2 \rfloor + 1, \lfloor m/2 \rfloor + 2, \dots, m \quad (4.1)$$

を満たすとき, (ω に関する) λ 型の **Whittaker** ベクトルであるという。ここで, $\lfloor m/2 \rfloor = \max\{i \in \mathbb{Z} \mid i \leq m/2\}$ とおいている。

3節のハイゼンベルグ頂点作用素代数 $M(1)$ を考える. r を正の整数, $\zeta = (\zeta_0, \dots, \zeta_r) \in \mathbb{C}^{r+1}$ で $\zeta_r \neq 0$ とする. $\hat{H}^{\geq 0}$ 加群 $\mathbb{C}u_\zeta$ を次で定める.

$$h(i)u_\zeta = \begin{cases} \zeta_i u_\zeta, & i = 0, \dots, r, \\ 0, & i > r, \end{cases} \quad Ku_\zeta = u_\zeta.$$

弱 $M(1)$ 加群 $M(1, \mathbb{C}u_\zeta) = \mathcal{U}(\hat{H}) \otimes_{\mathcal{U}(\hat{H}^{\geq 0})} \mathbb{C}u_\zeta$ を簡単に $M(1, \zeta)$ と書くことにする. $M(1, \zeta)$ が既約であることは簡単に分かる. (3.2) より

$$\omega_i u_\zeta (= L(i-1)u_\zeta) \begin{cases} \in \mathbb{C}u_\zeta, & i = r+1, r+2, \dots, 2r+1, \\ = 0, & i \geq 2r+2, \end{cases}$$

特に, $\omega_{2r+1} u_\zeta = (\zeta_r^2/2)u_\zeta \in \mathbb{C}^\times u_\zeta$ が分かる. したがって, u_ζ は $M(1, \zeta)$ の Whittaker ベクトルである. また, 頂点作用素代数の加群では, ω_{2r+1} は 0 以外の固有値が持たないことがすぐに分かるので, $M(1, \zeta)$ は $M(1)$ 加群でない弱 $M(1)$ 加群であることが分かる.

Whittaker ベクトルを持つ既約弱 $M(1)^+$ 加群について, 予想 1.1 の類似が正しいことを示したのが本稿の主結果である:

定理 4.4. [19, Theorem 1.1] ω に関する Whittaker ベクトルから生成されている弱 $M(1)^+$ 加群 M は既約である. また, 次は Whittaker ベクトルをもつ既約弱 $M(1)^+$ 加群の完全代表系である:

- (1) $M(1, \zeta) (\cong M(1, -\zeta)), \zeta \in \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^\times, r = 1, 2, \dots$
- (2) $M(1, \zeta)(\theta) (\cong M(1, -\zeta)(\theta)), \zeta \in \mathbb{C}^{r-1} \times \mathbb{C}^\times, r = 1, 2, \dots$ ここで, $M(1, \zeta)(\theta)$ は既約弱 θ -twisted $M(1)$ 加群である.

証明は, まず (3.4) の ω, J に関して, $M(1)^+$ での関係式をうまく見つけておく. その関係式を用い, (3.5) と (4.1) を繰り返し使って, [18],[16] の Virasoro 代数の Whittaker 加群の場合に問題を帰着させれば, 証明が完了する.

参考文献

- [1] T. Abe and C. Dong, Classification of irreducible modules for the vertex operator algebra V_L^+ : general case, *J. Algebra* **273** (2004), 657–685.
- [2] D. Adamović, R. Lü, and. K. Zhao, Whittaker modules for the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$, *Adv. Math.* **289** (2016), 438–479.
- [3] D. Arnal and G. Pinczon, On algebraically irreducible representations of the Lie algebra $sl(2)$, *J. Math. Phys.* **15** (1974), 350–359.

- [4] R. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **83** (1986), 3068–3071.
- [5] R. Borcherds, Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, *Invent. Math.* **109** (1992), 405–444.
- [6] R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde, and H. Verlinde, The operator algebra of orbifold models, *Comm. Math. Phys.* **123** (1989), 485–526.
- [7] C. Dong and R. L. Griess Jr., Rank one lattice type vertex operator algebras and their automorphism groups, *J. Algebra* **208** (1998), 262–275.
- [8] C. Dong and K. Nagatomo, Classification of irreducible modules for the vertex operator algebra $M(1)^+$, *J. Algebra* **216** (1999), 384–404.
- [9] C. Dong and K. Nagatomo, Representations of vertex operator algebra V_L^+ for rank one lattice L , *Comm. Math. Phys.* **202** (1999), 169–195.
- [10] C. Dong and K. Nagatomo, Classification of irreducible modules for the vertex operator algebra $M(1)^+$. II. Higher rank, *J. Algebra* **240** (2001), 289–325.
- [11] I. B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Applied Math., Vol. **134**, Academic Press, 1988.
- [12] D. Gaiotto, Asymptotically free $\mathcal{N} = 2$ theories and irregular conformal blocks, *Journal of Physics: Conference Series* **462** (2013) 012014
- [13] B. Kostant, On Whittaker vectors and representation theory, *Invent. Math.* **48** (1978), 101–184.
- [14] J. Lepowsky and H. S. Li, *Introduction to Vertex Operator Algebras and their Representations*, Progress in Mathematics **227**, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.
- [15] H. S. Li, Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules, *J. Pure Appl. Algebra* **109** (1996), 143–195.
- [16] R. Lü, X. Guo, K. Zhao, Irreducible modules over the Virasoro algebra, *Doc. Math.* **16** (2011), 709–721.
- [17] M. Miyamoto, C_2 -Cofiniteness of Cyclic-Orbifold Models, *Comm. Math. Phys.* **335** (2015), 1279–1286.
- [18] M. Ondrus and E. Wiesner, Whittaker modules for the Virasoro algebra, *J. Algebra Appl.* **8** (2009), 363–377.

- [19] K. Tanabe, Simple weak modules for the fixed point subalgebra of the Heisenberg vertex operator algebra of rank 1 by an automorphism of order 2 and Whittaker vectors, arXiv:1608.07890.
- [20] K. Tanabe and H. Yamada, The fixed point subalgebra of a lattice vertex operator algebra by an automorphism of order three, *Pacific J. Math.* **230** (2007), 469–510.
- [21] K. Tanabe and H. Yamada, Fixed point subalgebras of lattice vertex operator algebras by an automorphism of order three, *J J. Math. Soc. Japan* **65** (2013), 1169–1242.
- [22] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237–302.

多重ゼータ値

金子 昌信 (九州大学数理学研究院)

1. 序

多重ゼータ値とは、与えられたいくつかの自然数 k_1, \dots, k_r に対して無限級数

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) = \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}$$

で定まる実数のことである。ただし収束のため $k_r \geq 2$ と仮定する。自然数の個数 r (「深さ」とよぶ) が1ならばこれはリーマンゼータ関数の正整数での値 $\zeta(k)$ に他ならない。 k が偶数の場合の値を円周率とベルヌーイ数で表したオイラーによる公式はよく知られている。オイラーは $r = 2$ の場合も扱っていて、1776年の論文 [3] があるが、このような級数 ($r = 2$) を最初に考えたのはゴルトバッハのようである。それは遡ること1742年の12月、ゴルトバッハからオイラーに宛てた手紙に、何かの書き間違いからこのような級数を考えた云々とあって、オイラーが直ちにそれについていくつかの考察を書き送り、翌年2月まで、5通のやりとりが残っている [4]。それを見ると、既にその時点で論文 [3] の内容はあらかじめ見つけられているようである。

時代下って、結び目理論や場の量子論などとの関係で多重ゼータ値が現れるようになった1990年代から活発な研究がなされるようになり、その勢いは今のところ留まるどころを知らぬかのように見える。ほぼ四半世紀になるその進展の火付け役、あるいは牽引役となった論文の一つがザギエによる [19] である。そこで提出された次の「次元予想」は、その背後に奥深い数学が存在することが示唆されていたこともあり、活発な研究を促した。

いま記号 \mathcal{Z}_k で、重さ ($= k_1 + \dots + k_r$) が k の多重ゼータ値全体が \mathbf{Q} 上張るベクトル空間を表すとする。このときザギエの予想は、 \mathcal{Z}_k の次元が、漸化式 $d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$ (初期値 $d_0 = 1, d_{<0} = 0$) で定まる数列 d_k で与えられるだろう、

$$\dim_{\mathbf{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k ?$$

というものである。10年以上も前の寺杣 [17] やゴンチャロフ [2] らの仕事により、不等式

$$\dim_{\mathbf{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k$$

は知られている。逆向きの不等式については、 $\dim_{\mathbf{Q}} \mathcal{Z}_k > 1$ となるようなただ一つの k すら未だ知られていない、というのが現状である。

もう一人、ホフマンも早くから独自に深さが一般の場合の多重ゼータ値の研究を行っていた ([5, 6])。そのうち論文 [6] で提出されていた予想

\mathcal{Z}_k は、成分が2と3だけからなる多重ゼータ値で \mathbf{Q} 上張られるであろう

は、ザギエの予想のように耳目を集めなかったと思われるが (確かに数は合うが、どれだけの理論的根拠があるのか疑わしい、というのが大方の見方ではなかったか)、数年前にブラウン [1] がそれを解決した。その解決方法 (ゴンチャロフが研究してきた「モチビツ

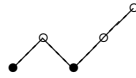
ク多重ゼータ値」, とくにそのホップ代数構造を用いる) が極めて広範な影響を持つものであったため, 大いに注目された. たとえばそのひとつの帰結として, $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の l 進基本群へのガロア表現に関する「ドリーニュー-伊原の予想」が解決された.

この四半世紀に多重ゼータ値に関連してなされてきた研究はもちろん様々なものがあるが, 大きな結果として以上をざっと記すに留め, 以下, 講演で述べた私の最近の二つの共同研究について簡単に紹介したい.

2. 山本積分と多重ゼータ値の新しい関係式

山本修司氏は [18] において, 一般の 2 色半順序集合に対してある積分を定義し, その特別な場合として「等号付き多重ゼータ値」の新しい積分表示を与えた. その後の彼との共同研究で, この積分を用いた新しい「積分 = 級数」型の等式を導き, さらにそれが「正規化複シャッフル関係式」と同値な関係式族を与えることを証明した [11]. 本節ではこれについて簡単に説明する.

まず山本積分を実例により説明しよう. (有限) 2 色半順序集合を



のような \circ と \bullet を線で結んだグラフで表す. 線で結ばれた二つの頂点の順序は上が下より大きい, としておく. このグラフの各頂点に, 区間 $(0, 1)$ を動く変数一つずつ対応させる. この例では左から t_1, t_2, \dots, t_5 が対応しているものとしよう. そして, 頂点の順序に対応した, 変数の大小順序を入れる. たとえばこの場合は $t_1 < t_2, t_2 > t_3$ など. さらに, \circ には $\frac{dt}{t}$, \bullet には $\frac{dt}{1-t}$ が対応するとして, 頂点の個数次元の積分

$$\int_D \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_3}{1-t_3} \frac{dt_4}{t_4} \frac{dt_5}{t_5},$$

ただし D は頂点順序に対応する不等式

$$\begin{aligned} 0 < t_1 < t_2 < 1 \\ \vee \\ 0 < t_3 < t_4 < t_5 < 1 \end{aligned}$$

で定まる領域, を考え, これを記号

$$I \left(\begin{array}{c} \circ \\ \bullet \\ \circ \\ \bullet \\ \circ \end{array} \right)$$

で表すことにする. この記号のもとで, 多重ゼータ値のよく知られた積分表示は

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) = I \left(\begin{array}{c} \circ \\ \bullet \\ \circ \\ \bullet \\ \circ \\ \vdots \\ \bullet \\ \circ \end{array} \right)$$

である。

今 $\zeta^*(l_1, \dots, l_s)$ で等号付き多重ゼータ値

$$\zeta^*(l_1, \dots, l_s) = \sum_{0 < n_1 \leq \dots \leq n_s} \frac{1}{n_1^{l_1} \cdots n_s^{l_s}}$$

を表すものとするとき (l_1, \dots, l_s は自然数で $l_s \geq 2$)，山本氏による積分表示は

$$\zeta^*(l_1, \dots, l_s) = I \left(\begin{array}{c} \text{Diagram with } l_s \text{ peaks and } l_1 \text{ peaks} \end{array} \right)$$

と書かれる。一番簡単な例が $I(\text{Diagram})$ で，定義からこれは積分

$$\int_{0 < t_1 < t_2 > t_3 < 1} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_3}{1-t_3}$$

に等しいが (変数はすべて $(0, 1)$ 内を動く)，これを左から級数展開し逐次積分を行っていくと，

$$\begin{aligned} \int_{0 < t_1 < t_2 > t_3 < 1} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_3}{1-t_3} &= \int_{0 < t_2 > t_3 < 1} \int_0^{t_2} \sum_{n=1}^{\infty} t_1^{n-1} dt_1 \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_3}{1-t_3} \\ &= \int_{0 < t_2 > t_3 < 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_2^{n-1}}{n} dt_2 \frac{dt_3}{1-t_3} \\ &= \int_0^1 \int_{t_3}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_2^{n-1}}{n} dt_2 \frac{dt_3}{1-t_3} \\ &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t_3^n}{n^2} \frac{dt_3}{1-t_3} \\ &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^n t_3^{m-1} dt_3 \\ &= \sum_{1 \leq m \leq n} \frac{1}{mn^2} \end{aligned}$$

となって $\zeta^*(1, 2)$ が得られる。 $\frac{dt_3}{1-t_3}$ が現れる手前の t_2 に関する積分が t_3 から 1 までとなっていて，和 $\sum_{m=1}^n t_3^{m-1}$ ($= \frac{1-t_3^n}{1-t_3}$) が現れるのがミソである。一般の場合も同様に左から順に積分していけば確かめることが出来て，証明自体は至極簡単なのであるが，やはり最初にこれを発見するのはえらいと思う。さらに重要なことは，この 2 色半順序集合に対応した積分 (収束条件「極大点はすべて \circ で極小点はすべて \bullet 」は満たしているとして) はすべて，多重ゼータ値の和で書ける，ということである。これは，全順序集合に対応するのが多重ゼータ値であることと，積分領域を分割して，全順序集合に対応する積分の和に書き直せることから従う。例えば上の例で，領域

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 < t_1 < t_2 < 1 \\ \vee \\ 0 < t_3 \end{array} \right\}$$

は、測度零の集合を無視（積分には影響ないので）すれば、全順序集合の合併

$$\{0 < t_1 < t_3 < t_2 < 1\} \cup \{0 < t_3 < t_1 < t_2 < 1\}$$

に等しい。これは、順序がついていない t_1 と t_3 （に対応する頂点）の一方が他方より大きいという順序を新たに付加することによって元の半順序集合を全順序集合に埋め込んでいて、対応する積分はそのすべての埋め込みかたに渡る和となるのである。今の例では

$$I(\text{●} \curvearrowright \text{●}) = 2I(\text{●} \curvearrowleft \text{●}) = 2\zeta(1, 2)$$

となる。面白いのは、これが級数による定義における和の範囲 $0 < m \leq n$ を $0 < m < n$ と $0 < m = n$ に分けて得られる式

$$\zeta^*(1, 2) = \zeta(1, 2) + \zeta(3)$$

と異なることで、この二つが等しいことからオイラーによる $\zeta(1, 2) = \zeta(3)$ が得られる。

この一般化として、山本氏と共同で次の結果を得た。これは $\zeta(k_1, \dots, k_r)$ や $\zeta^*(l_1, \dots, l_s)$ の積分表示を特別な場合として含む（前者は $s = 1$, 後者は $r = 1$ の場合）、ハイブリッド型の「積分 = 級数」定理である。

定理 任意の自然数 $k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s$ に対し ($r, s \geq 1$),

$$I \left(\text{●} \overset{k_1}{\curvearrowleft} \text{○} \cdots \text{○} \overset{k_r}{\curvearrowleft} \text{○} \cdots \text{○} \overset{l_s}{\curvearrowright} \text{○} \cdots \text{○} \overset{l_{s-1}}{\curvearrowright} \text{○} \cdots \text{○} \overset{l_1}{\curvearrowright} \text{○} \right) = \sum_{\substack{0 < m_1 < \cdots < m_r \\ 0 < n_1 \leq \cdots \leq n_s}} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r} n_1^{l_1} \cdots n_s^{l_s}}. \quad (1)$$

たとえば k_r や l_s が 1 であっても積分、級数ともに収束することに注意する。左辺、および右辺はそれぞれ先の例と同様のやり方で多重ゼータ値の和として書ける。その際、左辺から出てくる多重ゼータ値はすべて深さ $r + s - 1$ を持ち（深さは“●”の個数）、他方右辺からは、 $s \geq 2$ であれば深さが $r + s - 1$ より小さい項が混ざる（等号がある部分で深さが落ちる）ので、そのとき二通りの表示は必ず見かけが異なる。つまり多重ゼータ値の自明でない線形関係式が得られる。

当初驚いたことに、計算機で実験してみると、この関係式だけを用いて \mathcal{Z}_k の次元を上限の d_k にまで落とせるのである。このことを重さ 17 まで確かめた。予想としては、

予想 多重ゼータ値のすべての線形関係式は (1) から導くことが出来るであろう。

ということになるが、この予想の根拠となりうる結果として、我々は次を示した。

定理 適当な意味で、関係式族 (1) は「正規化複シャッフル関係式」と同値である。

「適当な意味」を説明するには代数的な準備が必要なので、詳細は論文 [11] に譲るとするが、もう少しだけ説明しておこう。

我々は、通常の「調和積」(stuffle product) および「シャッフル積」(\mathbf{k}, \mathbf{l} は「収束インデックス」とする)

$$\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l}) = \zeta(\mathbf{k} * \mathbf{l}) \quad (2)$$

$$\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l}) = \zeta(\mathbf{k} \sqcup \mathbf{l}) \quad (3)$$

のもとで(右辺はそれぞれ、級数の積、積分の積を和に直すことから生じる多重ゼータ値の線形和を表す)、関係式族 (1) が、「正規化の基本定理」

$$\zeta_{\sqcup}(\mathbf{k}; T) = \rho(\zeta_*(\mathbf{k}; T)) \quad (4)$$

と同値であることを示した。ここで \mathbf{k} は任意の(最後の成分が2以上とは限らない)インデックスで、 $\zeta_{\sqcup}(\mathbf{k}; T)$ と $\zeta_*(\mathbf{k}; T)$ はそれぞれ、積分と級数による正規化多項式と呼ばれる、 $\mathbf{R}[T]$ の多項式である。その係数は多重ゼータ値の一次結合で書かれる。これらは、多重ゼータ値の積分、および級数による表示を考えたとき、インデックスの最後の成分が1であると発散するのだが、その発散の度合いを計るような多項式である。それらが、ガンマ関数のテイラー展開級数を用いて定義されるある \mathbf{R} 線形写像 $\rho: \mathbf{R}[T] \rightarrow \mathbf{R}[T]$ によって(4)のようにきれいに関係している、というのが正規化の基本定理である [8],[15]。そして、多重ゼータ値のすべての関係式 (\mathbf{Q} 上の代数関係式や線形関係式) は、(2), (3), (4) (両辺の係数を比べたもの) から出てくるであろう、と予想されている。また [11] では、等式 (1)のもと、(2) と (3) が同値になる、という少し意外な結果も証明されている。これらが、先ほどの予想「(1) がすべての線形関係式を導く？」の根拠である。論文では「~のもとで~が同値」の意味をはっきりさせるため、 ζ を、インデックスの形式和がなす空間から \mathbf{R} や $\mathbf{R}[T]$ への写像で置き換えて、代数的に議論する。副産物として、基本定理 (4) のほぼ純代数的な証明が得られる。実数の性質を使うのは唯一 (1) の初等的な積分の計算だけである。

いずれにせよ、ここで強調したいことは、等式 (1) は、発散の正規化であるとかいうことは一切出てこない、収束する積分と収束する級数の間の、大学初年次の微積分で習う範囲の計算で簡単に証明できる全く初等的な等式であると言うことである。これが多重ゼータ値のすべての線形関係式を導くであろうというのは、なかなか愉快的なことではないか。ただしまだ不十分な点もある。それは、左辺や右辺を多重ゼータ値の和として書く明示的な公式がないことである。

3. 有限多重ゼータ値

次にドン・ザギエ氏と共同で行っている「有限多重ゼータ値」について手短かに紹介する。これは多重ゼータ値の二通りの、全く異なる「有限類似」に関するもので、両者の関係を発見したことが一番の目玉である。

まず第一のものは、各素数 p ごとの素朴な有限類似

$$\sum_{0 < m_1 < \dots < m_r < p} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}} \pmod{p} \quad (5)$$

を、全素数まとめて、ただし有限個の素数でのずれはあっても無視し（ここがポイント）、商環

$$\mathcal{A} := \frac{\prod_p \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}{\bigoplus_p \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} = \{(a_p)_p \mid a_p \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\} / \sim$$

において考える。ここで、 p はすべての素数をわたり、 $(a_p)_p \sim (b_p)_p$ は高々有限個の例外を除き $a_p = b_p$ となることを意味する。 \mathcal{A} は成分ごとの和、積から来る演算によって環であり、 \mathbf{Q} を対角的に埋め込む（有限個の成分はいつでもよいことに注意）ことにより、 \mathbf{Q} 代数と見ることが出来る。そこで、この \mathbf{Q} 代数 \mathcal{A} において、「 \mathcal{A} -多重ゼータ値」 $\zeta^{\mathcal{A}}(k_1, \dots, k_r) \in \mathcal{A}$ を、その p 成分が (5) であるような $\prod_p \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ の元で代表される \mathcal{A} の元として定義する。ザギエは 2010 年に台湾を訪れた際に聞いた、スンのある予想に触発され、このような枠組みで (5) や類似の和の合同式を考えることを始めたそうである。

古典的な場合と同じように、重さが k のインデックス (k_1, \dots, k_r) すべて（ただし k_i は正整数とする）に対する $\zeta^{\mathcal{A}}(k_1, \dots, k_r)$ たちが \mathbf{Q} 上生成する \mathcal{A} の部分ベクトル空間を $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$ で表す。またそれらのすべての k についての和を $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ とする：

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} \quad (\mathcal{Z}_{\mathcal{A},0} = \mathbf{Q}).$$

今は収束発散の問題がないから k_i は 0 でも負でも構わないわけであるが、そのような $\zeta^{\mathcal{A}}(k_1, \dots, k_r)$ を考えてもやはり $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ の元となることが容易に示される（ただし一般には重さが混ざった和になる）。

さて、調和積 (2) の計算は有限で切った和 (5) でも成り立つから、 $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ が \mathbf{Q} 代数になることが分かる。この代数について、我々は次を予想した。 \mathcal{Z} で通常 of 多重ゼータ値のなす \mathbf{Q} 代数

$$\mathcal{Z} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Z}_k \quad (\mathcal{Z}_0 = \mathbf{Q}, \mathcal{Z}_1 = \{0\})$$

を表すとする。

予想 \mathbf{Q} 代数の同型

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{Z} / \zeta(2)\mathcal{Z} \tag{6}$$

が存在する。右辺の $\zeta(2)\mathcal{Z}$ は $\zeta(2)$ が生成する \mathcal{Z} の単項イデアルである。

さらに精密に、 $\zeta^{\mathcal{A}}(k_1, \dots, k_r)$ を以下で具体的に定義する $\zeta^{\mathcal{S}}(k_1, \dots, k_r)$ に移すような同型写像が存在する。従って $\zeta^{\mathcal{A}}(k_1, \dots, k_r)$ たちが満たす関係式は全く同じ形で $\zeta^{\mathcal{S}}(k_1, \dots, k_r)$ で成り立つし、逆も然りである。

もし \mathcal{Z} が重さによって次数付き環になっているとし、ザギエの次元予想が正しいとすると、商環 $\mathcal{Z} / \zeta(2)\mathcal{Z}$ の重さが k の部分の次元は $d_k - d_{k-2}$ 、すなわち d_{k-3} に等しいはずである。これが、ザギエが数値計算 (!) により予想した $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$ の次元である。

ザギエは 2011 年の 11 月から、コレージュドフランスにおいて 5 回にわたって多重ゼータ値の講義をした。その最終回（12 月 5 日）に \mathcal{A} -多重ゼータ値についてもふれ、次元の予想を述べている。私は翌年 5 月に彼が九大を訪れたときにこの話しを聞いた。あとで書くように、以前に (5) の和の合同をいろいろ計算したことがあったので、 \mathcal{A} という環の中で考える枠組みに大変興味をひかれ、責任重い役職仕事からの格好の逃避場所 (?)

のように、時間を見つけては研究を続けた。そして13年の3月末から公務の合間を縫ってイギリスのニュートン研究所を訪れたとき、二日余りだけ彼と集中的に議論することが出来、上記の予想にたどり着いた。私は肝心の多重ゼータ値の研究集会まではニュートン研に滞在できなかったのであるが（入学式に出席せねばならなかった）、かつてない実りある、印象に残る外国出張となった。次元の予想値を見ればそれが $\pi^2 = 0$ とおいて得られるもの、又は「 p 進多重ゼータ値」（そこでの π^2 の類似は0である）の次元予想値に等しいことはすぐに気がつくが、まさか実数世界にこのようにはっきり対応物があるとは、見つけるまでは、二人とも思いもしなかった。

さてもう一つの有限類似とも言うべき $\zeta^S(k_1, \dots, k_r)$ の定義は次の通り。まず \mathcal{Z} の元 $\zeta^{S,*}(k_1, \dots, k_r)$ を、

$$\zeta^{S,*}(k_1, \dots, k_r) := \sum_{i=0}^r (-1)^{k_{i+1} + \dots + k_r} \zeta_*(k_1, \dots, k_i; T) \zeta_*(k_r, \dots, k_{i+1}; T) \quad (7)$$

で定義する。 k_i たちは自然数であり、どこに1があってもよい。右辺に現れているのは、先に登場した級数による正規化多項式である（ $\zeta_*(\emptyset; T) = 1$, $(-1)^{\text{空和}} = 1$ とする）。インデックス (k_1, \dots, k_r) を途中で二つに分けて後半の順序を逆転させ掛け、それらの符号付きの和をとるのである。この定義からは右辺は T の多項式になるとしか見えないが、実は T によらない定数、実際は重さが $k_1 + \dots + k_r$ の多重ゼータ値の和となることが示される。そこで $\zeta^S(k_1, \dots, k_r)$ を

$$\zeta^S(k_1, \dots, k_r) := \zeta^{S,*}(k_1, \dots, k_r) \bmod \zeta(2) \in \mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$$

として定義する。(7)の右辺の和をいきなり見せられても余り自然なものとは思えないであろうが、より自然に見える、級数としての表示もある。一応書いておくと、

$$\zeta^{S,*}(k_1, \dots, k_r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{m_1 \prec \dots \prec m_r \\ m_i \in \mathbf{Z}, |m_i| < N}} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}.$$

ここで、0以外の整数に順序 \prec を

$$1 \prec 2 \prec 3 \prec \dots \prec (\infty = -\infty) \prec \dots \prec -3 \prec -2 \prec -1$$

で入れている。

また、(7)の ζ_* を ζ_{III} に置き換えて同様の量 $\zeta^{S,\text{III}}(k_1, \dots, k_r)$ を定義することも出来る。これも \mathcal{Z} の元となり、両者は一般には異なる値をとるが、実は常に

$$\zeta^{S,*}(k_1, \dots, k_r) \equiv \zeta^{S,\text{III}}(k_1, \dots, k_r) \bmod \zeta(2)$$

が成り立つ。従って $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ における剰余類を考えるということが自然なこととなる。そうして $\zeta(2) = 0$ としていろいろと計算をしてみると、 ζ^A と全く同じ関係式が成り立つ！ということを経験したのであった。

今では $\zeta^A(k_1, \dots, k_r)$ たちや、 $\zeta^S(k_1, \dots, k_r)$ たちが満たすいろいろな関係式が証明されていて、今のところ、一方で成り立っている式は ζ^A と ζ^S を入れ替えるだけで全く同じ関係式が他方で成り立つ。そういう意味で上の予想のエビデンスは沢山ある。また、すべての関係式を生み出すであろうと予想される、「複シャッフル関係式」の類似物と思える関係

式族も双方で証明されていて、これも全く同じ形をとる。しかしながら、現時点では \mathcal{Z}_A が \mathbf{Q} より真に大きいか、また $Z/\zeta(2)Z \neq 0$ か、も証明されていない！（従って一切が全て蜃気楼、証明した等式は皆、実は $0 = 0$ 、と言う可能性もある。何と。）

本稿では定義と主な予想だけを述べて、関係式など具体的なことは一切省略することにしてしまった。より詳しくは、近く出るであろう日本語の概説 [10]、論文としては（いい加減に公表しないとちょっとマズイ）[12]、また既に出ているジャオの本 [20]などを参照して頂きたい。

最後に一つだけ、当初より大変面白く思っていることを述べて本稿を終えたい。

多重ゼータ値の関係式の中でおそらく最もよく引き合いに出され、証明も多数知られているものに「和公式」というものがある。これは重さと深さが一定の多重ゼータ値すべての和がリーマンゼータ値になるというエレガントな等式

$$\sum_{\substack{k_1 + \dots + k_r = k \\ k_i \geq 1, k_r \geq 2}} \zeta(k_1, \dots, k_r) = \zeta(k)$$

のことであるが、私はこれの有限類似を以前予想した [9]。その当時（2010年の9月に数理研で講演している）はまだ \mathcal{A} のことは知らなかったので $\text{mod } p$ での合同式として書いたのだが、それを \mathcal{A} -多重ゼータ値の言葉で書くと

$$\sum_{\substack{k_1 + \dots + k_r = k \\ k_i \geq 1, k_r \geq 2}} \zeta^{\mathcal{A}}(k_1, \dots, k_r) = (1 + (-1)^r \binom{k-1}{r-1}) Z(k)$$

となる。ここで $Z(k)$ は、

$$Z(k) := \left(\frac{B_{p-k}}{k} \text{ mod } p \right)_p \in \mathcal{A}$$

で定まる量である（ B_{p-k} はベルヌーイ数）。この予想は、 $k_r \geq 2$ という条件の r を一般の位置に変えたものも含め、斎藤－若林 [16] が証明した。（ちなみに、どの k_i も 1 以上として対称な和をとると 0 になる。）そして村原 [13] が ζ^S 版の

$$\sum_{\substack{k_1 + \dots + k_r = k \\ k_i \geq 1, k_r \geq 2}} \zeta^S(k_1, \dots, k_r) \equiv (1 + (-1)^r \binom{k-1}{r-1}) \zeta(k) \text{ mod } \zeta(2)$$

を証明した（斎藤－若林の一般化の形で証明されている）。これを見ても分かるように、また他にもいくつかそれを示唆する結果があって、 $\zeta(k)$ の、正確には $\zeta(k) \text{ mod } \zeta(2)$ の \mathcal{A} 世界における類似物は $Z(k)$ と思われる。すなわち同型予想 (6) で右辺にある $\zeta(k) \text{ mod } \zeta(2)$ に \mathcal{A} で対応するのは $Z(k)$ であると信じられる（ $Z(k)$ は実際 \mathcal{Z}_A の元として書ける）。オイラーによる結果「 k が偶数のときは $\zeta(k)$ は $\zeta(2)$ のべきの有理数倍である」ということと、「 k が偶数なら $p > k + 1$ なる奇素数 p について $B_{p-k} = 0$ である」という事実が対応している。また、次の“heuristic”ももっともらしい：

$$\zeta(k) \underset{\text{Fermat}}{\equiv} \zeta(k - (p - 1)) \underset{\text{Euler}}{=} -\frac{B_{p-k}}{p - k} \equiv Z(k)_{(p)} \pmod{p}.$$

ついでに書くと、 k が負のときは \mathcal{A} において $Z(k) = \zeta(k) (\in \mathbf{Q} \subset \mathcal{A})$ が成り立っている（クンマーの合同式による）。

ところで、いかなる奇数 $k \geq 3$ に対しても、 $\zeta(k) \bmod \zeta(2)$ が 0 でないこと（そう信じられていると思う）は証明されていない。一方、いかなる奇数 $k \geq 3$ に対しても、 $Z(k) \neq 0$ であるかどうか、まだ分かっていないようである。このことは、正則素数が無限にあるということが証明されれば、そこから従うことであるが、個別の k に対してはそれよりもずっと弱いことを言っていることに注意する。すなわち、 $Z(k) \neq 0$ か？ というのは、 A の定義によれば、「十分大きなすべての素数 p に対して $B_{p-k} \equiv 0 \pmod p$ となる」ことが起こらない、ということである。言い換えると、固定された奇数 k に対し、「 $B_{p-k} \not\equiv 0 \pmod p$ となる素数が無限に存在する」ということである。これを示すことが $\zeta(k) \bmod \zeta(2) \neq 0$ を示すことと同程度に難しいのであろうか。後者については、現時点では重さが異なる多重ゼータ値の間に線形関係がないと言うことは知られてないから、たとえば $\zeta(3)$ が $\zeta(2)$ の有理数倍ではない、 $\zeta(2)^2$ の有理数倍でもない、等々、無限の可能性をつぶす必要がある。これはちょっと手がつかない感じではある。重さが違えば独立、ということが何らかの方法で一般的に分かったとすると、 $\zeta(3) \bmod \zeta(2) \neq 0$ は言えるが、 $\zeta(5) \bmod \zeta(2) \neq 0$ を言うには $\zeta(5)$ と $\zeta(2)\zeta(3)$ の独立性を示す必要がある。「重さが違えば独立」ということは正則素数の無限性ほど強くないのであろうか？ ζ^A と ζ^S の同じ形の関係式でも証明の難易度に（今のところ）かなり差があると思われるものがあり、このあたりのことをつらつら考えていると何かと不思議な感に打たれる。それはともかく、 $\zeta(5)$ の無理性を証明しようとしている人はいると思うが、 $\zeta(5)$ と $\zeta(2)\zeta(3)$ が \mathbf{Q} 上独立であるか、といった問題を考えている人はいるのであろうか。また、 $Z(k) \neq 0$ （またはより強く $Z(k) \notin \mathbf{Q}$ ）を岩澤理論や ABC 予想などから導くことは出来ないのであろうか。

4. おわりに

私は伊原康隆先生の指導のもと、 $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の基本群へのガロア表現に関する仕事で数学者としての出発をしたが、その方面では優秀な後輩が続々と出てきた頃に挫折してしまった。以後雑多なことをやってきた中で、 $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ のガロア表現から見ると「裏側」というか、表裏一体のホッジ側にあたる多重ゼータ値の研究を、ザギエさんや故荒川恒男さんの大きなお蔭もあり、何とか今日まで続けてこられた。ブラウンのような、ガロア側にも実質的な進展をもたらすような（言わば恩返し的な）研究はついで出来ずじまいでいるし、今後も出来るとは思わないのだが、2 節や 3 節で述べたような予想を提出し得たことは数学者冥利に尽きるというもので、これまでに関係したすべての人に感謝している。また思わぬことで今回講演の機会を頂いたことにもお礼を申し上げます。

参考文献

- [1] F. Brown, Mixed Tate motives over \mathbf{Z} , *Annals of Math.* **175** (2012), 949–976.
- [2] P. Deligne and A. B. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **38** (2005), no. 1, 1–56.
- [3] L. Euler, *Meditationes circa singulare serierum genus*, *Novi commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, **20** (1776), 140–186.

- [4] L. Euler, Leonhart Euler Correspondence, Opera omnia, series quarta A, val IV, Part I and II.
- [5] M. Hoffman, Multiple harmonic series, Pacific J. Math, **152** (1992), 275–290.
- [6] M. Hoffman, The algebra of multiple harmonic series, J. Algebra, **194** (1997), 477–495.
- [7] M. Hoffman, Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums, Kyushu J. Math., **69** (2015), 345–366.
- [8] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, Compositio Math., **142** (2006), 307–338.
- [9] 金子昌信, 有限多重ゼータ値 mod p と多重ゼータ値の関係式, 数理解析研究所講究録 **1813** (2012), 27–31.
- [10] 金子昌信, 有限多重ゼータ値, 数理解析研究所講究録別冊に掲載予定.
- [11] M. Kaneko and S. Yamamoto, A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations, preprint arXiv: 1605.03117.
- [12] M. Kaneko and D. Zagier, Finite multiple zeta values, in preparation.
- [13] H. Murahara, A note on finite real multiple zeta values, Kyushu J. Math. **70** (2016), 197–204.
- [14] Y. Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, J. Number Th., **74** (1999), 39–43.
- [15] G. Racinet, Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l’unité, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **95** (2002), 185–231.
- [16] S. Saito and N. Wakabayashi, Sum formula for finite multiple zeta values, J. Math. Soc. Japan, **67** (2015), 1069–1076.
- [17] T. Terasoma, Mixed Tate motives and multiple zeta values, Invent. Math., **149** (2002), 339–369.
- [18] S. Yamamoto, Multiple zeta-star values and multiple integrals, to appear in *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, arXiv:1405.6499.
- [19] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, First European Congress of Mathematics, Volume II, Progress in Math., **120** (1994), 497–512.
- [20] J. Zhao, *Multiple Zeta Functions, Multiple Polylogarithms and Their Special Values* (Series on Number Theory and Its Applications), World Scientific Co. 2016.

代数多様体の数論的基本群とその線形表現

玉川安騎男

京都大学数理解析研究所

本稿の主目的は、Anna Cadoret 氏らとの最近の共同研究について紹介することです。非常に大ざっぱに言えば、代数多様体（特に代数曲線）の数論的基本群の幾何的 ℓ 進表現や幾何的法 ℓ 表現族が、よい群論的／幾何的／数論的性質を持つという研究です。

§0. 定義と問題設定

この節では、数論的基本群とその線形表現に関連するさまざまな定義をいくつかの例とともに復習し、最後に本稿で取り扱う問題について説明します。

0.1. 位相群

Γ を位相群とし、 ℓ を素数とします。

定義

Γ : 副有限群

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{def}}{\iff} \Gamma &\simeq \varprojlim \Gamma_\lambda, \Gamma_\lambda: \text{有限群} \\ \iff \Gamma &: \text{コンパクトかつ全不連結} \end{aligned}$$

Γ : 副 ℓ 群

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \Gamma \simeq \varprojlim \Gamma_\lambda, \Gamma_\lambda: \text{有限 } \ell \text{ 群}$$

Γ : 概副 ℓ 群

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \Gamma: \text{副有限} \ \& \ \Gamma \supset \underset{\text{op}}{\exists} \Gamma': \text{副 } \ell$$

Γ : ℓ 進リー群

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{def}}{\iff} \Gamma &: \mathbf{Q}_\ell \text{ 上の解析多様体の構造が与えられ、群演算が解析的} \\ \rightsquigarrow \text{Lie}(\Gamma) &: \mathbf{Q}_\ell \text{ 上の有限次元リー代数} \end{aligned}$$

$$\text{注意 } \Gamma: \text{コンパクト } \ell \text{ 進リー群} \iff \exists \Gamma \xrightarrow[\text{cl}]{} \text{GL}_N(\mathbf{Z}_\ell) \implies \Gamma: \text{概副 } \ell$$

0.2. 数論的基本群

連結スキーム X とその上の幾何的点（すなわち、代数閉体のスペクトラムから X への射） b が与えられたとき、エタール基本群と呼ばれる副有限群 $\pi_1(X, b)$ が定まります。 $\pi_1(X, b)$ は b を取り替えても同型なので、しばしば $\pi_1(X)$ と書きます。簡単に言えば、 \tilde{X} を「副有限普遍被覆」とするとき $\pi_1(X) = \text{Aut}(\tilde{X}/X)$ であり、次の基本的な一対一対応（ガロア対応）が成り立ちます。

$$U \subset \pi_1(X) \xrightarrow[\text{op}]{1:1} X_U: X \text{ の連結有限エタール被覆}$$

例 1 $X: \mathbf{C}$ 上の代数多様体 $\implies \pi_1(X) \simeq \pi_1^{\text{top}}(\widehat{X^{\text{an}}})$

ここで、 X^{an} は X に付随する複素解析空間、 π_1^{top} は通常の意味の基本群、 $\widehat{G} \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{N \triangleleft G, (G:N) < \infty} G/N$ は群 G の副有限完備化。

例 2 k : 体 $\implies \pi_1(\text{Spec}(k)) \simeq \Gamma_k \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$

例 3 X : (局所ネーター) 正規スキーム $\implies \pi_1(X) \simeq \text{Gal}(k(X)^\sim/k(X)) \leftarrow \Gamma_{k(X)}$
 ここで、 $k(X)^\sim$ は、 X 上いたるところ不分岐な $k(X)$ 上のガロア拡大で最大のもの。

例 4 k : 体、 $X: k$ 上の幾何的連結 ($X_{\bar{k}} \stackrel{\text{def}}{=} X \times_k \bar{k}$ が連結) な代数多様体 \implies

$$1 \rightarrow \pi_1(X_{\bar{k}}) \rightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{\text{pr}_X} \Gamma_k \rightarrow 1 \text{ (完全)}$$

ここで、 $\pi_1(X)$ を「数論的基本群」、 $\pi_1(X_{\bar{k}})$ を「幾何的基本群」と呼びます。

各点 $x \in X^{\text{cl}} \stackrel{\text{def}}{=} \{X \text{ の閉点全体} \}$ に対し、 k 上の自然な射 $\text{Spec}(k(x)) \rightarrow X$ から Γ_k 上の自然な射 $s_x: \Gamma_{k(x)} \rightarrow \pi_1(X)$ 、すなわち

$$1 \rightarrow \pi_1(X_{\bar{k}}) \rightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{\text{pr}_X} \begin{array}{c} \Gamma_k \\ \cup_{\text{op}} \\ \Gamma_{k(x)} \end{array} \rightarrow 1$$

の自然な(準)切断が定まります。 $D_x \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im } s_x$ は $\pi_1(X)$ の x における分解群と一致します。

0.3. ℓ 進表現

以下本稿では、

k : 体

X : k 上の正規かつ幾何的連結な代数多様体

$K \stackrel{\text{def}}{=} k(X)$: X の関数体

ℓ : k の標数と異なる素数

とします。数論的基本群 $\pi_1(X)$ の ℓ 進表現とは、

V : \mathbf{Q}_ℓ 上の有限次元ベクトル空間、 $\dim(V) = r$

$\rho: \pi_1(X) \rightarrow \text{GL}(V)$ 連続群準同型

のことを言います。このとき、 V の $\pi_1(X)$ 安定な \mathbf{Z}_ℓ (必ず存在) T を取ると、次の図式が得られます。

$$\begin{array}{ccc} \rho: \pi_1(X) & \rightarrow & \text{GL}(T) & \hookrightarrow & \text{GL}(V) \\ & & | \wr & & | \wr \\ & & \text{GL}_r(\mathbf{Z}_\ell) & \subset & \text{GL}_r(\mathbf{Q}_\ell) \end{array}$$

例 1 $A \rightarrow X$: 相対次元 δ のアーベルスキーム (すなわち、 X によってパラメトライズされた δ 次元アーベル多様体の族)

$\rightsquigarrow \rho_A: \pi_1(X) \rightarrow \text{GL}(T) \subset \text{GL}(V)$

ここで、

$$T \stackrel{\text{def}}{=} T_\ell(A_{\bar{K}}) = \varprojlim A_{\bar{K}}[\ell^n] (\simeq \mathbf{Z}_\ell^{2\delta})$$

$$V \stackrel{\text{def}}{=} V_\ell(A_{\bar{K}}) = T \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell (\simeq \mathbf{Q}_\ell^{2\delta})$$

例 2 (幾何的 ℓ 進表現) $Y \rightarrow X$: 固有かつ滑らか、 $i, j \in \mathbf{Z}$, $i \geq 0$

$$\rightsquigarrow \rho_{Y,i,j} : \pi_1(X) \rightarrow \mathrm{GL}(T) \subset \mathrm{GL}(V)$$

ここで、

$$T \stackrel{\mathrm{def}}{=} H_{\acute{\mathrm{e}}\mathrm{t}}^i(Y_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_\ell(j)) / (\mathrm{torsion})$$

$$V \stackrel{\mathrm{def}}{=} H_{\acute{\mathrm{e}}\mathrm{t}}^i(Y_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_\ell(j)) = T \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$$

但し、

$$\mathbf{Z}_\ell(1) \stackrel{\mathrm{def}}{=} T_\ell(\mathbf{G}_{m,\overline{K}}) = \varprojlim \mathbf{G}_{m,\overline{K}}[\ell^n] (\simeq \mathbf{Z}_\ell)$$

$$\mathbf{Z}_\ell(j) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{Z}_\ell(1)^{\otimes j} (j \geq 0), \mathbf{Z}_\ell(-j)^\vee (j < 0) (\simeq \mathbf{Z}_\ell)$$

$$\mathbf{Q}_\ell(j) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{Z}_\ell(j) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell (\simeq \mathbf{Q}_\ell)$$

注意 例 1 は例 2 の特別な場合と見なせます: $\rho_A = \rho_{A^\vee,1,1} = \rho_{A,2\delta-1,\delta}$

注意 $H_{\acute{\mathrm{e}}\mathrm{t}}^i(Y_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_\ell(j))$ は、ほとんどすべての ℓ に対し非自明なねじれ元を持たないことが知られています (Gabber-Orgozo)。

ℓ 進表現 $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \mathrm{GL}(T) \subset \mathrm{GL}(V)$ と $x \in X^{\mathrm{cl}}$ が与えられたとき、次の図式が得られます。

$$\begin{array}{ccc} \overline{G} & & G \\ \parallel \mathrm{def} & & \parallel \mathrm{def} \\ \rho(\pi_1(\overline{X})) & \underset{\mathrm{cl}}{\triangleleft} & \rho(\pi_1(X)) \underset{\mathrm{cl}}{\subset} \mathrm{GL}(T) \simeq \mathrm{GL}_r(\mathbf{Z}_\ell) \\ & & \cup_{\mathrm{cl}} \\ & & \rho(D_x) \\ & & \parallel \mathrm{def} \\ & & G_x \end{array}$$

これらはすべて (コンパクト) ℓ 進リー群になります。したがって、リー理論により次の図式が得られます。

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathfrak{g}} & & \mathfrak{g} \\ \parallel \mathrm{def} & & \parallel \mathrm{def} \\ \mathrm{Lie}(\overline{G}) & \underset{\mathrm{ideal}}{\subset} & \mathrm{Lie}(G) \subset \mathfrak{gl}(V) \simeq \mathfrak{gl}_r(\mathbf{Q}_\ell) \\ & & \cup \\ & & \mathrm{Lie}(G_x) \\ & & \parallel \mathrm{def} \\ & & \mathfrak{g}_x \end{array}$$

これらはすべて \mathbf{Q}_ℓ 上の有限次元リー代数になります。

0.4. 法 ℓ 表現族

数論的基本群 $\pi_1(X)$ の法 ℓ 表現とは、

M_ℓ : 有限次元 \mathbf{F}_ℓ ベクトル空間。 $\dim(M_\ell) = r$

$$\rho_\ell : \pi_1(X) \rightarrow \mathrm{GL}(M_\ell) (\simeq \mathrm{GL}_r(\mathbf{F}_\ell))$$

のことを言います。素数の無限集合を走らせて、族 $(\rho_\ell)_\ell$ を考えることが多いです。

例 1 $A \rightarrow X$: 相対次元 δ のアーベルスキーム

$$\rightsquigarrow \rho_{A,\ell} : \pi_1(X) \rightarrow \mathrm{GL}(M_\ell)$$

ここで、

$$M_\ell \stackrel{\text{def}}{=} A_{\overline{K}}[\ell] (\simeq \mathbf{F}_\ell^{2\delta})$$

注意 $A_{\overline{K}}[\ell] = T_\ell(A_{\overline{K}}) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{F}_\ell$

例 2 (幾何的法 ℓ 表現族) $Y \rightarrow X$: 固有かつ滑らかな、 $i, j \in \mathbf{Z}$ 、 $i \geq 0$

$$\rightsquigarrow \rho_{Y, i, j, \ell} : \pi_1(X) \rightarrow \text{GL}(M_\ell)$$

ここで、

$$M_\ell \stackrel{\text{def}}{=} H_{\text{ét}}^i(Y_{\overline{K}}, \mathbf{F}_\ell(j))$$

但し、

$$\mathbf{F}_\ell(1) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{G}_{m, \overline{K}}[\ell] (\simeq \mathbf{F}_\ell)$$

$$\mathbf{F}_\ell(j) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_\ell(1)^{\otimes j} (j \geq 0), \mathbf{F}_\ell(-j)^\vee (j < 0) (\simeq \mathbf{F}_\ell)$$

注意 例 1 は例 2 の特別な場合と見なせます: $\rho_{A, \ell} = \rho_{A^\vee, 1, 1, \ell} = \rho_{A, 2\delta-1, \delta, \ell}$

注意 ほとんどすべての ℓ に対し、 $H_{\text{ét}}^i(Y_{\overline{K}}, \mathbf{F}_\ell(j)) = H_{\text{ét}}^i(Y_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_\ell(j)) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{F}_\ell$

0.5. 問題設定

本稿の主目的は、Anna Cadoret 氏との最近の共同研究 (現在も進行中) について紹介することです。非常に大ざっぱに言えば、幾何的 ℓ 進表現や幾何的法 ℓ 表現族がよい群論的/幾何的/数論的性質を持つという研究で、本稿では、特に次の二つの問題について考えます:

(§1) $\pi_1(X)$ の幾何的 ℓ 進表現 ρ において、 $G_x \subset G$ は「たいていの」 $x \in X^{\text{cl}}$ に対して「大きい」。

(§2) $\pi_1(X)$ の幾何的法 ℓ 表現族 $(\rho_\ell)_\ell$ において、 $\rho_\ell|_{\pi_1(X_{\overline{k}})}$ はほとんどすべての ℓ に対して半単純。

§1. 普遍開像定理 (Anna Cadoret 氏との共同研究)

本節では、 k は \mathbf{Q} 上有限生成な体 (例: $[k : \mathbf{Q}] < \infty$) とし、引き続き

X : k 上の正規かつ幾何的連結な代数多様体

$K \stackrel{\text{def}}{=} k(X)$: X の関数体

$\rho : \pi_1(X) \rightarrow \text{GL}(T) \subset \text{GL}(V)$ ℓ 進表現

とします。

定義 ρ : GLP (Geometrically Lie Perfect 幾何的リー完全)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \overline{\mathfrak{g}}^{\text{ab}} = 0$$

$$\iff \forall U \subset_{\text{op}} \overline{G}, |U^{\text{ab}}| < \infty$$

命題 1 ([CT4]) 例 2 の幾何的 ℓ 進表現 $\rho_{Y, i, j}$ は GLP である。特に、例 1 の ℓ 進表現 ρ_A は GLP である。

証明 フロベニウス重みの理論によります。(ホッジ理論による別証明もあります。) \square

以下この節では、 X が (滑らかな) 代数曲線であると仮定し、各 $d \geq 1$ に対し、 $X^{\leq d} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X^{\text{cl}} \mid [k(x) : k] \leq d\}$ と定義します。次の定理が、この節の主結果です。

定理 2 ([CT4][CT5]) ρ が GLP であると仮定し、 $d \geq 1$ とする。このとき、ほとんどすべての $x \in X^{\leq d}$ に対し、 $\mathfrak{g}_x = \mathfrak{g}$ (すなわち $G_x \subset G$) が成立する。より精密には、 $U_d \triangleleft_{\text{op}} G$ が存在し、ほとんどすべての $x \in X^{\leq d}$ に対し、 $G_x \supset U_d$ が成立する。

注意 以下の命題は、ヒルベルトの既約性定理から直ちに従います：(必ずしも GLP でない) 任意の ρ と十分大きい正整数 d に対し、 $G_x = G$ となるような無限個の $x \in X^{\leq d}$ が存在する。

定理 2 の証明 証明は、群論的部分、幾何的部分、数論的部分からなります。群論的部分では、(コンパクト) l 進リー群の性質を用いて \overline{G} の開部分群からなる射影系を構成します。幾何的部分では、GLP 性質を用いて、この射影系に対応する $X_{\overline{k}}$ の被覆の塔の種数やゴナリティーが無限大に発散することを証明します。(この部分が一番大変です。) 数論的部分では、幾何的部分の帰結及びモデル予想/モデル・ラング予想 (Faltings) を用いて、例外点の有限性を証明します。□

系 ([CT3][CT4][CT5]) $A \rightarrow X$ をアーベルスキームとし、 $d \geq 1$ とする。このとき、 $N = N(k, X, A, l, d)$ が存在して、すべての $x \in X^{\leq d}$ 及びすべての $v \in A_x(k(x))[\ell^\infty]$ に対し、 v の位数は N 以下である。

証明 定理 2 を l 進表現 $\rho = \rho_A$ に適用します。□

GLP でない l 進表現に対しては、定理 2 は一般には成立しません：

例 $X = \text{Spec}(k[T, T^{-1}])$ とし、 $a \in k^\times \setminus (k^\times)_{\text{tors}}$ とします。 $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \text{GL}_3(\mathbf{Z}_l)$ を、以下で与えられる l 進表現とします：

$$\rho = \begin{pmatrix} \chi & \psi_T & \psi_a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで、 χ は l 進円分指標、 ψ_h は h に付随する l 進クンマー 1 次コサイクルを表します。このとき、任意の $x \in a^{\mathbf{Z}} \subset k^\times = X(k)$ に対し、 G_x は G の開でない部分群です。

一般の l 進表現 $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \text{GL}(T)$ (X は代数曲線) と $d \geq 1$ に対しては、定理 2 (とその証明の手法) 及びリー代数の理論を用いて、以下が証明できます。

定理 3 ([CT5]) ほとんどすべての $x \in X^{\leq d}$ に対し、 $\text{codim}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_x) \leq 2$ が成立する。□

定理 4 ([CT6]) ほとんどすべての $x \in X^{\leq d}$ に対し、 $D(D(\overline{\mathfrak{g}})) \subset \mathfrak{g}_x$ が成立する ($D(\mathfrak{h}) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$)。□

定理 2、定理 4 から思い付く次の問題の成否は、現時点では不明です。

問題 ほとんどすべての $x \in X^{\leq d}$ に対し、 $D(\overline{\mathfrak{g}}) \subset \mathfrak{g}_x$ が成立するか？

注意 (i) [CT1] では、定理 2 の系の正標数類似が取り扱われています。

(ii) [CT2][CT7][CT8][CT9] では、定理 2 の法 l 表現族類似が取り扱われています。

§2. 幾何的半単純性定理 (Anna Cadoret 氏、Chun Yin Hui 氏との共同研究)

この節では、 k は任意の体とし、

X : k 上の正規かつ幾何的連結な代数多様体

$K \stackrel{\text{def}}{=} k(X)$: X の関数体

$Y \rightarrow X$: 固有かつ滑らかな射

$i, j \in \mathbf{Z}, i \geq 0$

l : k の標数と異なる素数

とします。このとき、付随する幾何的 l 進表現

$$\rho_{Y,i,j} : \pi_1(X) \rightarrow \mathrm{GL}(H_{\mathrm{ét}}^i(Y_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_\ell(j)))$$

の幾何的基本群 $\pi_1(X_{\bar{k}})$ への制限は半単純であることが知られています (Deligne)。この事実の幾何的法 l 表現族

$$(\rho_{Y,i,j,\ell})_\ell, \rho_{Y,i,j,\ell} : \pi_1(X) \rightarrow \mathrm{GL}(H_{\mathrm{ét}}^i(Y_{\bar{K}}, \mathbf{F}_\ell(j)))$$

における類似がこの節の主結果です：

定理 5 ([CHT]) ほとんどすべての l に対し、 $\rho_\ell|_{\pi_1(X_{\bar{k}})}$ は半単純。

定理 5 の証明の鍵となるのが、次の定理 (とそのいくつかの一般化) です：

定理 6 ([CHT]) ほとんど全ての l に対し、

$$H_{\mathrm{ét}}^i(Y_{\bar{K}}, \mathbf{Z}_\ell)^{\pi_1(X_{\bar{k}})} \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{F}_\ell \xrightarrow{\sim} H_{\mathrm{ét}}^i(Y_{\bar{K}}, \mathbf{F}_\ell)^{\pi_1(X_{\bar{k}})}$$

証明 k が有限体の場合に帰着し、フロベニウス重みの理論を使うというのが基本的方針ですが、ねじれ係数のため工夫が必要です。 X が k 上固有な場合には Y に対してフロベニウス重みの理論 (Deligne) を適用でき、一般にはオルタレーション (de Jong) を使って、次元に関する帰納法により必要な重みの性質を導きます。 \square

定理 5 の証明 $M_\ell \stackrel{\mathrm{def}}{=} H_{\mathrm{ét}}^i(Y_{\bar{K}}, \mathbf{F}_\ell(j))$ とし、 N_ℓ をその任意の $\pi_1(X_{\bar{k}})$ 部分加群とします。証明したいことは、 $\pi_1(X_{\bar{k}})$ 加群の完全列

$$0 \rightarrow N_\ell \rightarrow M_\ell \rightarrow M_\ell/N_\ell \rightarrow 0$$

が分裂することです。 N_ℓ が $M_{\ell^\infty} \stackrel{\mathrm{def}}{=} H_{\mathrm{ét}}^i(Y_{\bar{K}}, \mathbf{Z}_\ell(j))$ の $\pi_1(X_{\bar{k}})$ 部分加群 N_{ℓ^∞} に持ち上がる場合には、定理 5 の一般化 (M_{ℓ^∞}, M_ℓ を N_{ℓ^∞}, N_ℓ にかえたもの) を用いて上述の Deligne の半単純性定理に帰着できます。

一般の場合は、 $\dim(N_\ell) = s$ とすると、上記の完全列の分裂が、完全列

$$0 \rightarrow \mathring{\wedge} N_\ell \rightarrow \mathring{\wedge} M_\ell \rightarrow \mathring{\wedge} M_\ell / \mathring{\wedge} N_\ell \rightarrow 0$$

の分裂と同値になることがわかります。定理 1 の法 l 版 ([CT8][CT9]) を用いると、 X を適当な被覆に取り替えることにより、 $\mathring{\wedge} N_\ell$ への $\pi_1(X_{\bar{k}})$ の作用が自明である場合に帰着できます。このとき、上記の完全列の分裂は

$$0 \rightarrow (\mathring{\wedge} M_\ell)^{\pi_1(X_{\bar{k}})} \rightarrow \mathring{\wedge} M_\ell \rightarrow \mathring{\wedge} M_\ell / (\mathring{\wedge} M_\ell)^{\pi_1(X_{\bar{k}})} \rightarrow 0$$

の分裂に帰着できます。ここで、定理 5 の一般化 (M_{ℓ^∞} を $\mathring{\wedge} M_{\ell^\infty}$ にかえたもの) により、 $\mathring{\wedge} M_\ell$ の $\pi_1(X_{\bar{k}})$ 部分加群 $(\mathring{\wedge} M_\ell)^{\pi_1(X_{\bar{k}})}$ が $\mathring{\wedge} M_{\ell^\infty}$ の $\pi_1(X_{\bar{k}})$ 部分加群 $(\mathring{\wedge} M_{\ell^\infty})^{\pi_1(X_{\bar{k}})}$ に持ち上がることがわかります。 $\mathring{\wedge} M_{\ell^\infty}$ は ($l \gg 0$ のとき) $H_{\mathrm{ét}}^{s,i}(Y_{\bar{K}}^s, \mathbf{Z}_\ell(sj))$ の直和因子となりますので、これで冒頭の特別な場合に帰着できて証明が終了します。 \square

参考文献（プレプリント類は、Cadoret 氏のホームページ

<http://www.math.polytechnique.fr/perso/cadoret.anna/Travaux.html>

においてあります。）

[CHT] Anna Cadoret, Chun Yin Hui and Akio Tamagawa, Geometric monodromy — semisimplicity and maximality, preprint, submitted.

[CT1] —, Torsion of abelian schemes and rational points on moduli spaces, in “Algebraic Number Theory and Related Topics 2007”, RIMS Kokyuroku Bessatsu B12, RIMS, Kyoto Univ., 2009, 7–29.

[CT2] —, On a weak variant of the geometric torsion conjecture, *Journal of Algebra* 346 (2011), no. 1, 227–247.

[CT3] —, Uniform boundedness of p -primary torsion of abelian schemes, *Inventiones Mathematicae* 188 (2012), no. 1, 83–125.

[CT4] —, A uniform open image theorem for ℓ -adic representations I, *Duke Mathematical Journal* 161 (2012), no. 13, 2605–2634.

[CT5] —, A uniform open image theorem for ℓ -adic representations II, *Duke Mathematical Journal* 162 (2013), no. 12, 2301–2344.

[CT6] —, Controlling the Galois images in one-dimensional families of ℓ -adic representations, *Journal of Algebra* 412 (2014), 189–206.

[CT7] —, Gonality of abstract modular curves in positive characteristic, *Compositio Mathematica* 152 (2016), no. 11, 2405–2442.

[CT8] —, Genus of abstract modular curves with level- ℓ structures, to appear in *J. reine angew. Math.*.

[CT9] —, On the geometric image of \mathbb{F}_ℓ -linear representations of étale fundamental groups, preprint, submitted.

〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所
E-mail address: tamagawa@kurims.kyoto-u.ac.jp

標数が奇素数の場合の 二次元非可換 Lubin-Tate 理論 の局所的証明とその周辺

津嶋貴弘

1 導入と背景

この節では研究の背景や動機について歴史的な事柄にもふれながら概観したい。
フェルマー予想 (F): 「 r を 3 以上の整数とする。このとき、

$$X^r + Y^r = Z^r, \quad XYZ \neq 0$$

をみたす整数の組 (X, Y, Z) は存在しない。」

この予想は Frey のアイデアを受けて Ribet により志村・谷山予想の特別な場合に帰着され、1994 年に Wiles は、その特別な場合を示すことでフェルマー予想を解決した。志村・谷山予想は大雑把には次の二つの対象の結び付きを予想している。

$$\text{志村・谷山予想 (ST): } \boxed{\text{ガロワ表現 (代数的対象)}} \longleftrightarrow \boxed{\text{保型形式 (解析的对象)}} \quad (1.1)$$

左辺は有理数体 \mathbb{Q} の絶対ガロワ群 $G_{\mathbb{Q}} = \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\overline{\mathbb{Q}})$ の連続表現のことである。右辺は上半平面 $\mathfrak{h} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ 上の保型性をみたすある種の正則関数のことである。このように左辺は代数的な対象で右辺は解析対象で各々独立に長らく研究されてきたものである。志村氏は保型形式に対して二次元のガロワ表現を構成した。ある種のガロワ表現が保型形式からくるとというのが志村・谷山予想のおおまかな内容である。上の二つの出自の異なる対象を結び付ける橋渡しの役割を果たすのがモジュラー曲線である。標語的には

$$\boxed{\text{モジュラー曲線} = \{ \text{楕円曲線, レベル構造} \} \text{ の組の同型類のモジュライ}}$$

となる。レベル構造の種類に応じて $X_0(p^m)$, $X_1(p^m)$, $X(p^m)$ (p は素数) などと表記される (cf. [KM] や [Sa] を参照)。これらは古典的にはコンパクトリーマン面として調べられ、代数幾何の発展に伴って \mathbb{Q} 上の射影スームズ曲線として調べられた。更に重要なことは、これらの \mathbb{Z} 上のモデルの性質が詳しく調べられたことである。この発展のキーアイデアは Drinfeld による適切なレベル構造の定義である ([Dr] と [KM, Introduction] を参照)。任意の素数 p に対して $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_p$ という環の射による底変換で \mathbb{Z} 上の多様体 X を還元できる。還元で得られる \mathbb{F}_p 上の多様体 $X_{\mathbb{F}_p}$ がスームズになれば X は p で良い還元を持つという。上のモジュラー曲線達はいずれも p で良い還元を持たない。良い還元の次に「良い」還元を安定還元という。 $X_0(p)$ は p で安定還元を持ち、その還元の様子が詳しくわかっている (井草, Deligne-Rapoport, Katz-Mazur)。この事実は (F) を (ST) に帰着させる際に重要な役割を果たす。その後の研究で、 $m = 2$, $m = 3$, $m = 4$ の場合の $X_0(p^m)$ の安定還元はそれぞれ [E], [CMc], [T2] において与えられている。 $m \geq 5$ のと

⁰千葉大学理学研究科

E-mail addresses: tsushima@math.s.chiba-u.ac.jp, or affa4282@chiba-u.jp

きは、 $X_0(p^m)$ の安定還元具体的な様子は知られていない。

(1.1) の対応は Langlands により表現同士の対応として再定式化された。現在 Langlands 対応と呼ばれ盛に研究されている。

$$\text{(大域)Langlands 対応: } \boxed{\text{ガロワ表現}} \longleftrightarrow \boxed{\text{保型表現}}$$

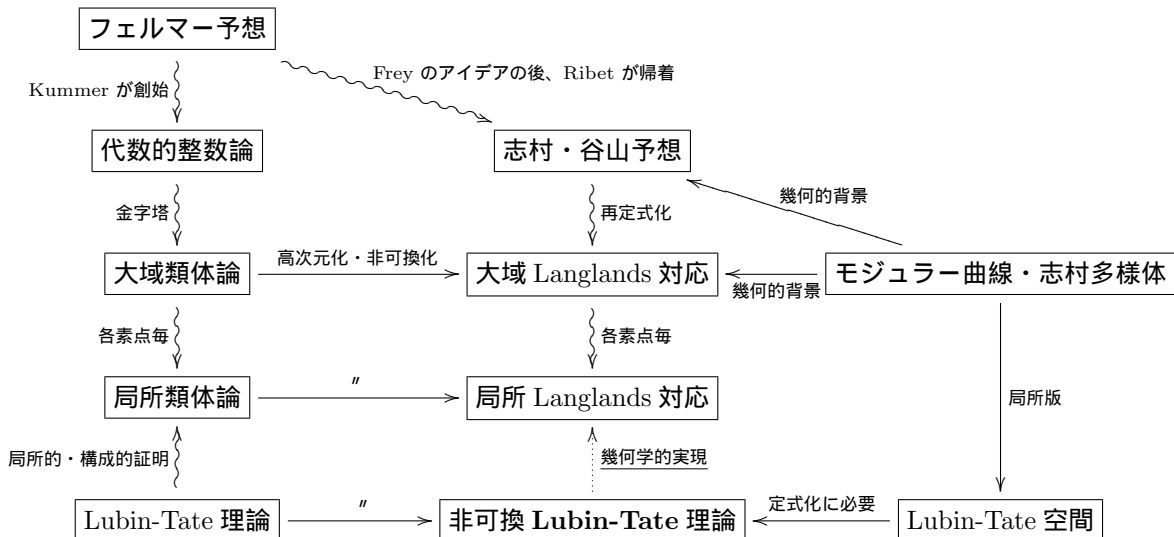
この対応は各素点ごとの局所 Langlands 対応に分解される。局所 Langlands 対応の方は後ほども出てくるので少し正確に述べる。 F を非アルキメデス局所体とする。 \mathcal{O}_F をその整数環とする。

$$\text{局所 Langlands 対応: } \boxed{\text{GL}_n(F) \text{ の既約尖点表現の同型類}} \xrightarrow{1:1} \boxed{n \text{ 次元既約ガロワ表現の同型類}}$$

([Yo3] を参照)。左から右への一対一対応写像を LL と書く。 $n = 1$ のときには局所類体論になる。この対応は L 因子や ϵ 因子を保つ数論的に意味のある対応になっている。この対応の仲間として局所 Jacquet-Langlands 対応というものがある。 D_n を Hasse 不変量 $1/n$ の F 上の中心斜体とする。 D_n^\times をその乗法群とする。局所 Jacquet-Langlands 対応は以下の二つの集合の一対一対応を与える。

$$\boxed{\text{GL}_n(F) \text{ の既約尖点表現の同型類}} \xrightarrow{1:1} \boxed{D_n^\times \text{ の既約許容表現の同型類}}$$

この左から右への一対一対応写像を JL と書く。この二つの対応の詳細については例えば [Hen] を参照。この二つの対応が Lubin-Tate 空間という rigid analytic 空間のエタール・コホモロジーの中に実現されるだろう、というのが非可換 Lubin-Tate 理論 (Deligne-Carayol 予想) である。 $n = 2, F = \mathbb{Q}_p, p \neq 2$ の場合を、大域的な保型表現論に基づいて最初に Deligne が示した。Carayol は後ろの二つの条件を外し、一般の n に関して予想を定式化した。非可換 Lubin-Tate 理論は [Bo], [HT] において大域的な保型表現論や志村多様体・Drinfeld モジュラー多様体を使って示されている。非可換 Lubin-Tate 理論の $n = 1$ の場合は Lubin-Tate 理論 ([LT]) と等価になる。Lubin-Tate 理論は局所類体論の局所的理論を与えるものだった (cf. [Iw], [Yo2, §2])。最初、局所類体論は大域類体論の系として証明された。その後 Lubin-Tate 理論により、簡明な局所的証明が与えられた (この辺りの歴史的な事情については [Iw, Preface] を参照)。Lubin-Tate 理論によれば F のアーベル拡大は、高さ 1、次元の形式 \mathcal{O}_F 加群の等分点を全て F に添加した体と F の最大不分岐拡大体との合成体として明示的に構成される。非可換 Lubin-Tate 理論は Lubin-Tate 理論の一般化・非可換化であることを標榜しており、Lubin-Tate 理論は局所類体論の局所的理論を与えるものであったので、非可換 Lubin-Tate 理論も局所的な理論として確立されるべきだと考えている。そのような問題意識の下、 F の標数が p で $p \neq 2$ のときにこの予想を局所的に証明したというのが本稿で紹介したい [T3] の主定理である。以下の節では何を調べることでこれが可能になったか、またどのような既知の結果がその証明で重要であるか、要点をかいつまんで説明したい。ここまでの話で現れた色々の予想や理論の相関図を以下にまとめる。



重要な用語を標語的にまとめると

Lubin-Tate 空間 = { 形式群, レベル構造 } の組の同種類の変形空間の生成ファイバー
= モジュラー曲線の局所モデル ($n = 2$ のとき)

Lubin-Tate 理論 = 形式群の等分点を使って F の最大アーベル拡大体を構成する理論
= 局所類体論の局所的・構成的理論

非可換 Lubin-Tate 理論 = Lubin-Tate 空間のコホモロジーの中に表現の対応を構成する理論

となる。ここまでの話のより詳しい解説が [Ka] や [IY] にあるのでそちらも参照されたい。またフェルマー予想の証明については [Sa] に詳しい。

2 非可換 Lubin-Tate 理論 ([Bo], [Ca])

以下、もう少し正確に Lubin-Tate 空間を導入し、Deligne-Carayol 予想・非可換 Lubin-Tate 理論がどのように定式化されるかを紹介する。

\mathcal{O}_F の極大イデアルを \mathfrak{p} と書く。 F の代数閉包 \bar{F} を固定する。 \bar{F} の \mathfrak{p} 進完備化を C と書く。 \bar{F} の中で F の最大不分岐拡大体を F^{ur} と書く。これの \mathfrak{p} 進完備化を \hat{F}^{ur} と書く。これの整数環を $\hat{\mathcal{O}}$ と書く。これの剰余体は $\bar{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}$ となっている。

n を正の整数とする。 $\bar{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}$ 上の高さ n の一次元の形式 \mathcal{O}_F 加群は同型を除いて唯一つ存在する。これを Ω と書く。 $\hat{\mathcal{O}}$ -代数であり、剰余体が $\bar{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}$ となる完備ネーター局所環のなす圏を \mathcal{C} と書く。非負整数 r に対して以下の関手を考える。

$$R(\mathfrak{p}^r): \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}; A \mapsto \{(\mathcal{F}_A, \iota, \phi)\}.$$

但し、右辺は $(\mathcal{F}_A, \iota, \phi)$ という三つ組の同型類の集合とする。ここで、 \mathcal{F}_A は A 上の形式 \mathcal{O}_F 加群で、 $\iota: \Omega \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_A \otimes_A \bar{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}$ は同型であり、 $\phi: (\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}^r)^{\oplus n} \rightarrow \mathcal{F}_A[\mathfrak{p}^r]$ は Drinfeld レベル構造である。この関手 $R(\mathfrak{p}^r)$ は正則局所環により表現可能であることが [Dr, Proposition 4.3] において示されている。形式スキーム $\text{Spf } R(\mathfrak{p}^r)$ の生成ファイバーを $X(\mathfrak{p}^r)$ と書く。これは \hat{F}^{ur} 上の rigid analytic 空間というものになる (rigid analytic 空間については [BGR] を参照)。更に

$$\cdots \rightarrow X(\mathfrak{p}^{r+1}) \rightarrow X(\mathfrak{p}^r) \rightarrow \cdots \rightarrow X(\mathfrak{p}) \rightarrow X(1) \quad (2.1)$$

と rigid analytic 空間の射影系を成す。

さて非可換 Lubin-Tate 理論を定式化するためには、rigid analytic 空間のエタールコホモロジーが必要である。スキームに関しては SGA において Deligne, Grothendieck らによりエタールコホモロジー理論が発展せられた (cf. [Del]). rigid analytic 空間のエタールコホモロジーに関しては van der Put-de Jong, Berkovich, Huber らにより発展せられた。Berkovich, Huber らはそれぞれ rigid analytic 空間の概念を拡張して、より広いクラスの空間に関しエタールサイトを定義している (cf. [Be], [Be2], [Hu], [Hu2] を参照)。それらの空間はそれぞれ Berkovich 空間、adic 空間と呼ばれている。エタールサイトからはエタールコホモロジーが定義される。例えば [Hu2] においては、rigid analytic 空間のコンパクト台を持つエタールコホモロジーは、adic 空間の枠組みでその部分的なコンパクト化を取ることで、スキームの場合と類似的に定義される。rigid analytic 空間の枠組みではコンパクト化の存在がわからないので、このような所でも空間概念を拡張しておく必要がある。詳しくは [Hu2, p.19] を参照されたい。 \hat{F}^{ur} から C への $X(\mathfrak{p}^r)$ の底変換を $X(\mathfrak{p}^r)_C$ と書く。 ℓ を p と異なる素数とする。整数 i に対して $X(\mathfrak{p}^r)_C$ の i 番目のコンパクト台付きのエタールコホモロジーを

$$H_r^i = H_c^i(X(\mathfrak{p}^r)_C, \bar{\mathbb{Q}}_{\ell})$$

と書く。射影系 (2.1) の引き戻しにより帰納系 $\{H_r^i\}_{r=0}^\infty$ を得る。 $X(\mathfrak{p}^r)$ は $n-1$ 次元の rigid analytic 空間であり、以下では中間コホモロジーに注目する。

$$\mathcal{H}_n = \varinjlim_r H_r^{n-1} \quad (2.2)$$

とおく。 W_F を F のヴェイユ群とする。この \mathcal{H}_n には直積群 $G_n = \mathrm{GL}_n(F) \times D_n^\times \times W_F$ のある部分群 P が作用する。この P 表現 \mathcal{H}_n の G_n への誘導表現を \mathcal{U}_n と書く (cf. この辺りの話は [Bo], [Ca] を参照)。

定理 2.1. (n 次元非可換 Lubin-Tate 理論) 任意の $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約尖点表現 π に対して、 $D_n^\times \times W_F$ 表現としての同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F)}(\mathcal{U}_n, \pi) \simeq \mathrm{LL}(\pi) \otimes \mathrm{JL}(\pi)$$

が存在する。

定理 2.2. ([T3]) 上の定理の $n = 2$, $\mathrm{char} F = p \neq 2$ の場合に上の定理の局所的な証明を得た。

以下ではこの証明のポイントを解説したい。 $n = 2$ のとき $X(\mathfrak{p}^r)$ は 1 次元なので、これを Lubin-Tate 曲線と呼ぶ。

3 明示的局所 Langlands 対応 ([BH])

Bushnell, Kutzko, Henniart らによって、構築されたタイプ理論という表現論の理論がある。これは $\mathrm{GL}_n(F)$ の尖点表現を、 $\mathrm{GL}_n(F)$ の中心でわってコンパクト (compact mod center) になるような具体的な開部分群とその有限次元スムーズ表現を用いて具体的に構成するという理論である。 $n = 2$ の場合には [BH] に詳しく述べられている。局所 Langlands 対応で比較される二つの表現の同型類の集合は、 $n = 2$ かつ $p \neq 2$ の場合には非常に簡明に記述できる。二つの表現の同型類の集合は、共に許容対 (admissible pair) というものでパラメトライズされる。この許容対が局所 Langlands 対応と局所 Jacquet-Langlands 対応の下でどのように振る舞うかを理解する理論をそれぞれ明示的局所 Langlands 対応、明示的局所 Jacquet-Langlands 対応と呼ぶ。 $n = 2$ かつ $p \neq 2$ の場合に、これについてざっと雰囲気述べたい。一般の n に関するこの理論の進展については [Hen] にまとめられている。以下本稿では断らない限り $n = 2$, $p \neq 2$ を仮定する。

定義 3.1. E/F を分離的な二次拡大体とする。 χ を E^\times のスムーズな指標とする。

1. $(E/F, \chi)$ が許容対であるとは、以下の二条件を満たすことである。

- (1) χ がノルム写像 $E^\times \rightarrow F^\times$ を経由せず、
- (2) もし $\chi|_{U_E^1}$ がノルム写像 $E^\times \rightarrow F^\times$ を経由するならば、 E/F は不分岐拡大である。

2. 二つの許容対 $(E/F, \chi)$, $(E'/F, \chi')$ が同型であるとは、 F 上の体の同型 $\phi: E \xrightarrow{\sim} E'$ が存在して $\chi = \chi' \circ \phi$ が成立することとする。

許容対 $(E/F, \chi)$ があると χ を局所類体論を通じて W_E の指標と見なし、 W_F の二次元既約表現 $\tau_\chi^0 = \mathrm{Ind}_{E/F} \chi$ が構成出来る。ここで既約性は許容対の定義から従う。さらにこの表現の同型類は許容対の同型類にしかよらない。

許容対 $(E/F, \chi)$ が与えられたとき、 D_2^\times の既約許容表現 ρ_χ と $\mathrm{GL}_2(F)$ の既約尖点表現 π_χ を作る明示的なレシピが知られている。出来上がる ρ_χ, π_χ は許容対 $(E/F, \chi)$ の同型類にのみ依存する。

非アルキメデス局所体 L に対してその整数環の極大イデアルを \mathfrak{p}_L と書き、正の整数 k に対して $U_L^k = 1 + \mathfrak{p}_L^k$ とおく。 E^\times のスムーズ指標 χ のスワン導手 $\mathrm{sw}(\chi)$ を $\chi|_{U_E^{n+1}} = 1$ なる最小の非負整数 n として定義する。

上で述べたレシピについてすべて述べるとなかなか煩雑なので以下では、 E/F が不分岐で χ のスワン導手が正の偶数の場合に、許容対 $(E/F, \chi)$ に対する π_χ の構成を述べる。 U_F^1 への制限が自明で $\psi|_{\mathcal{O}_F} \neq 1$ となる指標 $\psi: F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ を固定する。 $\text{sw}(\chi) = 2(m-1) = r-1 \geq 1$ と書く。 F 代数としての単射準同型写像

$$E \hookrightarrow M_2(F) \quad (3.1)$$

を固定する。非負整数 $k \geq 0$ に対して $\text{GL}_2(F)$ の開コンパクト部分群を

$$U_{\mathfrak{m}}^k = \begin{cases} \text{GL}_2(\mathcal{O}_F) & \text{if } k = 0, \\ 1 + \mathfrak{p}^k M_2(\mathcal{O}_F) & \text{if } k > 0 \end{cases}$$

と定める。ここで添字の \mathfrak{m} は $M_2(\mathcal{O}_F)$ という $M_2(F)$ の order を表し、この order に付随する開コンパクト部分群という意味で添字に付いている。余談ではあるが、 E/F が分岐するときには $\begin{pmatrix} \mathcal{O}_F & \mathcal{O}_F \\ \mathfrak{p} & \mathcal{O}_F \end{pmatrix}$ という別の $M_2(F)$ の order とそれに付随する開コンパクト部分群を考える。任意の元 $x \in \mathfrak{p}_E^m$ に対して $\chi(1+x) = \psi \circ \text{Tr}_{E/F}(\alpha x)$ となる $\alpha \in \mathfrak{p}_E^{-(r-1)}$ を一つ取る。まず $U_E^1 U_{\mathfrak{m}}^m$ のスムーズ指標 θ を以下で定義する。任意の元 $x \in U_E^1, 1+y \in U_{\mathfrak{m}}^m$ に対して

$$\theta(x(1+y)) = \chi(x)\psi(\text{Tr}(\alpha y)).$$

このとき、有限 Heisenberg 群の表現論を使うと、 $U_E^1 U_{\mathfrak{m}}^{m-1}$ の q 次元既約表現 η_θ で θ を含むものが同型を除いて唯一つ存在することがわかる。更に

$$J_{1,r} = E^\times U_{\mathfrak{m}}^{m-1}$$

とおく。 $J_{1,r}$ の q 次元既約表現 Λ_χ で η_θ を含み、以下の二条件を満たすものが同型を除いて唯一つ存在する。

- (1) $\Lambda_\chi|_{E^\times}$ は $\chi|_{E^\times}^{\oplus q}$ と同型であり、
- (2) 任意の元 $\mu \in \mu_{q^2-1}(E) \setminus \mu_{q-1}(F)$ に対して $\text{Tr} \Lambda_\chi(\mu) = -\chi(\mu)$ が成立する。

最後に

$$\pi_\chi = \text{c-Ind}_{J_{1,r}}^{\text{GL}_2(F)} \Lambda_\chi$$

とおく。ただし、右辺はコンパクト誘導である。こうして作られたスムーズ表現は既約尖点表現であり ([BH, Theorem 15.3])、その同型類は埋め込み (3.1) の取り方によらないことも示せる。前述通り、これは許容類の同型類にのみ依存する。

定理 3.2. ([BH, Parametrization theorem 20.2], タイプ理論) 任意の $\text{GL}_2(F)$ の既約尖点表現 π に対して、許容対 $(E/F, \chi)$ が存在して同型 $\pi \simeq \pi_\chi$ が成り立つ。更に、このような許容対の同型類は唯一つに定まる。

残念ながらこうして構成される π_χ と τ_χ^0 は局所 Langlands 対応で移り合わない。位数が 4 の約数であるような特別な馴分岐指標で τ_χ^0 を捻る必要がある。この微妙なズレは [BH] においてイプシロン因子を計算することで明示的に理解されている。この補正を行った正しい W_F の二次元既約表現を τ_χ と書くことにする。上の構成と類似的に ρ_χ の方も適切に構成することが出来る。

すると、明示的局所 Langlands 対応と明示的局所 Jacquet-Langlands 対応は以下の形で述べられる。

定理 3.3. ([BH, §34, §56]) 任意の許容対 $(E/F, \chi)$ に対して

$$\text{LL}(\pi_\chi) = \tau_\chi, \quad \text{JL}(\pi_\chi) = \rho_\chi$$

が成り立つ。

[T3, §5.1] にもこの理論の要約があるので詳しくはそちらもご覧頂きたい。

4 アフィノイドとその還元のコホモロジー ([T3])

(2.2) のエタールコホモロジーを理解することが目標である。そのためには Lubin-Tate 曲線の安定モデルを構成してその還元の様子がわかればよい。曲線の安定モデルの存在については本質的には Deligne-Mumford の定理の帰結であるが rigid 幾何的な設定でのそのような話は [CMc, §2] に詳しい。しかし、安定モデルを完全に理解することは一般には難しい ([IT] や [T] にレベルを固定した場合の計算例がある)。そこでこの文脈で表現論の重要な部分と結びつく Lubin-Tate 曲線のアフィノイドを見つけてそれを (2.2) と結び付けて考えるという方針を考える (cf. [Ha])。アフィノイドについては [BGR] を参照されたい。定理 2.2 の証明では、そのようなアフィノイドを構成し、還元を理解することが一つの大きな部分を占める。このアフィノイドに二つの系列があり、一方は $X(\mathfrak{p}^r)$ の中に自然に住んでいるが、一方のアフィノイドはねじれた感じで $X(\mathfrak{p}^r)$ に入っており解析が少しやりづらいので別のレベル構造を持つ Lubin-Tate 曲線考えた方が都合が良い。モジュライ解釈を説明することはしないが、岩掘型のレベル構造を持つ Lubin-Tate 空間を考える。それを $X_{Iw}(\mathfrak{p}^r)$ と書こう。これは [GL] において詳しく調べられたものである。アフィノイド X に対してその還元を \bar{X} と書く。アフィノイドの還元についての基本事項について [T3, §2.1] に要約がある。 F の剰余体を \mathbb{F}_q とする。アフィノイド

$$\begin{aligned} X_r &\subset X(\mathfrak{p}^r), \\ Y_r &\subset X_{Iw}(\mathfrak{p}^r) \end{aligned}$$

で以下のような良い還元

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &: x^q y - xy^q = 1, \\ \bar{X}_r &: a^q - a = t^{q+1} \quad (r \geq 2), \\ \bar{Y}_r &: a^q - a = s^2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

を持ち、例えば \bar{X}_r の中間コホモロジーは前節の $U_{\mathfrak{m}}^{[r/2]}$ の表現 $\Lambda_\chi|_{U_{\mathfrak{m}}^{[r/2]}}$ を全て含んでいるようなものが存在する。他の \bar{Y}_r の中間コホモロジーの方も E/F が分岐二次拡大であるような許容対 $(E/F, \chi)$ から定まるタイプ理論の核となるような Λ_χ が定義され、それと結びつく。このように添字の r は表現の導手と関係付く整数なのだが、方程式の形は r によらずたった三種類しかないことは不思議である。つまり群作用は r ごとに異なっているが、代数幾何的には同じものが繰り返し現れるという現象が起きる。これらのコホモロジーへの群作用がどうなるかを理解し、更にフロベニウス固有値等も理解することができる。

これらのアフィノイドが Lubin-Tate 空間の中でどの辺りに存在するかを少し説明する。Lubin-Tate 曲線上には CM 点と呼ばれる F の分離的二次拡大体の整数環乗法を持つ特殊な形式 \mathcal{O}_F 加群に対応する点があり、これらのアフィノイドはこの点の近くに住んでいる (CM 点については [Gr] を参照)。この二次拡大体が不分岐か分岐かということで X_r, Y_r という二つの系列が出てきていて、そのコホモロジーと関係付く許容対に現れる二次拡大体と一致するという風になっている。 $r = 1$ のときだけ少し特殊なことがおきていて、方程式も見た目は異なるが X_1 も不分岐型ということで X_r の仲間と見なせる。 X_1 の還元は Drinfeld 曲線或は $SL_2(\mathbb{F}_q)$ に対する Deligne-Lusztig 曲線と呼ばれる (この由来については [DL, p.117] を参照)。これらのアフィノイドは CM 点の近くにあることはわかるが、モジュライ解釈を用いてその正確な場所を特定するわけではない。現状では具体的な関数を考えて、その関数が定義する適当な半径のアフィノイドとして定義される。これらのアフィノイド上に何らかのモジュライ解釈があるかどうかは著者には分からない。

4.1 鍵となる観察

ここで、これらの曲線に関して以下の顕著な性質が満たされる。コンパクト台を忘れるという標準的な以下の写像は共に同型である。

$$\begin{aligned} H_c^1(\overline{X}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) &\xrightarrow{\sim} H^1(\overline{X}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \quad (r \geq 2), \\ H_c^1(\overline{Y}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) &\xrightarrow{\sim} H^1(\overline{Y}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell). \end{aligned} \quad (4.2)$$

更にこれらのコホモロジーはすべて非零である (この辺りのことは [T3, §4.2, §4.3] に詳しい)。一般に固有でない有限体上の代数多様体 X に対して標準写像

$$H_c^i(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow H^i(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \quad (4.3)$$

は必ずしも同型でない。しかし、Lubin-Tate 空間の部分アフィノイドで中間コホモロジーが消えていない場合には、その還元として現れる多様体の中間コホモロジーに関して (4.3) は同型になると期待している。アフィノイド X_r は良い還元を持つので、Huber の消滅輪体に関する結果 [Hu2, Theorem 5.7.6] とスキームの場合の消滅輪体に関する事実 [Del2, Reformulation 2.1.5] が適用できて標準同型

$$H_c^1(\overline{X}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq H_c^1(X_{r,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \quad (4.4)$$

$$H^1(\overline{X}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq H^1(X_{r,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \quad (4.5)$$

が存在する ([Mi2] も参照)。 (4.2) と同様に、標準写像 $H_c^1(X_{r,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow H^1(X_{r,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ があり、次の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc} H_c^1(\overline{X}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow[\simeq]{(4.4)} & H_c^1(X_{r,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \\ H^1(\overline{X}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow[\simeq]{(4.5)} & H^1(X_{r,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell). \end{array}$$

これより同型

$$H_c^1(X_{r,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{r,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

を得る。更に標準的な写像を組み合わせると次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} H_c^1(X_{r,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{(a)} & H_c^1(X(\mathfrak{p}^r)_C, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \\ H^1(X_{r,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xleftarrow{\text{制限写像}} & H^1(X(\mathfrak{p}^r)_C, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \end{array}$$

(cf. [T3, Lemma 4.5]). (a) についてはスキーム X とその開部分スキーム U に対して、自然な写像 $H_c^i(U, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow H_c^i(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ があったことを想起して頂きたい。上の可換図式より、写像 (a) が単射であることが従う。全く同様に単射

$$H_c^1(\overline{Y}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq H_c^1(Y_{r,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \hookrightarrow H_{\text{Iw},r}^1 = H_c^1(X_{\text{Iw}}(\mathfrak{p}^r), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

を得る。以上の単純な議論で $X(\mathfrak{p}^r)$ や $X_{\text{Iw}}(\mathfrak{p}^r)$ の安定モデル全体の様子が分かっていなくても、ある一部のアフィノイドの性質 (4.2) から生成ファイバーのコホモロジーに非自明な表現が含まれることが分かる。更に

$$H_c^1(\overline{X}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \quad H_c^1(\overline{Y}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

というコホモロジーは、タイプ理論の構成の核になるような本質的部分を含むことが理解出来る。合わせると生成ファイバーのコホモロジー H_r^1 や $H_{\text{Iw},r}^1$ にタイプ理論の核となる表現が含

まれることが分かる。更に $H_r^1 \subset \mathcal{U}_2$, $H_{Iw,r}^1 \subset \mathcal{U}_2$ なので \mathcal{U}_2 にもそのような寄与があることが示せる。 $r = 1$ の場合には (4.2) が成り立たないので、この議論では $H_1^1 \subset \mathcal{U}_2$ は示せないが、尖点部分 $H_{1,\text{cusp}}^1 \subset H_1^1$ というタイプ理論と関係付く部分は \mathcal{U}_2 に単射で入っていることが示せる。

以上のことを勘案して、きちんと議論すると次の命題を得る。

定理 4.1. ([T3, Theorem 5.18]) 任意の許容対 $(E/F, \chi)$ に対して、 G_2 同変な単射準同型写像

$$\pi_\chi \otimes \rho_\chi^\vee \otimes \tau_\chi^\vee \hookrightarrow \mathcal{U}_2$$

が存在する。

この命題の証明が論文 [T3] の主要部分 (§2, §3) を占めている。この定理を得るためには定理 3.3 は未だ使っていないことを注意しておく。

5 定理 4.1 から定理 2.2 を導く

定理 4.1 で然るべき三つ組の表現が \mathcal{U}_2 の部分表現として入っていることが分かったが、ここから定理 2.2 のように対応を一つに特定するにはまだギャップがある。つまり別の三つ組が \mathcal{U}_2 の部分表現として入っている可能性が排除出来ていない。この可能性を排除するためには [Mi2], [St] において示されている Lubin-Tate 空間のコホモロジーと局所 Jacquet-Langlands 対応を結び付ける以下の結果が必要になる。

定理 5.1. ([Mi2], [St]) 任意の尖点表現 π に対して D_2^\times 表現としての同型

$$\text{Hom}_{\text{GL}_2(F)}(\mathcal{U}_2, \pi) \simeq \text{JL}(\pi)^{\oplus 2}$$

が成立する。

この証明は大域保型表現に依らず幾何学的かつ局所的なものである。この意味で、我々の目的に適した結果であることを注意しておく。 $\text{Nrd}_{D_2/F}: D_2^\times \rightarrow F^\times$ を被約ノルム写像とする。また局所類体論の相互写像 $\mathbf{a}_F: W_F^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} F^\times$ を幾何的フロベニウス写像が素元に移るように正規化しておく。これと標準写像 $W_F \rightarrow W_F^{\text{ab}}$ の合成写像も \mathbf{a}_F と書く。次の群の準同型写像を考える。

$$G_2 = \text{GL}_2(F) \times D_2^\times \times W_F \rightarrow F^\times; (g, d, \sigma) \mapsto \det(g) (\text{Nrd}_{D_2/F}(d) \mathbf{a}_F(\sigma))^{-1}. \quad (5.1)$$

Lubin-Tate 曲線の連結成分のなす集合への群作用を調べると、 F^\times の任意のスムーズ指標と (5.1) の合成で得られる G_2 の指標による捻りで \mathcal{U}_2 が不変であることが示せる (cf. [T3, Corollary 5.15])。このことを使うと定理 2.2 を示すためには π の中心指標は自明であるとしてよい。中心指標が自明な尖点表現は、中心指標が自明な $\text{GL}_2(F)$ のスムーズ表現のなす圏の入射的对象であることが知られている ([Cs, Theorem 5.4.1])。これを使うと定理 2.2 の単射から次の $D_2^\times \times W_F$ 同変な全射

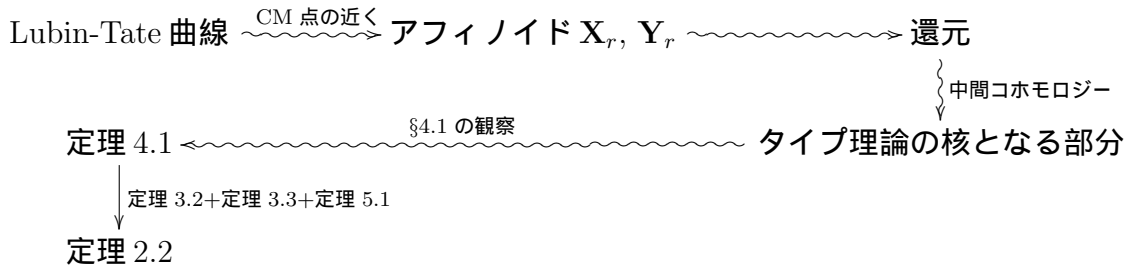
$$\text{Hom}_{\text{GL}_2(F)}(\mathcal{U}_2, \pi_\chi) \twoheadrightarrow \rho_\chi \otimes \tau_\chi \quad (5.2)$$

を得る。 D_2^\times は中心でわるとコンパクトなので D_2^\times の許容表現は有限次元になる。定理 5.1 と明示的 Jacquet-Langlands 対応の帰結

$$\dim \rho_\chi = \dim \text{JL}(\pi_\chi)$$

を使うと全射 (5.2) の両辺の次元は等しい。故に (5.2) は同型であることが従う。ここで使った定理 5.1 に関しては、次元の情報だけが必要であったことを注意しておく。以上と定理 3.2, 定

理 3.3 を使えば定理 2.2 を得て証明が完了する。ここまでの定理 2.2 の証明の流れを以下の図式にまとめておく。



本稿で解説した定理 4.1 は GL_2 の場合であった。[Yo] では深さが零の表現について非可換 Lubin-Tate 理論の局所的証明を与えている。[We1] はそれを一つ深いレベルの表現の場合に部分的に一般化している。定理 2.1 の証明までには至っていないが、高次元の場合のアフィノイドの研究として [IT2], [IT3], [To] がある。これらに §4.1 の考察を適用すれば、定理 2.1 の命題がこれらの論文で対象としている特別なクラスの π に対しては証明できる。この三つは perfectoid 空間に基づいた研究である。

また $p \neq 2$ の場合に非可換 Lubin-Tate 理論を使ってコホモロジーの情報から Lubin-Tate 曲線の安定還元に関する情報を導くという研究が [We3] にある。[We2] では $p \neq 2$ のときに Lubin-Tate 曲線の安定還元になるべき有限体上の安定曲線を群作用込みで構成・予想している。 $p = 2$ のときには安定還元の既約成分にどのような曲線があらわれるのか未知な部分が多い。少なくともレベルが低い Lubin-Tate 曲線の安定還元の既約成分として \mathbb{F}_2 上の同型を除いて唯一つの超特異楕円曲線 (定義方程式は $a^2 + a = s^3$ で与えられる) が現れることが [IT] により知られている。これだけ見ても $p = 2$ の場合は奇素数の (4.1) の様子と大分異なることが見て取れる。この場合に Lubin-Tate 曲線 $X(p^r)$ の安定還元の既約成分のリストを作ることは今後の課題である。

謝辞 今回代数学シンポジウムにて講演させて頂く貴重な機会を与えて下さったオーガナイザーの先生方、特に推薦して頂いた三枝洋一先生に感謝します。

References

- [Be] V. G. Berkovich, *Vanishing cycles for formal schemes*, Invent. Math. 115 (1994), 539–571.
- [Be2] V. G. Berkovich, *Vanishing cycles for formal schemes II*, Invent. Math. 125 (1996), no. 2, 367–390.
- [BGR] S. Bosch, U. Güntzer and R. Remmert, *Non-Archimedean analysis*, Grundlehren Math. Wiss. 261, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [Bo] P. Boyer, *Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale*, Invent. Math. 138, (1999), no. 3, 573–629.
- [BH] C. J. Bushnell and G. Henniart, *The local Langlands conjecture for $GL(2)$* , Grundlehren Math. Wiss. 335, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [Ca] H. Carayol, *Non-abelian Lubin-Tate theory*, Automorphic Forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math., 11, Academic Press. Boston, MA, 1990, 15–39.
- [Cs] W. Casselman, *Introduction to the theory of admissible representations of p -adic reductive groups*, preprint, available at <https://www.math.ubc.ca/~cass/research/publications.html>.
- [CMc] R. Coleman and K. McMurdy, *Stable reduction of $X_0(p^3)$* , With an Appendix by Everett W. Howe, Algebra Number Theory 4 (2010), No. 4, 357–431.

- [Del] P. Deligne, *Cohomologie étale*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA 4 $\frac{1}{2}$, Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier, Lect. Notes Math., Vol. 569, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
- [Del2] P. Deligne, *La formalisme des cycles évanescents*, Exposé XIII in SGA7, Lect. Notes Math., Vol. 340, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.
- [DL] P. Deligne and G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. 103 (1976), 103–161.
- [Dr] V. Drinfeld, *Elliptic modules*, English translation, Math. USSR-Sb. 23 (1974), no. 4, 561–592.
- [E] B. Edixhoven, *Minimal resolution and the stable reduction of $X_0(N)$* , Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 40 (1990), no. 1, 31–67.
- [GL] A. Genestier and V. Lafforgue, *L’isomorphisme des deux tours Une autre approche en égales caractéristiques*, Deuxième partie in L’isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld, Prog. Math. 262, 2008.
- [Gr] B. H. Gross, *On canonical and quasi-canonical liftings*, Invent. Math. 84, (1986), 321–326.
- [Ha] M. Harris, *On the local Langlands correspondence*, in Proc. ICM Beijing 2002, Vol. II, 583–597.
- [HT] M. Harris and R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Ann. Math. Stud., vol. 151, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2001, With an appendix by Vladimir G. Berkovich.
- [Hen] G. Henniart, *On the local Langlands and Jacquet-Langlands correspondences*, ICM, Vol. II, Eur. Math. Soc., Zürich 2006, 1171–1182.
- [Hu] R. Huber, *A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties*, Math. Z. 217 (1994), 513–551.
- [Hu2] R. Huber, *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, Aspects Math., E 30. Friedr. Viewveg & Sohn, Braunschweig, 1996.
- [IT] N. Imai and T. Tsushima, *Stable models of Lubin-Tate curves with level three*, to appear in Nagoya Math. J. Available at arXiv:1111.1893v3.
- [IT2] N. Imai and T. Tsushima, *Affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space and simple epipelagic representations I: tame case*, preprint, arXiv:1308.1276v2.
- [IT3] N. Imai and T. Tsushima, *Affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space and simple epipelagic representations II: wild case*, preprint, arXiv:1603.04693.
- [IY] 伊藤哲史、吉田輝義述、「佐藤-テイト予想の解決と展望」、数学のたのしみ 最終号 2008, 日本評論社。
- [Iw] K. Iwasawa, *Local class field theory*, Oxford Univ. Press, 1986.
- [Ka] 加藤和也著、「フェルマーの最終定理・佐藤-テイト予想解決への道」、岩波書店。
- [KM] N. M. Katz and B. Mazur, *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 108 (1985).
- [LT] J. Lubin, J. Tate, *Formal complex multiplication in local fields*, Ann. Math. 81 (1965), 380–387.
- [Mi] Y. Mieda, *Variants of formal nearby cycles*, J. Inst. Math. Jussieu, Vol. 13, Issue 04 (2014), 701–752.
- [Mi2] Y. Mieda, *Geometric approach to the local Jacquet-Langlands correspondence*, Am. J. Math. Vol. 136, Number 4, (2014), 1067–1091.
- [Sa] 斎藤毅著、「フェルマー予想」、2009, 岩波書店。
- [St] M. Strauch, *Deformation spaces of one-dimensional formal modules and their cohomology*, Adv. Math. Vol. 217, Issue 3 (2008), 889–951.

- [To] K. Tokimoto, *Affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space and special cases of the local Langlands correspondence in positive characteristic*, doctoral thesis.
- [T] T. Tsushima, *On the stable reduction of the Lubin-Tate curve of level two in the equal characteristic case*, J. of Number Theory 147 (2015), 184–210.
- [T2] T. Tsushima, *Stable reduction of $X_0(p^4)$* , J. Reine Angew. Math. 707 (2015), 1–43.
- [T3] T. Tsushima, *On non-abelian Lubin-Tate theory for $GL(2)$ in the odd equal characteristic case*, preprint, arXiv:1604.08857.
- [Yo] T. Yoshida, *On non-abelian Lubin-Tate theory via vanishing cycles*, Algebraic and arithmetic structures of moduli spaces (Sapporo 2007), Adv. Stud. Pure Math., vol. 58, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010, 361–402.
- [Yo2] 吉田輝義、「非可換 Lubin-Tate 理論と Deligne-Lusztig 理論」、早稲田大学整数論研究集会報告集, 2004.
- [Yo3] 吉田輝義、「 GL_n の大域・局所 Langlands 対応」、第 50 回代数学シンポジウム報告集, 2005.
- [We1] J. Weinstein, *Good reduction of affinoids on the Lubin-Tate tower*, Doc. Math. 15 (2010), 981–1007.
- [We2] J. Weinstein, *Explicit non-abelian Lubin-Tate theory for $GL(2)$* , preprint, arXiv:0910.1132v1.
- [We3] J. Weinstein, *Semistable models for modular curves of arbitrary level*, preprint, arXiv:1010.4241v2, to appear in Invent. Math.

有理曲面上のボエタ予想

安福 悠 (日本大学理工学部)*

yasufuku@math.cst.nihon-u.ac.jp

1 はじめに

本稿は、プレプリント [6] に基づいて行った 2016 年の代数学シンポジウムでの講演内容をまとめたものである。

2 主定理の紹介

Vojta の主予想 [3, Main Conjecture 3.4.3] とは、代数体 k , k 上定義される滑らかな射影代数多様体 X , k 上定義される正規交叉因子 D ごとに定まる, X の k 有理点が満たすとされる高さ関数の不等式である. 代数多様体の標準因子が負であればあるほど, 正規交叉因子に有理点が近づけると主張し, 「幾何が整数論を制御する」という哲学が明示化される一つの方法となっている. 大変難解な予想とされており, Faltings により証明された Mordell 予想や, ディオファントス近似の金字塔とされる Schmidt の部分空間定理も, 特別な場合として含んでしまっている. また, 「一般型の代数多様体には k 有理点が Zariski 稠密にはない」と主張する Bombieri–Lang 予想や, 2012 年に京都大学数理解析研究所の望月新一教授により証明が発表された abc 予想も導ける (Vojta [4]) ことが分かっている.

このような背景から, Vojta 主予想が正しいと証明できる具体例の構築は重要である. 高さ関数が具体的に計算できる代数曲面として, 射影平面から (infinitely near なものも含めて) 繰り返しブローアップすることで得られる多様体が考えられる. まず, 次の定理を証明した.

定理 1. $L_1, L_2, L_3 \subset \mathbb{P}^2$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義できるような, 一般の位置にある 3 直線とする. \mathbb{P}^2 を $L_1 \setminus (L_2 \cup L_3)$ の点で一度ブローアップしたものを X_1 と呼び, このときの例外因子を E_1 とする. $n \geq 2$ に対しては, $E_{n-1} \cap \widetilde{L}_1$ に含まれる唯一の点で X_{n-1} をブローアップしたものを, X_n と帰納的に定義し, このときの例外因子を E_n とする. このとき, X_n とその上の因子

$$\widetilde{L}_1 + \widetilde{L}_2 + \widetilde{L}_3 + E_1 + \cdots + \widetilde{E}_{n-1} + E_n$$

*本研究は科研費 若手研究 B (15K17522) の援助を受けている.

に関する *Vojta* 予想が成り立つ.

ここで, \sim は X_n への strict transform を指している. 定理 1 では, 必ず \widetilde{L}_1 との交点でブローアップを続けていったが, 同じ X_1 から始めて交点をブローアップし続けるものの, 一度は \widetilde{L}_1 との交点ではないところでブローアップした状況を考えたのが次の 2 つの定理である.

定理 2. $L_1, L_2, L_3 \subset \mathbb{P}^2$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義できるような, 一般の位置にある 3 直線とする. \mathbb{P}^2 を $L_1 \setminus (L_2 \cup L_3)$ の点で一度ブローアップしたものを X_1 と呼び, このときの例外因子を E_1 とする. $n \geq 2$ に対しては, $\widetilde{L}_1, \widetilde{E}_1, \dots, \widetilde{E}_{n-2}, E_{n-1}$ のうちの 2 つが交わる点で X_{n-1} をブローアップしたものを X_n と帰納的に定義し, このときの例外因子を E_n とする. また, 少なくとも一度のブローアップは \widetilde{L}_1 上にはない点で行われるとする. このとき, X_n とその上の因子

$$\widetilde{L}_1 + \widetilde{L}_2 + \widetilde{L}_3 + \widetilde{E}_1 + \cdots + \widetilde{E}_{n-1} + E_n$$

に関する *Vojta* 予想を仮定すると, 次の集合に対する *abc* 予想を導ける: k を代数体, S を素イデアルの有限集合とし,

$$\{(a, b, c) : a \in k, a\mathcal{O}_k \text{ の素イデアル分解は} \\ S \text{ に含まれる素イデアルで書ける, } b = 1 - a, c = 1\}.$$

逆に:

定理 3. $L_1, L_2, L_3 \subset \mathbb{P}^2$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義できるような, 一般の位置にある 3 直線とする. \mathbb{P}^2 を $L_1 \setminus (L_2 \cup L_3)$ の点で一度ブローアップしたものを X_1 と呼び, このときの例外因子を E_1 とする. $n \geq 2$ に対しては, $\widetilde{L}_1, \widetilde{E}_1, \dots, \widetilde{E}_{n-2}, E_{n-1}$ のうちの 2 つが交わる点で X_{n-1} をブローアップしたものを X_n と帰納的に定義し, このときの例外因子を E_n とする. このとき, *abc* 予想を仮定すると, X_n とその上の因子

$$\widetilde{L}_1 + \widetilde{L}_2 + \widetilde{L}_3 + \widetilde{E}_1 + \cdots + \widetilde{E}_{n-1} + E_n$$

に関する *Vojta* 予想を導ける.

これらの定理で扱う典型的状況を図解したものが図 1 である. 三角形のうち, 水平な直線 L_1 にだけ残っている点をブローアップしたものが X_1 である. このとき, 例外因子との交点の一つしかないのので, そこをブローアップしたものが X_2 となる. X_2 において, 水平な直線 \widetilde{L}_1 との交点をブローアップしたものが, 図解された X_3 である. 上の図において, X_3 の黒く塗られた点でブローアップしたら定理 1 の状況となり無条件に *Vojta* 予想が証明でき, 塗られていない 2 点のいずれかを次にブローアップしたら定理 2 や 3 の範疇となり *abc* 予想との相互関連性がある状況になる. 下の図では, X_2 においては \widetilde{L}_1 との交点をブローアップするものの, X_3 においては \widetilde{L}_1 にはない点 (この場

合は E_2 と E_3 との交点) をブローアップしている. この場合, \widetilde{L}_1 がない点を一度ブローアップしているのので, 得られた X_4 においてどの 4 点を次にブローアップしたとしても, 定理 2 や 3 の範疇となり, abc 予想との相互関連性がある状況となる.

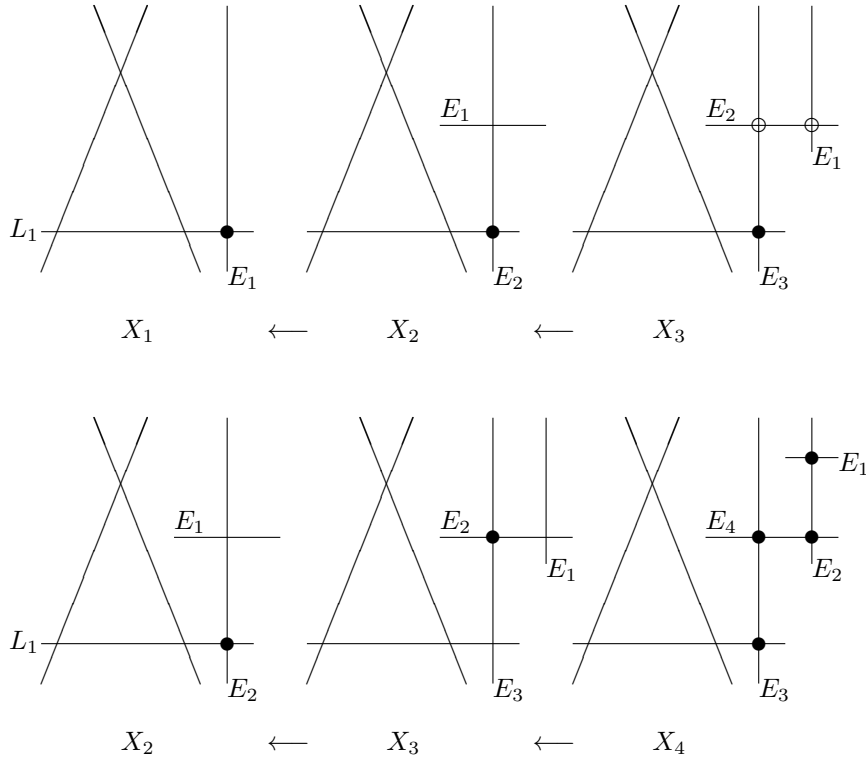


図 1: ブローアップの図解

ブローアップを行うと, 例外因子に対する高さ関数が最大公約数の式となるので, ブローアップ上での Vojta 予想は, 最大公約数に関する不等式となることが多い (詳しくは Silverman [2] を参照のこと). 本稿の定理の結果からも最大公約数に関する非自明な不等式を得られるが, 証明に触れないと具体的な式を紹介しづらいので, 次節 ((2) 式) に行う.

先行研究としては, [5] において, X_1 における Vojta 予想を証明している. Vojta 予想はブローアップするごとに, より強い主張となるので, この結果が定理 1 の一番簡単な場合となっている. また, X_1 で E_1 上の一般の点をブローアップした場合 (本稿での X_2 とは少し違う, 射影平面の 2 重ブローアップ) の Vojta 予想が, 定理 2 の場合と同じ abc 予想の特別な場合を導くことも, 同じ論文で証明した. ちなみに, 始めに三角形の交点で \mathbb{P}^2 をブローアップした場合 Vojta 予想は非常に自明な主張である. 逆に, どの直線にもおらない点から始めると, 一度ブローアップした空間での Vojta 予想が未解決で, 大変難解であろうと思われる. ただ, 3 直線に対する整数点集合におい

ては, Vojta 予想の高さ不等式が成り立つことが, Corvaja と Zannier[1] により示されている.

3 証明の概略

定理 1 に関しては, 基本方針は論文 [5] と同じで, まず, ブローアップによって構築される例外因子の局所方程式を計算する. これにより, 高さ関数を最大公約数の式として明示的表示できるようになるので, あとは上手に Schmidt の部分空間定理を活用することで, 示すことができる.

定理 2 と 3 の証明には, Farey 数列, 特に Stern–Brocot 樹と呼ばれる形で整理されたものが活躍する. $\frac{0}{1}$ と $\frac{1}{1}$ から始めて, 分母同士, 分子同士足した

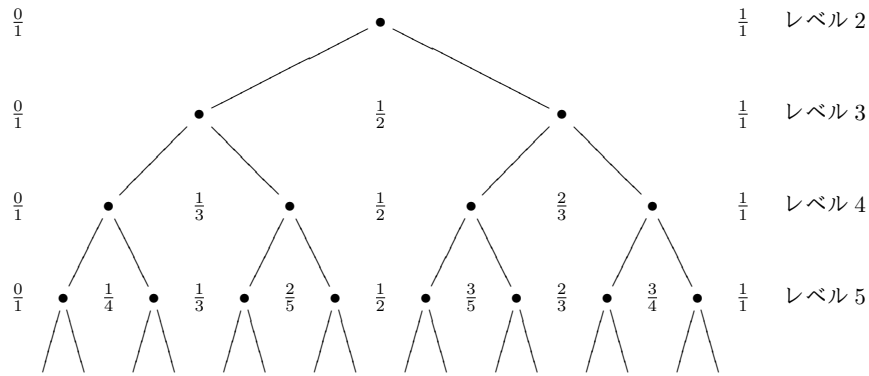


図 2: Stern–Brocot 樹

ものを間に挿入し続けることでこの樹は作られている. 定理 2 と 3 の状況で, 「 X_{n-1} からのブローアップを必ず一番最近に構築された例外因子 E_{n-1} との交点で行う」という追加条件をつけると, X_n 上の例外因子 E_n の v 進局所高さ関数は,

$$\gcd_v^+ \left(\frac{(x-1)^{b_n}}{y^{a_n}}, \frac{y^{c_n}}{(x-1)^{d_n}} \right)$$

と表すことができる. ここで, \gcd_v^+ とは, 分子の最大公約数の v 進部分の対数をとったもので, $\frac{a_n}{b_n}$ と $\frac{c_n}{d_n}$ は, Stern–Brocot 樹のレベル n にある隣同士の分数である. これで Farey 数列が本稿の定理と関連があることが分かる.

ただ, 定理 2 と 3 の状況の Vojta 予想を調べるには, Farey 数列に関して知られている性質だけでは無理と思われる, 次の新しい性質が必要となった.

定理 4. $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ が, レベル $(n+1)$ で初めて Stern–Brocot 樹に登場するとする. また, レベル i において, α が $\frac{a_i(\alpha)}{b_i(\alpha)}$ と $\frac{c_i(\alpha)}{d_i(\alpha)}$ の間にあるとする.

このとき, $I_\alpha = \left(\frac{a_n(\alpha)}{b_n(\alpha)}, \frac{c_n(\alpha)}{d_n(\alpha)} \right)$ 上で関数 φ_α を

$$\varphi_\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \min \left(b_i(\alpha) \cdot x - a_i(\alpha), c_i(\alpha) - d_i(\alpha) \cdot x \right) \quad (1)$$

と定義すると, この関数の最大値は $x = \alpha$ のときの $\frac{(\alpha \text{の分母})-1}{\alpha \text{の分母}}$ である.

定理 2 の証明では, 初めて \widetilde{L}_1 との交点でないところでブローアップするのが n 回目だとして, このときの Vojta 予想に着目する. a が S 単数で整数の場合, $a-1$ の素因数分解 $\prod p^{n_p}$ に対して,

$$m_p = \begin{cases} 0 & n_p = 1 \\ \frac{n_p}{2} \cdot (2n-3) & n_p \text{ が偶数} \\ \frac{n_p(2n-3)-1}{2} & n_p \text{ が 3 以上の奇数} \end{cases}$$

とし, $b = \prod p^{m_p}$ とおく. Vojta 予想の不等式に点 $[a : b : 1]$ を代入し, 定理 4 を使って高さ関数を評価することで, abc 予想の特別な場合を導いていく.

定理 3 の証明においての一番のアイディアは, 空間 X_n ごとに Vojta 予想の不等式を考えないことである. Vojta 予想には, 不等式が成り立たなくてもよい「例外集合」が許されているので, X_n の点のうち \mathbb{P}^2 と同一視できるような点でだけ Vojta 不等式を示せばよい. そこで, \mathbb{P}^2 の点 P と非アルキメデス付値 v ごとに, 一番 Vojta 予想の不等式が成り立たなさそうなブローアップを考える. この「最悪」な状態において定理 4 を使って点 $[a : b : 1]$ で高さ関数の評価をすると, $a-1$ の v 進付値より一つ少ない位の高さ関数の大きさとなる. これは, 定理 4 を $\alpha = \frac{v(b)}{v(a-1)}$ で使うことにより従う. (P, v) にとって「最悪」の場合でこうなので, 一般の X_n の場合はこれより悪化することはない. abc 予想によると, $a-1$ の素因数分解の殆どは 1 乗なので, この寄与を足したとしても, 元々の a の v 進付値と同じくらいにしかならないことが分かり証明が終わる.

最後に, 本稿の定理により証明される最大公約数の不等式の一例を紹介しよう: S を素数の有限集合, ϵ を正の数としたとき, 定数 C と代数曲線の有限集合 Z_ϵ が存在して,

$$\gcd(a-1, b) + \sum_{p \notin S} \sum_{i=1}^n \gcd_p^+ \left(\frac{(a-1)^{b_i}}{b^{a_i}}, \frac{b^{c_i}}{(a-1)^{d_i}} \right) < \epsilon \log \max(|a|, |b|) + \log |ab|'_S + C \quad (2)$$

が $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus Z_\epsilon$ で成り立つ. ここで, 整数 n に対して $|n|'_S$ とは n の素因数分解のうち S の外の部分を指し, $\frac{a_i}{b_i}$ と $\frac{c_i}{d_i}$ は Stern–Brocot 樹のレベル i で隣接する分数である.

謝辞： 代数学シンポジウムで講演の機会を下さったシンポジウム責任者の寺杣先生，数論プログラム責任者の三枝先生・若槻先生，ならびに世話人の皆様に感謝いたします。

参考文献

- [1] Pietro Corvaja and Umberto Zannier, *A lower bound for the height of a rational function at S -unit points*, *Monatsh. Math.* **144** (2005), no. 3, 203–224.
- [2] Joseph H. Silverman, *Generalized greatest common divisors, divisibility sequences, and Vojta’s conjecture for blowups*, *Monatsh. Math.* **145** (2005), no. 4, 333–350.
- [3] Paul Vojta, *Diophantine approximations and value distribution theory*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1239, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [4] ———, *On the ABC conjecture and Diophantine approximation by rational points*, *Amer. J. Math.* **122** (2000), no. 4, 843–872.
- [5] Yu Yasufuku, *Vojta’s conjecture on blowups of \mathbb{P}^n , greatest common divisors, and the abc conjecture*, *Monatsh. Math.* **163** (2011), no. 2, 237–247.
- [6] ———, *Vojta’s conjecture on multiple blowups of \mathbb{P}^2 and the abc conjecture*, arXiv:1601.03825, 2016.

アーベル多様体の標準部分群とヒルベルト固有値多様体

服部 新

九州大学数理学研究院

平成 28 年 9 月 8 日

概要

本稿では、第 61 回代数学シンポジウムにおける講演に基づき、過収束保型形式・固有値多様体・Abel 多様体の標準部分群など、 p 進保型形式の理論についての概説を行ったのち、Hilbert 固有値多様体の整数重さでの固有性について筆者が得た結果 [Hat2] を紹介する。

1 背景

1.1 保型形式の p 進族

p を素数、 $\bar{\mathbb{Q}}_p$ を \mathbb{Q}_p の代数閉包、 \mathbb{C}_p を $\bar{\mathbb{Q}}_p$ の p 進完備化とする。 v_p で \mathbb{C}_p 上の (加法的) p 進付値を表し、 $v_p(p) = 1$ と正規化する。任意の $a \in \mathbb{C}_p$ に対し、 a の p 進絶対値を $|a|_p = p^{-v_p(a)}$ で定義する (階数 1 の) 付値体の拡大 K/\mathbb{Q}_p に対し、 K の整数環を \mathcal{O}_K と書き、 $m_K^{\geq i} = \{x \in \mathcal{O}_K \mid v_p(x) \geq i\}$ 、 $\mathcal{O}_{K,i} = \mathcal{O}_K/m_K^{\geq i}$ とおく。また、 p が奇素数のとき $\mathfrak{p} = p$ 、 $p = 2$ のとき $\mathfrak{p} = 4$ とおく。 $\omega : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/\mathfrak{p}\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$ を Teichmüller 指標とする。

始めに偶数 $k \geq 4$ に対し、レベル 1、重さ k の Eisenstein 級数 $E_k(z)$ を考える。 $E_k(z)$ は Hecke 固有形式であり、定数倍で正規化すれば次のような q 展開を持つ。

$$E_k(q) = 1 + \frac{2}{\zeta(1-k)} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n, \quad \text{ただし } \sigma_m(n) = \sum_{d > 0, d|n} d^m.$$

Eisenstein 級数に関して著しいのは、重さを変化させるとこれらは Hecke 固有形式の p 進的な族をなす、という事実である。実際、

$$E_k^*(z) = (1 - p^{k-1})^{-1} (E_k(z) - p^{k-1} E_k(pz))$$

とおく。 $E_k^*(z)$ はレベル $\Gamma_0(p)$ の Hecke 固有形式で、 p 以外の Hecke 固有値が $E_k(z)$ のものと等しく、 q 展開は次で与えられる。

$$E_k^*(q) = 1 + \frac{2}{(1 - p^{k-1})\zeta(1-k)} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}^*(n) q^n, \quad \text{ただし } \sigma_m^*(n) = \sum_{d > 0, d|n, p \nmid d} d^m.$$

整数 k に対し、連続環準同型 $x_k^* : \mathbb{Z}_p[[X]] \rightarrow \mathbb{C}_p$ を $X \mapsto (1 + \mathfrak{p})^k - 1$ で定める。このとき、久保田-Leopoldt の p 進 L 関数の性質から次のことが分かる [Ser, §4.5]。任意の $n \geq 1$ に対して $A_n(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]$ が存在して、巾級数

$$\mathbf{E}(q) = 1 + \sum_{n \geq 1} A_n(X) q^n$$

は、4以上の任意の偶数 $k \equiv 0 \pmod{\varphi(\mathfrak{p})}$ に対し $x_k^*(\mathbf{E}(q)) = E_k^*(q)$ を満たす。

任意の連続環準同型 $x^* : \mathbb{Z}_p[[X]] \rightarrow \mathbb{C}_p$ は対応 $x^* \mapsto x^*(X)$ により単位開円盤

$$D(0, 1^-) = \{x \in \mathbb{C}_p \mid |x|_p < 1\}$$

の元と同一視できる。 $D(0, 1^-)$ にはリジッド解析多様体の構造が入り、各 $A_n(X)$ は $x \mapsto A_n(x)$ により $D(0, 1^-)$ 上のリジッド解析関数と見なせる。従って、 $\mathbf{E}(q)$ は多様体 $D(0, 1^-)$ でパラメータ付けられた Hecke 固有形式の p 進解析的な族である、と考えることができる。これが Eisenstein 族 (Eisenstein family) と呼ばれる、固有形式の p 進族の最初の例である。

このように、Hecke 固有形式はしばしば p 進族をなすことが知られている。保型形式の p 進族は 1970 年代に、総実代数体の p 進 ζ 関数を構成するために Serre [Ser] が導入して以来、整数論における強力な研究手法であり続けてきた。その理由の一端としては、 p 進族の存在が固有形式の合同を大量に生み出すこと、また族のパラメータ空間上での稠密性を用いた議論が可能になること、などが挙げられる。どちらも、調べるのが難しい保型形式のクラスの研究を調べるのが容易な保型形式のクラスに帰着するのに用いられる。例えば、保型形式に伴う Galois 表現を構成するのに、まず志村多様体のエタールコホモロジーを使って多くの保型形式に対して Galois 表現を構成し、そのような方法ではアプローチできない保型形式に対しては合同や稠密性を用いて前者に帰着する、という手段が採られるが、これは保型形式の p 進族の典型的な応用例である [Wil, CH]。

1.2 重さ空間

古典的な保型形式の重さは整数だが、固有形式の p 進族をより精密に理解するためには、重さも p 進解析的に変動する、と考える必要がある。整数重さとは限らない「 p 進的な重さ」のパラメータ空間が、重さ空間 (weight space) と呼ばれるリジッド解析多様体である。

重さ空間 \mathcal{W} は、その \mathbb{C}_p 値点のなす集合 $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ が

$$\mathcal{W}(\mathbb{C}_p) = \text{Hom}_{\text{cont.}}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times)$$

と同一視される \mathbb{Q}_p 上のリジッド解析多様体である。直積分解 $\mathbb{Z}_p^\times = (\mathbb{Z}/\mathfrak{p}\mathbb{Z})^\times \times (1 + \mathfrak{p}\mathbb{Z}_p)$ から、 \mathcal{W} は単位開円盤 $D(0, 1^-)$ の、有限集合 $\text{Hom}((\mathbb{Z}/\mathfrak{p}\mathbb{Z})^\times, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times)$ で添字付けられた直和であることが分かる。連続環準同型 $\mathbb{Z}_p^\times \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$ のことを重さ指標 (weight character) と呼ぶ。

整数 k と有限指標 $\chi : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$ に対し、重さ指標

$$x_{k, \chi}^* : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times, \quad a \mapsto \chi(a)(\omega(a)^{-1}a)^k$$

に対応する点 $x_{k, \chi} \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ を数論的点 (arithmetic point) と呼ぶ。 $p^{m'} = \text{LCM}(p^m, \mathfrak{p})$ と書くところの点は、 p と素な任意の整数 $N > 0$ に対し、重さ k 、レベル $\Gamma_1(Np^{m'})$ 、 p での指標 $\chi\omega^{-k}$ の保型形式の重さに対応する点である。また、 x_{k, ω^k} を整数重さの点と呼ぶ。これは重さ k 、レベル $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(\mathfrak{p})$ の保型形式の重さに対応する。このように、重さ指標には保型形式の重さの情報だけでなく、 p でのレベルと指標の情報も含まれている。

1.3 p 進保型形式と肥田族

連続的に分布しているわけではない整数重さを p 進解析的に補間したのが重さ空間だった。同様に、重さが整数である古典的な保型形式も連続的に分布しているわけではないため、保型形式の p

進族を構成するためには、何らかの接合剤によって古典的な保型形式を p 進解析的に繋げることが必要になる．そのような接合剤としてはいくつかの選択肢があるが、ここでは p 進保型形式を用いる．

p 進保型形式とは、古典的な保型形式の q 展開の p 進極限に当たるものである．つまり、保型形式の列 $\{f_n\}_n$ でその q 展開の列 $\{f_n(q)\}_n$ が p 進的に収束しているようなものに対し、 $\{f_n\}_n$ の収束先として p 進保型形式を定義したい．古典的な保型形式とはモジュラー曲線上の適当な線束の大域切断のことだったが、そのままでは今述べた意味での保型形式の p 進収束先を定義できない．実際、 $p \geq 5$ に対し、Eisenstein 級数 $E_{p-1}(z)$ の q 展開 $E_{p-1}(q)$ は $E_{p-1}(q) \in 1 + pq\mathbb{Z}_p[[q]]$ を満たすことが知られている．従って $\{E_{p-1}(q)^{p^n}\}_n$ は p 進的に 1 に収束するから、 $\{E_{p-1}(z)^{p^n-1}\}_n$ の収束先が $E_{p-1}(z)$ の逆元を定めることになり、良還元を持つ楕円曲線での $E_{p-1}(z)$ の特殊化は p 進単数になるはずである．しかし、 $E_{p-1}(z)$ の法 p 還元は Hasse 不変量と一致するため、超特異 (supersingular) 良還元を持つ楕円曲線での $E_{p-1}(z)$ の特殊化は p 進単数ではない．

この観察から、 q 展開の p 進位相で完備な保型形式の空間を構成するためには、超特異良還元を持つ楕円曲線をモジュラー曲線から除いた集合を考えなければならないことが分かる．この集合はモジュラー曲線の代数幾何的な開集合にはならないが、リジッド解析幾何における許容開集合と見なすことができる．そこで、 p 進保型形式とはこの集合上での適当な線束の切断である、と定義する．そのためにまず、除外集合の大きさを計る尺度—Hodge 高さ—を導入する．

定義 1.1. L/\mathbb{Q}_p を完備付値体の拡大、 A を \mathcal{O}_L 上の Abel スキームとし、 $A_1 = A \times_{\mathcal{O}_L} \text{Spec}(\mathcal{O}_{L,1})$ とおく．双対 Abel スキーム A_1^\vee の Verschiebung を V とし、 V が Lie 環 $\text{Lie}(A_1^\vee)$ に引き起こす写像を $\text{Lie}(V) : \text{Lie}(A_1^\vee)^{(p)} \rightarrow \text{Lie}(A_1^\vee)$ で表す． $\text{Lie}(A_1^\vee)$ の基底を選んで $\text{Lie}(V)$ の行列式 $a = \det(\text{Lie}(V))$ を考え、 a の \mathcal{O}_L への持ち上げ \tilde{a} を選ぶ．頂切 p 進付値

$$\text{Hdg}(A) = \min\{1, v_p(\tilde{a})\} \in [0, 1]$$

は基底や \tilde{a} の選び方によらない．これを A の Hodge 高さ (Hodge height) と呼ぶ．

このとき、 A が通常 (ordinary) 還元を持つための必要十分条件は $\text{Hdg}(A) = 0$ であることが示せる．つまり、Hodge 高さは Abel 多様体の通常還元からの距離を測る不変量である．

p と素な整数 $N \geq 5$ に対し、 $X_1(N)$ でレベル $\Gamma_1(N)$ の (\mathbb{Q}_p 上の) モジュラー曲線を表し、これを \mathbb{Q}_p 上のリジッド解析曲線と見なす．付値体の拡大 L/\mathbb{Q}_p に対し、 $X_1(N)(L)$ の元は \mathcal{O}_L 上の広義楕円曲線 E とそのレベル $\Gamma_1(N)$ 構造 Q の組の同型類 $[(E, Q)]$ と同一視できるが、Hodge 高さも E が楕円曲線の場合に $\text{Hdg}(E)$ と一致するような $X_1(N)$ 上の関数に適切に拡張できる．そこで、任意の有理数 $r \geq 0$ に対し、 $X_1(N)$ の許容開集合 $X_1(N)(r)$ を

$$X_1(N)(r) = \{y \in X_1(N) \mid \text{Hdg}(y) \leq r\}$$

と定義する． $X_1(N)(0)$ は通常良還元または乗法的還元を持つ楕円曲線に対応する点とカスプからなる $X_1(N)$ の部分集合であり、通常跡 (ordinary locus) と呼ばれる． $X_1(N) \setminus X_1(N)(0)$ の点は超特異良還元を持つ楕円曲線に対応する．これを用いて、整数重さの p 進保型形式を次のように定義する．

定義 1.2. k を整数、 ω を $X_1(N)$ 上の Hodge 線束とする． \mathbb{C}_p への係数拡大 $X_1(N)(0)_{\mathbb{C}_p}$ に対し $H^0(X_1(N)(0)_{\mathbb{C}_p}, \omega^k)$ の元を、重さ k 、従順 (tame) レベル N の p 進保型形式と呼ぶ． $X_1(N)$ の境界因子を D とするとき、 $H^0(X_1(N)(0)_{\mathbb{C}_p}, \omega^k(-D))$ の元を、重さ k 、従順レベル N の p 進尖点形式と呼ぶ (従順レベル < 5 の場合は、これらのうち適切な群作用で固定される元として定義する．)

整数重さとは限らない重さ指標 $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ に対しても，重さ x ，従順レベル N の p 進保型形式の概念を定義することができる．そのためには，整数重さ k の場合の ω^k の一般化に当たる $X_1(N)(0)_{\mathbb{C}_p}$ 上の線束 ω^x を適切に定義する必要がある（§3.2 を参照）

定義 1.3. 重さ指標 $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ に対し， $M_x(N) = H^0(X_1(N)(0)_{\mathbb{C}_p}, \omega^x)$ の元を，重さ x ，従順レベル N の p 進保型形式と呼ぶ．尖点形式も同様に定義する． $M_x(N)$ は一般に無限次元 \mathbb{C}_p ベクトル空間である．

p 進保型形式に対しても q 展開を定義することができる．さらに，古典的な保型形式の空間と同様に， $M_x(N)$ にも Hecke 作用素 T_l ($l \nmid Np$)， U_l ($l \mid N$)，ダイヤモンド作用素 $\langle l \rangle_N$ ($l \nmid Np$) が作用する．また， p での Hecke 作用素として，尖点形式の q 展開に

$$\sum_{n \geq 1} a_n q^n \mapsto \sum_{n \geq 1} a_{np} q^n$$

を引き起こす Atkin の作用素 U_p が作用する．従って， p 進保型形式に対しても Hecke 固有形式の概念が定義される．

定義 1.4. p 進保型形式 f が U_p 固有形式であるとき， f の U_p 固有値 $a_p(f)$ の p 進付値 $v_p(a_p(f))$ を f の傾き (slope) と呼ぶ． f の傾きは $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ の元である．

固有形式の p 進族で Eisenstein 族の次に構成されたのは，傾き 0 の p 進尖点固有形式のなす肥田族 (Hida family) である [Hid, §3]．肥田族とは，リジッド解析多様体の有限平坦射 $\kappa: X \rightarrow \mathcal{W}$ と， X 上のリジッド解析関数 $A_n \in \mathcal{O}(X)$ ($n \geq 2$) の組で，任意の $x \in X(\mathbb{C}_p)$ に対し

$$q + A_2(x)q^2 + \cdots + A_n(x)q^n + \cdots$$

が傾き 0，重さ $\kappa(x)$ の p 進尖点固有形式の q 展開と一致するようなものことである（ここで考えているのは，実際は肥田族のリジッド生成ファイバーに過ぎない） $\kappa(x)$ が重さ ≥ 2 の数論的点であるような x での特殊化は，傾き 0 の古典的な尖点形式の q 展開を与える．

1.4 過収束保型形式と標準部分群

傾き 0 の p 進保型形式には， $M_x(N)$ における傾き 0 の固有値に属する U_p の広義固有空間が有限次元になる，という著しい性質がある．肥田族を超えて傾き > 0 の固有形式の p 進族を構成するためには，傾き > 0 の U_p 広義固有空間に対する同じような統制が必要になる．ところが， $M_x(N)$ における傾き > 0 の固有値に属する U_p 広義固有空間は一般に無限次元である [Gou, Corollary II.3.13, Proposition II.3.14]．

これは p 進保型形式の空間が大きすぎるためだと考えられる．そこで， U_p が意味のある作用をする部分空間を定義したい． p 進保型形式はモジュラー曲線 $X_1(N)$ の許容開集合 $X_1(N)(0)$ 上で定義された保型形式だったので，空間を小さくするには定義域を広げればよい．こうして重さ k の過収束保型形式の定義に到達する．

定義 1.5. k を整数とする． $\bigcup_{r>0} H^0(X_1(N)(r)_{\mathbb{C}_p}, \omega^k)$ の元を，重さ k ，従順レベル N の過収束 (overconvergent) 保型形式と呼ぶ．過収束尖点形式も同様に定義する．

一般の重さ指標 $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ に対する過収束保型形式の定義を最初に与えたのは Coleman [Col] である．Coleman の定義は，Eisenstein 級数で割ることで重さ 0 の場合の定義に帰着するという

ad hoc なものだが，一方で Pilloni [Pil] による新しい定義は， $X_1(N)(0)_{\mathbb{C}_p}$ 上の線束 ω^x が適当な $r_x > 0$ に対する $X_1(N)(r_x)_{\mathbb{C}_p}$ にまで拡張されることを証明し，

$$\bigcup_{r_x \geq r > 0} H^0(X_1(N)(r)_{\mathbb{C}_p}, \omega^x)$$

の元を重さ x の過収束保型形式とするという，より自然なものである．重さ x ，従順レベル N の過収束保型形式の空間を $M_x^\dagger(N)$ ，過収束尖点形式の空間を $S_x^\dagger(N)$ と書く．これらも一般に無限次元 \mathbb{C}_p ベクトル空間である．

どちらの定義を採用しても，重要なのは U_p が $M_x^\dagger(N)$ や $S_x^\dagger(N)$ にコンパクト作用素として作用するという事実である． \mathbb{C}_p 上の Banach 空間 V に対し連続作用素 $T: V \rightarrow V$ がコンパクトであるとは，像が有限次元の作用素の極限として T が得られることである．作用素の像が有限次元であれば特性多項式を考えることができるが，その極限を取ることでコンパクト作用素にも特性巾級数を定義でき，意味のあるスペクトル理論を展開できる（ $M_x^\dagger(N)$ は Banach 空間の順極限ではないので，実際は一旦過収束度 r を止めて議論する．）特に，0 以外の固有値に属する U_p 広義固有空間が有限次元になることを証明できる．肥田族の場合を鑑みると，これは傾き有限な固有形式の p 進族の存在を強く示唆する．実際，そのような族で重さ空間のアフィノイド許容開集合の有限平坦被覆でパラメータ付けられるものが Coleman によって構成されている（Coleman 族，[Col, Theorem B5.7]）．

$M_x^\dagger(N)$ における U_p 作用のコンパクト性を保証するのが，楕円曲線の標準部分群（canonical subgroup）の理論である． L/\mathbb{Q}_p を有限次拡大， E を \mathcal{O}_L 上の楕円曲線で通常還元を持つものとする． $E[p^n]$ は \mathcal{O}_L 上階数 p^{2n} だが，その単位成分 $E[p^n]^0$ は \mathcal{O}_L 上階数 p^n の有限平坦閉部分群スキームである．この特別な部分群スキームの存在が p 進保型形式の理論で本質的な役割を果たすが， E が超特異還元を持つ場合は $E[p^n] = E[p^n]^0$ であり，この方法では階数 p^n の部分群スキームを構成できない．標準部分群の理論とは， E が通常還元十分に近いうちに， $E[p^n]$ の階数 p^n の部分群スキームで他と異なる特別なものの存在を保証するものである．

定理 1.6. (Katz, Lubin) E を \mathcal{O}_L 上の楕円曲線とする． $\text{Hdg}(E) < 1/(p^{n-2}(p+1))$ ならば， $E[p^n]$ に \mathcal{O}_L 上階数 p^n の有限平坦閉部分群スキーム C_n が存在して，通常還元の場合の $E[p^n]^0$ と類似の性質を持つ． C_n を E のレベル n の標準部分群と呼ぶ．

「 $E[p^n]^0$ と類似の性質」については詳しく述べないが（[Kat, Chapter 3], [Buz1, §3] を参照），例えば C_1 の性質として次のようなものがある．

定理 1.7. ([Kat, Theorem 3.10.7]) E を \mathcal{O}_L 上の楕円曲線で $\text{Hdg}(E) < p/(p+1)$ を満たすものとし， C_1 を E のレベル 1 の標準部分群とする． \mathcal{H} を $E[p]$ の \mathcal{O}_L 上階数 p の有限平坦閉部分群スキームで $\mathcal{H}_L \cap C_{1,L} = 0$ を満たすものとする．このとき，

$$\text{Hdg}(E/\mathcal{H}) = \frac{1}{p} \text{Hdg}(E)$$

であり， $E[p]/\mathcal{H}$ は E/\mathcal{H} のレベル 1 の標準部分群である．

この性質は「 U_p 作用素が過収束保型形式の過収束性を向上する」ということを意味している．実際，例えば整数重さ k の過収束保型形式 f は，適当な $r > 0$ に対する $X_1(N)(r)$ の L 値点 $[(E, Q)]$ に対して E_L 上の不変微分形式の層 ω_{E_L} の k 階テンソル $\omega_{E_L}^k$ の大域切断 $f(E, Q)$ を与えるルールと見なすことができるが，こう思ったとき U_p 作用素は

$$U_p(f)(E, Q) = \frac{1}{p} \sum_{\mathcal{H}_L \cap C_{1,L} = 0} f(E/\mathcal{H}, \bar{Q})|_{E_L}$$

で定義される（但し \bar{Q} はレベル $\Gamma_1(N)$ 構造 Q の E/H における像）従って上の性質が意味しているのは、 f が $X_1(N)(r)$ 上定義される過収束保型形式ならば $U_p(f)$ は $X_1(N)(pr)$ 上定義される、ということである。このことから U_p 作用素のコンパクト性が従う。

さらに、 f を傾き有限の過収束固有形式とすると、 f の U_p 固有値 $a_p(f)$ は 0 ではないので、等式

$$f = \frac{1}{a_p(f)} U_p(f)$$

が f の定義域上で成り立つ。上の性質から、右辺の保型形式は f よりも大きな定義域を持つので、 f の解析接続を与えていることになる [Buz1, Theorem 5.2]。このように、傾き有限の過収束固有形式はモジュラー曲線上の大きな領域にまで解析接続することができ、どこまで解析接続されるかを標準部分群の理論が統制している。

1.5 Coleman-Mazur 固有値曲線と固有値多様体

肥田族（のリジッド生成ファイバー）や Coleman 族を含み、傾き有限な固有形式を全てパラメトライズするリジッド解析多様体が Coleman-Mazur 固有値曲線（eigencurve）である。

定理 1.8. ([CM, Buz2]) 等次元 1 のリジッド解析多様体 \mathcal{C}_N と射 $\kappa: \mathcal{C}_N \rightarrow \mathcal{W}$ が存在して次を満たす。任意の $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ に対し $\kappa^{-1}(x)$ は、重さ x 、従順レベル N の傾き有限な過収束正規固有形式全体の集合と同一視できる。 \mathcal{C}_N を従順レベル N の Coleman-Mazur 固有値曲線と呼ぶ。

肥田族（のリジッド生成ファイバー）は \mathcal{C}_N の既約成分をなす。また、Coleman 族は \mathcal{C}_N のアフィノイド許容開集合と同一視できる。肥田族そのものには整構造の情報もあり、リジッド生成ファイバーに移行することで \mathcal{C}_N は肥田族の持つ整構造の情報を失っているが、最近の研究では \mathcal{W} や \mathcal{C}_N の整構造を考えることが重要になっている [AIP2]。

\mathcal{C}_N の構成法には Galois 的手法と Hecke 的手法の二種類があるが、後者は大雑把に言うと、 \mathcal{C}_N を適当な Hecke 環のスペクトラムとして定義するものである（実際には、 $M_x^\dagger(N)$ における傾き有限な U_p 広義固有空間の有限次元性（の族への適切な一般化）を用いて、Hecke 環の商でアフィノイド代数になるようなものを構成し、その極大スペクトラムを貼り合わせる。）

Hecke 的手法は他の代数群上の保型形式に一般化でき、 \mathcal{C}_N と同じような Hecke 固有値系のモジュライ空間を構成することができる。つまり、代数体上の簡約代数群 G に対し、重さ空間 \mathcal{W}^G と、 \mathcal{W}^G 上の（固定した従順レベルに対する）リジッド解析多様体 \mathcal{E} で、 G 上の保型形式の空間に現れる傾き有限な Hecke 固有値系を p 進的に補間するものが存在する。 \mathcal{E} のことを G に対する固有値多様体（eigenvariety）と呼ぶ（[Buz2, Loe, Urb]などを参照。） G 上の古典的な保型形式に対応する \mathcal{E} の点を古典的点（classical point）と呼ぶ。

注 1.9. GL_2 以外の代数群では一般に弱重複度 1 定理が成立せず、成立したとしても楕円尖点形式の正規化に相当する適切な概念が存在しない。従って「Hecke 固有値系」と「固有形式」の間にずれがあり、一般の場合は Hecke 固有値系のモジュライ空間しか得られない。

注 1.10. Eigencurve, eigenvariety の訳としては「固有曲線」「固有多様体」が逐語的だろうが、これでは曲線や多様体が固有（proper）であることと紛れが生じ、特に本稿のような「eigenvariety の properness」を論じる場合に混乱の恐れがある。同じ問題があるフランス語圏では eigenvariety を variété de Hecke（Hecke 多様体）と呼んでいるが、ここでは「Hecke 固有値系のモジュライ空間」という意味を汲んで「固有値曲線」「固有値多様体」という訳語を採用した。

注 1.11. C_N の Hecke 的構成法には、ここで紹介した過収束保型形式と標準部分群を用いる幾何的な手法の他に、過収束モジュラーシンボルを用いる Stevens の手法 [Bel1, Bel2] や、Jacquet 加群関手を用いる Emerton の手法 [Eme] が知られている．ここで幾何的な手法を採用した理由は、本稿の主定理 2.2 を証明するのに過収束保型形式の解析接続性の分析が必要になるからである．

1.6 固有性

固有値多様体 \mathcal{E} は Hecke 固有値系のモジュライ空間であり、 \mathcal{E} の幾何的構造に興味を持つのは自然だろう．Coleman-Mazur [CM, p. 4–8] は固有値曲線 C_N の幾何について多くの問いを提出し、それらについては近年かなり研究が進んでいるが、例えば「 C_N の既約成分は有限個か無限個か」という基本的な問いも未解決のまま残されている．固有値多様体のそうした幾何的構造はしばしば保型形式の深い p 進的性質と関連している．実際、Bellaïche-Chenevier [BeC, Theorem 9.1.2] はユニタリ群 $U(m)$ のある種の固有値多様体に対し、その古典的点 x における接空間の次元と、 x に対応する保型表現に伴う p 進 Galois 表現の Selmer 群の次元が関連することを示した．

本稿で着目する幾何的性質は、固有値多様体 \mathcal{E} の固有性 (properness) と呼ばれる、 \mathcal{E} のある種の完備性である． $\mathbb{C}_p\langle X \rangle$ を \mathbb{C}_p 上の Tate 代数、 $D = \mathrm{Sp}(\mathbb{C}_p\langle X \rangle)$ を単位閉円盤とする．このアフィンノイド多様体を単位閉円盤と呼ぶ理由は、その \mathbb{C}_p 値点の集合 $\mathcal{D}(\mathbb{C}_p)$ が

$$\mathcal{D}(\mathbb{C}_p) = \{x \in \mathbb{C}_p \mid |x|_p \leq 1\}$$

と同一視されるためである． $x = 0$ に対応する閉点を O で表し、 $D^\times = D \setminus \{O\}$ とおく (穴あき単位閉円盤)． \mathcal{E} や \mathcal{W}^G の \mathbb{C}_p への係数拡大を $\mathcal{E}_{\mathbb{C}_p}$ や $\mathcal{W}_{\mathbb{C}_p}^G$ で表す．

定義 1.12. ([BuC]) 固有値多様体 \mathcal{E} が固有 (proper) であるとは、任意の射 $\varphi : D^\times \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{C}_p}$ が $\bar{\varphi} : D \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{C}_p}$ に延長されることを言う．これは次の条件と同値である．任意の射 $\varphi : D^\times \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{C}_p}$ と $\psi : D \rightarrow \mathcal{W}_{\mathbb{C}_p}^G$ で、自然な埋め込み $D^\times \rightarrow D$ と構造射 $\kappa : \mathcal{E}_{\mathbb{C}_p} \rightarrow \mathcal{W}_{\mathbb{C}_p}^G$ について図式

$$\begin{array}{ccc} D^\times & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{E}_{\mathbb{C}_p} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \kappa \\ D & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{W}_{\mathbb{C}_p}^G \end{array}$$

を可換にするものに対し、射 $\bar{\varphi} : D \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{C}_p}$ が存在してこれを付け加えた図式も可換にする．

定義に現れる条件は代数幾何における固有性の付値判定法の類似であり、 \mathcal{E} がある意味で完備なことを示唆している．逆に \mathcal{E} が固有でなければ、 \mathcal{E} に傾き無限の Hecke 固有値系を付け加えて「完備化」する余地がありそうだ． C_N の固有性は Coleman-Mazur [CM, p. 5] が提出した問いの一つだが、一方で「傾き有限な固有形式の列で傾き無限の固有形式に p 進収束するようなものは存在しない」という、より強い意味での完備性は成り立たないことが知られている [CS]．

注 1.13. 射 κ は一般に (C_N の場合でも) 準コンパクトではないので、リジッド解析幾何で通常用いられる (Kiehl の) 意味で固有ではない．一方、多くの場合 κ は部分的固有性 (partial properness) と呼ばれる弱い固有性を持つが、一般論としては部分的固有性から上の意味での固有性は従わない (例えば開埋め込み $D^\times \rightarrow D$ は部分的固有だが切断 $\bar{\varphi} : D \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{C}_p}$ は存在しない)．

固有値多様体の固有性について知られている結果はこれまで、Coleman-Mazur 固有値曲線 C_N の場合に限られていた。考えるべきモジュラー曲線の種数が 0 の場合は、過収束保型形式の空間の基底や U_p の作用を具体的に書き下すことができる。これを用いて Buzzard-Calegari [BuC] は、 $N = 1$ かつ $p = 2$ の場合に C_N の固有性を示した。他の場合にはそのような手法は使えないが、Calegari [Cal] は [BuC] の一部の議論を一般化することで、任意の N と p に対して C_N の整数重さでの固有性を示した。つまり、重さ指標 $\psi(O)$ が整数 k に対する代数的指標 $t \mapsto t^k$ と一致する場合に、条件を満たす射 $\bar{\varphi}: D \rightarrow C_{N, C_p}$ の存在を証明した。

一方で Diao-Liu [DL] は、射 $\varphi: D^\times \rightarrow C_{N, C_p}$ が \mathbb{Q}_p の有限次拡大上定義されている場合に $\bar{\varphi}$ の存在を示した。これにより C_N の固有性はほぼ証明されたと言える。彼らの証明は族の p 進 Hodge 理論を用いるもので、 C_N の正規化 \tilde{C}_N 上に (擬表現ではなく) $\mathcal{O}(\tilde{C}_N)$ 上階数 2 の Galois 表現で各古典的点では保型形式に伴う p 進 Galois 表現を与えるようなもの、が存在することが鍵になっている。ところが、このような大域的な Galois 表現の存在は一次元の場合にしか知られておらず、現時点ではこの証明を高次元に一般化することはできないようだ。本稿の主定理は、[BuC, Cal] のアイデアを一般化することにより、Hilbert 保型形式に対する高次元の固有値多様体の整数重さでの固有性を (p に関する条件のもとで) 証明するものである。

主定理を述べる前に、固有値多様体の固有性の応用を一つ挙げておく。肥田族は C_N の既約成分と見なせるが、同様に他の既約成分も固有形式の何らかの p 進族であると見なせる。構造射 $C_N \rightarrow \mathcal{W}$ は無限次数であり、 C_N の既約成分が \mathcal{W} 上有限次数であることも無限次数であることも起こり得る (例えば肥田族は \mathcal{W} 上有限な既約成分であり、従って有限次数である。) 実は、Diao-Liu の固有性を用いると次のことが証明できる。

定理 1.14. ([HN]) C_N の既約成分で \mathcal{W} 上有限次数のものは \mathcal{W} 上有限である。

このことが C_N の固有性から従うことは Chenevier によって予想されていたことであり [Che, Chapitre 1, §3.7], 代数幾何・ p 進解析幾何における「固有かつ準有限は有限」という標準的な事実の類似とも見なせる。さらに Chenevier [Che, *loc. cit.*] によれば、Buzzard-Kilford 予想から C_N の既約成分で \mathcal{W} 上有限なものは全て傾き 0 の p 進族であることが従う。Buzzard-Kilford 予想とは、固有形式の重さが重さ空間 \mathcal{W} (これは単位開円盤の有限直和だった) の境界に近付くとき傾きは 0 に収束するだろう、という主張であり、多くの場合に正しいことが知られている [BK, LWX]。従って上の定理は、 C_N の既約成分で \mathcal{W} 上有限次数のものは多くの場合 (Buzzard-Kilford 予想を仮定すれば全ての場合) に傾き 0 である、ということの意味している。これも Coleman-Mazur が提出した問いの一つだった [CM, p. 5]。

2 主定理

2.1 Hilbert 保型形式の場合

F を次数 g の総実代数体とする。Coleman-Mazur 固有値曲線は傾き有限な楕円固有形式のモジュライ空間だったが、 F 上の Hilbert 固有形式で傾きが有限なものモジュライ空間に当たる Hilbert 固有値多様体の存在が知られている。Hilbert 固有値多様体の構成法も複数あるが、ここでは Andreatta-Iovita-Pilloni [AIP1] による Hilbert-Blumenthal モジュライ空間を用いた構成を採用する。

有限次拡大 K/\mathbb{Q}_p で、 K 代数 $F \otimes_{\mathbb{Q}} K$ が K の g 階直積と同型になるものを固定する。 $G = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}}(GL_2)$ と $\mathbb{T} = \text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}}(\mathbb{G}_m)$ に対し、 G の重さ空間 \mathcal{W}^G として

$$\mathcal{W}^G(\mathbb{C}_p) = \text{Hom}_{\text{cont.}}(\mathbb{T}(\mathbb{Z}_p) \times \mathbb{Z}_p^\times, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times)$$

と同一視できるような K 上のリジッド解析多様体を考える (\mathcal{W}^G は $g+1$ 次元単位開円盤の有限個の直和である。) $\mathcal{W}^G(\mathbb{C}_p)$ の元は、二つの指標

$$\nu : \mathbb{T}(\mathbb{Z}_p) = (\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^\times \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times, \quad w : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$$

の組 (ν, w) で与えられる。

注 2.1. 重さ指標として ν だけでなく組 (ν, w) を考えるのは、古典的な Hilbert 保型形式の重さが、 $g+1$ 個の整数の組 (k_1, \dots, k_g, w) で任意の i に対し k_i と w の偶奇が同じもの、として与えられることに対応している。 G から定まる志村多様体 $\text{Sh}(G, X)$ (Hilbert モジュラー多様体) 上には、このような組を重さとする古典的 Hilbert 保型形式を与える保型線束が存在する。ここから §1 のように、Abel 多様体の標準部分群を用いて過収束 Hilbert 保型形式の概念を定義したいが、問題は $F \neq \mathbb{Q}$ のとき、 $\text{Sh}(G, X)$ は Abel 多様体の粗 (coarse) モジュライに過ぎず、Abel 多様体の精 (fine) モジュライになるのは $G^* = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}}(GL_2) \times_{\text{Res}_{F/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m)} \mathbb{G}_m$ から定まる志村多様体 $\text{Sh}(G^*, X^*)$ の方 (Hilbert-Blumenthal モジュライ空間) だということである。そこで、過収束 Hilbert 保型形式の定義のためには、一旦 $\text{Sh}(G^*, X^*)$ 上で過収束保型形式の定義を行い、総正な単数の群 $\mathcal{O}_F^{\times,+}$ の自然な作用での固定部分を取ることで G 上に移行する、という手段を採る。

$N \geq 4$ を p と素な整数とする。このとき、等次元 $g+1$ のリジッド解析多様体 \mathcal{E}_N と射 $\kappa : \mathcal{E}_N \rightarrow \mathcal{W}^G$ で次を満たすものが構成できる：任意の $x \in \mathcal{W}^G(\mathbb{C}_p)$ に対しファイバー $\kappa^{-1}(x)$ は、重さ x 、従順レベル N の過収束 Hilbert 正規尖点固有形式で U_p の傾きが有限であるもの全体の集合と同一視できる。 \mathcal{E}_N が Andreatta-Iovita-Pilloni [AIP1] の (尖点的) Hilbert 固有値多様体である。

2.2 Hilbert 固有値多様体の整数重さでの固有性

本稿の主定理は次のものである。

定理 2.2. ([Hat2], Theorem 1.1) F は奇素数 p 上不分岐で、かつ p を割る F の任意の素イデアル \mathfrak{p} に対し、 \mathfrak{p} における剰余次数 $f_{\mathfrak{p}}$ が 1 か 2 だとする。このとき、 F 上の Hilbert 保型形式に関する Hilbert 固有値多様体 \mathcal{E}_N は整数重さで固有である。つまり、任意の射 $\varphi : D^\times \rightarrow \mathcal{E}_{N, \mathbb{C}_p}$ は、 $\kappa \circ \varphi : D^\times \rightarrow \mathcal{W}_{\mathbb{C}_p}^G$ の唯一の延長 $\psi : D \rightarrow \mathcal{W}_{\mathbb{C}_p}^G$ による原点の像 $\psi(O)$ が代数的指標 $\mathbb{T} \times \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$ に対応しているとき、射 $\tilde{\varphi} : D \rightarrow \mathcal{E}_{N, \mathbb{C}_p}$ に延長される。

注 2.3. 高次元の固有値多様体について次元以外の大域的な性質が分かったのは (筆者の知る限り) これが最初のような。また、任意の代数群に対し固有値多様体が固有であると強く期待する理由は今の所なさそうだが、少なくともこの定理によって Hilbert 固有値多様体の場合には状況証拠が与えられたことになる。一方で、整数重さでの固有性だけでは (例えば [HN] のような) 数論的により興味のある主張は示せそうにない。

注 2.4. $p = 2$ の時には、 2 が F で完全分解なら少し弱い結果を証明できる。 $p = 2$ の場合に条件が必要なのは $1 + 2\mathbb{Z}_2$ がねじれ元 -1 を持つことに起因する事情で、整 p 進 Hodge 理論的な理由ではない。

注 2.5. F が p 上不分岐であるという仮定は、最近研究が進んでいる Pappas-Rapoport の分裂モデルを用いれば外せるかもしれない。一方で、剰余次数の仮定は本質的である（注 3.6）。また、定理の証明は過収束保型形式の解析接続性の分析に基づいており、そのために固有値多様体への射 φ から過収束保型形式の族を構成する必要がある。そこに Hecke 固有値系と正規固有形式の概念が一致することを用いるので、証明の手法を GL_2 以外の代数群に一般化するのは難しそうだ。

3 証明の概略

以下 F は奇素数 p 上で不分岐とし、 \mathcal{D}_F で F/\mathbb{Q} の共役差積を表す。 F の狭義類群 Cl_F^+ の完全代表系 $[\text{Cl}_F^+]$ で p と素なイデアルからなり \mathcal{O}_F を含むものを固定する。

3.1 Hilbert-Blumenthal Abel 多様体

過収束楕円保型形式の定義には楕円曲線のモジュライ空間であるモジュラー曲線が用いられたが、過収束 Hilbert 保型形式を定義するにはその高次元化に当たる Hilbert-Blumenthal Abel 多様体（以下 HBAV と略す）のモジュライ空間を用いる。

S を \mathcal{O}_K 上のスキームとする。 S 上の HBAV とは、 S 上の Abel スキーム A と、環準同型 $\iota: \mathcal{O}_F \rightarrow \text{End}_S(A)$ 、 F の 0 でない分数イデアル \mathfrak{c} に対する \mathcal{O}_F 同変な同型 $\lambda: A \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{c} \rightarrow A^\vee$ 、 S 上の群スキームの閉埋め込み $i: \mathcal{D}_F^{-1} \otimes \mu_N \rightarrow A$ の組 (A, ι, λ, i) で適切な条件を満たすものである。上のような λ を \mathfrak{c} 偏極 (\mathfrak{c} -polarization)、 i をレベル $\Gamma_{00}(N)$ 構造と呼ぶ。 S 上の \mathcal{O}_F 作用、 \mathfrak{c} 偏極、レベル $\Gamma_{00}(N)$ 構造付き HBAV の同型類は \mathcal{O}_K 上準射影的スムーズなスキーム $M(\mu_N, \mathfrak{c})$ を精モジュライとして持つ。各カスプに対し適切な錐体分解を固定することで、 $M(\mu_N, \mathfrak{c})$ の \mathcal{O}_K 上射影的スムーズなトロイダルコンパクト化 $\bar{M}(\mu_N, \mathfrak{c})$ を得る。 $\bar{M}(\mu_N, \mathfrak{c})$ の上には普遍的 HBAV と Tate 対象との貼り合わせで得られる半 Abel スキーム \bar{A}^{un} が存在する。また、 $D = \bar{M}(\mu_N, \mathfrak{c}) \setminus M(\mu_N, \mathfrak{c})$ を境界因子とする。 $\bar{M}(\mu_N, \mathfrak{c})$ に伴う K 上のリジッド解析多様体を $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c})$ と書く。

F から K への体の埋め込み全体の集合を \mathbb{B} で表わし、その中で素イデアル $\mathfrak{p} \mid p$ での完備化 $F_{\mathfrak{p}}$ を通るもの全体のなす部分集合を $\mathbb{B}_{\mathfrak{p}}$ と書く。 F が p 上不分岐という仮定から、各 $\mathbb{B}_{\mathfrak{p}}$ には p 乗 Frobenius 写像（の持ち上げ） σ が自然に作用する。このとき、HBAV A の \mathcal{O}_F 作用により、 A の Hodge 高さ $\text{Hdg}(A)$ は各 $\beta \in \mathbb{B}$ ごとのより精密な不変量 $\text{Hdg}_{\beta}(A) \in [0, 1]$ の和に分解される：

$$\text{Hdg}(A) = \min\{1, \sum_{\beta \in \mathbb{B}} \text{Hdg}_{\beta}(A)\}.$$

Hdg_{β} は $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c})$ 上の関数に適切に拡張され、モジュラー曲線の場合と同様に、任意の有理数 $v \geq 0$ に対し

$$\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c})(v) = \{y \in \bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c}) \mid \text{Hdg}_{\beta}(y) \leq v \ (\forall \beta \in \mathbb{B})\}$$

と定義する。これは $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c})$ の許容開集合である。

G^* の重さ空間 \mathcal{W}^{G^*} を、

$$\mathcal{W}^{G^*}(\mathbb{C}_p) = \text{Hom}_{\text{cont.}}(\mathbb{T}(\mathbb{Z}_p), \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^{\times})$$

を満たす K 上のリジッド解析多様体とする。重さ指標 $(\nu, w) \in \mathcal{W}^G(\mathbb{C}_p)$ の過収束 Hilbert 保型形式を定義するためには、まず重さ指標 $\kappa \in \mathcal{W}^{G^*}(\mathbb{C}_p)$ に対する G^* 上の過収束保型形式を定義する必要がある。そのうえで、 $\kappa(t) = \nu(t)^2 w(N_{F/\mathbb{Q}}(t))$ で定まる κ を重さ指標とする G^* 上の過収束保型形式の中で自然な $\mathcal{O}_F^{\times,+}$ 作用で固定されるもの、として重さ指標 (ν, w) の過収束 Hilbert 保型

形式を定義する．重さ指標 (ν, w) が代数的指標なら，対応する κ もそうであり，従って整数の組 $(k_\beta)_\beta \in \mathbb{Z}^{\mathbb{B}}$ と対応する．この場合は保型線束として古典的な層 $\Omega^\kappa = \bigotimes_{\beta \in \mathbb{B}} \omega_{\bar{A}^{\text{un}}, \beta}^{\otimes k_\beta}$ を採用すれば，重さ指標 κ に対する G^* 上の過収束保型形式の空間を $\bigcup_{v>0} H^0(\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c})(v)_{\mathcal{C}_p}, \Omega^\kappa)$ として定義できる．特に，この場合の保型線束は $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c})_{\mathcal{C}_p}$ 全体で定義される．問題は (ν, w) が代数的でない場合であり，ここに高次元標準部分群の理論が必要になる．

3.2 HBAV の標準部分群と過収束 Hilbert 保型線束

定理 3.1. ([GK]) L/K を有限次拡大とし， A を \mathcal{O}_L 上の HBAV， $\mathfrak{p} \mid p$ を F の素イデアル， $n > 0$ を整数とする．任意の $\beta \in \mathbb{B}_p$ に対し

$$\text{Hdg}_\beta(A) + p\text{Hdg}_{\sigma^{-1}\circ\beta}(A) < p^{2-n} \quad (3.1)$$

が成り立つと仮定する．このとき， $A[p^n]$ に \mathcal{O}_L 上階数 p^{nf_p} の有限平坦閉部分 \mathcal{O}_{F_p} 加群スキーム $\mathcal{C}_{n,p}$ が存在して，他の閉部分群スキームと区別できる性質を持つ． $\mathcal{C}_{n,p}$ を $A[p^n]$ の標準部分群と呼ぶ．また，条件が任意の $\mathfrak{p} \mid p$ で満たされるときは， $\mathcal{C}_n = \bigoplus_{\mathfrak{p} \mid p} \mathcal{C}_{n,p}$ を $A[p^n]$ の標準部分群と呼ぶ．

「他のものと区別できる性質」については詳しく述べないが，例えば $\mathcal{C}_{1,p}$ は次の性質を持つ． \mathcal{O}_L 上階数 p^{f_p} の有限平坦閉部分 \mathcal{O}_{F_p} 加群スキーム $\mathcal{H} \subseteq A[p]$ で $\mathcal{H}_L \cap \mathcal{C}_{1,p,L} = 0$ を満たすものに対し，

$$\text{Hdg}_\beta(A/\mathcal{H}) = \frac{1}{p}\text{Hdg}_{\sigma\circ\beta}(A) \quad (3.2)$$

であり， $A[p]/\mathcal{H}$ は $(A/\mathcal{H})[p]$ の標準部分群である．楕円保型形式の場合と同様にこの性質が，過収束 Hilbert 保型形式の空間における U_p 作用素のコンパクト性や，傾き有限の過収束 Hilbert 保型形式が $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c})$ 上の大きな領域にまで解析接続されることを保証する．

過収束保型線束の定義においては，標準部分群と Hodge-Tate 写像との関係が重要になる． \mathcal{G} を環 R 上の p^n で消える有限平坦群スキームとし， \mathcal{G}^\vee で \mathcal{G} の Cartier 双対を表す． \mathcal{G}^\vee の不変微分形式の加群を $\omega_{\mathcal{G}^\vee}$ と書く．任意の R 代数 R' に対し， \mathcal{G}^\vee は同型

$$\mathcal{G}(R') \simeq \text{Hom}_{R'-\text{gp.}}(\mathcal{G}_{R'}^\vee, \mu_{p^n, R'})$$

を与えるので，準同型

$$\text{HT}_{\mathcal{G}} : \mathcal{G}(R') \rightarrow \omega_{\mathcal{G}^\vee} \otimes_R R', \quad x \mapsto x^*\left(\frac{dT}{T}\right)$$

が定まる．これを Hodge-Tate 写像と呼ぶ．

命題 3.2. ([Hat3, Theorem 8.1]) $v = \max\{\text{Hdg}_\beta(A) \mid \beta \in \mathbb{B}\}$ とおく．このとき， $v < (p-1)/p^n$ なら次が成立する．

1. Hodge-Tate 写像 $\text{HT}_{\mathcal{C}_n^\vee} : \mathcal{C}_n^\vee(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \otimes \mathcal{O}_{\bar{K}} \rightarrow \omega_{\mathcal{C}_n} \otimes \mathcal{O}_{\bar{K}}$ の余核は $m_{\bar{K}}^{\geq v/(p-1)}$ で消える．
2. $i \leq n - v(p^n - 1)/(p - 1)$ なら，自然な写像 $\omega_A \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{L,i} \rightarrow \omega_{\mathcal{C}_n} \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{L,i}$ は同型．

注 3.3. 証明には，[Hat1] とそれを一般化した [Tia] で用いられた，有限平坦群スキームの Breuil-Kisin 分類を用いた標準部分群の構成法を用いる． Hdg_β ではなく Hdg に関する条件を課せば，これは $(p > 2)$ なら Fargues の標準部分群の理論 [Far] から従うが，その場合保型線束の定義域が小さくなり， $p < 5$ の場合が主定理から除かれる．

命題 3.2 を用いると, F が p 上不分岐な場合に, [AIP1] における過収束 Hilbert 保型線束の定義域を $\bar{M}(\mu_N, c)(\frac{1}{p+1})$ に拡張することができる. [AIP1] の構成を説明するために, まず重さ指標 $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ の p 進楕円保型形式の定義について述べる. E を \mathcal{O}_L 上の通常楕円曲線とすると, 任意の n に対し $E[p^n]$ は標準部分群 $C_n = E[p^n]^0$ を持つ. 命題 3.2 に対応するこの場合の (以前から知られていた) 主張は, Hodge-Tate 写像が「Betti 対 de Rham」の比較同型

$$C_n^\vee(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \otimes \mathcal{O}_{\bar{K}} \simeq \omega_E \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{\bar{K}, n}$$

を引き起こすということである. 右辺 (de Rham 側) を $n \rightarrow \infty$ とすれば ω_E の情報, 従って保型形式を復元できるので, 左辺 (Betti 側) の極限を考えても何らかの保型形式が定義できそうに思える. 実際, $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ に対し, 通常跡 $X_1(N)(0)_{\mathbb{C}_p}$ の形式モデル $\mathfrak{X} = X_1(N)(0)_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}_p}}$ 上に標準部分群の族 \mathfrak{C}_n と, \mathfrak{X} 上 Galois 群 $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ を持つ Galois 被覆 $\mathfrak{M}_n = \text{Isom}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \mathfrak{C}_n^\vee)$ を考えると, $\varprojlim \mathcal{O}(\mathfrak{M}_n)$ の p 進完備化 V には \mathbb{Z}_p^\times が作用する. そこで, $V[1/p]$ の中で \mathbb{Z}_p^\times が指標 x で作用する部分を, 重さ指標 x の p 進保型形式の空間と定義する ($\varprojlim_n \mathfrak{M}_n$ は井草塔 (Igusa tower) と呼ばれる)

過収束保型形式を定義するには $X_1(N)(0)$ ではなく $r > 0$ に対する $X_1(N)(r)$ を考えなければならないが, 問題は その場合, $X_1(N)(r)$ 上に標準部分群は $1/(p^{n-2}(p-1)) > r$ を満たす n に関する C_n しか存在できない, ということである. 従って, 上の構成で $n \rightarrow \infty$ とすることはできず, このままでは de Rham 側の情報を復元できない.

これに対する Pilloni [Pil] のアイデアは次のようなものである. まず, 重さ指標 $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ に依存して決まる $n_x > 0$ に対し, $X_1(N)(r_x)$ 上に命題 3.2 (に相当する楕円曲線についての主張) を満たすレベル n_x の標準部分群の族 C_{n_x} が存在するような r_x を取り, $X_1(N)(r_x)$ の Galois 被覆 $M_{n_x} = \text{Isom}(\mathbb{Z}/p^{n_x}\mathbb{Z}, C_{n_x}^\vee)$ を考える. M_{n_x} は楕円曲線 E の標準部分群 (の双対) $C_{n_x}^\vee$ の自明化を分類するリジッド解析多様体だが, これだけでは de Rham 側の情報を復元できない. そこで, 命題 3.2 (に相当する楕円曲線についての主張) を用いて, この自明化の Hodge-Tate 写像による像の ω_E への持ち上げを分類する捻子 $\mathcal{I}\mathcal{W} \rightarrow M_{n_x}$ を構成する. $\pi : \mathcal{I}\mathcal{W} \rightarrow X_1(N)(r_x)$ には \mathbb{Z}_p^\times が作用するので, $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathcal{I}\mathcal{W}_{\mathbb{C}_p}})$ における x 同変部分を, 重さ指標 x の過収束保型線束 ω^x と定義する. $\mathcal{I}\mathcal{W}$ は井草塔の構成が $n \rightarrow \infty$ の途中でできなくなる代わりに de Rham 側の情報を補ったものである.

Hilbert 保型形式の場合もこれと同じ構成によって, $\bar{M}(\mu_N, c)$ の許容開集合上に, $\mathbb{T}(\mathbb{Z}_p)$ が作用する捻子 $\mathcal{I}\mathcal{W}_c$ と, 重さ指標 $x \in \mathcal{W}^{G^*}(\mathbb{C}_p)$ に対する過収束 Hilbert 保型線束 Ω_c^x を定義することができる. 構成から分かるように, Ω_c^x は $\bar{M}(\mu_N, c)_{\mathbb{C}_p}$ の中で命題 3.2 が成立する領域で定義されるもので, x が 1 解析的 (1-analytic) という条件を満たす場合は, 定義域が $\bar{M}(\mu_N, c)(\frac{1}{p+1})_{\mathbb{C}_p}$ を含む. x が代数的指標の場合は, 古典的な保型線束の制限と Ω_c^x が一致することを示せるので, 定義域は全体になる. 被約アフィノイド代数 R を終域に持つ重さ指標 $x : \mathbb{T}(\mathbb{Z}_p) \rightarrow R^\times$ の場合も, 同様の構成で $\bar{M}(\mu_N, c)(r_x) \times \text{Sp}(R)$ 上の過収束 Hilbert 保型形式の層を定義できる.

古典的な Hilbert 保型形式は, 狭義類群 Cl_F^+ で添え字付けられた連結成分ごとの関数の組として定義されていた. 同様に, 重さ指標 $(\nu, w) \in \mathcal{W}^G(\mathbb{C}_p)$ に対する過収束 Hilbert 尖点形式のなす加群が, (ν, w) に対応する $\kappa \in \mathcal{W}^{G^*}(\mathbb{C}_p)$ を用いて, $\bigoplus_{c \in [\text{Cl}_F^+]} H^0(\Omega_c^\kappa(-D))$ における $\mathcal{O}_F^{\times,+}$ の自然な作用での固定部分, として定義される.

3.3 臨界跡の分析

定理 2.2 の証明の鍵になるのは、臨界的 (critical) な HBAV の部分群の分析であり、ここに剰余次数 f_p に関する仮定が必要になる。

定義 3.4. 完備付値体の拡大 L/K に対し、 \mathcal{O}_L 上の HBAV が臨界的とは、任意の $\beta \in \mathbb{B}$ に対し $\text{Hdg}_\beta(A) = p/(p+1)$ が成立することを言う。条件が任意の $\beta \in \mathbb{B}_p$ で成立するとき、 A は p 臨界的 (p -critical) であると言う。

臨界的な HBAV には標準部分群が存在しないが、 $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, c)$ の中で標準部分群が存在する領域の突端に接して位置しており、標準部分群が存在するものに最も近いクラスの HBAV と考えられる。臨界的 HBAV については次が成立する。

命題 3.5. ([Hat3], Proposition 6.1) $p \mid p$ を F の素イデアルで $f_p \leq 2$ を満たすもの、 L/K を有限次拡大、 A を \mathcal{O}_L 上の p 臨界的な HBAV とする。 $\mathcal{H} \subseteq A[p]$ を \mathcal{O}_L 上階数 p^{f_p} の有限平坦閉部分 \mathcal{O}_{F_p} 加群スキームとする。このとき、任意の $\beta \in \mathbb{B}_p$ に対し $\text{Hdg}_\beta(A/\mathcal{H}) = 1/(p+1)$ が成立し、 $A[p]/\mathcal{H}$ は $(A/\mathcal{H})[p]$ の標準部分群になる。

この命題は、 $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, c)_{(\frac{1}{p+1})\mathbb{C}_p}$ 上定義された過収束 Hilbert 保型形式 f に対し、その U_p 作用素による像 $U_p(f)$ が、臨界的 HBAV とその階数 p^g の巡回部分 \mathcal{O}_F 加群スキーム \mathcal{H} の組 (A, \mathcal{H}) に対応する点で定義されることを意味している。

注 3.6. 剰余次数 3 の場合には、頂切 Barsotti-Tate \mathcal{O}_{F_p} 加群での対応する主張に反例があり [Hat3, Remark 6.2]、HBAV の場合も成立しないと思われる。剰余次数 2 が限界なのは、標準部分群の存在条件 (3.1) が Hdg_β とその一つ隣の Hdg_β とを組にした形で書かれているため、 Hdg_β が三つ出てくる場合には三つ目が統制できなくなる、という事情による。

3.4 主定理の証明

以上の準備の下で、定理 2.2 の証明の方針を説明する。証明の中心的原理は次のもので、楕円保型形式の場合に [BuC, Cal] で用いられた原理の Hilbert 保型形式への一般化に当たる。

整数重さの過収束 Hilbert 正規尖点固有形式は、傾き有限なら $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, c)_{(\frac{1}{p+1})\mathbb{C}_p}$ にまで解析接続されるが、傾き無限なら $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, c)_{(\frac{1}{p+1})\mathbb{C}_p}$ には解析接続されない。

まず、必要なら D の半径を小さくして、 $\psi : D \rightarrow \mathcal{W}_{\mathbb{C}_p}^G$ が 1 解析的であるとしてよい。

ステップ 1 Deligne-Serre 持ち上げ

与えられた $\varphi : D^\times \rightarrow \mathcal{E}_{N, \mathbb{C}_p}$ に対し、 D^\times の許容アフィノイド被覆 $D^\times = \bigcup_{i \in I} U_i$ と、重さ指標 $U_i \rightarrow \mathcal{W}_{\mathbb{C}_p}^G$ に対する傾き有限の過収束 Hilbert 正規尖点固有形式 f_i が存在して、 $\varphi|_{U_i}$ が f_i の与える Hecke 固有値系で定まることを示す。証明は、法 p 固有形式を標数 0 の固有形式に持ち上げる Deligne-Serre の補題 [DS, Lemme 6.11] の証明で用いられた手法による。つまり、適切な Hecke 環の極小素イデアル P が、保型形式の適切な加群 N の台に入ることを示すことで、 $P = \text{Ann}(h)$ を満たす $h \in N$ の存在を保証する。 h から求める固有形式が構成できる。過収束 Hilbert 保型形式の定義から、各 f_i は $\bigoplus_{c \in [\mathbb{C}_p^\times]}$ $\mathcal{O}(\mathcal{I}\mathcal{W}_{c, \mathbb{C}_p} \times U_i)$ の元で、重さ指標についての適切な変換性を満たし $\mathcal{O}_F^{\times, +}$ で固定され境界因子で消えるもの、と解釈できる。

ステップ 2 U_p による解析接続

(3.2) により, U_p 作用素は過収束 Hilbert 固有形式の過収束性を向上する. このことを用いると, 傾き有限の過収束 Hilbert 固有形式 f_i を過収束保型線束の定義域全体にまで解析接続することができる. 特に, f_i は各連結成分では $\bar{M}(\mu_N, c)(\frac{1}{p+1})_{\mathbb{C}_p} \times U_i$ 上で定義されているとしてよい.

ステップ 3 q 展開による貼り合わせ

f_i は正規尖点形式だが, その全ての Hecke 固有値は φ によって指定されている. 従って, 重複度 1 定理 (の p 進版, つまり p 進 Hilbert 正規尖点固有形式が Hecke 固有値系と重さ指標で決まること) により f_i と f_j は $U_i \cap U_j$ で一致する. このことから $\{f_i\}_{i \in I}$ は貼り合わさって $\bigoplus_{c \in [\mathbb{C}_p^+]} \mathcal{O}(TW_{c, \mathbb{C}_p} \times D^\times)$ の元 $f = (f_c)_{c \in [\mathbb{C}_p^+]}$ を与えることが分かる.

ステップ 4 O での特異点除去

f が $\bigoplus_{c \in [\mathbb{C}_p^+]} \mathcal{O}(TW_{c, \mathbb{C}_p} \times D)$ の元で O では消えないものに延長されることを示す. (これも $f = (f_c)_{c \in [\mathbb{C}_p^+]}$ と書く.) D^\times 上で重さ指標の変換性などを満たすことから, 延長された f は D 上の重さ指標 $\psi: D \rightarrow \mathcal{W}_{\mathbb{C}_p}^G$ に対する過収束 Hilbert 正規尖点固有形式を定める.

f が延長されるのは「 D^\times 上の有界関数は D に延長される」という事実 (複素解析での除去可能特異点に関する Riemann の定理の類似) の帰結であり, 有界性は過収束 Hilbert 正規尖点固有形式の任意の Hecke 固有値が $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ の元であることから従う. 必要なら O での素元で割ることで f が O で消えないようにできる.

f は固有値多様体への射 $\varphi: D^\times \rightarrow \mathcal{E}_{N, \mathbb{C}_p}$ から構成したので, D^\times 上は傾き有限である. 従って, f の O での特殊化 $f(O)$ が傾き有限であることさえ示せば, f の Hecke 固有値系を考えることで求める射 $\bar{\varphi}: D \rightarrow \mathcal{E}_{N, \mathbb{C}_p}$ を得られる. $\psi(O)$ に関する仮定より, $f(O)$ は整数重さの過収束 Hilbert 正規尖点固有形式で, 各連結成分では $\bar{M}(\mu_N, c)(\frac{1}{p+1})_{\mathbb{C}_p}$ 上で定義されている.

ステップ 5 臨界点の絶対連結近傍

$\bar{M}(\mu_N, c)$ の良還元部分を \mathcal{X}_c , $\bar{M}(\mu_N, c)(\frac{1}{p+1})$ の良還元部分を $\mathcal{X}_c(\frac{1}{p+1})$ と書く. レベル $\Gamma_0(p)$ に相当する \mathcal{X}_c の被覆を \mathcal{Y}_c と書き, $\mathcal{X}_c(\frac{1}{p+1})$ の逆像を $\mathcal{Y}_c(\frac{1}{p+1})$ と書く. 標準部分群が被覆 $\mathcal{Y}_c(\frac{1}{p+1}) \rightarrow \mathcal{X}_c(\frac{1}{p+1})$ の切断 s を与える. s による像 $S = s(\mathcal{X}_c(\frac{1}{p+1}))$ は, 適当な有限次拡大 L/K に対する \mathcal{O}_L 上の HBAV A と, A の階数 p^g の有限平坦巡回閉部分 \mathcal{O}_F 加群スキーム \mathcal{H} の組 (A, \mathcal{H}) (の同型類) で, 任意の $\beta \in \mathbb{B}$ に対し $\text{Hdg}_\beta(A) \leq 1/(p+1)$ であり, かつ \mathcal{H} が $A[p]$ の標準部分群であるようなもの全体, と同一視される. s によって $f_c(O)$ を古典的保型線束の $\mathcal{S}_{\mathbb{C}_p}$ 上の切断と考える.

L/K を有限次拡大, A を \mathcal{O}_L 上の臨界的 HBAV, \mathcal{H} を A の階数 p^g の有限平坦巡回閉部分 \mathcal{O}_F 加群スキームとする. $y = (A, \mathcal{H})$ は $\mathcal{Y}_c(\mathbb{C}_p)$ の元を定める. このとき, $\mathcal{Y}_c(\mathbb{C}_p)$ における y の連結なアフィノイド許容開近傍 V_{y, \mathbb{C}_p} で,

1. V_{y, \mathbb{C}_p} は $\mathcal{S}_{\mathbb{C}_p}$ と交わる
2. K の有限次拡大の整数環上で定義された任意の組 $(A', \mathcal{H}') \in V_{y, \mathbb{C}_p}$ と, $\mathcal{L} \subseteq A'[p]$ で $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}_p} \cap \mathcal{L}_{\mathbb{C}_p} = 0$ を満たすものに対し, $(A'/\mathcal{L}, A'[p]/\mathcal{L})$ は $\mathcal{S}_{\mathbb{C}_p}$ に入る

の二条件を満たすものを, \mathcal{Y}_c の整モデルの完備局所環の記述 [Sta] を用いて構成する. 構成のうち, 二つの条件を満たすように取れるのは標準部分群の理論と命題 3.5 から従う. 連結性は V_{y, \mathcal{C}_p} の還元を具体的に計算することで証明する.

ステップ 6 組み合わせ論

$f_c(O)$ の定義域は $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, c)(\frac{1}{p+1})_{\mathcal{C}_p}$ を含むので, V_{y, \mathcal{C}_p} に関する二つ目の条件から $U_p(f_c(O))$ が V_{y, \mathcal{C}_p} 上で定義できることを示せる. (ここで, 整数重さの仮定より重さ指標 $\psi(O)$ の保型線束が $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, c)$ 全体で定義できることを使っている.) もし $f(O)$ が傾き無限だったとすると, $U_p(f_c(O))$ は $S_{\mathcal{C}_p}$ では 0 である. V_{y, \mathcal{C}_p} に関する一つ目の条件と連結性より, $U_p(f_c(O))$ は V_{y, \mathcal{C}_p} 全体で 0 である. 従って, $y = (A, \mathcal{H})$ で特殊化すると 0 になる. つまり次の式が成り立つ.

$$\sum_{\mathcal{D}_L \cap \mathcal{H}_L = 0} f_c(O)(A/\mathcal{D}, A[p]/\mathcal{D})|_{A_L} = 0.$$

ここで, \mathcal{H} を動かしてこの式を色々なやり方で足すことで十分多くの線型関係が生じ, 結果的に $f_c(O)(A/\mathcal{H}, A[p]/\mathcal{H})|_{A_L} = 0$ となることを示す. ここから任意の $c \in [\text{Cl}_F^+]$ に対し $f_c(O) = 0$ であることが従うが, これは f が正規だったことに反し, 定理 2.2 が証明される.

この部分の議論を, 簡単のため楕円曲線の場合に説明する. (この場合は [BuC] による.) E を \mathcal{O}_L 上の臨界的な楕円曲線とし, $g = f_c(O)$ とおく. E の階数 p の任意の部分群スキーム \mathcal{H} に対し,

$$\sum_{\mathcal{D}_L \cap \mathcal{H}_L = 0} g(E/\mathcal{D}, E[p]/\mathcal{D})|_{E_L} = 0 \quad (3.3)$$

が成り立つとする. これを全ての \mathcal{H} について足すと, 総和の中に各 $g(E/\mathcal{D}, E[p]/\mathcal{D})|_{E_L}$ が丁度 p 回ずつ現れるから, 総和は E の階数 p の任意の部分群スキーム \mathcal{D} をわたる和

$$p \sum_{\mathcal{D}} g(E/\mathcal{D}, E[p]/\mathcal{D})|_{E_L} = 0$$

となる. (3.3) をここから引くと $g(E/\mathcal{H}, E[p]/\mathcal{H})|_{E_L} = 0$ が分かる. E が標準部分群 \mathcal{C}_1 を持つ場合は, $E[p]/\mathcal{C}_1$ が E/\mathcal{C}_1 の標準部分群になるとは限らないので $g(E/\mathcal{C}_1, E[p]/\mathcal{C}_1)$ を定義できず, 等式 (3.3) が $\mathcal{H} = \mathcal{C}_1$ でしか成立しない. 従って, 全ての \mathcal{H} に関する総和を考えるためには標準部分群を持たない E に特殊化する必要がある. HBAV の場合は, 各素イデアル $\mathfrak{p} \mid p$ ごとに \mathcal{H} の \mathfrak{p} 部分群を動かして総和を取ると, 線型関係を十分作れて各項が 0 になることを示せる.

参考文献

- [AIP1] F. Andreatta, A. Iovita and V. Pilloni: *On overconvergent Hilbert modular cusp forms*, Astérisque **382** (2016), 163–193.
- [AIP2] F. Andreatta, A. Iovita and V. Pilloni: *Le halo spectral*, preprint.
- [Bel1] J. Bellaïche: *Critical p -adic L -functions*, Invent. Math. **189** (2012), no. 1, 1–60.
- [Bel2] J. Bellaïche: *Eigenvarieties, families of Galois representations, p -adic L -functions*, available at <http://people.brandeis.edu/~jbellaic/>.

- [BeC] J. Bellaïche and G. Chenevier: *Families of Galois representations and Selmer groups*, Astérisque **324** (2009), xii+314 pp.
- [Buz1] K. Buzzard: *Analytic continuation of overconvergent eigenforms*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 29–55.
- [Buz2] K. Buzzard: *Eigenvarieties, L-functions and Galois representations*, 59–120, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **320**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
- [BuC] K. Buzzard and F. Calegari: *The 2-adic eigencurve is proper*, Doc. Math. (2006) Extra Vol., 211–232.
- [BK] K. Buzzard and L. J. P. Kilford: *The 2-adic eigencurve at the boundary of weight space*, Compos. Math. **141** (2005), 605–619.
- [Cal] F. Calegari: *The Coleman-Mazur eigencurve is proper at integral weights*, Algebra Number Theory **2** (2008), no. 2, 209–215.
- [Che] G. Chenevier: *Représentations galoisiennes automorphes et conséquences arithmétiques des conjectures de Langlands et Arthur*, Mémoire d’habilitation à diriger des recherches, Université Paris XI (2013), available at <http://gaetan.chenevier.perso.math.cnrs.fr/pub.html>.
- [CH] G. Chenevier and M. Harris: *Construction of automorphic Galois representations II*, Camb. J. Math. **1** (2013), no. 1, 53–73.
- [Col] R. F. Coleman: *p-adic Banach spaces and families of modular forms*, Invent. Math. **127** (1997), no. 3, 417–479.
- [CM] R. Coleman and B. Mazur: *The eigencurve*, Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996), 1–113, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **254**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [CS] R. Coleman and W. Stein: *Approximation of eigenforms of infinite slope by eigenforms of finite slope*, Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II, 437–449, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004.
- [DL] H. Diao and R. Liu: *The eigencurve is proper*, Duke Math. J. **165**, no. 7 (2016), 1381–1395.
- [DS] P. Deligne and J.-P. Serre: *Formes modulaires de poids 1*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 507–530 (1975).
- [Eme] M. Emerton: *On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms*, Invent. Math. **164** (2006), no. 1, 1–84.
- [Far] L. Fargues: *La filtration canonique des points de torsion des groupes p-divisibles, avec la collaboration de Yichao Tian*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **44** (2011), no. 6, 905–961.
- [GK] E. Z. Goren and P. L. Kassaei: *Canonical subgroups over Hilbert modular varieties*, J. Reine Angew. Math. **670** (2012), 1–63.

- [Gou] F. Q. Gouvêa: *Arithmetic of p -adic modular forms*, Lecture Notes in Mathematics **1304**, Springer-Verlag, Berlin (1988), viii+121 pp.
- [Hat1] S. Hattori: *Canonical subgroups via Breuil-Kisin modules*, Math. Z. **274** (2013), no. 3–4, 933–953.
- [Hat2] S. Hattori: *On a properness of the Hilbert eigenvariety at integral weights: the case of quadratic residue fields*, preprint.
- [Hat3] S. Hattori: *On canonical subgroups of Hilbert-Blumenthal abelian varieties*, preprint.
- [HN] S. Hattori and J. Newton: *Irreducible components of the eigencurve of finite degree are finite over the weight space*, in preparation.
- [Hid] H. Hida: *Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986), no. 2, 231–273.
- [Kat] N. M. Katz: *p -adic properties of modular schemes and modular forms*, Modular functions of one variable III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pp. 69–190. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **350**, Springer, Berlin, 1973.
- [LWX] R. Liu, D. Wan and L. Xiao: *Eigencurve over the boundary of the weight space*, to appear in Duke Math. J.
- [Loe] D. Loeffler: *Overconvergent algebraic automorphic forms*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **102** (2011), no. 2, 193–228.
- [Pil] V. Pilloni: *Overconvergent modular forms*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **63** (2013), no. 1, 219–239.
- [Ser] J.-P. Serre: *Formes modulaires et fonctions zêta p -adiques*, Modular functions of one variable III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, 1972), pp. 191–268. Lecture Notes in Math., Vol. **350**, Springer, Berlin, 1973.
- [Sta] H. Stamm: *On the reduction of the Hilbert-Blumenthal-moduli scheme with $\Gamma_0(p)$ -level structure*, Forum Math. **9** (1997), no. 4, 405–455.
- [Tia] Y. Tian: *Classicality of overconvergent Hilbert eigenforms: case of quadratic residue degrees*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **132** (2014), 133–229.
- [Urb] E. Urban: *Eigenvarieties for reductive groups*, Ann. of Math. (2) **174** (2011), no. 3, 1685–1784.
- [Wil] A. Wiles: *On ordinary λ -adic representations associated to modular forms*, Invent. Math. **94** (1988), no. 3, 529–573.

PRIMITIVE AUTOMORPHISMS OF A SIMPLE ABELIAN VARIETY

KELJI OGUIISO

ABSTRACT. We shall prove that an automorphism of a simple abelian variety is primitive if and only if it is of infinite order.

1. INTRODUCTION

This note provides a supplementary result (Theorem 1.1) of my talk at the sixty-first Algebra Symposium of Mathematical Society of Japan, held at Saga University on September 7–10, 2016. My talk there was based on my previous [Og16-2].

Throughout this note, the base field is assumed to be the complex number field \mathbb{C} . Let M be a smooth projective variety of dimension $m \geq 2$ and $f \in \text{Bir}(M)$.

f is said to be *imprimitive* if there are a smooth projective variety B with $0 < \dim B < m$ and a dominant rational map $\pi : M \dashrightarrow B$ with connected fibers such that π is f -equivariant, i.e., there is $f_B \in \text{Bir}(B)$ satisfying $\pi \circ f = f_B \circ \pi$. As π is just a rational dominant map, smoothness assumption of B is harmless by Hironaka resolution of singularities ([Hi64]). We say that f is *primitive* if it is not imprimitive.

The notion of primitivity is introduced by De-Qi Zhang [Zh09]. Note that if f is primitive, then $\text{ord}(f) = \infty$. Indeed, otherwise, the invariant field $\mathbb{C}(M)^{f^*}$ is of the same transcendental degree m as the rational function field $\mathbb{C}(M)$. Thus we have $\varphi \in \mathbb{C}(M)^f \setminus \mathbb{C}$ as $m \geq 1$. Then the Stein factorization of $\varphi : M \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ is f -equivariant. f is then imprimitive as $m \geq 2$.

Assume that $f \in \text{Aut}(M)$. The *topological entropy* $h_{\text{top}}(f)$ of f is a fundamental quantity measuring the complexity of the orbit behaviour under f^n ($n \geq 0$). Let r_p be the spectral radius of $f^*|H^{p,p}(M)$. Then, by Gromov-Yomdin's theorem, $h_{\text{top}}(f)$ satisfies

$$0 \leq h_{\text{top}}(f) = \log \max_{0 \leq p \leq m} r_p(f)$$

In this note, it is harmless to regard this formula as the definition of $h_{\text{top}}(f)$ (See eg. [Og15] and references therein for details).

The aim of this note is to remark the following:

Theorem 1.1. *Let A be a simple abelian variety of dimension $m \geq 2$ and $f \in \text{Aut}(A)$. Then f is primitive if and only if $\text{ord}(f) = \infty$. In particular, the translation automorphism t_a ($a \in A$) defined by $x \mapsto x + a$ is primitive if a is a non-torsion point of A with fixed zero. Moreover, if in addition A is of CM type, then A admits a primitive automorphism of positive entropy, possibly after replacing A by an isogeny.*

The author is supported by JSPS Grant-in-Aid (S) No 25220701, JSPS Grant-in-Aid (S) 15H05738, JSPS Grant-in-Aid (A) 16H02141, JSPS Grant-in-Aid (B) 15H03611, and by KIAS Scholar Program.

Here and hereafter, an abelian variety $A = \mathbb{C}^m/\Lambda$ is said to be *simple* if A has no abelian subvariety B such that $0 < \dim B < \dim A$. A simple abelian variety A is called of *CM type* if the endomorphism ring $E := \text{End}_{\text{group}}(A) \otimes \mathbb{Q}$ is a CM field with $[E : \mathbb{Q}] = 2 \dim A$. By definition, a field E is a *CM field* if E is a totally imaginary quadratic extension of a totally real number field K . Note that if an abelian variety B is isogenous to a simple abelian variety of CM type, then so is B with the same endomorphism ring as A . However, $\text{Aut}_{\text{group}}(A) \not\cong \text{Aut}_{\text{group}}(B)$ in general (even for elliptic curves of CM type).

The "only if" part of Theorem 1.1 is clear as already remarked. Theorem 1.1 is a generalization of our earlier work [Og16-2, Theorem 4.3]. The last statement of Theorem 1.1 gives an affirmative answer to a question asked by Gongyo at the symposium.

Our proof is a fairly geometric one based on works due to Amerik-Campana [AC13] and Bianco [Bi16] and is in some sense close to [Og16-3].

Acknowledgement. I would like to express my thanks to Professors Tomohide Terasoma, Kota Yoshioka and Fumiharu Kato for their invitation to the symposium, Professor Yoshinori Gongyo for his inspiring question there and Professor Akio Tamagawa for his interest in this work and valuable e-mail correspondence.

2. PROOF OF THEOREM 1.1.

Let A be a simple abelian variety of dimension $m \geq 2$ and $f \in \text{Aut}(A)$ such that $\text{ord}(f) = \infty$. We first show that f is primitive.

The following two well-known propositions will be frequently used:

Proposition 2.1. *Let V be a subvariety of A such that $\dim V < m = \dim A$ and \tilde{V} is a Hironaka resolution of V . Then \tilde{V} is of general type.*

Proof. See [Ue75, Corollary 10.10]. □

Proposition 2.2. *Let M be a smooth projective variety of general type defined over a field k of characteristic 0. Then the birational automorphism group $\text{Bir}(M/k)$ of M over k is a finite group*

Proof. By the Lefschetz principle, we may reduce to [Ue75, Corollary 14.3]. □

Lemma 2.3. *Let P be a very general closed point of A . Then the $\langle f \rangle$ -orbit $\{f^n(P) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ of P is Zariski dense in A .*

Proof. As P is very general, f^n is defined at P for all $n \in \mathbb{Z}$. By [AC13, Théorème 4.1], there is a smooth projective variety B and a dominant rational map $\rho : A \dashrightarrow B$ such that $\rho \circ f = \rho$ and $\rho^{-1}(\rho(P))$ is the Zariski closure of $\langle f \rangle$ -orbit of P . It suffices to show that $\dim B = 0$. In what follows, assume to the contrary that $\dim B > 0$, we derive a contradiction.

Let $\eta \in B$ be the generic point in the sense of scheme and A_η be the fiber over η . Then by Proposition 2.1 and specialization, a Hironaka resolution of each irreducible component of A_η is of general type over $\mathbb{C}(B)$. By $\rho \circ f = \rho$, f faithfully acts on A_η over $\mathbb{C}(B)$. Thus, by Proposition 2.2, $f^n = \text{id}$ on A_η for some positive integer n . Thus $f^n = \text{id}$ on A , as the generic point η_A of A is in A_η . This contradicts to $\text{ord} f = \infty$. □

The following general, useful proposition is due to Bianco:

Proposition 2.4. *Let X be a projective variety and $g \in \text{Bir}(X)$. Assume that $\pi : X \dashrightarrow B$ is a g -equivariant dominant rational map to a smooth projective variety B with $\dim B < \dim X$. Assume that a Hironaka resolution \tilde{X}_b of the fiber X_b is of general type for a general closed point $b \in B$. Then for any very general closed point $P \in X$, the $\langle g \rangle$ -orbit $\{g^n(P) | n \in \mathbb{Z}\}$ of P is never Zariski dense in X .*

Proof. See [Bi16, Section 4]. See also [Og16-3, Remark 2.6] for a minor clarification. \square

The next proposition completes the first part of Theorem 1.1:

Proposition 2.5. *Let A be a simple abelian variety of dimension ≥ 2 and f be an automorphism of A of infinite order. Then f is primitive.*

Proof. Let $\pi : A \dashrightarrow B$ be an f -equivariant dominant rational map to a smooth projective variety B with $\dim B < \dim A$ and with connected fibers. If $\dim B > 0$, then by Proposition 2.1, a Hironaka resolution \tilde{A}_b of the fiber A_b over $b \in B$ is of general type for general $b \in B$. Then, by Proposition 2.4, the $\langle f \rangle$ -orbit of a very general closed point $P \in A$ is not Zariski dense. This contradicts to Lemma 2.3. Thus $\dim B = 0$, i.e., f is primitive. \square

We shall show the last part of Theorem 1.1.

Let A be a simple abelian variety of CM type of dimension $m \geq 2$. We write $E := \text{End}_{\text{group}}(A) \otimes \mathbb{Q}$. Then by definition, E is a totally imaginary quadratic extension of a totally real number field K with $[K : \mathbb{Q}] = m \geq 2$. First we make A explicit up to isogeny. As E is a totally imaginary field with $[E : \mathbb{Q}] = 2m$, there are exactly $2m$ different complex embeddings $\varphi_i : E \rightarrow \mathbb{C}$ ($1 \leq i \leq 2m$) such that $\varphi_{2m-i} = \overline{\varphi_i}$. Here $\overline{}$ is the complex conjugate of \mathbb{C} . Note that there are exactly $2^m \cdot m!$ ways of numberings I of the embeddings here. Choosing one such numbering I , we consider the embedding:

$$\varphi_I := (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) : E \rightarrow \mathbb{C}^m ; a \mapsto (\varphi_1(a), \varphi_2(a), \dots, \varphi_m(a)) .$$

Let O_E (resp. O_K) be the integral closure of \mathbb{Z} in E (resp. in K). Then

$$B_I := \mathbb{C}^m / \varphi_I(O_E)$$

is an abelian variety and A is isogenous to B_I for some numbering I (See eg. [Mi06, Chapter I, Section 3]).

From now, we shall prove that the abelian variety $B := B_I$ admits an automorphism of positive entropy.

Definition 2.6. Let $\overline{\mathbb{Q}}$ be the algebraic closure of \mathbb{Q} in \mathbb{C} , $\overline{\mathbb{Z}}$ be the integral closure of \mathbb{Z} in $\overline{\mathbb{Q}}$ and $\overline{\mathbb{Z}}^\times$ be the unit group of the ring $\overline{\mathbb{Z}}$. A real algebraic integer is an element of $\overline{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{R}$. A real algebraic integer α is called a *Pisot number* if $\alpha > 1$ and $|\alpha'| < 1$ for all Galois conjugates $\alpha' \neq \alpha$ of α over \mathbb{Q} . A Pisot number α is called a *Pisot unit* if $\alpha \in \overline{\mathbb{Z}}^\times$.

Then, by [BDGPS92, Theorem 5.2.2], we have

Theorem 2.7. *For any real number field L , there is a Pisot unit $\alpha \in L$ such that $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.*

As K is (totally) real, there is then a Pisot unit α such that $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Consider the linear automorphism of \mathbb{C}^m defined by:

$$\tilde{f}_\alpha : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d ; (z_1, z_2, \dots, z_m) \mapsto (\varphi_1(\alpha)z_1, \varphi_2(\alpha)z_2, \dots, \varphi_m(\alpha)z_m) .$$

As α is a unit in O_K (hence in O_E), so are $\varphi_i(\alpha)$ in $\varphi_i(O_E)$. Thus $\tilde{f}_\alpha(\varphi_I(O_E)) = \varphi_I(O_E)$ by the definition of φ_I . Hence \tilde{f}_α descends to an automorphism f_α of B . We set $f := f_\alpha$.

As K is totally real, regardless of I , we have

$$\{\varphi_i(\alpha) \mid 1 \leq i \leq m\} = \{\alpha := \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}.$$

Here the right hand side is the set of all Galois conjugates of α over \mathbb{Q} . By the construction of f from \tilde{f}_α , the left hand side set also coincides with the set of eigenvalues of $f_*|H^0(B, \Omega_B^1)^*$, and therefore, coincides with the set of eigenvalues of $f^*|H^0(B, \Omega_B^1)$. As B is an abelian variety, we have

$$H^{1,1}(B) = H^0(B, \Omega_B^1) \otimes \overline{H^0(B, \Omega_B^1)}.$$

Here $\overline{H^0(B, \Omega_B^1)}$ is the complex conjugate of $H^0(B, \Omega_B^1) \subset H^1(B, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$. As α is real, it follows that α^2 is an eigenvalue of the action of f on $H^{1,1}(B)$. Hence

$$h_{\text{top}}(f) \geq r_1(f) \geq \alpha^2 > 1.$$

Here the last inequality follows from the fact that $\alpha > 1$. Thus f is of positive entropy. In particular, $\text{ord}(f) = \infty$. Therefore, f is primitive as well by the first part of Theorem 1.1. This completes the proof of Theorem 1.1.

REFERENCES

- [AC13] Amerik, E., Campana, F., : *Fibrations Méromorphes Sur Certaines Variétés à Fibré Canonique Trivial*, Pure and Applied Mathematics Quarterly, Special Issue: In honor of Fedor Bogomolov, **4** (2008) 509–545.
- [Bi16] Bianco, F. L., : *On the primitivity of birational transformations of irreducible symplectic manifolds*, arXiv:1604.05261.
- [BDGPS92] Bertin, M.J., Decomps-Guilloux, A., Grandet-Hugot, M., Pathiaux-Delefosse, M., Schreiber, J., : *Pisot and Salem Numbers*, Birkhäuser (1992).
- [Hi64] Hironaka, H., : *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II.*, Ann. of Math. **79** (1964) 109–203; **79** (1964) 205–326.
- [Mi06] Milne, J.S., : *Complex Multiplication*, at: <http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/CM.pdf>
- [Og15] Oguiso, K., : *Some aspects of explicit birational geometry inspired by complex dynamics*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Seoul 2014 (Invited Lectures) Vol.II (2015) 695–721.
- [Og16-1] Oguiso, K., : *Simple abelian varieties and primitive automorphisms of null entropy of surfaces* : in K3 Surfaces and their Moduli, Progress in Math., Birkhäuser Progress in Mathematics **315** (2016) 279–296.
- [Og16-2] Oguiso, K., : *Pisot units, Salem numbers and higher dimensional projective manifolds with primitive automorphisms of positive entropy*, arXiv:1608.03122.
- [Og16-3] Oguiso, K., : *A criterion for the primitivity of a birational automorphism of a Calabi-Yau manifold and an application*, arXiv:1612.09016.
- [Ue75] Ueno, K., *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Lecture Notes in Mathematics, **439**, Springer-Verlag, 1975.
- [Zh09] Zhang, D.-Q., : *Dynamics of automorphisms on projective complex manifolds*, J. Differential Geom. **82** (2009) 691–722.

MATHEMATICAL SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKYO, MEGURO KOMABA 3-8-1, TOKYO, JAPAN AND KOREA INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY, HOEGIRO 87, SEOUL, 133-722, KOREA

E-mail address: oguiso@ms.u-tokyo.ac.jp

PURITY OF RECIPROCITY SHEAVES AND MOTIVES WITH MODULUS

SHUJI SAITO (TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY)

ABSTRACT. This is a survey on recent development of theory of *motives with modulus*, which generalizes Voevodsky's theory of motives to a non-homotopy invariant framework.

CONTENTS

| | |
|---|----|
| 1. Conjectural theory of motives | 1 |
| 2. Voevodsky's theory of motives | 2 |
| 3. Non-homotopy invariant theory of motives | 6 |
| 4. Reciprocity sheaves | 7 |
| 5. Theory of motives with modulus | 9 |
| 6. Motivic cohomology with modulus and open questions | 11 |
| References | 13 |

1. CONJECTURAL THEORY OF MOTIVES

In 1980's Beilinson [1] and Deligne [8] independently formulated conjectures on theory of (mixed) motives:

Conjecture 1.1. *Fix a base field k . There exists an abelian tensor category \mathcal{MM}_k of motives over k enjoying the following properties.*

- (1) \mathcal{MM}_k contains Grothendieck's category \mathcal{M}_k of pure motives over k as the full subcategory of semi-simple objects.
- (2) Let \mathbf{Sch} be the category of schemes separated of finite type over k . Then there exist a functor^{1 2},

$$\mathbf{Sch} \rightarrow D(\mathcal{MM}_k) ; X \rightarrow M(X),$$

where $D(\mathcal{MM}_k)$ is the derived category of (unbounded³) complexes in \mathcal{MM}_k and natural isomorphisms for $X \in \mathbf{Sch}$ and

¹This is a covariant variant of the original formulation of Beilinson who used a contravariant functor.

² $M(X)$ is called the motive of $X \in \mathbf{Sch}$.

³In Beilinson's original version, bounded complexes are used.

$$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$(1.1) \quad \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{MM}_k)}(M(X), \mathbb{Z}(n)[i]) \otimes \mathbb{Q} \simeq K_{2n-i}(X)^{(n)},$$

where $\mathbb{Z}(n)$ is a distinguished object of $D(\mathcal{MM}_k)$ called the Tate object⁴ and $K_j(X)^{(n)}$ is the weight n eigenspace for Adams operations on the algebraic K -group $K_j(X)$ of X .

The abelian groups

$$H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Z}(n)) := \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{MM}_k)}(M(X), \mathbb{Z}(n)[i]) \quad \text{for } X \in \mathbf{Sch}$$

should form the universal cohomology theory on \mathbf{Sch} , and it is called *motivic cohomology*.

Bloch [2] gave a cycle-theoretic description of motivic cohomology (at least for smooth k -schemes). He introduced higher Chow groups $CH^n(X, j)$ for $X \in \mathbf{Sch}$ and $n, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ as a generalization of Chow groups⁵, and proved that the Chern class map induces an isomorphism

$$K_j(X)^{(n)} \simeq CH^n(X, j) \quad \text{for } X \in \mathbf{Sm}.$$

This leads us to the following.

Conjecture 1.2. *For X smooth over k , there is a natural isomorphism*

$$H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Z}(n)) \simeq CH^n(X, 2n - i).$$

The category \mathcal{MM}_k has not yet been constructed while Voevodsky [25] in 1990's brought about a big progress in theory of motives by constructing a triangulated category $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}$ which have the properties expected for $D(\mathcal{MM}_k)$ at least restricted to smooth schemes over k ⁶.

2. VOEVODSKY'S THEORY OF MOTIVES

We recall Voevodsky's construction of triangulated categories $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}$ of motives over k in [25].

Let \mathbf{Sm} be the category of smooth separated k -schemes and \mathbf{Cor} be the category which has the same objects as \mathbf{Sm} and whose morphisms are *finite correspondences*: For $X, Y \in \mathbf{Sm}$, we define $\mathbf{Cor}(X, Y)$ to be the free abelian group on the set of integral closed subscheme $Z \subset X \times Y$ which are finite and surjective on a connected component of X .

Let \mathbf{PST} be the category of additive contravariant functors from \mathbf{Cor} to the category \mathbf{Ab} of abelian groups. An object $F \in \mathbf{PST}$ is called

⁴See Remark 2.5 for the definition.

⁵ $CH^n(X, 0)$ coincides with the Chow group $CH^n(X)$ of algebraic cycles of codimension n on X modulo rational equivalence

⁶Levine and Hanamura made independent constructions and all constructions are now known to be equivalent.

a *presheaf with transfers*. Note that \mathbf{PST} is an abelian category. For $X \in \mathbf{Sm}$ let $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X) \in \mathbf{PST}$ be represented by X by Yoneda: For $Y \in \mathbf{Sm}$, we have $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)(Y) = \mathbf{Cor}(Y, X)$.

Recall that for $X \in \mathbf{Sm}$ the small Nisnevich site X_{Nis} is the category of étale morphisms $Y \rightarrow X$ equipped with the class of *Nisnevich coverings*: An étale covering $\{p_i : U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ is a Nisnevich covering if for all $x \in X$, there exists $i \in I$ and $y \in U_i$ such that $p_i(y) = x$ and $k(x) \simeq k(y)$.

For $F \in \mathbf{PST}$ and $X \in \mathbf{Sm}$ let F_X be the presheaf on X_{Nis} induced by F . Let \mathbf{NST} be the full subcategory of \mathbf{PST} consisting of $F \in \mathbf{PST}$ such that F_X is a sheaf on X_{Nis} . One easily sees $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X) \in \mathbf{NST}$ for $X \in \mathbf{Sm}$.

Theorem 2.1. (*Voevodsky*)

- (1) *The natural inclusion $\mathbf{NST} \rightarrow \mathbf{PST}$ admits an exact left adjoint $a_{\mathrm{Nis}} : \mathbf{PST} \rightarrow \mathbf{NST}$ such that for all $X \in \mathbf{Sm}$, $(a_{\mathrm{Nis}}F)_X$ is the Nisnevich sheafification of F_X .*
- (2) *The category \mathbf{NST} is Grothendieck abelian⁷.*
- (3) *Let $D(\mathbf{NST})$ be the derived category of unbounded complexes in \mathbf{NST} . For $F \in D(\mathbf{NST})$ and $X \in \mathbf{Sm}$, there is a canonical isomorphism*

$$H^i(X_{\mathrm{Nis}}, F_X) \simeq \mathrm{Hom}_{D(\mathbf{NST})}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X), F[i]).$$

In what follows we write $F_{\mathrm{Nis}} = a_{\mathrm{Nis}}F$ for $F \in \mathbf{MPST}$.

Definition 2.2. Define $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}$ as the localization of $D(\mathbf{NST})$ by the localising subcategory generated by the complexes

$$\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X \times \mathbf{A}^1) \rightarrow \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X) \text{ for } X \in \mathbf{Sm},$$

where the maps are induced by the projections $X \times \mathbf{A}^1 \rightarrow X$.

By the definition we have a functor

$$(2.1) \quad M : \mathbf{Sm} \rightarrow \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}},$$

which maps $X \in \mathbf{Sm}$ to $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X) \in \mathbf{NST}$ considered as a complex by putting it in degree 0.⁸ By a general result of Neeman [18], the localization functor $\pi : D(\mathbf{NST}) \rightarrow \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}$ admits a fully faithful right adjoint $j : \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}} \rightarrow D(\mathbf{NST})$.

⁷see [24] for a definition of Grothendieck abelian categories. An important property is that it admits enough injectives.

⁸This should correspond to the functor in Conjecture 1.1(2).

In order to state a fundamental theorem in Voevodsky's theory, we need introduce a construction due to Suslin⁹.

Definition 2.3. For $X \in \mathbf{Sm}$ define $\tilde{C}_n(X) \in \mathbf{NST}$ by

$$\tilde{C}_n(X)(Y) = \mathbf{Cor}(Y \times (\mathbf{A}^1)^n, X).$$

We then put

$$C_n(X) = \text{Coker} \left(\oplus (p_i^n)^* : \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \tilde{C}_{n-1}(X) \rightarrow \tilde{C}_n(X) \right),$$

where $(p_i^n)^*$ is induced by the projection $p_i^n : (\mathbf{A}^1)^n \rightarrow (\mathbf{A}^1)^{n-1}$ removing the i -th factor. For $n \geq 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$ and $\varepsilon \in \{0, 1\}$, define $\delta_{i,\varepsilon}^n : (\mathbf{A}^1)^{n-1} \rightarrow (\mathbf{A}^1)^n$ to be the map inserting ε at the i -th component. It induce maps in \mathbf{NST}

$$\delta_{i,\varepsilon}^{n,*} : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$$

and define coboundary maps by

$$d_n := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\delta_{i,0*}^n - \delta_{i,\infty*}^n) : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X).$$

Thus we obtain a chain complex $C_*(X)$ in \mathbf{NST} .

The following result is a key to Voevodsky's theory of motives.

Theorem 2.4. (Voevodsky) *Assume k is perfect. For $X, Y \in \mathbf{Sm}$, there is a canonical isomorphism for $j \in \mathbb{Z}$:*

$$(2.2) \quad \text{Hom}_{\mathbf{DM}^{\text{eff}}}(M(Y), M(X)[j]) \simeq \mathbb{H}^j(Y_{\text{Nis}}, C_*(X)_Y).$$

where $C_*(X)_Y$ is the complex of sheaves on Y_{Nis} induced by $C_*(X)$.

Remark 2.5. Let $\mathbb{Z}(1) = \widetilde{M}(\mathbf{P}^1)[-2] \in \mathbf{DM}^{\text{eff}}$, where $\widetilde{M}(\mathbf{P}^1)$ is the kernel of the splitting epimorphism $M(\mathbf{P}^1) \rightarrow M(\text{Spec}(k))$ induced by the projection $\mathbf{P}^1 \rightarrow \text{Spec}(k)$. Define the Tate object $\mathbb{Z}(n) = \mathbb{Z}(1)^{\otimes n}$. Voevodsky defines *motivic cohomology* as

$$(2.3) \quad H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Z}(n)) := \text{Hom}_{\mathbf{DM}^{\text{eff}}}(M(X), \mathbb{Z}(n)[i]) \quad \text{for } X \in \mathbf{Sm}.$$

Using moving lemmas of algebraic cycles from [9], [23] and [2], Voevodsky deduced from Theorem 2.4 a natural isomorphism

$$(2.4) \quad H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Z}(n)) \simeq \text{CH}^n(X, 2n - i)$$

and thus proved Conjecture 1.2.

⁹This is a cubical variant of the original definition of Suslin who used a simplicial version.

Remark 2.6. Assuming $\text{ch}(k) = 0$, the functor (2.1) is extended to a functor¹⁰

$$M : \mathbf{Sch} \rightarrow \mathbf{DM}^{\text{eff}}.$$

Hence we can define motivic cohomology for $X \in \mathbf{Sch}$ by the formula (2.3). However this is not expected to serve as motivic cohomology envisioned in Conjecture 1.1 (See §3).

The proof of Theorem 2.4 is quite involved and long. It is based on Voevodsky's theory of *homotopy invariant presheaves with transfers*.

Definition 2.7. An object $F \in \mathbf{PST}$ is called homotopy invariant if for any $X \in \mathbf{Sm}$, the projection $X \times \mathbf{A}^1 \rightarrow X$ induces an isomorphism $F(X) \simeq F(X \times \mathbf{A}^1)$. Let $\mathbf{HI} \subset \mathbf{PST}$ be the full subcategory of homotopy invariant presheaves with transfers.

It turns out that $\mathbf{HI} \subset \mathbf{PST}$ is an abelian subcategory.

Now we state Voevodsky's fundamental results on \mathbf{HI} ¹¹. Theorem 2.4 is deduced from them by general arguments in homological algebra.

Theorem 2.8. *Let $F \in \mathbf{HI}$. Then*

- (1) $F_{\text{Nis}} \in \mathbf{HI}$.
- (2) *For a dense open immersion $U \hookrightarrow X$ in \mathbf{Sm} , the restriction $F_{\text{Nis}}(X) \rightarrow F_{\text{Nis}}(U)$ is injective.*

To state the second main result on \mathbf{HI} , we introduce some notations. For $X \in \mathbf{Sm}$ and $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, let $X^{(n)}$ be the set of points $x \in X$ such that the closure of x in X is of dimension n . For $F \in \mathbf{PST}$ and $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ and $S \in \mathbf{Sm}$, define

$$F_{-n}(S) = \text{Coker} \left(\bigoplus_{1 \leq i \leq n} F((\mathbf{G}_m)^{i-1} \times \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{G}_m)^{n-i} \times S) \rightarrow F((\mathbf{G}_m)^n \times S) \right),$$

where \mathbf{A}^1 is the affine line over k and $\mathbf{G}_m = \mathbf{A}^1 - 0$. This gives an endofunctor $\mathbf{PST} \rightarrow \mathbf{PST}; F \rightarrow F_{-n}$.

Theorem 2.9. *Assume k is perfect. For $F \in \mathbf{HI} \cap \mathbf{NST}$, $X \in \mathbf{Sm}$ and $x \in X^{(n)}$ with $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, we have*

$$(2.5) \quad H_x^i(X_{\text{Nis}}, F_X) = 0 \quad \text{for } i \neq n,$$

and there exists a natural isomorphism:

$$(2.6) \quad \theta_x : F_{-n}(x) \simeq H_x^n(X_{\text{Nis}}, F_X).$$

¹⁰Shane Kelly proved that such an extension exists also in case $\text{ch}(k) > 0$ if one inverts the exponential characteristic of k for \mathbf{DM}^{eff} .

¹¹Here we state the results for Nisnevich sheaves. Voevodsky proves also the similar results for Zariski sheaves. In the application to theory of motives, only the results for Nisnevich sheaves are used

To state the last result on **HI**, we note the following fact: For $F \in \mathbf{NST}$ and $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, the presheaf $X \rightarrow H^i(X_{\text{Nis}}, F_X)$ on **Sm** is considered as an object H_F^i of **PST**.¹²

Theorem 2.10. *Assume k is perfect. For $F \in \mathbf{HI} \cap \mathbf{NST}$, we have $H_F^i \in \mathbf{HI}$.*

3. NON-HOMOTOPY INVARIANT THEORY OF MOTIVES

As we have seen, Voevodsky's theory of motives is based on homotopy invariance (see Definition 2.7). This implies that the invariants for $X \in \mathbf{Sch}$ arising from his category \mathbf{DM}^{eff} such as motivic cohomology defined as (2.3) should have this property (see Remark 2.6). The homotopy invariance implies also the nil-invariance, which means the invariance when X is replaced by its reduced part X_{red} . However algebraic K -theory does not have these properties: For $X \in \mathbf{Sch}$, $K_n(X) \rightarrow K_n(X \times \mathbf{A}^1)$ is not an isomorphism in general unless $X \in \mathbf{Sm}$, and $K_n(X)$ is not nil-invariant in general, either.

On the other hand there are phenomena which motivates us to extend theory of motives to non-homotopy invariant (and non-nil-invariant) framework. One of them is the works on Grothendieck's variational Hodge conjecture by Bloch-Esnault-Kerz [6] and Morrow [16]. Another is the work of Kerz-Saito [15] on wildly ramified higher dimensional class field theory. Here we give a brief explanation on the latter.

For $X \in \mathbf{Sm}$ choose a dense open immersion $X \hookrightarrow \overline{X}$ such that \overline{X} is integral and proper over k and that $\overline{X} - X$ is the support of some $D \in \text{Div}(\overline{X})^+$, where $\text{Div}(\overline{X})^+$ denotes the monoid of effective Cartier divisors on \overline{X} . In [15], for $D \in \text{Div}(\overline{X})^+$, the *Chow group* $\text{CH}_0(\overline{X}|D)$ of zero-cycles with modulus is introduced as a generalization of the Chow group $\text{CH}_0(X)$ of zero-cycles on X . It is defined as a quotient of the group of zero-cycles on X by an equivalence relation given by rational functions on curves on X which satisfies a certain modulus condition with respect to D . Then, putting

$$C(X) := \varprojlim_{D \in \text{Div}(\overline{X})^+} \text{CH}_0(\overline{X}|D)$$

where D ranges over all elements of $\text{Div}(\overline{X})^+$ such that $|D| = \overline{X} - X$, one can show that $C(X)$ is independent of the choice of \overline{X} and hence is an invariant of $X \in \mathbf{Sm}$.

¹²This is a consequence of Theorem 2.1(3).

Theorem 3.1. ([15]) *Assume k is finite and $\text{ch}(k) \neq 2$. Then there exists a canonical isomorphism*

$$C(X) \simeq W^{ab}(X),$$

where the right hand side denote the abelian Weil group of X , namely the subgroup of the abelian fundamental group $\pi_1^{ab}(X)$ consisting of elements whose images in the absolute Galois group of k are integral powers of the Frobenius substitution.

Recall that $W^{ab}(X)$ carries information on wild ramification of abelian coverings of X along $\overline{X} - X$ which is known to be not homotopy invariant. Hence there is no hope to recover $C(X)$ (and also $\text{CH}_0(\overline{X}|D)$) from Voevodsky's category \mathbf{DM}^{eff} .

4. RECIPROCITY SHEAVES

In order to extend Voevodsky's paradigm to a non-homotopy invariant framework, we use a new full abelian subcategory $\mathbf{RSC} \subset \mathbf{PST}$ of *reciprocity presheaves*, which was introduced by Kahn-Saito-Yamazaki in [10] and [14].¹³ It contains \mathbf{HI} and many objects of \mathbf{PST} which are not in \mathbf{HI} , such as the sheaf of the additive group \mathbf{G}_a and the sheaf Ω^i of Kähler differential forms.

First we recall the following (see [17, Lem. 2.16]).

Lemma 4.1. *A given $F \in \mathbf{PST}$ is in \mathbf{HI} if and only if for any $X \in \mathbf{Sm}$ and $a \in F(X)$, the map $a : \mathbb{Z}_{\text{tr}}(X) \rightarrow F$ in \mathbf{PST} associated to a by the Yoneda functor, factors through the map $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X) \rightarrow h_0(X)$. Here $h_0(X)$ is a quotient of $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X)$ in \mathbf{PST} defined by*

$$(4.1) \quad \begin{aligned} h_0(X)(Y) &= \text{Coker} \left(\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X)(Y \times \mathbf{A}^1) \xrightarrow{i_0^* - i_1^*} \mathbb{Z}_{\text{tr}}(X)(Y) \right) \quad (Y \in \mathbf{Sm}) \\ &= \text{Coker} \left(\mathbf{Cor}(Y \times \mathbf{A}^1, X) \xrightarrow{i_0^* - i_1^*} \mathbf{Cor}(Y, X) \right), \end{aligned}$$

where i_ε^* for $\varepsilon = 0, 1$ is the pullback by the section $i_\varepsilon : \text{Spec}(k) \rightarrow \mathbf{A}^1$.

The key idea to define \mathbf{RSC} is to introduce bigger quotients $h_0(\mathcal{X})$ of $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X)$ associated to $\mathcal{X} \in \mathbf{MSm}(X)$, where $\mathbf{MSm}(X)$ is the set of pairs $\mathcal{X} = (\overline{X}, X_\infty)$ of locally integral proper schemes \overline{X} over k and effective Cartier divisors X_∞ on \overline{X} such that $X = \overline{X} - |X_\infty| \in \mathbf{Sm}$. It is defined by

$$(4.2) \quad h_0(\mathcal{X})(Y) = \text{Coker} \left(\mathbf{MCor}(Y \times \overline{\square}, \mathcal{X}) \xrightarrow{i_0^* - i_1^*} \mathbf{Cor}(Y, X) \right) \quad (Y \in \mathbf{Sm}),$$

¹³The category \mathbf{RSC} is denoted by \mathbf{SCRec} in [14]. It is slightly smaller than the category \mathbf{Rec} studied in [10].

where $\mathbf{MCor}(Y \times \overline{\square}, \mathcal{X})$ is the subgroup of $\mathbf{Cor}(Y \times \mathbf{A}^1, X)$ generated by integral closed subschemes $Z \subset Y \times \mathbf{A}^1 \times X$ which are finite and surjective over a component of $Y \times \mathbf{A}^1$ and satisfies the following additional condition (called modulus condition): Let $\overline{Z} \subset Y \times \mathbf{P}^1 \times \overline{X}$ be the closure of Z and \overline{Z}^N be its normalization with the projections $p : \overline{Z}^N \rightarrow \overline{X}$ and $q : \overline{Z}^N \rightarrow \mathbf{P}^1$. Then we have the following inequality of Caritier divisors on \overline{Z}^N

$$q^* \infty \geq p^* X_\infty.$$

Definition 4.2. Let $F \in \mathbf{PST}$ and $X \in \mathbf{Sm}$. We say F has reciprocity if for any $X \in \mathbf{Sm}$ and $a \in F(X)$, there exists $\mathcal{X} \in \mathbf{MSm}(X)$ such that the map $a : \mathbb{Z}_{\text{tr}}(X) \rightarrow F$ associated to $a \in F(X)$ factors through $h_0(\mathcal{X})$. We write $\mathbf{RSC} \subset \mathbf{PST}$ for the full subcategory of reciprocity presheaves.

By definition $h_0(X)$ is a quotient of $h_0(\mathcal{X})$ for any $\mathcal{X} \in \mathbf{MSm}(X)$ so that $\mathbf{HI} \subset \mathbf{RSC}$. It turns out that \mathbf{RSC} is an abelian category closed under subobjects and quotients in \mathbf{PST} .

We now state our main results for reciprocity sheaves. The first result generalizes Theorem 2.8.

Theorem 4.3. ([22]) *Let $F \in \mathbf{RSC}$. Then*

- (1) $F_{\text{Nis}} \in \mathbf{RSC}$.
- (2) *For a dense open immersion $U \hookrightarrow X$ in \mathbf{Sm} , the restriction $F_{\text{Nis}}(X) \rightarrow F_{\text{Nis}}(U)$ is injective.*

Take $X \in \mathbf{Sm}$ and $x \in X$. Using the perfectness of k , one can show that there is an isomorphism

$$\varepsilon : X|_x^h \simeq \text{Spec } K\{t_1, \dots, t_n\}.$$

where $X|_x^h$ be the henselization of X at x and $K = k(x)$ and (t_1, \dots, t_n) is a system of regular parameter of X at x , and $K\{x_1, \dots, x_d\}$ is the henselization of $K[x_1, \dots, x_d]$ at (t_1, \dots, t_n) . The second result generalizes Theorem 2.9.

Theorem 4.4. ([22]) *Let $F \in \mathbf{RSC} \cap \mathbf{NST}$. For $X \in \mathbf{Sm}$ and $x \in X^{(n)}$ with $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, we have*

$$(4.3) \quad H_x^i(X_{\text{Nis}}, F_X) = 0 \quad \text{for } i \neq n,$$

and there exists an isomorphism depending on ε :

$$(4.4) \quad \theta_\varepsilon : F_{-n}(x) \simeq H_x^n(X_{\text{Nis}}, F_X).$$

The last result is a variant of Theorem 2.10 for \mathbf{RSC} .

Theorem 4.5. ([22]) *Assume $\text{ch}(k) = 0$ or the following condition:*

(RS) *For any pair (X, D) of a locally integral scheme X and an effective Cartier divisor D on X such that $X - |D| \in \mathbf{Sm}$ and is dense in X , there exists a proper birational map $\pi : X' \rightarrow X$ such that $X' \in \mathbf{Sm}$ and $\pi^{-1}(D)_{\text{red}}$ is a simple normal crossing divisor and that π is an isomorphism over $X - |D|$.*

Then, for $F \in \mathbf{RSC} \cap \mathbf{NST}$, we have $H_F^i \in \mathbf{RSC}$.

The above theorems give an affirmative answer to [10, Conjecture 1] except the part on the coincidence of Nisnevich and Zariski cohomology.

5. THEORY OF MOTIVES WITH MODULUS

In this section we explain the construction of Kahn-Saito-Yamazaki [14] of a new triangulated category of *motives with modulus*, which extends Voevodsky's construction of his category of motives to a non-homotopy invariant setting. For this we first need generalize the theory of presheaves with transfers to *presheaves with transfers with modulus*.

Definition 5.1. (see [14, Definitions 1.1 and 1.8]) The category \mathbf{MCor} of *modulus pairs* has objects $\mathcal{X} = (\overline{X}, X_\infty)$, where $\overline{X} \in \mathbf{Sch}$ is locally integral and X_∞ is an effective Cartier divisor on \overline{X} such that $\overline{X} - |X_\infty| \in \mathbf{Sm}$ and is dense in \overline{X} (The case $|X_\infty| = \emptyset$ is allowed). For $\mathcal{X} = (\overline{X}, X_\infty), \mathcal{X}' = (\overline{X}', X'_\infty) \in \mathbf{MCor}$ with $X = \overline{X} - |X_\infty|$ and $X' = \overline{X}' - |X'_\infty|$, the morphism group $\mathbf{MCor}(\mathcal{X}', \mathcal{X})$ is the subgroup of $\mathbf{Cor}(X', X)$ freely generated by integral closed subschemes $Z \subset X' \times X$ finite and surjective over a connected component of X' satisfying the following additional condition: Let \overline{Z}^N be the normalization of the closure \overline{Z} of Z in $\overline{X}' \times \overline{X}$ with $p : \overline{Z}^N \rightarrow \overline{X}$ and $q : \overline{Z}^N \rightarrow \overline{X}'$ the projections. Then \overline{Z} is proper over \overline{X}' and we have the inequality $q^*X'_\infty \geq p^*X_\infty$ of Cartier divisors on \overline{Z}^N .

We call \mathcal{X} *proper* if \overline{X} is proper over k and let \mathbf{MCor} denote the full subcategory of \mathbf{MCor} whose objects are proper modulus pairs.

Definition 5.2. Let \mathbf{MPST} (resp. \mathbf{MPST}) be the abelian category of contravariant additive functors $\mathbf{MCor} \rightarrow \mathbf{Ab}$ (resp. $\mathbf{MCor} \rightarrow \mathbf{Ab}$). For $\mathcal{X} \in \mathbf{MCor}$ (resp. $\mathcal{X} \in \mathbf{MCor}$) let $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(\mathcal{X}) \in \mathbf{MPST}$ (resp. $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(\mathcal{X}) \in \mathbf{MPST}$) be the object represented by \mathcal{X} .

We have a functor

$$\omega : \mathbf{MCor} \rightarrow \mathbf{Cor} ; (\overline{X}, X_\infty) \rightarrow \overline{X} - |X_\infty|,$$

and a pair of adjunction

$$(5.1) \quad \mathbf{MPST} \begin{array}{c} \xrightarrow{\tau_!} \\ \xleftarrow{\tau^*} \end{array} \underline{\mathbf{MPST}}, \quad \mathbf{MPST} \begin{array}{c} \xrightarrow{\omega_!} \\ \xleftarrow{\omega^*} \end{array} \mathbf{PST},$$

where τ^* is induced by the natural inclusion $\tau : \mathbf{MCor} \rightarrow \underline{\mathbf{MCor}}$ and $\tau_!$ is its left Kan extension, and ω^* is induced by ω and $\omega_!$ is its left Kan extension.

Definition 5.3. For $F \in \underline{\mathbf{MPST}}$ and $\mathcal{X} = (\overline{X}, X_\infty) \in \underline{\mathbf{MCor}}$ write $F_{\mathcal{X}}$ for the presheaf on the Nisnevich site $\overline{X}_{\text{Nis}}$ over \overline{X} given by $U \rightarrow F(\mathcal{X}_U)$ for $U \rightarrow \overline{X}$ étale, where $\mathcal{X}_U = (U, X_\infty \times_{\overline{X}} U) \in \underline{\mathbf{MCor}}$. Let $\underline{\mathbf{MNST}} \subset \underline{\mathbf{MPST}}$ be the full subcategory of such $F \in \underline{\mathbf{MPST}}$ that $F_{\mathcal{X}}$ are Nisnevich sheaves for all $\mathcal{X} \in \underline{\mathbf{MCor}}$. Let $\mathbf{MNST} \subset \mathbf{MPST}$ be the full subcategory of such $F \in \mathbf{MPST}$ that $\tau_! F \in \underline{\mathbf{MNST}}$.

The following variant of Theorem 2.1 is proved in [14]¹⁴.

Theorem 5.4. (1) *The natural inclusion $\mathbf{MNST} \rightarrow \mathbf{MPST}$ admits an exact left adjoint $a_{\text{Nis}} : \mathbf{MPST} \rightarrow \mathbf{MNST}$ such that for all $\mathcal{X} \in \mathbf{MCor}$, $(a_{\text{Nis}} F)_{\mathcal{X}}$ is the Nisnevich sheafification of $F_{\mathcal{X}}$.*

(2) *The category \mathbf{MNST} is Grothendieck abelian.*

(3) *Let $D(\mathbf{MNST})$ be the derived category of (unbounded) complexes in \mathbf{MNST} . For $F \in D(\mathbf{MNST})$ and $\mathcal{X} = (\overline{X}, X_\infty) \in \mathbf{MCor}$, there is a canonical isomorphism*

$$\mathbb{H}^i(\overline{X}_{\text{Nis}}, F_{\mathcal{X}}) \simeq \text{Hom}_{D(\mathbf{MNST})}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}(\mathcal{X}), F[i]).$$

In what follows we write $F_{\text{Nis}} = a_{\text{Nis}} F$ for $F \in \mathbf{MPST}$.

Definition 5.5. An object $F \in \mathbf{MPST}$ is called $\overline{\square}$ -invariant if $F(\mathcal{X}) \simeq F(\mathcal{X} \times \overline{\square})$ for all $\mathcal{X} \in \mathbf{MCor}$, where $\overline{\square} = (\mathbf{P}^1, \infty)$ and $\mathcal{X} \times \overline{\square} = (\overline{X} \times \mathbf{P}^1, \overline{X} \times \infty + X_\infty \times \mathbf{P}^1) \in \mathbf{MCor}$ for $\mathcal{X} = (\overline{X}, X_\infty)$.

Definition 5.6. Define \mathbf{MDM} as the localization of $D(\mathbf{MNST})$ by the localising subcategory generated by the complexes

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}(\mathcal{X} \times \overline{\square}) \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}(\mathcal{X}) \quad \text{for } \mathcal{X} \in \mathbf{MCor},$$

where the maps are induced by the projections $\mathcal{X} \times \overline{\square} \rightarrow \mathcal{X}$.

By the definition we have a functor $M : \mathbf{MCor} \rightarrow \mathbf{MDM}$ which maps $\mathcal{X} \in \mathbf{MCor}$ to $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(\mathcal{X}) \in \mathbf{MNST}$ considered as a complex by

¹⁴The similar result holds for $\underline{\mathbf{MNST}}$ instead of \mathbf{MNST} .

putting it in degree 0. We have a commutative diagram

$$(5.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{MCor} & \xrightarrow{M} & \mathbf{MDM}^{\text{eff}} \\ \omega \downarrow & & \omega_{\text{eff}} \downarrow \\ \mathbf{Cor} & \xrightarrow{M} & \mathbf{DM}^{\text{eff}}, \end{array}$$

where ω_{eff} is induced by $\omega_!$ from (5.1). In [14] is shown the following.

Theorem 5.7. *The functor ω_{eff} is a localization and admits a fully faithful adjoint ω^{eff} .*

Definition 5.8. For $\mathcal{X} \in \mathbf{MCor}$ define $\tilde{C}_n(\mathcal{X}) \in \mathbf{MNST}$ by

$$\tilde{C}_n(\mathcal{X})(\mathcal{Y}) = \mathbf{MCor}(\mathcal{Y} \times \overline{\square}^n, \mathcal{X}).$$

Then the same construction as Definition 2.3 produces a chain complex $C_*(\mathcal{X})$ in \mathbf{MNST} .

We have the following variant of Theorem 2.4. Its proof uses the results in §4¹⁵

Theorem 5.9. ([22]) *Assume $\text{ch}(k) = 0$ or (RS) from Theorem 4.5. For $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbf{MCor}$ and $j \in \mathbb{Z}$, there is a canonical isomorphism*

$$(5.3) \quad \text{Hom}_{\mathbf{MDM}}(M(\mathcal{Y}), M(\mathcal{X})[i]) \simeq H^i(\overline{Y}_{\text{Nis}}, C_*(\mathcal{X})_{\mathcal{Y}})$$

where $C_*(\mathcal{X})_{\mathcal{Y}}$ is the complex of sheaves on $\overline{Y}_{\text{Nis}}$ induced by $C_*(\mathcal{X})$ (it depends on \mathcal{Y} , not only \overline{Y}). See Definition 5.3.

(5.3) implies an isomorphism for $\mathcal{X} = (\overline{X}, X_{\infty}) \in \mathbf{MCor}$

$$\text{CH}_0(\overline{X}|X_{\infty}) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{MDM}}(M(\text{Spec}(k), \emptyset), M(\mathcal{X})),$$

where the left hand side is the Chow group of zero-cycles with modulus which appeared in §3.

6. MOTIVIC COHOMOLOGY WITH MODULUS AND OPEN QUESTIONS

In view of Voevodsky's definition of motivic cohomology (cf. (2.3)), we may define *motivic cohomology with modulus* as¹⁶

$$(6.1) \quad H_{\mathcal{M}}^i(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(n)) := \text{Hom}_{\mathbf{MDM}}(M(\mathcal{X}), \mathbb{Z}(n)[i]) \quad \text{for } \mathcal{X} \in \mathbf{MCor}$$

Natural questions are the following.

¹⁵Indeed we need refine the results of §4 in the new categorical framework explained above.

¹⁶It is not yet completely clear to the author what is the right definition of the Tate object $\mathbb{Z}(n)$ in \mathbf{MDM} . One option is the image of $\mathbb{Z}(n)$ in \mathbf{DM}^{eff} under ω^{eff} from Theorem 5.7.

Question 6.1. Can one establish an analogue of the isomorphism (2.4) for (6.1)?

Question 6.2. Can one establish an analogue of the isomorphism (1.1) for (6.1) by replacing algebraic K -theory with relative algebraic K -theory for the pair \mathcal{X} ?

In order to answer Question 6.1, one should generalize Bloch's higher Chow groups. Several attempts have been already made in this direction. The first attempt was due to S. Bloch and H. Esnault ([4], [5]) who introduced *additive higher Chow groups* of a field k . It is conceived as a variant of Bloch's higher Chow group for the modulus pair $(\mathbf{A}_k^1, 2 \cdot 0)$. They showed that a part of these groups coincides with the absolute differential forms of k . Rülling [21] generalized it to the case $(\mathbf{A}_k^1, m \cdot 0)$ for $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ and proved that these groups give a cycle theoretic description of the big deRham-Witt complex of Hesselholt-Madsen. Park [19] extended the definition of Bloch-Esnault to introduce additive higher Chow groups $\mathrm{TCH}^r(X, n; m)$ for a k -scheme X . The groups studied by Bloch-Esnault and Rülling correspond to the case $X = \mathrm{Spec} k$ and $r = n$. Motivated by a work [15] of Kerz and the author, Park's definition is extended in [7] to higher Chow groups $\mathrm{CH}^r(X|D, n)$ for a modulus pair (X, D) . We have

$$\mathrm{CH}^r(X|D, n) = \mathrm{TCH}^r(Y, n+1; m) \quad \text{for } (X, D) = (Y \times \mathbf{A}_k^1, m \cdot (Y \times \{0\})).$$

The definition of $\mathrm{CH}^r(X|D, n)$ is given by

$$\mathrm{CH}^r(X|D, n) = H_n(z^r(X|D, \bullet)),$$

where $z^r(X|D, \bullet)$ is the *cycle complex with modulus*, which is a subcomplex of the cubical version of Bloch's cycle complex $z^r(X, \bullet)$ introduced in [2], consisting of those cycles satisfying a certain modulus condition.

As in the case of Bloch's cycle complex, $z^r(X|D, \bullet)$ gives rise to a complex $z^r(-|D, \bullet)$ of sheaves on the small étale site $X_{\mathrm{ét}}$. We then consider the complex $\mathbb{Z}(r)_{X|D} := z^r(-|D, 2r - \bullet)$ and put

$$(6.2) \quad \mathbb{H}^i(X_{\mathrm{Nis}}, \mathbb{Z}(r)_{X|D}).$$

There is a natural map

$$\mathrm{CH}^r(X|D, n) \rightarrow \mathbb{H}^{2r-n}(X_{\mathrm{Nis}}, \mathbb{Z}(r)_{X|D}).$$

A fundamental fact due to Bloch [3] is that this map is an isomorphism in case $D = \emptyset$. However this is not true any more in general (see the remark above [20, Th.3]). This implies that one can not expect to use $\mathrm{CH}^r(X|D, n)$ to answer Question 6.1 for $\mathcal{X} = (X, D)$. A naive hope is then to use (6.2) for the aim. There have been further developments in this direction: Kai [11] proved a modulus analogue of the so-called

“easy” moving lemma in [2] to establish basic functoriality for (6.2). Kai-Miyazaki [12] proved a modulus analogue of Suslin’s moving lemma proved in [23].¹⁷

Finally we mention a work [13] of Iwasa and Kai who defined Chern class maps from relative K -theory of the pair (X, D) to (6.2). This is expected to give the first step toward Question 6.2.

REFERENCES

- [1] A. Beilinson, *Height pairing between algebraic cycles* K -theory, arithmetic and geometry, Lecture Notes in Math., **1289** (1987), 1–25.
- [2] S. Bloch, *Algebraic cycles and higher K -theory* Adv. in Math. **61** (1986), 267–304.
- [3] S. Bloch, *The moving lemma for higher Chow groups* J. Algebraic Geometry **3** (1994), 537–568.
- [4] Spencer Bloch and Hélène Esnault, “The additive dilogarithm”, *Documenta Mathematica*, (Extra Vol.): 131–155 (electronic), 2003. Kazuya Kato’s fiftieth birthday
- [5] Spencer Bloch and Hélène Esnault, “An additive version of higher Chow groups”, *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure*, volume 36, pages 463–477. Elsevier, 2003.
- [6] S. Bloch, H. Esnault, M. Kerz, *Deformation of algebraic cycle classes in characteristic zero* Algebraic Geometry **3** (2014), 290–310.
- [7] Federico Binda and Shuji Saito. Relative cycles with moduli and regulator maps. Preprint 2014, <http://arxiv.org/abs/1412.0385>.
- [8] P. Deligne, *Letter to C. Soulé* (1985).
- [9] E. Friedlander, V. Voevodsky *Bivariant cycle cohomology*, in *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Ann. of Math. Studies **143**, PUP, 2000, 138–187.
- [10] B. Kahn, S. Saito, T. Yamazaki *Reciprocity sheaves, I* (with two appendices by Kay Rülling), Compositio Math. **152** (2016), 1851–1898.
- [11] W. Kai, *A moving lemma for algebraic cycles with modulus and contravariance*, Preprint 2015 [arXiv:1507.07619](https://arxiv.org/abs/1507.07619)
- [12] W. Kai, H. Miyazaki *Suslin’s moving lemma with modulus*, Preprint 2016 [arXiv:1604.04356](https://arxiv.org/abs/1604.04356)
- [13] R. Iwasa, W. Kai, *Chern classes with modulus*, Preprint 2016 [arXiv:1611.07882](https://arxiv.org/abs/1611.07882)
- [14] B. Kahn, S. Saito, T. Yamazaki, *Motives with modulus*, Preprint 2015 [arXiv:1511.07124](https://arxiv.org/abs/1511.07124)
- [15] Moritz Kerz and Shuji Saito, *Chow group of 0-cycles with modulus and higher dimensional class field theory*, to appear in Duke Math. J, arXiv:1304.4400, 2014.
- [16] M. Morrow, *A case of the deformational Hodge conjecture via a pro Hochschild-Kostant-Rosenberg theorem*, Comptes Rendus Mathematique **352** (2014) 173–177.

¹⁷Recall (cf. Remark 2.5) that the moving lemma from [23] is used to deduce (2.4) from Theorem 2.4.

- [17] C. Mazza, V. Voevodsky, C. Weibel, Lecture notes on motivic cohomology, Clay Math. Monographs **2**, AMS, 2006.
- [18] A. Neeman Triangulated categories, Ann. Math. Studies **148**, Princeton University Press, 2001.
- [19] Jinhyun Park, *Regulators on additive higher Chow groups*, *Amer. J. Math.* **131**(1) (2009) 257–276.
- [20] K. Rülling, S. Saito, *Higher Chow groups with modulus and relative Milnor K-theory*, to appear in Trans. AMS
- [21] Kay Rülling. *The generalized de Rham-Witt complex over a field is a complex of zero-cycles*, *Journal of Algebraic Geometry*, **16**(1) (2007) 109–169.
- [22] S. Saito *Purity of reciprocity sheaves* in preparation.
- [23] A. Suslin *Higher Chow groups and étale cohomology.*, in E. Friedlander, A. Suslin, V. Voevodsky Cycles, transfers and motivic cohomology theories, Ann. Math. Studies **143**, Princeton University Press, 2000, 188–238.
- [24] A. Grothendieck *Sur quelques points d’algèbre homologique*, *Tohoku Math. J.* **9** (1957), 119–221.
- [25] V. Voevodsky *Triangulated categories of motives over a field*, in E. Friedlander, A. Suslin, V. Voevodsky Cycles, transfers and motivic cohomology theories, Ann. Math. Studies **143**, Princeton University Press, 2000, 188–238.

極小モデル理論と拡張定理

権業善範*

東京大学大学院数理科学研究科

1 準備

この報告集では、ネフ (nef) や巨大 (big) などの基本的な用語は [KoM] または [KaMM] に従って用いる。また全て複素数体上の仕事である。特に対数的特異点解消と対の特異点に関して、次のような用語を用いる。

定義 1.1. 対数的対 (X, Δ) , すなわち, 正規多様体 X と有効 \mathbb{Q} -ヴェイユ因子 Δ で, $K_X + \Delta$ が \mathbb{Q} -Cartier になる対, に対して その対数的特異点解消 $\varphi: Y \rightarrow X$ とは, 次を満たすものである。

- (1) Y は非特異多様体,
- (2) φ は射影的雙有理射,
- (3) φ の例外集合 $\text{Ex } \varphi$ が因子の和集合であり, $\text{Ex } \varphi \cup \text{Supp } \varphi_*^{-1} \Delta$ は単純正規交差, ここで $\varphi_*^{-1} \Delta$ は Δ の φ による Y 上の厳密変換である。

定義 1.2. 対数的対 (X, Δ) で Δ の係数が全て 1 以下なものに対して, その対数的特異点解消を $\varphi: Y \rightarrow X$ とする。対数的標準束公式を次のように書く。

$$K_Y + \varphi_*^{-1} \Delta = \varphi^*(K_X + \Delta) + \sum a_i E_i,$$

ここで E_i は Y 上の φ -例外素因子である。このとき,

- (1) もし, すべての i に対して $a_i > -1$ が成り立ち, かつ Δ の係数が 1 未満のとき, 対 (X, Δ) は川又対数的端末 (klt) 対であるといい,
- (2) もし, すべての i に対して $a_i > -1$ が成り立ち, 対 (X, Δ) は因子的対数的端末対 (dlt) であるといい,
- (3) もし, すべての i に対して $a_i \geq -1$ が成り立つとき, 対 (X, Δ) は対数的標準 (lc) 対であるという。

*gongyo@ms.u-tokyo.ac.jp

2 アバダンス予想について

次の予想がアバダンス予想と呼ばれる。

予想 2.1 (アバダンス予想). 対 (X, Δ) を射影的対数的標準対とする. このとき $\nu(K_X + \Delta) = \kappa(K_X + \Delta)$ が成り立つ. さらに, もし $K_X + \Delta$ がネフの時, それは半豊富である.

ここで, \mathbb{Q} -カルティエ因子 D が半豊富とは, 十分割り切れる自然数 $m > 0$ に対して完全線形系 $|mD|$ が固定点自由である時を言う.

擬有効 (pseudo-effective) 因子 D と豊富因子 A に対して,

$$\nu(A, D) = \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \limsup_{m \rightarrow \infty} m^{-k} \dim H^0(X, \lfloor mD \rfloor + A) > 0\},$$

$$\nu(D) = \max\{\nu(A, D) \mid A \text{ is ample}\}$$

と定義する. 擬有効でない因子 D に対しては $\nu(D) = -\infty$ と定義する. 注意としては, $\nu(D)$ は $[\mathbb{N}]$ の中では, $\kappa_\sigma(D)$ という記号が使われている.

予想 2.1 は極小モデル理論においてとても重要な予想である. 実際, 川又対数的端末対の擬有効対数的標準因子 $K_X + \Delta$ に対して, $\nu(K_X + \Delta) = \kappa(K_X + \Delta)$ が成り立つなら, (X, Δ) の極小モデルの存在が従う (cf. [GL], [DHP, Remark 2.6]).

とくに, 次元による帰納法を行っている場合には, 極小モデルの存在は, 実際は次の非消滅予想から従う (cf. [B], [G4], [DHP, Section 8]).

予想 2.2 (非消滅予想). 非特異射影多様体 X に対して, 標準因子 K_X が擬有効ならば, $\kappa(K_X) \geq 0$.

まず, 3次元以下の予想 2.1 は, 藤田氏, 川又氏, Kollár 氏, 森氏, 宮岡氏, Shokurov 氏らを始めとする様々な人らの貢献により肯定的に知られている. 一般次元では, $\Delta = A + B$ と書け, A が豊富かつ B が有効因子ととれる因子的対数的端末対 (X, Δ) に対しては, [BCHM] により予想 2.1 が成立することが知られている. さらに, $\nu(K_X + \Delta) = 0$ の場合も知られている ([N], [G3, Theorem 1.2], [Ka2], [CKP]).

次に半対数的標準対に対する予想 2.1 を考える. ここで半対数的標準対は次のような定義である.

定義 2.3. 純 d 次元被約 S_2 -スキーム X と, その上の \mathbb{Q} -係数有効ヴェイユ因子 Δ について, \mathbb{Q} -係数ヴェイユ因子 $K_X + \Delta$ が \mathbb{Q} -カルティエ因子であるとする. さらに X が余次元 1 で正規交叉を仮定する. 既約分解を $X = \bigcup X_i$ とする. 正規化を $\nu: X' := \coprod X'_i \rightarrow X = \bigcup X_i$ とする. ここでいう正規化とは各既約成分を正規化をして非交和をとったものをさす. スキーム X' 上の \mathbb{Q} -因子 Θ を $K_{X'} + \Theta := \nu^*(K_X + \Delta)$ を満たす因子として定義する, そして $\Theta_i := \Theta|_{X'_i}$ をおく. この対 (X, Δ) が半対数的標準対 (略して, slc 対) とは, (X'_i, Θ_i) は lc を満たすときをいう.

さらに, 我々は slc 対に対する予想 2.1 は, 対数的標準因子がネフである場合のみを考えるのが妥当である. なぜなら, Kollár 氏による標準環が有限生成でない極小でない半対数的標準曲面の例 [Ko, Proposition 1] が存在する. 実は, この例は slc 対に対する極小モデルの存在は通常の意味では期待できないことを示唆している. したがって slc 対に対するアバダンスはネフを仮定する. 以下が [FG] の主定理の一つである:

定理 2.4. 対 (X, Δ) を射影的半対数的標準対とする. $\nu: (X', \Theta) \rightarrow (X, \Delta)$ を定義 2.3 に現れる正規化とする. このとき, もし $K_{X'} + \Theta$ が半豊富なら, $K_X + \Delta$ も半豊富である.

この定理は藤野の貼合わせ理論 [F1] と [BCHM] を組み合わせて得られるが, 鍵となるのが対数的多重標準表現の有限性である. 論文以外の詳しい記事で日本語で読める文献として, [藤] と [權] があるのでこれの詳細についてはそちらに譲る.

3 ひとつのアプローチ

まずアプローチ一つ目の説明を行う. これは 3 次元の場合の証明の一般化として捉えられるが一般次元ではリーマン・ロッホを用いたテクニックがうまくいかないなのでその辺をクリすることが課題となる. 予想 2.1 を証明するために次の 3 つが鍵とされている.

1. lc center の構成法,
2. 拡張定理の一般化, そして,
3. 既約の場合のアバンダンス予想から可約の場合のアバンダンス予想を導くこと.

定理 2.4 はこの 3. が完全に解決したことになる.

具体的に, 今, $n-1$ 次元までの予想 2.1 と予想 2.2 を認めて n 次元非特異多様体 X に対して予想 2.1 の証明を試みよう. 実はこの予想 2.2 が最も難しいところであると思われる.

例 3.1. まず, n 次元非特異射影多様体 X に対して, 予想 2.2 からある有効因子 D が存在して, $D \sim_{\mathbb{Q}} K_X$ がわかる. また [Ka1, Theorem 7.3] より, $\kappa(K_X) = 0$ としてよい. さらに対数的特異点解消をとることで, $\text{Supp } D$ は単純正規交差であるとしてよい. 今 $D = \sum_i a_i D_i$ ($a_i > 0$) と書く. さらに $\Delta = \sum_i D_i$ とする. このとき, (X, Δ) は因子的対数的端末対であり, $\kappa(K_X + \Delta) = 0$ はすぐわかる. 実は,

$$0 \leq \nu(K_X) \leq \nu(K_X + \Delta)$$

より, この $\nu(K_X + \Delta) = 0$ がチェック出来れば十分である. ここがいわゆる, 1. のステップである. [B] より今の仮定の下では極小モデルの存在が自由に使える (cf. [G4], [DHP, Section 8]). 従って, 対 (X, Δ) の極小モデル $f: X \dashrightarrow Y$ が存在する. 今, $f_*(K_X + \Delta) \sim_{\mathbb{Q}} 0$ が成り立つとする. このとき $\nu(K_X + \Delta) = 0$ は直ちに従う. 従って, $f_*D \neq 0$ としてよい. 今 Δ の構成から, $\text{Supp } \Delta = \text{Supp } D$ である. 記号を $S = f_*\Delta$ と置くと, $S \neq 0$ かつ, $K_Y + S$ がネフとなる. 随伴公式より, $(K_Y + S)|_S = K_S + \Delta_S$ が成り立つ Δ_S が構成できる. ここで現れる (S, Δ_S) が, *slc* 対である. ここを直接既約にする程の自由度は, 今, この X は持っていない. ステップ 2 のセクションの拡張, すなわち十分割り切れる大きな整数 m に対して,

$$H^0(Y, m(K_Y + S)) \rightarrow H^0(S, m(K_S + \Delta_S))$$

が全射であることが期待できる (実際, (S, Δ_S) が既約 *klt* 対の場合は大沢・竹腰の拡張定理の応用により証明できる cf. [DHP]). 今, $n-1$ 次元までの予想 2.1 の仮定から, (S, Δ_S) の各成分上では, $K_S + \Delta_S$ は半豊富はわかる. ここでステップ 3. の $K_S + \Delta_S$ は S 上半

豊富か? という問題になる. しかし, ここは定理 2.4 により, $K_S + \Delta_S$ は半豊富. 従って, $\kappa(K_Y + S) = 0$ かつ

$$\text{Supp } S = \text{Supp } f_* D = \text{Supp } f_*(D + S)$$

なので,

$$H^0(Y, m(K_Y + S)) \rightarrow H^0(S, m(K_S + \Delta_S))$$

はゼロ射のはずである. これは矛盾であり, $f_* D = 0$ であることがわかる. 注意としては, 川又の固定点自由化定理や [BCHM] のような設定の元で S の作り方に自由度があったので, (S, Δ_S) が *klt* にとれた. 従って, 定理 2.4 のような定理が必要なかった.

4 拡張定理

この章は松村慎一氏との共同研究についての説明にあてる. メインの問題は 2 章のなかでのアプローチの 2. の拡張定理の確立である. より具体的に次の予想を扱う:

予想 4.1. 対 (X, Δ) を射影的 *Dlt* 対とする. ある有効 \mathbb{Q} 因子 D が存在して $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} D$ と仮定する. さらに, $S := \lfloor \Delta \rfloor \subseteq \text{Supp } D$ を仮定する. このとき $K_X + \Delta$ が *nef* ならば十分大きい自然数 m について S への制限写像

$$H^0(X, m!(K_X + \Delta)) \rightarrow H^0(S, m!(K_X + \Delta))$$

が全射である.

結論から言うと論文 [GM] で上の予想の部分的な結果を得た:

定理 4.2. 予想 4.1 は次の下でなりたつ. 自然数 l を $l(K_X + \Delta)$ が *Cartier* になるものとする. ある対数的特異点解消 $\varphi: Y \rightarrow X$ と $\varphi^*(l(K_X + \Delta))$ 上に非負な特異計量 h が存在し, h の *Lelong* 数が Y 上の各点で 0 である.

ここで定理に用いた用語の説明をする.

定義 4.3. 複素多様体 X に対して, X 上直線束 L 上の特異計量 h とは, ある L 上のエルミート計量 g と X 上の局所 L^1 関数 ϕ が存在して $h = g \cdot e^{-\phi}$ となるもののことである. 特異計量 h が非負とは, その曲率

$$\sqrt{-1}\Theta_h(F) := \sqrt{-1}\Theta_g(F) + dd^c\phi,$$

は $(1,1)$ -current の意味で非負を意味する. ここで ϕ はただの局所 L^1 関数なので $dd^c\phi$ は超関数の意味での微分であり, $\sqrt{-1}\Theta_g(F)$ は g のチャーン曲率である.

定義 4.4. 複素多様体 X 上の直線束と非負な特異計量 $(L, h = g \cdot e^{-\phi})$ と X 上の閉点 x に対して, *Lelong* 数

$$l(\phi, x) := \liminf_{z \rightarrow x} \frac{\phi(z)}{\log |z - x|}$$

と定義する.

実際この *Lelong* 数が X 上の各点で 0 という条件以下の乗数イデアル層を用いた同値条件で表される:

命題 4.5 (スコダの補題). 複素多様体 X 上の直線束と非負な特異計量 $(L, h = g \cdot e^{-\phi})$ と X 上の閉点 x に対して, 条件 $l(\phi, x) = 0$ と任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathcal{I}(h^m)_x \simeq \mathcal{O}_{X,x}$$

が成り立つことは同値である.

実際, 定理 4.2 は次の乗数イデアル層が絡まった松村の単射性定理 [M, Theorem 1.3] を対数化することにより得られる. ちなみに松村の単射性定理の h が非特異の時はオリジナルの榎の単射性定理 [En] で h が高々解析的特異点を持つ場合は藤野の単射性定理 [F2] である.

定理 4.6 (松村の単射性定理). コンパクトケーラー複素多様体 X とその上の直線束と非負な特異計量 $(L, h = g \cdot e^{-\phi})$ に任意の $a \in \mathbb{N}$ と任意の非零切断 $s \in H^0(X, L^a)$ で $\sup_X |s|_{h^a} < \infty$ をみたすものに対して次の射

$$\cdot \otimes s : H^q(X, K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) \rightarrow H^q(X, K_X \otimes L^{a+1} \otimes \mathcal{I}(h^{a+1}))$$

が *well-defined* かつ単射である.

したがって問題は どうやって定理 4.2 の仮定を満たす計量を作るか? という問題になる.

5 特異葉層構造を用いたアプローチ

この章で, [S] の論文におけるシウのアプローチのギャップおよび問題点について筆者の理解の下で議論する. この章でのアプローチは前章までとは毛色が異なる. まずシウのアプローチは次である. これはおそらく [T] で辻元氏が暗に提案しているという雰囲気もある. ちなみにこの方向で, 葉層構造を用いないで代数的な有理写像のみを考えてアプローチし問題点をあぶりだしたのが論文 [GL] である. シウのアプローチは次の様なものである. 用いる特異葉層構造 F はエッケルの数値的自明葉層構造というものである [Ec]. これは一般の擬有効直線束に定義される.

1. $\nu(K_X) = 0$ のときの解決
2. F が代数的であることを示す.

これでできるというわけだが, まず一つずつ見ていく. この葉層構造が存在するのは問題ないだろう. この葉層構造の葉の閉包が全空間 X と一致する場合, 特に代数的だが, この場合は数値的小平次元 $\nu(K_X) = 0$ は問題ない. そしてその場合はアバンドンス予想は 1 章で述べたように証明できている. さて次のエクストリーマルな場合の一般葉が閉点の場合, この場合 K_X は巨大か? という問題にぶちあたる. これはかなり微妙であるといわざる得ない. すくなくともこの時点でエッケルの数値的自明葉層構造をみるだけで証明できるとは思えない. また F の代数性の証明であるが, シウの証明には次の問題点があるように思える. 数体上の多様体に対してはあるが, F の代数性を証明するために *Bost* による次の定理がある:

定理 5.1 ([Bo, Theorem 2.1]). 数体上定義された非特異射影代数多様体上の特異葉層構造 F に対して, 次の条件をみたすとする:

- a. (p -閉性) F の一般正標数還元 F_p について, $(Fr^*)F_p \subseteq F_p$ をみたす. $Fr : X_p \rightarrow X_p$ は X の正標数還元 X_p の (絶対的) フロベニウス写像である,
- b. (リュービル条件) F の一般葉上の有界多重劣調和関数は定数である.

このとき F は代数的である.

シウが証明しようとしているのは上の b. の条件をネヴァリンナ理論を用いて示そうというものである. それがうまく回っているかは著者には不明である. それだけでも確かめるのは十分に価値があると思われる. また上の定理が数体上だけでなく, 任意の正標数還元をとる基礎体に拡張できるか? といのも興味深い問題である.

とりあえず数体上に限り, この方針において何をすればよいかをもう一度羅列する.

- (1) F の一般葉が閉点の時に, K_X が巨大であることを示す.
- (2) F が代数的であることを示すために, p -閉性およびリュービル条件を示す.

確かにこの二つができるなら, 証明可能でありそうである.

さてここから (1) に関連して次の葉層構造を考えることを提案してこの報告集を終わりにしようと思う. 任意のコンパクトケーラー多様体上にはケーラー計量から誘導されて断面曲率 S というものが定義される. $(1, 1)$ -形式 S を考えそれに付随する葉層構造を考える. その葉が閉点ならば K_X が巨大であることを示せばよい. これは次の Wu-Yau の定理 (Yau 予想と呼ばれていたもの) の巨大版である.

定理 5.2 ([WY1]). 非特異射影多様体 X に対して断面曲率 S が各点で負ならば K_X は豊富である.

そこで巨大版の予想は以下である.

予想 5.3. 非特異射影多様体 X に対して断面曲率 S がほとんどいたるところな点で *negative* ならば K_X は巨大である, ここでほとんどいたるところとはあるルベグ測度 0 集合を除いた全てという意味である.

ただし, もし断面曲率 S が *semi-negative* の場合は, ある一点で *negative* なら K_X は *ample* になるという. 上に関連して非常に興味深い ([DP], [WY2]).

6 謝辞

今回, この盛大なる第 61 回代数学シンポジウムでの講演の機会をくださった代数幾何班のオーガナイザーの寺杉友秀先生, 加藤文元先生, 吉岡康太先生および会場責任者の宮崎誓と寺井直樹先生に感謝しています. 筆者は JSPS から 科学研究補助金若手 (A) #26707002 からの補助を受けています.

参考文献

- [B] C. Birkar, On existence of minimal models II, preprint, J. Reine Angew Math. **658** (2011), 99-113.
- [BCHM] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon and J. McKernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), 405-468.
- [CKP] F. Campana, V. Koziarz and M. Păun, Numerical character of the effectivity of adjoint line bundles, preprint, Ann. Inst. Fourier **62** (2012), no. 1, 107–119.
- [Bo] J. B. Bost, Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields., Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **93** (2001), 161–221
- [DHP] J-P. Demailly, C. Hacon, and M. Păun, Extension theorems, Non-vanishing and the existence of good minimal models, Acta Math. **210** (2013) 203–259.
- [D] S. Druel, Quelques remarques sur la décomposition de Zariski divisorielle sur les variétés dont la première classe de Chern est nulle, Math. Z., 267, 1-2 (2011), p. 413-423.
- [Ec] T. Eckl, Numerically trivial foliations, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2004), no. 4, 887–938.
- [En] I. Enoki, *Kawamata-Viehweg vanishing theorem for compact Kähler manifolds*, Einstein metrics and Yang-Mills connections (Sandai, 1990), 59–68.
- [DP] S. Diverio and S. Trapani, Quasi-negative holomorphic sectional curvature and positivity of the canonical bundle, arXiv:1606.01381.
- [F1] O. Fujino, Abundance Theorem for semi log canonical threefolds, Duke Math. J. **102** (2000), no. 3, 513–532.
- [F2] O. Fujino, *A transcendental approach to Kollár's injectivity theorem*, Osaka J. Math. **49** (2012), no. 3, 833–852.
- [藤] 3次元半ログ標準多様体のアバンドンス定理, 代数幾何学城崎シンポジウム報告集 p1–p7 (1999), <http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/253/>
- [FG] O. Fujino and Y. Gongyo, Log pluricanonical representation and abundance conjecture, Compositio Math. **150**, No.4, (2014) 593–620.
- [G1] Y. Gongyo, On weak Fano varieties with log canonical singularities, J. Reine Angew. Math. **665** (2012), 237–252.
- [G2] Y. Gongyo, Abundance theorem for numerically trivial log canonical divisors of semi-log canonical pairs, J. Algebraic Geom. **22** (2013), 549–564.

- [G3] Y. Gongyo, On the minimal model theory for dlt pairs of numerical log Kodaira dimension zero, *Math. Res. Lett.* **18** (2011), no. 5, 991–1000.
- [G4] Y. Gongyo, Remarks on the non-vanishing conjecture, *Adv. Stud. Pure Math.*, **65**, 2015, Algebraic geometry in East Asia – Taipei 2011, 107–116.
- [權] The abundance conjecture and its applications, *代数幾何学城崎シンポジウム報告集* (2011).
- [GL] Y. Gongyo and B. Lehmann, Reduction maps and minimal model theory, *Compositio Math.* **149**, No.2, (2013) 295–308.
- [GM] Y. Gongyo and S. Matsumura, Versions of injectivity and extension theorems, to appear in the *Annales scientifiques de l'ENS*.
- [HX] C. Hacon, C. Xu, On Finiteness of B-representations and Semi-log Canonical Abundance, *Minimal models and extremal Rays* (Kyoto, 2011), 361–378, *Adv. Stud. in Pure Math* 70, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2016.
- [Ka1] Y. Kawamata, Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties. *Invent. Math.* **79** (1985), no. 3, 567–588.
- [Ka2] Y. Kawamata, On the abundance theorem in the case of $\nu = 0$, *Amer. J. Math.* Volume **135**, Number 1, (2013), 115–124.
- [KaMM] Y. Kawamata, K. Matsuda and K. Matsuki, *Introduction to the minimal model problem*, Algebraic geometry, Sendai, 1985, 283–360, *Adv. Stud. Pure Math.*, **10**, North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [Ko] J. Kollár, Two examples of surfaces with normal crossing singularities, arXiv:0705.0926.
- [KoM] J. Kollár and S. Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math. **134** (1998).
- [M] S. Matsumura, An injectivity theorem with multiplier ideal sheaves of singular metrics with transcendental singularities, to appear in *Journal of Algebraic Geometry*.
- [N] N. Nakayama, *Zariski decomposition and abundance*, MSJ Memoirs, 14. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.
- [S] S-T. Siu, Abundance conjecture, *Geometry and analysis*. No. 2, 271–317, *Adv. Lect. Math. (ALM)*, 18, Int. Press, Somerville, MA, 2011.
- [T] H. Tsuji, Numerical trivial fibrations, arXiv:math/0001023v6

- [WY1] D. Wu, S-T. Yau, Negative Holomorphic curvature and positive canonical bundle, *Invent. Math.*, **204** (2):595–604, 2016.
- [WY2] D. Wu, S-T. Yau, A remark on our paper "Negative Holomorphic curvature and positive canonical bundle", arXiv:1609.01377

非可換代数曲面 (NONCOMMUTATIVE ALGEBRAIC SURFACES)

大川新之介

概要. 非可換代数曲面についてサーベイする。

謝辞. 講演およびプロシーディングスに記事を書く機会を下さった世話人の皆様に感謝致します。

0. 序

非可換代数幾何学は1987年に発表された [AS87] にはじまり、以降30年、今日に至るまで発展を続けてきた分野である。特に2次元の場合 (すなわち非可換代数曲面) が最も深く研究されてきた。3次元以上についての研究もあるが、曲面の場合と比較するとさらに未開拓である。

非可換代数幾何学は、当初、非可換代数あるいは非可換次数つき代数を基本対象として始まった。実際、[AS87] で導入された Artin-Schelter 正則代数は多項式環 (" = " 射影空間) の持つ性質の一部を満たす非可換次数つき代数として定義された。また、それに続き、非可換次数つき代数とそれに付随する「非可換偏極多様体」に関する基礎が [AZ94] で与えられた。

その後、アーベル圏や導来圏 (あるいはその適切な enhancement) を基本対象とする視点の重要性が明らかになってきた [BP93, VdB11]。この記事ではその点に重きを置いて説明をしたいと思っている。

非可換代数幾何学に関する標準的な教科書は存在しない。これは分野の性格によるところが大きい、そのため、分野の全体像を把握するのが容易ではない。このサーベイではこの分野に対する筆者なりの視点を提供したい。半分は本人のためのまとめである。

教科書のかわりに既存のサーベイ記事を挙げる。2001年に発表された [SvdB01] は非可換曲線・曲面に関するとても良い入門記事である。日本語で書かれた解説記事である [Mor10] もある。筆者の講演では非可換 del Pezzo 曲面のモジュライに関する共同研究について話をしたが、その一部は共同研究者の植田一石氏が [Ued14]¹において日本語で解説している。この記事では [Mor10, Ued14] であまり説明されていない点を扱ったつもりである。

筆者は大学院生の頃は従来の代数多様体に関する研究をしていたのだが、4年ほど前から非可換代数多様体にも興味を持って研究をしている。やってみて驚いたことに、非可換代数多様体は通常の代数多様体と極めて似た性格を持っていると感じた。また、従来の代数幾何学の考え方や手法を様々な形で適用することができた。代数幾何学の知識・経験を持っていることが小さくないアドヴァンテージになる分野なのではないかと思う。

さらに個人的な印象の話をする、非可換代数多様体は K3 曲面に代表されるような「特殊で豊かな構造を持つ代数多様体」に類する対象であると感じる。また、「可換」と「非可換」の関係が「線型」と「非線型」の関係と相似であると思ったとき、非可換代数多様体はちょうど可積分系に相当するような対象なのではないかと思う²。

Date: January 2, 2017.

¹<http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/202022> にて入手可能。

²[OR15] では非可換射影平面およびその blowup と [Sak01] の意味の elliptic Painlevé equation の関係が議論されている。

この記事では中心上有限な非可換代数多様体 (= 代数多様体上の有限多元環の層) については触れないが、これも多くの研究がある興味深い話題である。ちなみに、2次元の場合には [CI05] において極小モデル理論が確立されている。この結果が曲面上の conic bundle の研究に活かさないか、というのは気になる問題である [CI12]。

1. \mathbb{Z} 代数と非可換代数多様体

以下、基礎体を k とする。特に断らない限り、考える圏は全て k 線型圏とする³。

定義 1.1. 集合 I を考える。 I 代数とは k 線型圏 \mathcal{C} であって

$$\text{ob } \mathcal{C} = I \quad (1.1)$$

を満たすもののことである。

I 代数は次のようにも定義できる。

定義 1.2. I 代数とは (単位元を持つとは限らない) 結合的 k 代数 A で、集合 $I \times I$ で次数づけられており、さらに局所単位元を持つものである。すなわち k 線型空間としての分解

$$A = \bigoplus_{i,j \in I} A_{i,j} \quad (1.2)$$

が存在して

$$A_{i,j} \cdot A_{k,\ell} \begin{cases} \subset A_{i,\ell} & \text{if } j = k \\ = 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.3)$$

を満たし、さらに各 $i \in I$ ごとに元 $e_i \in A_{i,i}$ であって

$$e_i a = a \quad (\forall a \in A_{i,*}) \quad (1.4)$$

$$b e_i = b \quad (\forall b \in A_{*,i}) \quad (1.5)$$

$$(1.6)$$

を満たすものが存在するような結合代数のことである。

I 代数の 2通りの定義は

$$\mathcal{C}(j, i) = A_{i,j} \quad (1.7)$$

によって結びついている⁴。 A を記号 $\text{Alg}(\mathcal{C})$ で表すことにする。状況に応じて考えやすい方を用いる。

例 1.3. (1) I が 1 元集合のとき、 I 代数とは (通常の意味の) 単位元を持つ結合的な k 代数のことに他ならない。

(2) 有限集合 Q_0 および半単純環 k^{Q_0} 上の有限生成両側加群 V を考える。このとき、自由代数

$$T_{k^{Q_0}} V = \bigoplus_{d \geq 0} \overbrace{V \otimes_{k^{Q_0}} V \otimes_{k^{Q_0}} \cdots \otimes_{k^{Q_0}} V}^{d \text{ 回}} \quad (1.8)$$

は標準的に Q_0 代数の構造を持つ ($I = Q_0$)。なお、 $V = \bigoplus_{i,j \in Q_0} e_i V e_j$ と分解することで上述の自由代数が籠 (= 有向グラフ) の道代数に他ならないということが

³ k 線型空間の圏は通常のテンソル積についてモノイダル圏になる。 k 線型圏とは、そのモノイダル圏上の豊穡圏 (enriched category) に他ならない。

⁴ $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)$ を $\mathcal{C}(-, -)$ と書く。

わかる。頂点 j から $i \leftarrow \dim_{\mathbf{k}} e_i V e_j$ 本の矢があるような籠を考えれば良いわけである。

- (3) $I = \mathbb{Z}$ とする。このとき、 \mathbb{Z} 次数つき代数 $S = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} S_d$ に付随する \mathbb{Z} 代数 $\check{S} = A = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}} A_{i,j}$ が

$$A_{i,j} := S_{j-i} \quad (1.9)$$

として構成される。

\mathbb{Z} 代数 A と $d \in \mathbb{Z}$ に対して新しい \mathbb{Z} 代数 $A(d)$ を $A(d)_{i,j} := A_{i+d,j+d}$ で定義することができる。 $A \simeq A(d)$ が成立するとき A は d 周期的であると言う。 A が 1 周期的であるということは、適当な次数つき代数 S が存在して $A \simeq \check{S}$ が成立するという事と同値である。

偏極多様体 (X, L) に対し、充満部分圏 $(L^{\otimes -d})_{d \in \mathbb{Z}} \subset \text{coh } X$ は自然に \mathbb{Z} 代数の構造を持つが、それは切断環 $R(X, L)$ に付随する \mathbb{Z} 代数に他ならない。偏極の選択は $\text{coh } X$ の然るべき充満部分圏の選択とみなせるわけである。

\mathbb{Z} 代数を基礎において非可換射影平面を考察したのは [BP93] である。筆者の知る限り、 \mathbb{Z} 代数の有用性を最初に露わにした論文である。上述の「偏極に相当する然るべき部分圏を選ぶ」というアイディアはこの論文で明示的に述べられている。

なお、次数つき代数 S, T が $\check{S} \simeq \check{T}$ を満たすための必要十分条件が知られている [Sie11]。特に、同型でない次数つき代数が同型な \mathbb{Z} 代数を与えることがある。これは非可換射影平面を考える上で実際に現れる現象である (後述)。

定義 1.4. I 代数 \mathcal{C} に対し、右 \mathcal{C} 加群 (\iff 右 $A = \text{Alg}(\mathcal{C})$ 加群) の圏を

$$\text{Grmod } A = \text{Grmod } \mathcal{C} = \text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \text{Vect}_{\mathbf{k}}) \quad (1.10)$$

と定める。ただし Fun は \mathbf{k} 線型関手のなす \mathbf{k} 線型圏であり、 $\text{Vect}_{\mathbf{k}}$ は \mathbf{k} 線型空間のなす \mathbf{k} 線型圏である。

すなわち、関手 1 つ 1 つを加群と呼び、それらの間の自然変換を加群の射と呼ぶのである。対応する定義を A の言葉で表すとその正当性が納得できるはずである ([VdB11, Section 2] 参照)。また、次数つき代数 S に対して標準的な圏同値

$$\text{Grmod } S \simeq \text{Grmod } \check{S} \quad (1.11)$$

が構成できる。この意味で \mathbb{Z} 代数は次数つき代数の一般化になっている。

以下、右加群のことを単に加群と呼ぶことにする。

定義 1.5. (1) \mathbb{Z} 代数 A が

$$A = \bigoplus_{i \leq j} A_{i,j} \quad (1.12)$$

かつ

$$A_{i,i} = \mathbf{k}e_i \quad (\forall i) \quad (1.13)$$

を満たすとき、 A は連結であるという。

- (2) A 加群 M が $i \gg 0$ に対して $M_i = 0$ を満たすとき、上に有界であるという。上に有界な加群の順極限になっている加群全体のなす $\text{Grmod } A$ の部分圏を $\text{Tors } A$ で表す。これは Serre 部分圏になっているため商アーベル圏 $\text{Grmod } A / \text{Tors } A$ が定義できるが、それを $\text{QGr } A$ で表す。

- (3) A が右 Noether の時、有限生成右加群からなる $\text{Grmod } A$ の部分圏を $\text{grmod } A$ で表す。これは再びアーベル圏である。また、 $\text{Tors } A$ との共通部分を $\text{tors } A$ で表し、それによる Serre 商を $\text{qgr } A$ で表す。また、商関手を

$$\pi: \text{grmod } A \rightarrow \text{qgr } A \quad (1.14)$$

で表す。

QGr は元来次数つき代数に対して定義されていた概念だが、 \mathbb{Z} 代数にまで一般化された。次数つき代数から構成された \mathbb{Z} 代数に対しては次数つき代数の QGr と自然に同値になる。

qgr を考える動機は次の圏同値にある (Serre の定理)。

$$\begin{aligned} \text{coh } X &\simeq \text{coh}[V \setminus \{0\} / \mathbb{G}_m] \simeq \text{coh}[V / \mathbb{G}_m] / \text{coh}_{[0/\mathbb{G}_m]}[V / \mathbb{G}_m] \\ &\simeq \text{coh}^{\mathbb{G}_m} V / \text{coh}_0^{\mathbb{G}_m} V \simeq \text{grmod } R(X, L) / \text{tors } R(X, L) \simeq \text{qgr } R(X, L) \end{aligned} \quad (1.15)$$

ただし (X, L) は L が十分豊富な偏極多様体であり、 $V = \text{Spec } R(X, L)$ である。代数群 $\mathbb{G}_m = \mathbb{k}^*$ の作用は $R(X, L)$ の次数づけから決まっている。また、 coh_Z は閉部分多様体 (スタック) Z に台を持つ (同変) 層のなす部分圏である。

2. 非可換変形とその変形理論

[Gab62] で証明されたように、体 \mathbb{k} 上の代数多様体 X の同型類は接続層の圏 $\text{coh } X$ の \mathbb{k} 線型アーベル圏としての構造から一意的に復元することができる。また、 X の平坦な変形はアーベル圏 $\text{coh } X$ の [LVdB06] の意味での平坦な変形を引き起こす。前者を X の可換変形、後者を X の非可換変形と呼ぶことにすると、実は後者の方が自由度が大きい。次にこれを説明しよう。

アーベル圏の変形理論は [LVdB05] で確立されており、基礎体 \mathbb{k} の標数が 0 の場合には圏の Hochschild 微分次数つき Lie 代数 (differential graded Lie algebra, dgla) によってコントロールされることがわかっている⁵。特に非特異代数多様体 X に対して $\text{coh } X$ の変形を考えると、Hochschild-Kostant-Rosenberg 同型 (HKR 同型) と合わせて次のことがわかる。

- 1 次無限小変形 (すなわち $\mathbb{k}[\epsilon] / (\epsilon^2)$ 上の変形) の同値類は

$$\text{HH}^2(X) \simeq H^2(\mathcal{O}_X) \oplus H^1(T_X) \oplus H^0(\wedge^2 T_X) \quad (2.1)$$

の元と 1 対 1 対応する。

- 変形の障害空間として

$$\text{HH}^3(X) \simeq \bigoplus_{p+q=3} H^q(\wedge^p T_X) \quad (2.2)$$

が取れる。

(2.1) の右辺の 3 成分はそれぞれ gerby 変形、可換変形、(正則)Poisson 変形と呼ばれる変形の方に対応している。特に、可換変形が非可換変形の特別な場合であることが見て取れる。

X が非特異曲線の場合、(2.1) の右辺は可換方向しか残らない。その意味で非可換変形が意味を持つのは曲面の場合からである。この場合 (2.1) の第 3 成分は $H^0(-K_X)$ に他ならない。また、この記事では非可換有理曲面の場合だけを扱うが、その場合第 1 成分は消えてしまう。

⁵Hochschild dgla は結合的代数の変形理論において導入された概念だが、 \mathbb{k} 線型圏を上述のように「対象が沢山ある \mathbb{k} 代数 (\mathbb{k} -algebroid)」と思うことによって Hochschild dgla の定義を拡張することができる。

X が del Pezzo 曲面⁶の場合、HKR 分解の右辺を見ることで $\mathrm{HH}^3(X) = 0$ が証明できる。従ってこの場合は非可換変形が障害を持たないことになり、非可換変形の変形空間が(スタックとして)特異点を持たないということになる。なお、 X として Hirzebruch 曲面⁷ $\mathbb{F}_d = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d))$ を考えると、 $d > 3$ の時に障害射が非自明になることが知られている ([Got16, Remark 5, Proposition 9]。この論文では \mathbb{F}_d の複素構造から決まる一般化された複素構造 (generalized complex structure、GCS) の変形を論じているが、実は GCS の変形理論とアーベル圏の変形理論が一致することがわかっている [VdB07])。なお、Hirzebruch 曲面を少し非可換変形したものは必ず [VdB12] の意味の「 \mathbb{P}^1 上の非可換 \mathbb{P}^1 束」であることが証明されており、特にそれらは (非可換射影平面等の場合と同様に) 可換代数幾何的な対象でパラメトライズされることがわかっている。この結果は GCS による視点よりも精密であると言えよう。なお、具体的な分類や導来圏的な視点については筆者らが研究している [MOU]。

3次元以上の Fano 多様体を見ると非可換変形は一般に障害されている。最も基本的な場合である \mathbb{P}^3 ですら、非可換変形が分類されたのは最近である [Pym15]。なお、一部の非可換 \mathbb{P}^3 は非可換 del Pezzo 曲面を閉部分多様体として含んでおり、この点を理解するのは今後の課題である。

3. 3次元正則代数と種数 1 曲線の幾何

$A = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}} A_{i,j}$ を連結な \mathbb{Z} 代数とする。局所単位元 $e_i \in A_{i,i}$ を用いて定義される射影対象

$$P_i = e_i A \in \mathrm{grmod} A \quad (3.1)$$

は単純対象への全射

$$P_i \rightarrow S_i \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

を持つ。これをふまえて以下が定義される。

定義 3.1. (1) 以下の条件が満たされるとき、連結な \mathbb{Z} 代数 A は *quadratic* な 3次元 (Artin-Schelter) 正則代数と呼ばれる⁸。

(i) 任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{k}} \mathrm{Ext}_{\mathrm{Grmod} A}^k(S_i, P_j) = 1 \quad (3.3)$$

が成立する (AS-Gorenstein 条件)。

(ii) 任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して次の形の完全列が存在する。

$$0 \rightarrow P_{i+3} \rightarrow P_{i+2}^{\oplus 3} \rightarrow P_{i+1}^{\oplus 3} \rightarrow P_i \rightarrow S_i \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

(2) (1) において (3.4) を次の形の完全列に置き換えたものを *cubic* な 3次元正則代数と呼ぶ。

$$0 \rightarrow P_{i+4} \rightarrow P_{i+3}^{\oplus 2} \rightarrow P_{i+1}^{\oplus 2} \rightarrow P_i \rightarrow S_i \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Quadratic な 3次元正則代数の典型例は 3変数多項式環 $S = \mathbb{k}[x_0, x_1, x_2]$ に付随する \mathbb{Z} 代数である。このとき (3.4) は Koszul 解消に他ならない。Serre の圏同値 $\mathrm{qgr} \check{S} \simeq \mathrm{qgr} S \simeq \mathrm{coh} \mathbb{P}^2$ を思い出すと、次の定義が妥当であるとわかる。

⁶反標準束 $\wedge^2 T_X$ が豊富であるような非特異射影代数曲面のこと。分類が知られており、射影平面を一般の位置にある 8 つ以下の点で爆発して得られる曲面または 2 次曲面である。

⁷ \mathbb{P}^1 上の \mathbb{P}^1 束のことであるが、同型類は \mathbb{F}_d ($d \geq 0$) たちで完全に代表されることが知られている。なお、 d のパリティが同じもの同士は変形で互いに繋がる。

⁸Quadratic の適当な和訳が思いつかなかったので無理をせず英語のままにした。

定義 3.2. Quadratic な 3 次元正則代数 A から定まる $\text{qgr } A$ と k 線型圏として同値なアーベル圏を非可換射影平面と呼ぶ。同様に、cubic な 3 次元正則代数 A から定まる圏を非可換 2 次曲面と呼ぶ。

[AS87] においては 3 次元正則代数 (の次数つき代数版) が導入され、その分類が試みられた。分類が完成したのは [ATVdB90] においてであった。そこでは、3 次元正則代数の分類が平面 3 次曲線とその (代数群ではなく単に代数曲線としての) 自己同型の組の分類と等価であることが証明された。これは真に驚くべき発見であった。以下、この結果の \mathbb{Z} 代数版 ([BP93] で示された。) を紹介する。

定義 3.3. 許容可能な 3 つ組 (*admissible triple*) (Y, L_0, L_1) とは

- 種数 1 の曲線 Y
- Y 上の非常に豊富な直線束 L_0, L_1

であって以下の条件を満たすものである。

- L_i は Y を \mathbb{P}^2 に 3 次曲線として埋め込む。
- $L_0 \not\cong L_1$ 。
- 任意の既約成分 $C \subset Y$ に対して $\deg L_0|_C = \deg L_1|_C$ 。

定理 3.4. Quadratic な 3 次元正則代数であって qgr が $\text{coh } \mathbb{P}^2$ と同値でないものの同型類は許容可能な 3 つ組の同型類と 1 対 1 対応する。

対応を説明する。まず A を定理のような \mathbb{Z} 代数として、積

$$m: A_{0,1} \otimes A_{1,2} \rightarrow A_{0,2} \quad (3.6)$$

に注目する。代数に関する仮定からこれが全射であることがわかり、3 次元部分ベクトル空間

$$\ker m \subset A_{0,1} \otimes A_{1,2} \simeq H^0(\mathbb{P}A_{0,1} \times \mathbb{P}A_{1,2}, \mathcal{O}(1,1)) \quad (3.7)$$

を得る。 $\ker m$ の定める $\mathbb{P}A_{0,1} \times \mathbb{P}A_{1,2} \simeq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ の閉部分スキームを Y とすると、仮定から Y は完全交叉となり、特に種数 1 の射影的代数曲線となる ($\text{qgr } A \simeq \text{coh } \mathbb{P}^2$ となる場合は $Y \simeq \mathbb{P}^2$ となるが、この場合は除いているのであった)。さらに L_0, L_1 をそれぞれ $\mathcal{O}(1,0), \mathcal{O}(0,1)$ の Y への制限とすることで、許容可能な 3 つ組が得られる。

逆に、許容可能な 3 つ組 (Y, L_0, L_1) が与えられたとする。このとき Y 上の直線束の列 $(L_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ を漸化式

$$L_i \otimes L_{i+1}^{\otimes -2} \otimes L_{i+2} \simeq \mathcal{O}_Y \quad (3.8)$$

によって定義する。すると各 i について自然な写像

$$H^0(L_i) \otimes H^0(L_{i+1}) \rightarrow H^0(L_i \otimes L_{i+1}) \quad (3.9)$$

が全射になることがわかる。この写像の核を R_i とする。

$A_{i,i+1} := H^0(L_i)$ とし、これらで自由に生成される \mathbb{Z} 代数を考える。これを R_i たちの生成する両側イデアルで剰余したのが所望の A である。詳しくは [VdB11] や [BP93] を読んでいただきたい。

定理 3.4 の状況において、さらに興味深い事が示せる。

$$M_i := \bigotimes_{k \in (-\infty, i-1]} L_k^{-1} \quad (3.10)$$

とし、これらの定める部分圏

$$(M_i)_{i \in \mathbb{Z}} \subset \text{coh } Y \quad (3.11)$$

を \mathbb{Z} 代数と見たものを考えよう⁹。 $B = \text{Alg}((M_i)_{i \in \mathbb{Z}})$ とすると、自然な全射

$$A \rightarrow B \quad (3.12)$$

が存在することがわかる。よって充満忠実な関手

$$\text{qgr } B \hookrightarrow \text{qgr } A \quad (3.13)$$

ができるが、実は

$$\text{qgr } B \simeq \text{coh } Y \quad (3.14)$$

となっていることがわかる。実際、 Y の自己同型 σ であって $L_1 \simeq \sigma^* L_0$ を満たすものが存在するのであるが (一般には 9 個存在する)、これを用いると $B \simeq R(Y, L_0, \sigma)^\vee$ となっている。ただし $R(Y, L_0, \sigma)$ は捻り斉次座標環 (twisted homogeneous coordinate ring, [AVdB90]) である。 $R(Y, L_0, \sigma)$ は一般には非可換環であり、 $R(Y, L_0, \text{id}_Y) = R(Y, L_0)$ である。今の場合 (L_0, σ) が Y の「豊富な対」であるため、 $\text{qgr } R(Y, L_0, \sigma) \simeq \text{coh } Y$ が証明できる。

これにより、 Y が非可換射影平面 $\text{qgr } A$ に因子として埋まっている、という描像ができる。特に Y 上の点は $\text{qgr } A$ の点とみなせるわけだが、逆に A の点加群 (point module) は Y の上にしかないということがわかる。

これをふまえて、 [VdB01] において、 $\text{qgr } A$ の (複数) 点における爆発が定義された。爆発の結果は次数つき環・アーベル圏・導来圏のいずれとも思えるのであるが、導来圏と見た場合に Orlov 型の半直交分解があることも証明された。例えば 6 点爆発の場合を考えると可換 3 次曲面の非可換変形が出来るわけだが、それらと非可換 \mathbb{P}^3 の 3 次超曲面との関係は完全には理解されていない。

なお、quadratic な 3 次元正則代数 A は必ず 1 周期的であることがわかっており、quadratic な 3 次元正則次数つき環から来ることがわかる。対応する幾何学的なデータの対応は

$$(Y, L_0, \sigma) \mapsto (Y, L_0, L_1 = \sigma^* L_0) \quad (3.15)$$

となっており、一般には 9 対 1 対応であることがわかる。

注 3.5. 非可換射影平面の中に平面 3 次曲線が入っているのは何故か? という問に対する完全な解答はまだ得られていないと言える。しかし、次のような概念的な説明がある。

射影平面の非可換変形は $0 \neq \beta \in H^0(\mathbb{P}^2, \wedge^2 T_{\mathbb{P}^2})$ によって与えられる。 β は直線束の切断なので零点集合を考えると \mathbb{P}^2 の閉部分多様体になるが、それは平面 3 次曲線に他ならない。また、そこは非可換変形が自明になっている部分である。従って、その曲線は非可換変形後の射影平面にそのまま閉部分多様体として埋まっているわけである。

この描像は GCS[Gua11] の言葉で厳密化することができる。この場合、 β は最初に与えられた複素構造から決まる GCS の正則 Poisson 変形を引き起こす。GCS は可微分多様体上のベクトル束の自己同型であるが、その変形が β の零点上のファイバーでは自明になるわけである。変形後の一般化された複素多様体上で type 数を見ると、 β の零点集合上では 2、その外では 0 ということになる。これを標語的に「 β の零点集合上では複素多様体、その外ではシンプレクティック多様体になっている」と表現することがある。

GCS と非可換代数幾何の関係は現時点で明らかでない。主たる困難は、一般化された複素多様体に対してその上の対象の良い dg 圏を定義する事が出来ていないということにある。しかし、Gualtieri や Cavalcanti らが解明に向けて研究を進めているようである。

⁹わかりやすさを優先して、記号を濫用した。要するに j から i への射が $H^0(Y, M_j^{-1} \otimes M_i)$ となるような圏のことである ($M_j^{-1} \otimes M_i$ は M_j と M_i の「ズレ」の部分を表している、と読むと意味が通る)。

4. 印つき非可換 DEL PEZZO 曲面とモジュライ

次に、 k 線型アーベル圏 $\text{qgr } A$ から \mathbb{Z} 代数 A の同型類がどこまで復元できるか、という問題を考えよう。 A が quadratic な 3 次元正則代数の時、実は A の同型類が $\text{qgr } A$ の情報だけから復元できることがわかっている ([SvdB01]。証明は [AOU14, Appendix] 参照)。これは非可換射影平面の特殊事情であり、一般には正しくない。これを説明するために cubic な 3 次元正則代数 (非可換 2 次曲面) の場合について少し説明をしたい。

Cubic な 3 次元正則代数について quadratic の場合と完全に平行な結果を確立したのが [VdB11] である。特に $\text{qgr } A \not\cong \text{coh } \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ であるような cubic 3 次元正則代数 A の同型類が許容可能な 4 つ組 (Y, L_0, L_1, L_2) の同型類と 1 対 1 対応する事が証明されている。ただし、ここで

- Y は種数 1 の射影曲線。
- L_i は Y 上の直線束で $L_0 \not\cong L_2$ 。
- $L_0 \otimes L_1, L_1 \otimes L_2$ はどちらも非常に豊富で、 Y を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に次数 $(2, 2)$ の因子として埋め込む。
- 任意の既約成分 $C \subset Y$ について $\deg L_0|_C = \deg L_2|_C$ 。

Quadratic 代数の場合と違い、cubic 代数の場合には $\text{qgr } A$ から A の同型類を復元することはできない。それどころか A の同型類の集合に離散無限群 $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ が qgr を保つように作用することがわかっている。具体的には、生成元的作用を許容可能な 4 つ組で表すと

$$(Y, L_0, L_1, L_2) \mapsto (Y, L_1, L_2, L_3) \quad (4.1)$$

$$(Y, L_0, L_1, L_2) \mapsto (Y, L_{-1}, L_2, L_1) \quad (4.2)$$

となる¹⁰。

このように、代数を復元しようとする圏に情報を付加しないと成らないということがわかる。これは、非可換 del Pezzo 曲面の「良い」モジュライ空間を構成するためには圏同値類そのものを見るのではなく「印つき (marked) 圏」の同値類を考えるべきであるという事を示唆する¹¹。そのような付加的な情報として (導来) 圏の充満強例外対象列 (*full strong exceptional collection, FSEC*) を考えるべきである、というのが筆者らの立場である。これは筆者らによる非可換 del Pezzo 曲面のモジュライの構成法の基礎にもなっている。

定義 4.1. \mathcal{T} をある程度性質の良い k 線型三角圏とする。 \mathcal{T} の対象の列 $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_r \in \mathcal{T}$ が次の条件をみたすとき FSEC と呼ばれ、記号

$$\mathcal{T} = \langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_r \rangle \quad (4.4)$$

で表される。

- (1) \mathcal{T} は $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_r$ を含む最小の三角圏である。
- (2) $[k = 0 \text{ かつ } i \leq j]$ が成立する場合を除いて

$$\mathcal{T}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j[k]) = 0 \quad (4.5)$$

となる。

- (3) 全ての \mathcal{E}_i について $\mathcal{T}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_i) = k \cdot \text{id}_{\mathcal{E}_i}$ が成立する。

¹⁰直線束 L_i は L_0, L_1, L_2 から漸化式

$$L_i \otimes L_{i+1}^{-1} \otimes L_{i+2}^{-1} \otimes L_{i+3} \simeq \mathcal{O}_Y \quad (4.3)$$

で定まる。

¹¹例えばアーベル多様体のモジュライ空間を考える時は実際には偏極つきアーベル多様体のモジュライを考えるのであった。

非特異射影多様体 X の導来圏を考えた時、FSEC を持つというのはとても強い制約である。例えばその仮定から自動的に $K_0(X) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus r}$ が従う。よって、例えば、射影直線以外の曲線の導来圏が FSEC を持たないということがわかる¹²。

一方、del Pezzo 曲面は常に FSEC を持つということがわかる。より強く、(爆発する点の個数が 3 以上ならば)3-block FSEC という大変性質の良い FSEC を持つことがわかっている [KN98]。

FSEC の各メンバー \mathcal{E}_i を考えると、仮定から $\mathcal{T}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_i[1]) = \mathcal{T}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_i[2]) = 0$ である。これは、圏 \mathcal{T} を変形した時に \mathcal{E}_i も一意的に・必ず変形することを意味する [LVdB06]。従って、del Pezzo 曲面の非可換変形のうち少なくとも一般のものは FSEC を持つことになる。

以上を踏まえて次の定義を導入する。

定義 4.2. \mathcal{C} を非可換 del Pezzo 曲面とする。このとき \mathcal{C} の印づけ (marking) とは、導来圏 $D^b(\mathcal{C})$ の FSEC のことである。

例 4.3. Quadratic な 3 次元正則代数 A を考える。対応する非可換射影平面を便宜的に X で表し、 $\mathrm{qgr} A = \mathrm{coh} X$ と思う。このとき「直線束」を

$$\mathcal{O}_X(i) := \pi(P_{-i}) \in \mathrm{coh} X \quad (4.6)$$

と定めると

$$D^b \mathrm{coh} X = \langle \mathcal{O}_X(-2), \mathcal{O}_X(-1), \mathcal{O}_X \rangle \quad (4.7)$$

という FSEC がある。

同様に Cubic な 3 次元正則代数の場合を考えると

$$D^b \mathrm{coh} X = \langle \mathcal{O}_X(-3), \mathcal{O}_X(-2), \mathcal{O}_X(-1), \mathcal{O}_X \rangle \quad (4.8)$$

という FSEC がある。 $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の場合には右辺の 4 つの対象はそれぞれ

$$\mathcal{O}_X(-2, -1), \mathcal{O}_X(-1, -1), \mathcal{O}_X(-1, 0), \mathcal{O}_X \quad (4.9)$$

となる。一般には、これらを変形して得られる対象が右辺にあらわれているわけである。

$D^b \mathrm{coh} X$ から FSEC を 1 組取った時、それらだけを対象とした部分圏

$$\mathcal{C} = (\mathcal{E}_i)_{i=1,2,\dots,r} \subset D^b \mathrm{coh} X \quad (4.10)$$

を $\{1, 2, \dots, r\}$ 代数と見たものが大事である。 $R = \mathrm{Alg}(\mathcal{C})$ を考えると、これを $(Q_0 = \{1, 2, \dots, r\}$ を満たすような) 特定の簾 Q から決まる道代数 $\mathbf{k}Q$ の商代数として表現することができる。表現に対応する \mathbf{k}^r 代数の全射準同型 $\mathbf{k}Q \rightarrow R$ の核として得られる両側イデアルを I とすると、 I を $G = \mathrm{Aut}_{\mathbf{k}^r} \mathbf{k}Q$ の作用で動かしても商代数の \mathbf{k}^r 代数としての同型類は変わらないことになる。また、両側イデアルとして長さ 1 の道を含まないものだけを考えるならば、商代数の同型類を変えないようなイデアルの取り替え方はこれで尽きるということもわかる。以上より

$$X \mapsto [I \text{ mod the action of } G] \quad (4.11)$$

という対応ができるわけであるが、これを「 X から線型代数的なデータを抽出する操作」と思うことで、 X の変形をパラメトライズするモジュライ空間やその (GIT) コンパクト化が構成できる。特に非可換 del Pezzo 曲面に対してこのプログラムを実行することができる。以下、非可換射影平面の場合に限ってこの話をする。内容が一部 [Ued14] と重複部分があるが、説明の都合上くり返すことにする。詳細に興味を持っていただけた場合には元論文 [AOU14, OUa] も見ていただきたい。

¹²FSEC を持つならばその多様体は有理的なのではないか、という folklore があるが、証明も反証もされていない。 $p_g = 0$ の一般型代数曲面のことを考えると、容易な問題とは言えないであろう。

次の形の籠 Q を考える (Beilinson quiver)。

$$-2 \rightrightarrows -1 \rightrightarrows 0 \quad (4.12)$$

Quadratic な 3 次元正則代数 A に対して FSEC(4.7) を考えると、それに対応する \mathbb{Z} 代数 $B \leftarrow Q$ の道代数 kQ からの k^3 代数としての全射準同型

$$\varphi: kQ \rightarrow B \quad (4.13)$$

が構成できる。ただし、これを構成するためには

$$\text{qgr } A(\mathcal{O}(-2), \mathcal{O}(-1)) = A_{1,2} \quad (4.14)$$

および

$$\text{qgr } A(\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}) = A_{0,1} \quad (4.15)$$

のベクトル空間としての基底を 1 組ずつ選ばないといけない。その選び方の自由度は上述の群 $G = \text{Aut}_{k^3} kQ$ の作用と等価である。

さて、記号

$$U = e_{-1}kQe_{-2}, \quad V = e_0kQe_{-1} \quad (4.16)$$

を用意する。これらはともに 3 次元の k ベクトル空間である。この記号のもとで、全射準同型 φ の核は 3 次元部分ベクトル空間 $I \subset V \otimes U$ で与えられる¹³。これを籠 Q の関係式と呼ぶ。また、 $G = GL(V) \times GL(U)$ である。以上をふまえて次のように定義する。

定義 4.4. 非可換射影平面のモジュライスタックとは商スタック

$$\mathcal{M}_{\text{ncP}^2} := [\text{Grass}(3, V \otimes U) / G] \quad (4.17)$$

のことである。

商スタックの定義にあらわれる代数群 G は、今の例の場合簡約である。よって、対応する GIT 商が定義できる。ここで、 G の中心 $\simeq \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ は $\text{Grass}(3, V \otimes U)$ に自明に作用しているので、GIT 商を考えるとときには GL を PGL に取り替えて商を考えることにする。さらに、本質的に GIT を変えないので PGL をエタール被覆 SL に取り替えることで以下の定義を得る。

定義 4.5. 非可換射影平面のコンパクト化されたモジュライ空間を GIT 商

$$M_{\text{ncP}^2} := \text{Grass}(3, V \otimes U) // SL(V) \times SL(U) \quad (4.18)$$

として定義する。ただし、 $//$ は半安定点集合¹⁴の圏論的商 (categorical quotient) を表す。

[Ued14] でも説明されているように、実は不変式環が知られており、 $M_{\text{ncP}^2} \simeq \mathbb{P}(6, 9, 12)$ であることがわかる¹⁵。特にモジュライは 2 次元である。これは変形理論

$$\begin{aligned} \text{HH}^3(\mathbb{P}^2) &= 0, \\ \text{HH}^2(\mathbb{P}^2) &\simeq H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)) \simeq k^{10}, \\ \text{HH}^1(\mathbb{P}^2) &\simeq H^0(\mathbb{P}^2, T_{\mathbb{P}^2}) \simeq T_{\text{id}} \text{Aut } \mathbb{P}^2 \simeq k^8 \end{aligned} \quad (4.19)$$

¹³これは (3.7) と本質的に同じものである。

¹⁴今の場合 $\text{Grass}(3, V \otimes U)$ の同変 Picard 群は階数 1 なので、VGIT はなく、GIT 安定性は一意に決まる。

¹⁵Vinberg による「次数つき Lie 環に付随する Weyl 群の不変式論」の特別な例になっており、不変式環が適当な複素鏡映群 (有限群) の不変式環と同型になることがわかるので、計算できるということになっている。今の場合は \mathfrak{e}_6 を $\mathbb{Z}/3$ 次数つき Lie 環と見たものに付随する不変式論になっているのだが、何故この次数つき Lie 環があらわれるのか、という問に対する明快な解答を持っていない。なお、このあたりの不変式論の話は量子情報理論の論文 [BLTV04] で知った ([Oub] も見よ)。

から求まる期待次元 $10 - 0 - 8 = 2$ とちゃんと符合している。

M_{ncP^2} の点は次のようにモジュライ解釈できる。以下、開部分集合 $M_{\text{ncP}^2}^{\circ} \subset M_{\text{ncP}^2}$ を安定点集合の商とする。

- (1) $M_{\text{ncP}^2}^{\circ}$ の点は Y が非特異であるような許容可能な 3 つ組から定まる非可換射影平面¹⁶の圏同値類と自然に 1 対 1 対応している。
- (2) 曲線 $\Delta := M_{\text{ncP}^2} \setminus M_{\text{ncP}^2}^{\circ}$ は cuspidal cubic curve と同型である。
- (3) Δ の特異点 0 に対応する閉軌道は可換な \mathbb{P}^2 に対応する籠の関係式の軌道である。
- (4) Δ には上述の点以外にもう 1 つ特別な点 ∞ があり、この点に対応する籠の関係式はどの非可換射影平面にも対応しない。
- (5) $\Delta \setminus \{0, \infty\}$ の点に対応する閉軌道は、 Y が \mathbb{P}^3 本の三角形と同型であるような非可換射影平面から決まる籠の関係式からなる。特に、そのようなタイプの非可換射影平面の圏同値類と 1 対 1 対応する。
- (6) M_{ncP^2} の 2 つの商特異点は共に $M_{\text{ncP}^2}^{\circ}$ に含まれている。これらは、曲線 Y が虚数乗法から来る余分な自己同型を持っており、さらにそれが 3 つ組 (Y, L_0, L_1) の自己同型になっているような非可換射影平面の同値類に対応している。
- (7) M_{ncP^2} を可換な \mathbb{P}^2 に対応する点で適当に重みつき爆発すると、種数が 1 で 2 点つきの安定曲線の粗モジュライ空間 $\overline{M}_{1,2}$ と同型になる。自然な射 $\pi: \overline{M}_{1,2} \rightarrow \overline{M}_{1,1}$ を $\overline{M}_{1,1}$ の普遍族 (の粗モジュライ) とみなすと 0 切断

$$o: \overline{M}_{1,1} \rightarrow \overline{M}_{1,2} \quad (4.20)$$

があるが、この像を収縮する射がちょうど上述の重みつき爆発の射に一致する。 $\overline{M}_{1,2} \rightarrow M_{\text{ncP}^2}$ は、一般点 $(Y, o, p) \in \overline{M}_{1,2}$ を 3 つ組 $(Y, \mathcal{O}_Y(3o), \mathcal{O}_Y(3p))$ に対応する非可換射影平面 (が定める籠の関係式) に送る。

なお、籠の関係式 $I \subset V \otimes U$ から逆に 3 つ組を復元することもできる。次にこれを説明する。

関係式つき籠 (Q, I) の次元ベクトル $(1, 1, 1)$ の表現全体を考え、その中で安定性条件 $\chi = (-2, 1, 1)$ について安定なものだけを集めてできるファインモジュライ空間 [Kin94] を考える。その上には普遍表現があるので、特に Q の各頂点に対応して直線束 $\mathcal{L}_{-2}, \mathcal{L}_{-1}, \mathcal{L}_0$ が乗っている。 \mathcal{L}_{-2} をモジュライの構造層に正規化しておけば、実はモジュライ空間が曲線 Y を与え、また $\mathcal{L}_{-1}, \mathcal{L}_0$ がそれぞれ L_0, L_1 を与えるのである。

ここまで、 M_{ncP^2} の話は全て特定の FSEC(4.7) を使って行ってきた。 \mathbb{P}^2 の導来圏には無限に FSEC があるため、他の FSEC を使っても当然同様の話ができるわけである。ところが、 \mathbb{P}^2 の導来圏の FSEC は全て (4.7) に何回か変異 (mutation) という操作を施すことで得られることがわかっている。これは、Markov 方程式と呼ばれる Diophantus 方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz \quad (4.21)$$

の自然数解が全て基本的な解 $(3, 3, 3)$ に何回か変異 (mutation) という操作を施すことで得られる、ということに密接に関係している [GK04, Bri05]。これを用いると、実は、異なる FSEC に対して構成した M_{ncP^2} が全て互いに標準的に同型である、ということが証明できる。これは射影平面の場合にだけおきる特別な現象で、他の del Pezzo 曲面の場合にはモジュライの異なる双有理モデルが得られる。ただし、3-block FSEC に限定して考えれば、射影平面の場合と同様な現象が観察できる。

以上、非可換射影平面の場合に限って話をしてきたが、全く平行な話が他の del Pezzo 曲面に対しても成立する¹⁷。射影平面の場合ですらかなり内容があるわけで、他の del Pezzo 曲面についても調べようとする膨大な話になる (可換な del Pezzo 曲面のモジュライやそのコンパクト化ですら、大変な蓄積のある話題である)。なお、低い次数の del Pezzo 曲

¹⁶(3 変数多項式環を除いた)3 次元 Sklyanin 代数から定まる非可換射影平面、と言ってもよい。

¹⁷Abdelgadir-大川-植田で鋭意準備中。

面には可換な変形も存在するが、可換な変形のモジュライが非可換変形のモジュライの閉部分多様体になることがわかる。可換変形のモジュライのコンパクト化と非可換変形のモジュライのコンパクト化の関係を調べるのは興味深い問題である。

なお、非可換代数多様体のモジュライ (特に K 安定性の一般化) は [BN15] でも扱われている。筆者らとは全く異なる定義を採用しており、筆者らの定義で不安定だがかれらの定義では半安定な非可換射影平面があるようである。一方で一般化された Kähler 多様体に対する Kähler-Einstein 計量の理論も後藤竜司氏らによって構築されつつあるようであり、その意味での計量の存在と安定性の関係は気になるところである。

REFERENCES

- [AOU14] Tarig Abdelgadir, Shinnosuke Okawa, and Kazushi Ueda, *Compact moduli of noncommutative projective planes*, 2014.
- [AS87] Michael Artin and William F. Schelter, *Graded algebras of global dimension 3*, Adv. in Math. **66** (1987), no. 2, 171–216. MR 917738 (88k:16003)
- [ATVdB90] M. Artin, J. Tate, and M. Van den Bergh, *Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves*, The Grothendieck Festschrift, Vol. I, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 33–85. MR 1086882 (92e:14002)
- [AVdB90] M. Artin and M. Van den Bergh, *Twisted homogeneous coordinate rings*, J. Algebra **133** (1990), no. 2, 249–271. MR 1067406 (91k:14003)
- [AZ94] M. Artin and J. J. Zhang, *Noncommutative projective schemes*, Adv. Math. **109** (1994), no. 2, 228–287. MR MR1304753 (96a:14004)
- [BLTV04] Emmanuel Briand, Jean-Gabriel Luque, Jean-Yves Thibon, and Frank Verstraete, *The moduli space of three-qutrit states*, J. Math. Phys. **45** (2004), no. 12, 4855–4867. MR 2105225 (2005g:81055)
- [BN15] Kai Behrend and Behrang Noohi, *Moduli of non-commutative polarized schemes*.
- [BP93] A. I. Bondal and A. E. Polishchuk, *Homological properties of associative algebras: the method of helices*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **57** (1993), no. 2, 3–50. MR 1230966 (94m:16011)
- [Bri05] Tom Bridgeland, *t -structures on some local Calabi-Yau varieties*, J. Algebra **289** (2005), no. 2, 453–483. MR MR2142382 (2006a:14067)
- [CI05] Daniel Chan and Colin Ingalls, *The minimal model program for orders over surfaces*, Invent. Math. **161** (2005), no. 2, 427–452. MR 2180454 (2008b:16043)
- [CI12] ———, *Conic bundles and Clifford algebras*, New trends in noncommutative algebra, Contemp. Math., vol. 562, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, pp. 53–75. MR 2905553
- [Gab62] Pierre Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323–448. MR 0232821 (38 #1144)
- [GK04] A. L. Gorodentsev and S. A. Kuleshov, *Helix theory*, Mosc. Math. J. **4** (2004), no. 2, 377–440, 535. MR 2108443 (2005i:14020)
- [Got16] Ryushi Goto, *Unobstructed deformations of generalized complex structures induced by C^∞ logarithmic symplectic structures and logarithmic poisson structures*, pp. 159–183, Springer Japan, Tokyo, 2016.
- [Gua11] Marco Gualtieri, *Generalized complex geometry*, Ann. of Math. (2) **174** (2011), no. 1, 75–123. MR 2811595 (2012h:53185)
- [Kin94] A. D. King, *Moduli of representations of finite-dimensional algebras*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **45** (1994), no. 180, 515–530. MR MR1315461 (96a:16009)
- [KN98] B. V. Karpov and D. Yu. Nogin, *Three-block exceptional sets on del Pezzo surfaces*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **62** (1998), no. 3, 3–38. MR 1642152 (99k:14069)
- [LVdB05] Wendy Lowen and Michel Van den Bergh, *Hochschild cohomology of abelian categories and ringed spaces*, Adv. Math. **198** (2005), no. 1, 172–221. MR 2183254 (2007d:18017)
- [LVdB06] ———, *Deformation theory of abelian categories*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), no. 12, 5441–5483 (electronic). MR 2238922 (2008b:18016)
- [Mor10] Izuru Mori, *Noncommutative algebraic geometry*, Sūgaku **62** (2010), no. 2, 219–239. MR 2641972
- [MOU] Izuru Mori, Shinnosuke Okawa, and Kazushi Ueda, *Moduli of non-commutative Hirzebruch surfaces*, 鋭意準備中.

- [OR15] Andrei Okounkov and Eric Rains, *Noncommutative geometry and Painlevé equations*, Algebra Number Theory **9** (2015), no. 6, 1363–1400. MR 3397405
- [OUa] Shinnosuke Okawa and Kazushi Ueda, *Noncommutative quadric surfaces and noncommutative conifolds*, arXiv:1403.0713.
- [OUb] ———, *Quantum entanglement, Calabi-Yau manifolds, and noncommutative algebraic geometry*, arXiv:1402.3768.
- [Pym15] Brent Pym, *Quantum deformations of projective three-space*, Adv. Math. **281** (2015), 1216–1241. MR 3366864
- [Sak01] Hidetaka Sakai, *Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations*, Comm. Math. Phys. **220** (2001), no. 1, 165–229. MR 1882403
- [Sie11] Susan J. Sierra, *G-algebras, twistings, and equivalences of graded categories*, Algebr. Represent. Theory **14** (2011), no. 2, 377–390. MR 2776790 (2012d:16128)
- [SvdB01] J. T. Stafford and M. van den Bergh, *Noncommutative curves and noncommutative surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **38** (2001), no. 2, 171–216. MR 1816070 (2002d:16036)
- [Ued14] Kazushi Ueda, 籠の関係式の本モジュライ空間, 代数幾何学シンポジウム 2014 プロシーディングス, 2014.
- [VdB01] Michel Van den Bergh, *Blowing up of non-commutative smooth surfaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **154** (2001), no. 734, x+140. MR 1846352 (2002k:16057)
- [VdB07] ———, *On global deformation quantization in the algebraic case*, J. Algebra **315** (2007), no. 1, 326–395. MR 2344349 (2008i:14018)
- [VdB11] ———, *Noncommutative quadrics*, International Mathematics Research Notices. IMRN (2011), no. 17, 3983–4026. MR MR2836401 (2012m:14004)
- [VdB12] M. Van den Bergh, *Non-commutative \mathbb{P}^1 -bundles over commutative schemes*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), no. 12, 6279–6313. MR 2958936

大阪大学大学院理学研究科

E-mail address: okawa@math.sci.osaka-u.ac.jp

代数学シンポジウム報告集

阿部拓郎*

平成28年12月27日

1 序文

本文は佐賀大学にて開催された、第61回代数学シンポジウムの講演に関する報告集である。本文の中心的話題は超平面配置とその代数構造、特に自由性と呼ばれる性質である。自由性は代数幾何的にいうと、射影空間上のベクトル束が直線束の直和に分解する、いわゆる分裂 (splitting) を意味する。このような代数幾何的構造が、超平面配置の交わり方という組み合わせ論的性質から決定されるだろうか、という問題が寺尾予想であり、筆者が超平面配置の研究に興味を持ったきっかけでもある。昔、筆者はハーツホーン予想という、七次元以上の標数0の代数的閉体上の階数2のベクトル束は必ず分裂する、という予想に興味を持っていた。当時はこの予想に研究するという段階までは到底至らなかったし、現在でも自分で何かできるとは思えない。そんなとき、超平面配置とそれに付随して簡単に構成できる対数的ベクトル場という反射層の存在、およびなんとなく似た感じがする寺尾予想を知り、興味を惹かれて超平面配置の自由性の研究を開始してから、ようやく10年になる。

超平面配置を代数幾何的に研究するメリットはいくつかあるが、まず一つは対応する幾何学が極めて具体的かつシンプルな超平面の有限族であるという点がある。同時に元の幾何構造たる超平面配置の包含関係を用いて、対応するベクトル束の遠近が容易に定義でき、それを用いて帰納的、あるいは構成的な議論を行うことができるのも大きなメリットである。このような視点から得られたもっとも最近の定理が、剰余定理 (定理3.6) であり、この結果の説明をすることを、本報告の最初の目的とする。剰余定

*九州大学マス・フォア・インダストリ研究所. email:abe@imi.kyushu-u.ac.jp

理は、代数幾何と超平面配置の交差点にあるような定理である。後ほど説明するが、超平面配置には二種類の制限がある。つまり超平面配置の元 H を一つ固定した場合、そこに交わる他の超平面たちが、 H の上に新しい超平面配置を作る。これに重複度を考えない制限が、長い間超平面配置の制限であった。代数幾何的には、重複度を考えないというのはいささか不思議な気もするが、実際この制限で代数幾何・位相幾何・組合せ論的に話はかなりうまく回っていた。他方、重複度を考える制限に関する代数幾何的アプローチが、吉永正彦による最初の定式化以降この十年急速に発展してきた。剰余定理は、この二つの制限をどちらも使うことで、代数幾何的手法を陰に隠しつつ組合せ論的議論を行うことを可能にする定理である。換言すれば剰余定理は、代数幾何の古典的理論と、超平面配置の代数学の近年の進展をどちらも併せ持つ、まさに交差点的定理である。以下の章で超平面配置の自由性の基本性質・歴史を見ながら、本定理を説明してゆくことを試みる。さらに、筆者の最近の共同研究である、超平面配置を用いたある多様体のコホモロジー環の表示についても言及したい。

2 超平面配置とその自由性

\mathbb{K} を任意の体とし、 $V = \mathbb{K}^\ell$, $S = \text{Sym}^*(V^*) \simeq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_\ell]$ とおく。 V 中の超平面配置 \mathcal{A} とは、 V 中の原点を通る超平面の有限族のことである。 $H \in \mathcal{A}$ に対して、 $\ker \alpha_H = H$ となる $\alpha_H \in V^*$ を一つ選び固定しておく。 \mathbb{K} 線型な S 導分加群 $\text{Der } S := \bigoplus_{i=1}^{\ell} S \partial_{x_i}$ の部分加群として、 \mathcal{A} の代数たる対数的ベクトル場 $D(\mathcal{A})$ が以下のように定義される。

定義 2.1

$$D(\mathcal{A}) := \{\theta \in \text{Der } S \mid \theta(\alpha_H) \in S\alpha_H \ (\forall H \in \mathcal{A})\}.$$

$D(\mathcal{A})$ は一般に自由化群にならず、反射加群になる。つまり自然な写像 $D(\mathcal{A}) \rightarrow (D(\mathcal{A})^*)^*$ が同型になっている。よって自由加群となる場合に以下のように名前を付ける。

定義 2.2

\mathcal{A} が自由で指数 $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \dots, d_\ell)$ であるとは、ある斉次な $\theta_1, \dots, \theta_\ell \in D(\mathcal{A})$ が存在して、 $D(\mathcal{A}) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} S\theta_i$ となっているときにいう。ここで $\theta = \sum_{i=1}^{\ell} f_i \partial_{x_i} \in \text{Der } S$ が斉次で次数 d とは、 $f_i = 0$ もしくは f_i が d 次の斉次式という条件が任意の i で成り立っているきにいう。

極めて簡単な例として、自由配置と自由でない配置が構成できる。

例 2.3

(1) \mathcal{A} が $\prod_{i=1}^{\ell} x_i = 0$ で定義される座標平面配置のとき、これは指数が $(1, \dots, 1)$ となる自由配置である。実際 $\theta_i := x_i \partial_{x_i} \in D(\mathcal{A})$ は容易にチェックでき、かつこれらが $D(\mathcal{A})$ の自由基底となることもほぼ明らかである。

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\ell = 3$ とし \mathcal{B} を $x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = 0$ で定義されるような平面配置とすると、

$$\widetilde{D(\mathcal{A})} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus T_{\mathbb{P}^2}(-3)$$

となることがわかる。よって $D(\mathcal{A})$ は局所自由配置であるが、自由配置ではない。

(3) $\ell = 2$ とすると、全ての二次元配置は自由。これは、二次元配置の対数的ベクトル場が射影直線上の反射層を与えることからわかるが、具体的に基底を以下のように与えることでもチェックできる。即ち \mathcal{A} を、 $x_1 = 0$ を含むような二次元配置とすれば、

$$\theta_1 = x_1 \partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_2}, \quad \theta_2 = \left(\prod_{H \in \mathcal{A} \setminus \{x_1=0\}} \alpha_H \right) \partial_{x_2}$$

が $D(\mathcal{A})$ の基底を与えることはほぼ自明。例えば以下に与える斎藤の判定法などを参照。よって空でない二次元配置の指数は $(1, |\mathcal{A}| - 1)$ である。

上の例 2.3 (2) より一般に、generic な配置はすべて自由ではないことが簡単にわかる。ゆえに自由配置というのは、極めて特殊なものであり、それゆえ特殊で面白い性質がいろいろ成り立つ。

自由配置の意味付けはいろいろあるが、もっともわかりやすく美しいそれは、ワイル群の鏡映面全体を集めたワイル配置の一般化、という意味付けである。ワイル群やそのルート系には様々な良い性質があるが、その一つとして、ワイル配置の補空間の複素化のベッチ数が、ワイル群の指数を用いて記述できる、という事実がある。この結果は自由配置のカテゴリでも以下のように完全に一般化される。

定理 2.4 ([16], 寺尾の分解定理)

\mathcal{A} が $V = \mathbb{C}^{\ell}$ 中の自由配置で $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \dots, d_{\ell})$ であるとする。このとき

$$\text{Poin}(V \setminus \cup_{H \in \mathcal{A}} H; t) = \prod_{i=1}^{\ell} (1 + d_i t).$$

すなわち, 位相幾何的に意味のある指数を, 代数を用いて定義できる配置が自由配置である, ということができる. 実は複素ベクトル空間中の超平面配置の補空間のベッチ数は, 配置がどのように交わっているかという情報のみから (自由配置でなくとも) 計算できるのだが (定理 2.8), 本数が多かたり次元が高かたりするとこの方法で計算することは現実的ではない. 対して, 自由配置であれば, 代数的な方法を使って指数さえ計算できれば, そこからベッチ数が確定される. 特にワイル群が関係する配置に対しては, 吉永による Edelman-Reiner 予想の解決 ([18]) などにもあるように, この手法が強烈に威力を発揮することがある.

このように良い配置である自由配置であるが, その判定は一般には極めて難しい. 判定法として最も基礎的なものは齋藤恭司による以下の定理である.

定理 2.5 ([14], 齋藤の判定法)

$\theta_1, \dots, \theta_\ell \in D(\mathcal{A})$ が $D(\mathcal{A})$ の基底となるための必要十分条件は,

$$\det(\theta_i(x_j)) = cQ(\mathcal{A})$$

となることである. ここで c はゼロでないスカラー, $Q(\mathcal{A}) := \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H$ である. またこの条件は, (i) $\theta_1, \dots, \theta_\ell$ が S 上一次独立かつ, (ii) $\sum_{i=1}^{\ell} \deg \theta_i = |\mathcal{A}|$ の二条件とも同値.

齋藤の判定法は必要十分条件を与えており, 極めて基本的な結果であるが, これを実際に適用する際に難しいのは $\theta_1, \dots, \theta_\ell$ を具体的に構成し, かつそれらが $D(\mathcal{A})$ に含まれることを調べることである. しかしながら, 以後現れる様々な自由性判定法や条件は, すべてこの齋藤の判定法を基礎としており, 理論的にも極めて重要な定理である.

この齋藤の判定法を用いて得られる, 自由性判定の手段として最も汎用的といえるのが, 寺尾宏明による以下の加除定理である.

定理 2.6 ([15], 寺尾の加除定理)

\mathcal{A} を空でない超平面配置とし, $H \in \mathcal{A}$ を固定する. $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \setminus \{H\}$, $\mathcal{A}^H := \{H \cap L \mid L \in \mathcal{A}'\}$ とおく. この時以下の三条件のうち, 二つが成立すれば残りの一つも成立する:

- (1) \mathcal{A} は自由配置で $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \dots, d_{\ell-1}, d_\ell)$.
- (2) \mathcal{A}' は自由配置で $\exp(\mathcal{A}') = (d_1, \dots, d_{\ell-1}, d_\ell - 1)$.
- (3) \mathcal{A}^H は自由配置で $\exp(\mathcal{A}^H) = (d_1, \dots, d_{\ell-1})$.

特に \mathcal{A} , \mathcal{A}' がともに自由なら, 上の三つはすべて成立.

加除定理は、自由配置構成及び自由配置か否かのチェックを帰納的に可能とする、極めて使いやすい定理である。さらに言うと、自由でないことのチェックにも非常に有効に働くことも多く、実はこの使い方がとても重要だと思う。例えば \mathcal{A} が自由でないことを言いたいとき、無論ポアンカレ多項式が分解しないことを言えば、定理 2.4 から出ることが出るが、実際ポアンカレ多項式の計算はかなりしんどい。そこで、 $H \in \mathcal{A}$ で、 \mathcal{A}' が自由だが \mathcal{A}^H が自由でないものを見つければ、最後に書いた主張から \mathcal{A} は自由とはなりえないことがわかる。特に $\ell = 3$ であれば、これは $\exp(\mathcal{A}') = (1, d_1, d_2)$ である場合に、 $|\mathcal{A}^H|$ が $d_1 + 1$, $d_2 + 1$ のいずれにもならない、という条件と合致するため、極めて使いやすい。実際今知られている自由配置のほとんどは、加除定理 2.6 を用いて構成あるいはチェックされたものだと思う。

さて、ここで少しだけわき道にそれる。自由性は、超平面配置の組み合わせ論と極めて深い関係がある。それを説明するため、いくつか用語を準備する。

定義 2.7

$$L(\mathcal{A}) := \{\cap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\}$$

を \mathcal{A} の交差格子という。交差格子上のメビウス関数 $\mu : L(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{Z}$ を、 $\mu(V) = 1$ 及び

$$\mu(X) := - \sum_{X \subsetneq Y \subset V, Y \in L(\mathcal{A})} \mu(Y)$$

で定義する。さらに \mathcal{A} のポアンカレ多項式 $\pi(\mathcal{A}; t)$ を、

$$\pi(\mathcal{A}; t) := \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X) (-t)^{\text{codim } X}$$

で定める。

ポアンカレ多項式という名前から想像がつくかもしれないが、Brieskorn 及び Orlik-Solomon より、以下の結果が知られている、

定理 2.8

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ であれば、 $\pi(\mathcal{A}; t) = \text{Poin}(V \setminus \cup_{H \in \mathcal{A}} H; t)$ が成立。さらに $V \setminus \cup_{H \in \mathcal{A}} H$ のコホモロジー環の構造は、 $L(\mathcal{A})$ にのみ依存して決定される。さらに定理 2.4 は、 \mathcal{A} が自由で $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \dots, d_\ell)$ ならば、

$$\pi(\mathcal{A}; t) = \prod_{i=1}^{\ell} (1 + d_i t)$$

たる主張に、任意の体上で定式化される。

この、コホモロジー環の構造が $L(\mathcal{A})$ から決定されるという定理は極めて衝撃的である。よってこれ以降、超平面配置にまつわる様々な構造や不変量が、 $L(\mathcal{A})$ にのみ依存するかどうか、という問題がたくさん現れた。例えば基本群は $L(\mathcal{A})$ だけからは決まらないことが知られているが、筆者の印象としては、ほとんどの場合にはどちらなのかよくわからない、というのが実情だと思う。その中で、35年にわたり未解決の有名な予想がある。

予想 2.9 (寺尾予想)

\mathcal{A} が自由か否かは、 $L(\mathcal{A})$ にのみ依存してきまる。

例でみたように、寺尾予想が明らかに正しいクラスは二次元配置だけある。寺尾の分解定理は寺尾予想の有力な傍証であるが、ポアンカレ多項式が整数係数上で分解していても自由でない配置は存在する。もともと寺尾予想は、寺尾により予想ではなく問題として出されたものであったが、結果として35年間本質的な進展はほとんどないまま来てしまった。昨今これだけ計算機が発達したのに、まだ反例が見つからないところを見ると、予想と呼んでも差し支えないように思われる。しかしながら正しいとしても証明方法が全く見当もつかないことから、計算機を用いて不意に反例が見つかってもおかしくない予想だと思われる。

ともあれ、寺尾予想を忘れたとしても、自由性がどれくらい組み合わせ論的に決定されるかという問題は自然であり面白いものだと思う。それに関連した話を一つ紹介する。

定義 2.10 (帰納的自由配置)

$\mathcal{IF}_1, \mathcal{IF}_2$ をそれぞれ一次元、二次元のすべての配置からなる集合とし、 \mathcal{IF}_ℓ ($\ell \geq 3$) を、以下の条件を満たすような ℓ 次元配置の集合とする。すなわち $\mathcal{A} \in \mathcal{IF}_\ell$ となるためには、 $\mathcal{A} = \emptyset$ か、もしくはある $H \in \mathcal{A}$ が存在して、 $\mathcal{A} \setminus \{H\} \in \mathcal{IF}_\ell, \mathcal{A}^H \in \mathcal{IF}_{\ell-1}, \exp(\mathcal{A}^H) \subset \exp(\mathcal{A} \setminus \{H\})$ を満たしていることが必要十分とする。 $\mathcal{IF} := \cup_{\ell \geq 1} \mathcal{IF}_\ell$ とし、これに含まれる超平面配置を帰納的自由配置という。

定義の中に含まれてしまっているが、加除定理を繰り返し用いることで、帰納的自由配置は自由配置であることが直ちにわかる。具体的には、二次元以下の配置及び空集合たる配置が自由なので、次元と本数に関する帰納法と組み合わせて加除定理をあてはめてゆけばよい。またこの構成から、以下の主張が直ちに従う。

系 2.11

\mathcal{A}, \mathcal{B} を超平面配置, $\mathcal{A} \in \mathcal{IF}$ とする. もし半順序集合として $L(\mathcal{A}) \simeq L(\mathcal{B})$ であれば, \mathcal{B} も自由.

即ち帰納的自由配置は寺尾予想が成立するような超平面配置のクラスを与えている. アルゴリズム的に構成されるクラスであるが, 寺尾による定義以来, これが最も広い寺尾予想の成立するクラスであった. また同時に, このクラスに入ることを示す以外には, なかなか自由性が組合せ論的に決定されることを示すのは難しかった. これに関する代数幾何的な進展を, 次の章で述べる.

3 自由配置に関する最近の進展

自由配置に関するここ 10 年余りの進展については, 吉永正彦による代数幾何的手法, より具体的には Horrocks の判定法的視点の自由配置理論への導入が極めて大きな役割を果たした. 対数的ベクトル場は射影空間上の反射層を与えるので, それらの分裂に関する代数幾何の, 長い歴史を持つ深い知見を用いることは極めて有用であった.

それを述べるために, まず多重配置の概念を導入する.

定義 3.1 ([20])

多重配置 (\mathcal{A}, m) とは, 超平面配置 \mathcal{A} と重複度 $m : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ の組をいう. これに対して対数的ベクトル場

$$D(\mathcal{A}, m) := \{\theta \in \text{Der } S \mid \theta(\alpha_H) \in S\alpha_H^{m(H)} \ (\forall H \in \mathcal{A})\}$$

が定義され (一般にはやはり反射層), その自由性や指数も同様に定義される.

極めて人工的に見えるこの定義であるが, 以下のように超平面配置から自然に多重配置が構成される.

定義 3.2 ([20])

$\mathcal{A} \ni H$ に対して, \mathcal{A} の H への Ziegler 制限 (\mathcal{A}^H, m^H) は,

$$m^H(K) := \#\{L \in \mathcal{A} \setminus \{H\} \mid L \cap H = K\} \quad (K \in \mathcal{A}^H)$$

で定義される.

定義から明らかのように、これは制限した場合の被約でないような多様体を考えよう、という代数幾何的には自然な設定の超平面配置バージョンである。逆にいえば、これ以前には、例えば加除定理を見ればわかるように、 \mathcal{A}^H という、重複度を全く考えない、ゆえに代数幾何的にはよくわからない制限で話がいろいろうまくいったことになる。しかしながらこれまたやっぱり不思議なもので、この二つの制限ともに極めて重要である。前者は代数幾何と明らかに相性がよいが、後者はいわば組合せ論と相性が良い制限であるからである。

さて、代数幾何との相性の良さを示す次の定理が多重配置に関してあげられる。

定理 3.3 ([20])

\mathcal{A} が空でない自由配置で $\exp(\mathcal{A}) = (1, d_2, \dots, d_\ell)$ であるならば、任意の $H \in \mathcal{A}$ に対して (\mathcal{A}^H, m^H) は自由で指数は (d_2, \dots, d_ℓ) 。

これは、射影空間上で分裂している層の超平面切断もやはり分裂していて、同じ分裂型を持つ、という有名な結果の超平面配置版である。さて、代数幾何における分裂理論に詳しい方ならば、この逆はどうなのか、というところが気になるはずである。即ち、代数幾何においては射影空間上の層の分裂は、射影平面より高い次元においては超平面切断における分裂と同値である。これが有名な Horrocks の判定法（厳密にはその系）であるが、吉永はこれを超平面配置の自由性判定の枠組みに本格的に導入した。その場合重要な役割を果たすのは無論上記 Ziegler 制限とその自由性であるが、ここで問題となるのが、対数的ベクトル場を層の言葉に直そうとした場合、若干のずれが生じる点である。以下、具体的に説明しよう。

θ_E をオイラー微分とし、 $D_H(\mathcal{A}) := \{\theta \in D(\mathcal{A}) \mid \theta(\alpha_H) = 0\}$ とすると、これは $D(\mathcal{A})/S\theta_E$ と同型であること、及び

$$D(\mathcal{A}) \simeq S\theta_E \oplus D_H(\mathcal{A})$$

が簡単にわかる。よって \mathcal{A} の自由性は、 $D_H(\mathcal{A})$ の自由性と同じであり、これはまたその層化の分裂とも同値となる。これに対して Ziegler 制限射 $D_H(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A}^H, m^H)$ が、 α_H で modulo を取る、という操作で定義できる。この層化が射影空間上の層の間の写像となり、Horrocks の判定法と関連付けられるわけである。とすると問題となるのはただ一点、

$$D(\widetilde{\mathcal{A}^H}, \widetilde{m^H}) \simeq \widetilde{D_H(\mathcal{A})|_H}$$

たる同型が存在するか, という点に尽きる. これが存在すれば, Horrocks の判定法は完全に機能する. しかし一般にはそうではない. 吉永はこれを, 射影平面に対応する場合にも適用する形で以下のように定式化した.

定理 3.4 (吉永の判定法, [18], [19], [10])

(1) $\ell = 3$ とし, $\pi(\mathcal{A}; t) = (1+t)(1+b_1t+b_2t^2)$ とおく. また $\exp(\mathcal{A}^H, m^H) = (d_1, d_2)$ とする. この時 $b_2 \geq d_1d_2$, かつ等号成立は, \mathcal{A} が指数として $(1, d_1, d_2)$ を持つ自由配置となることと同値.

(2) $\ell \geq 4$ とする. この時 \mathcal{A} が自由となることは, ある $H \in \mathcal{A}$ が存在して, (\mathcal{A}^H, m^H) が自由であり, かつ局所化配置 $\mathcal{A}_X := \{H \in \mathcal{A} \mid H \supset X\}$ が, 任意の $X \in L(\mathcal{A}^H)$, $\text{codim}_H X = 2$ で自由となることと同値.

この定理が, 自由配置研究に新しい視点を導入した. その理由は色々あるが, まず代数幾何的手法がやはり非常に強力であることが大きい. もう一つ, (1) にある不等式 $b_2 - d_1d_2 \geq 0$ をどう解釈するか, という視点も非常に重要であった. これについては例えば [2] をご参照頂きたい.

さて, 定理 3.4 は明らかに, 寺尾予想の解決に対する確実な, そして大きな進展であった. つまり, 吉永の判定法により, ある次元の自由性の判定は, それより一次元下にある多重配置の自由性の問題へと帰着されたのである. 次元に関する帰納法の働きどころであった. ところが, ここで現れるのが, 代数幾何の特徴である, generic な情報という問題であった. 例えば射影平面上のベクトル束の分裂型は, generic にはなにか, ということは色々な結果からわかることもあるが (例えば半安定束に対する Grauert-Mülich の定理など), special な場合はいつでも分裂型のジャンプが起ころうるため, 一般に確定は難しい. それと同じことが, 多重化して代数幾何に近づいた結果, 起きてしまったのである.

詳述すると, 定理 2.8 から, b_2 は組合せ論で決まるため, また二次元多重配置は自由なため, 定理 3.4(1) を用いれば, 少なくとも三次元の寺尾予想は解決に非常に近くなったように見える. ところが, 以下のような例があるため, 壁がまだまだあることが分かってしまうのである.

例 3.5

(\mathcal{A}, m) を,

$$x^3y^3(x-y)(x+ay) = 0$$

で定義される多重配置とする. すると a が generic な値を取る場合にはその指数は $(4, 4)$ であるが, 例えば $a = 1$ の場合には $(3, 5)$ となる.

例 3.5 のような現象はどのような配置でも起こりうるが、これは代数幾何的には、与えられたベクトル束の分裂型は一般には差が最小となるが、特殊なところではジャンプしますよ、という主張である。自由配置は前述の通り基本的に特殊なところを見ているため、このギャップを正確に埋めないで、三次元の場合であっても寺尾予想はまだ遠かったのである。ちなみにこのようなジャンプは、Ziegler 制限でない普通の制限 \mathcal{A}^H に対しては起こっていない。これはつまり、普通の制限は組み合わせ論と相性が良い、ということを確認している。

しかし、明らかに強力な判定法である吉永の判定法を用いない手はない。これを用いて寺尾予想にアプローチするためには、多重配置の自由性とその指数の解析が本質的に重要になってくる。そのため、吉永の判定法発見からしばらくは、多重配置の自由性に関する一般論の研究が進められることとなる。詳細は煩雑になるため省くが、大きな進展としては多重配置のポアンカレ多項式の定式化と応用 ([8]) 及び、多重配置の自由性に関する加除定理の完成 ([9]) があげられる。これらにより、多重配置の自由性解析はかなり進歩した。

これらの技術を用いて、寺尾の加除定理を本質的に改良することに成功したのが、以下の剰余定理である：

定理 3.6 (剰余定理, [3])

$\mathcal{A} \ni H$ に対して、 $\pi(\mathcal{A}^H; t)$ が $\pi(\mathcal{A}; t)$ を割り切り、かつ \mathcal{A}^H が自由であるならば、 \mathcal{A} も自由。

寺尾の分解定理を思い出すと、例えば加除定理 2.6 中の条件 (2) と (3) が成り立っている状況下においては、 $\pi(\mathcal{A}^H; t) \mid \pi(\mathcal{A}'; t)$ となっていることが、寺尾の分解定理からわかる。ここでさらに、除去制限定理という有名な結果を思い出そう（例えば [13] を参照）：

$$\pi(\mathcal{A}; t) = \pi(\mathcal{A}'; t) + t\pi(\mathcal{A}^H; t).$$

これにより、加除定理 2.6 で仮定されている条件下においては $\pi(\mathcal{A}^H; t)$ が $\pi(\mathcal{A}; t)$ を割り切っていることもわかる。よって、加除定理に含まれている指数の包含関係という、自由性がないと定式化できない条件が、これらの観察から、ポアンカレ多項式の剰余という組み合わせ論の言葉で述べられるとわかる。よって剰余定理はこの観点からの加除定理の一般化であり、実は \mathcal{A} の自由性を帰納的に述べるには、 \mathcal{A}' の情報は不要であったことが初めて判明した定理でもある。

証明を細かく述べることは避けて、ここではその概略のみを述べる。まず証明のために用いるのは吉永の判定法 (定理3.4) の (2) の主張である。すなわち、 (\mathcal{A}^H, m^H) が自由であること、および \mathcal{A}_X が任意の $X \in L(\mathcal{A})$, $X \subset H$, $\text{codim } X = 3$ に対して自由であることを言いたい。後者の主張は省略するとして、前者に焦点を絞る。我々は \mathcal{A}^H の自由性を仮定として持っている。よってこれから (\mathcal{A}^H, m^H) の自由性を導出したい。そのための道具が多重配置の加除定理 ([9]) である。加除定理を適用するための鍵となるのが、多重配置の特性多項式 ([8]) であり、さらにその適用がうまくゆくための条件として $\pi(\mathcal{A}^H; t) \mid \pi(\mathcal{A}; t)$ が活躍することとなる。よって剰余定理の主張の中には多重配置の言葉が全く出てきていないのに、証明は多重配置の理論を徹底的に使う。また証明を見てゆくと、組み合わせ論的情報と相性の良い \mathcal{A}^H の対数的ベクトル場に、ポアンカレ多項式の剰余というやはり組み合わせ論的情報を組み合わせることで、代数幾何的情報である (\mathcal{A}^H, m^H) の対数的ベクトル場の情報が得られる、という構造もわかる。

剰余定理の恩恵はいろいろあるが、 \mathcal{A} の情報を不要とした結果として、自由性が次元に関する帰納法のみでチェックできうる、とわかったことが大きい。よって次のような定式化をすることは極めて自然である。

定理 3.7 (剰余旗, [3])

$\{X_i\}_{i=0}^\ell$ が超平面配置 \mathcal{A} の旗であるとは、 $X_i \in L(\mathcal{A})$, $\text{codim } X_i = i$, $X_i \subset X_{i-1}$ ($i = 1, \dots, \ell$) たる時に言う。 $\{X_i\}$ が剰余旗であるとは、 $\pi(\mathcal{A}^{X_i}; t) \mid \pi(\mathcal{A}^{X_{i-1}}; t)$ が $i = 1, \dots, \ell - 2$ で成立しているときに言う。もし \mathcal{A} が剰余旗を持てば、 \mathcal{A} は自由配置である。

主張の証明は簡単である。 $\mathcal{A}^{X_{\ell-2}}$ は二次元の配置なので自由、 $\pi(\mathcal{A}^{X_{\ell-2}}; t) \mid \pi(\mathcal{A}^{X_{\ell-3}}; t)$ から剰余定理より $\mathcal{A}^{X_{\ell-3}}$ も自由。以下繰り返す、というだけである。ここで注目すべきは、剰余旗の条件は対応する制限配置たちの間のポアンカレ多項式の剰余関係であるため、定義からこれらは組み合わせ論的条件である。よって以下の定義が自然にできる。

系 3.8 (剰余的自由配置, [3])

剰余旗を持つ配置からなる集合を DF と書き、 DF に属する配置を剰余的自由配置という。もしある配置 \mathcal{B} が、剰余的自由配置 \mathcal{A} と同型な交差格子を持てば、 \mathcal{B} も自由である。

証明は明らかであろう。さらに定義から剰余的自由配置は帰納的自由配置を含むことが明らかであるが、さらに強く

$$IF \subsetneq DF$$

であることも [3] で示されている. 剰余的自由配置は現在知られている, 寺尾予想の正しさが確認できる自由配置のクラスの中で最も大きなものである. しかしながら剰余的自由配置でない自由配置もいくつも見つまっているため, 寺尾予想の解決にはほど遠い.

なお, さらっと書いているが実際上 $\pi(\mathcal{A}; t)$ を計算することは非常に難しい. なので実用上は, $\mathcal{A}^H, \mathcal{A} \setminus \{H\}$ の自由性を示して, という過程を繰り返すことで剰余的自由配置であることを示す, ということが普通だと思う. なので剰余定理は理論的な定理とも言える. 更に, 自由性がその交差格子中のある旗の存在, もっと言えばメビウス関数たちがある特定の性質を満たすか, という数値的な情報で, かなりの場合に自由性が決定されることがチェックできる定理, という見方が正しいと思う. 個人的に剰余定理が示す最も重要な哲学は, 思っていた以上に簡単な組み合わせ論的構造から自由性が決定されることが多い, という事実であると思う.

さて, ここでちょっとだけ視点を変える. 先に述べたように, \mathcal{A}^H の対数的ベクトル場は, 代数幾何的には \mathcal{A} のそれと何ら関係がなく, \mathcal{A} の自由性が \mathcal{A}^H の自由性を導く必然性は何もない. しかしながら実際は, \mathcal{A} が自由ならば \mathcal{A}^H も自由であろう, という Orlik 予想がかなり長い間未解決であった. その否定的解決は, Edelman と Reiner による ([12]). しかし面白いことに, このようなケース, すなわち \mathcal{A} が自由でありながら \mathcal{A}^H が自由でないという例はほとんど知られていない. 筆者が知る限り, 本質的に二つだけである. これは, 理由はよくわからないけれど, 自由配置の制限は代数幾何とは異なった根拠から自由になりたがる傾向がある, ということである. あるいはこれにも代数幾何的な意味付けができるのかもしれない. とりあえずは, 剰余定理をまねて, Orlik 予想の改訂版として [4] で以下の問題を提出している.

問題 3.9 ([4])

$\mathcal{A} \ni H$ に対して, $\pi(\mathcal{A}^H; t)$ が $\pi(\mathcal{A}; t)$ を割り切り, かつ \mathcal{A} が自由であるならば, \mathcal{A}^H も自由となるか?

[4] において, ある条件下ではこの予想を示しているが, 一般的には正しいかどうかは未解決である. 個人的には, おそらくこの主張は正しくないだろう, と考えている.

4 自由配置と Hessenberg 多様体

この章では、最近得られた結果を紹介する。その中で、自由配置や対数的ベクトル場が、代数的側面だけでなく、幾何学的側面でも極めて重要な役割を果たす、ということを紹介したい。

G を階数 ℓ の複素半単純線型代数群とし、 B をそのボレル部分群として固定し、 T を B に含まれる極大トーラスとする。 $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}$ をそれらのリー環とし、また T の極大実トーラスのリー環を $V \simeq \mathbb{R}^\ell$ とおく。また、これらから定まるルート系と正ルートを Φ, Φ^+ と書き、 $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ を単純ルート全体とする。この状況下、任意の部分集合 $U \subset \Phi^+$ に対して V 中の超平面配置 \mathcal{A}_U が、

$$\mathcal{A}_U := \{H_\alpha \mid \alpha \in U\}$$

で定義される。ここで $H_\alpha \subset V$ は、 $\alpha \in \Phi^+$ に対応する鏡映 s_α が定める鏡映超平面である。特に \mathcal{A}_{Φ^+} をワイル配置と呼ぶ。 $\alpha \geq \beta$ ($\alpha, \beta \in \Phi^+$) という順序を、 $\alpha - \beta \in \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$ で定義する。この順序について下に閉じている部分集合 $I \subset \Phi^+$ をイデアルという。

定義 4.1

$A \in \mathfrak{g}$ とイデアル $I \subset \Phi^+$ から定まる Hessenberg 多様体 $X(A, I)$ を、

$$X(A, I) := \{gB \in G/B \mid \text{Ad}(g^{-1})(A) \in \mathfrak{b} \bigoplus (\bigoplus_{\alpha \in I} \mathfrak{g}_{-\alpha})\}$$

で定義する。ここで \mathfrak{g}_α は α に対応するルート空間である。

$I = \Phi^+$ ならばこれは旗多様体 G/B であり、また A が nilpotent で $I = \emptyset$ ならば Springer fiber となる。これらを包括的に扱う多様体が Hessenberg 多様体であり、De Mari, Procesi, Shayman により [11] にて導入された。特に A が regular nilpotent の場合に A を N と表し、regular nilpotent Hessenberg 多様体 $X(N, I)$ のコホモロジー環やベッチ数の構造が、様々な観点から調べられている。しかし一般のタイプについてはベッチ数も特定の場合以外はわかっていなかったし、コホモロジー環の表示も A 型の場合がつい最近得られたばかりであった ([1])。ここで不思議なことに超平面配置が登場し、その対数的ベクトル場から $X(N, I)$ のコホモロジー環の表示が得られる、という結果を紹介したい。

そのために、少し準備をする。まず不変式論に関する古典的な結果を思い出そう。 $W = N(T)/T$ を階数 ℓ のワイル群とすると、上の記号から W は V に作用している。この作用は双対空間や座標環への作用に自然に拡

張される. よって特に V の座標環 $S \simeq \mathbb{R}[\alpha_1, \dots, \alpha_\ell]$ への作用に関する不変式環 S^W を考えることができる. ここで Chevalley の結果から,

$$S^W = \mathbb{R}[P_1, \dots, P_\ell]$$

となるような, \mathbb{R} 上で代数的独立な斉次多項式 P_1, \dots, P_ℓ ($\deg P_1 < \deg P_2 \leq \dots \leq \deg P_\ell$) が存在する. これらを基本不変式と呼んだ. ここで $\deg P_1 = 2$ ということはよく知られている. さらに P_1 から定まる V 上の W 不変内積を I とおく. これにより V と V^* が自然に同一視される. また,

$$\text{Der } S \simeq S \otimes V, \quad \Omega_S \simeq S \otimes V^*$$

に注意すると, I^* により Ω_S と $\text{Der } S$ は自然に同一視される.

さて, ここで超平面配置の代数として定式化した対数的ベクトル場の起源の話しよう. それは齋藤恭司による以下の定理である:

定理 4.2 (cf. [14])

\mathcal{A}_{Φ^+} は自由配置であり, $D(\mathcal{A}_{\Phi^+})$ は基底として $I^*dP_1, \dots, I^*dP_\ell$ を持つ. 特に $\exp(\mathcal{A}_{\Phi^+}) = \exp(W)$ である.

すなわちワイル群の指数は, ワイル配置の自由配置としての指数と一致するのである. この観点から, 対数的ベクトル場を用いて超平面配置の指数が定義できる配置としてのワイル配置の一般化が自由配置であり, 実際その指数は, 寺尾の分解定理より位相幾何学的意味を持つことが証明されている. よって定理 4.2 こそ, 対数的ベクトル場とその自由性研究の起源たる定理である.

さて, この観点を旗多様体の幾何学と関連付けることを考えよう. まず有名な事実として, $2 = \deg P_1 < \deg P_2$ を思い出しておく. 空でない自由配置の基底は必ず次数 1 のオイラー微分 θ_E を含むので, 定理 4.2 においてこれに対応するものは I^*dP_1 しかありえない. よって $I^*dP_1 = \theta_E$ と仮定してよい. よって

$$I^*dP_i(P_1) = I^*(dP_i, dP_1) = I^*(dP_1, dP_i) = I^*(dP_1)(P_i) = \theta_E(P_i) = P_i$$

が, up to non-zero scalar で成立する. よって,

$$\mathfrak{a}(\Phi^+) := \{\theta(P_1) \mid \theta \in D(\mathcal{A}_{\Phi^+})\} = (P_1, \dots, P_\ell)$$

が直ちにわかる. ゆえに, Borel の結果と合わせることで, 以下が直ちに従う.

系 4.3

$$S/\mathfrak{a}(\Phi^+) \simeq H^*(G/B, \mathbb{R})$$

つまり、旗多様体のコホモロジー環の表示が余不変式環から得られる、という不変式論を用いた Borel の結果は、超平面配置の対数的ベクトル場を用いれば不変式論なしで定式化できる。よって、一般には不変式論が出てこないような対象に対しても、この同型を拡張できるのでは、という疑問が当然わいてくる。この設定では特に、 $U \subset \Phi^+$ に対して、

$$\mathfrak{a}(U) := \{\theta(P_1) \mid \theta \in D(\mathcal{A}_U)\}$$

と定義した場合に、 U からやはり定まる多様体 X_U が存在して、

$$S/\mathfrak{a}(U) \simeq H^*(X_U)$$

とならないだろうか、という問題といえる。これに対して肯定的な問いが、イデアルとイデアルに対応する配置、および Hessenberg 多様体について言える、というのがこの章の主定理である。そこでイデアルに $I \subset \Phi^+$ に対応するイデアル配置 $\mathcal{A}_I := \{H_\alpha \mid \alpha \in I\}$ の自由性についての以下の定理をまず紹介しておく：

定理 4.4 ([5])

任意のイデアル $I \subset \Phi^+$ に対して、 \mathcal{A}_I は自由配置であり、その指数は I に含まれる正ルートたちの高さ分布の双対分割と一致。ここで (a_1, a_2, \dots, a_s) たる単調非増加数列の双対分割とは、

$$((0)^{\ell-a_1}, (1)^{a_1-a_2}, \dots, (s-1)^{a_{s-1}-a_s}, (s)^{a_s})$$

たる数列である。 $\exp(\mathcal{A}_I) =: (d_1^I, \dots, d_\ell^I)$ と表す。

これらを用いることで、以下の定理が得られる。

定理 4.5 ([6])

(1) $I \subset \Phi^+$ をイデアルとし、 $N \in \mathfrak{g}$ を *regular nilpotent* とする。この時 $S \supset \Phi^+ \ni \alpha$ を $c_1(L_\alpha) \in H^*(G/B)$ に送るという Borel の同型の自然な制限として、

$$S/\mathfrak{a}(I) \simeq H^*(X(N, I))$$

が成立. 特に $H^*(X(N, I))$ は完全交差環であり,

$$\text{Poin}(X(N, I); x) = \prod_{i=1}^{\ell} (1 + x + \cdots + x^{d_i})$$

が成立. さらに $H^*(G/B) \rightarrow H^*(X(N, I))$ は全射.

(2) $I \subset \Phi^+$ をイデアルとし, $s \in \mathfrak{g}$ を *regular semisimple* とする. この時

$$S/\mathfrak{a}(I) \simeq H^*(X(s, I))^W$$

が成立. ここでコホモロジー環への W の作用は, Tymoczko により定義された *dot action* ([17] 参照). 特に $H^*(X(s, I))^W$ は完全交差環.

(3)

$$H^*(X(s, I))^W \simeq H^*(X(N, I)).$$

証明はかなり長いので触れられないが, 重要なポイントの一つとして, $H^*(X(N, I))$ の完全交差性とポアンカレ多項式の決定には, それぞれイデアル配置 \mathcal{A}_I の自由性とその指数の情報が, 決定的な役割を果たしているという点があげられる. アルチン環 $S/\mathfrak{a}(I)$ は一般的な定義も可能で, 自由であればある程度の情報はわかるのだが ([7]), 自由でなければ完全交差性などは判定できないのが現状である. よって定理 4.4 は極めて重要であり, 自由配置の重要性は, 対数的ベクトル場の代数的構造にとどまらないことがわかる.

定理 4.5 は Hessenberg 多様体のコホモロジー環の構造論や, A が *regular semisimple* な場合のワイル群作用に関連した幾何学的表現論などにおいて重要な役割を果たすと期待されている (詳細は [1] などを参照). しかし証明はイデアル $I \subset \Phi^+$ の元の数に関する帰納法であり, I に元を加えてもイデアルになる状況を帰納的に処理することで, Borel の同型にまで帰着させることが鍵となっている. ゆえに, なぜイデアル配置の対数的ベクトル場から構成されるイデアル $\mathfrak{a}(I)$ が, 同じイデアルに対応する Hessenberg 多様体のコホモロジー環の表示に重要な役割を果たすのかという理由は謎のままである. この辺りの本質的な構造を明らかにすることができれば, これらの研究はより深みを増すと期待される.

参考文献

- [1] H. Abe, M. Harada, T. Horiguchi and M. Masuda, The cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in Lie type A. arXiv:1512.09072.
- [2] T. Abe, Roots of characteristic polynomials and intersection points of line arrangements. *J. Singularities*, **8** (2014), 100–117.
- [3] T. Abe, Divisionally free arrangements of hyperplanes. *Invent. Math.* **204** (2016), no. 1, 317–346. DOI:10.1007/s00222-015-0615-7.
- [4] T. Abe, Restrictions of free arrangements and the division theorem. Proceedings of the Intensive Period "Perspectives in Lie Theory", to appear. arXiv:arXiv:1502.07520v3.
- [5] T. Abe, M. Barakat, M. Cuntz, T. Hoge and H. Terao, The freeness of ideal subarrangements of Weyl arrangements. *J. Eur. Math. Soc.*, **18** (2016). no. 6, 1339–1348.
- [6] T. Abe, T. Horiguchi, M. Masuda, S. Murai and T. Sato, Hessenberg varieties and hyperplane arrangements. arXiv:1611.00269.
- [7] T. Abe, T. Maeno and Y. Numata, The theory of Solomon-Terao algebras. in preparation.
- [8] T. Abe, H. Terao and M. Wakefield, The characteristic polynomial of a multiarrangement. *Adv. in Math.*, **215** (2007), 825–838.
- [9] T. Abe, H. Terao and M. Wakefield, The Euler multiplicity and addition-deletion theorems for multiarrangements. *J. London Math. Soc.*, **77** (2008), no. 2, 335–348.
- [10] T. Abe and M. Yoshinaga, Free arrangements and coefficients of characteristic polynomials. *Math. Z.*, **275** (2013), Issue 3, 911-919.

- [11] F. De Mari, C. Procesi, and M. A. Shayman, Hessenberg varieties, *Trans. Amer. Math. Soc.* **332** (1992), no. 2, 529–534.
- [12] P. H. Edelman and V. Reiner, A counterexample to Orlik’s conjecture. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **118** (1993), 927–929.
- [13] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of hyperplanes*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **300**. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [14] K. Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **27** (1980), 265–291.
- [15] H. Terao, Arrangements of hyperplanes and their freeness I, II. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **27** (1980), 293–320.
- [16] H. Terao, Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shephard-Todd-Brieskorn formula. *Invent. Math.* **63** (1981), 159–179.
- [17] J. Tymoczko, Permutation actions on equivariant cohomology of flag varieties. *Contemp. Math.* **460** (2008), 365–384.
- [18] M. Yoshinaga, Characterization of a free arrangement and conjecture of Edelman and Reiner. *Invent. Math.* **157** (2004), no. 2, 449–454.
- [19] M. Yoshinaga, On the freeness of 3-arrangements. *Bull. London Math. Soc.* **37** (2005), no. 1, 126–134.
- [20] G. M. Ziegler, Multiarrangements of hyperplanes and their freeness. *Singularities* (Iowa City, IA, 1986), 345–359, *Contemp. Math.*, **90**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

多角形ルコルマン
-三角圏の対称性-

加藤 希理子

CONTENTS

| | |
|-----------------------------|----|
| 0. 序 | 1 |
| 1. Bousfield 局所化 | 2 |
| 1.1. 半直交分解 | 2 |
| 1.2. ルコルマン | 3 |
| 1.3. 多角形ルコルマン | 4 |
| 2. Cohen-Macaulay 加群と特異圏 | 5 |
| 3. 分数 Calabi-Yau 圏 | 7 |
| 4. N 複体の圏 | 7 |
| 4.1. N -複体の圏, ホモトピー圏, 導来圏 | 7 |
| 4.2. N -複体の圏における多角形ルコルマン | 9 |
| 5. 分裂単射の圏 | 10 |
| 参考文献 | 13 |

0. 序

導来圏やホモトピー圏は, ホモロジー代数を研究するための基本的な枠組みだが, これら三角圏を分析するためのひとつの手がかりは, 部分圏の直交性である. 三角圏 \mathcal{T} の部分圏 \mathcal{U} による局所化とは, 商圏 \mathcal{T}/\mathcal{U} を取る Verdier 局所化が基本的であり, どんな部分圏に対しても行うことができる. いっぽう, 一定の条件をみたす部分圏については,

$$\mathcal{T}/\mathcal{U} \simeq \mathcal{U}^\perp = \{t \in \mathcal{T} \mid \mathcal{T}(\mathcal{U}, t) = 0\},$$

または

$$\mathcal{T}/\mathcal{U} \simeq {}^\perp\mathcal{U} = \{t \in \mathcal{T} \mid \mathcal{T}(t, \mathcal{U}) = 0\}$$

なる準同型定理のような三角同値が成立し, 商圏を充満部分圏として捉えることができる. これが Bousfield 局所化である. 随伴函手対として定義されることが多いが, 直交部分圏の対 (半直交分解) として捉えることもできる. Bousfield 局所化の発展形としてルコルマン (連続する 2 対の半直交分解), 三角形ルコルマン (連続して回帰的な 3 対の半直交分解) があり, 順に対称性が高くなる. 図 1.3(Bousfield 局所化), 図 1.6 (ルコルマン), 図 1.10 (三角形ルコルマン) を比較してみたい.

三角形ルコルマンの応用例として, 特異圏と Cohen-Macaulay 安定圏の同値が挙げられる. Gorenstein 環 R 上の Cohen-Macaulay 加群の安定圏は, 以下のホモト

ピー圏および導来圏（特異圏と呼ばれる）と三角同値であることが知られている。（Buchweitz [7].）

$$(0.1) \quad \underline{\mathbf{CM}}(R) \simeq \mathbf{K}^{b,-}(\text{proj } R) / \mathbf{K}^b(\text{proj } R) \simeq \mathbf{D}^b(\text{mod } R) / \mathbf{D}_{\text{perf}}$$

$\mathbf{K}^{b,-}(\text{proj } R)$ の拡大圏である $\mathbf{K}^{b,\infty}(\text{proj } R)$ において同様の Verdier 商を取ると、 R の上三角行列環 $T_2(R)$ の特異圏と同値であることがわかった（定理 2.3）.

$$(0.2) \quad \mathbf{K}^{b,\infty}(\text{proj } R) / \mathbf{K}^b(\text{proj } R) \simeq \underline{\mathbf{CM}}(T_2(R))$$

これは、圏の拡大 $\mathbf{K}^b(\text{proj } R) \subset \mathbf{K}^{b,-}(\text{proj } R) \subset \mathbf{K}^{b,\infty}(\text{proj } R)$ において

$$\mathbf{K}^{b,\infty}(\text{proj } R) / \mathbf{K}^{b,-}(\text{proj } R) \simeq \mathbf{K}^{b,-}(\text{proj } R) / \mathbf{K}^b(\text{proj } R) \simeq \underline{\mathbf{CM}}(R)$$

が成立することと関係がある。 $\mathbf{K}^{b,\infty}(\text{proj } R) / \mathbf{K}^b(\text{proj } R)$ における三角形ルコルマンを用いると、部分圏における同値 (0.1) から全体の同値 (0.2) を引き出すことができる。

三角圏がこのような対称性を有するとは考えられていなかったようだが、一般に n 角形ルコルマンを定義することができる。たとえば、ADE 型の道代数の導来圏には、グラフの形に応じた多角形ルコルマンが存在する。構造的な理由は、これらの導来圏の分数 Calabi-Yau 性である。函手的有限な部分圏は左右の直交圏とともにルコルマンを形成するが、分数 Calabi-Yau 圏においては、直交圏を取る操作が回帰的になるので、多角形ルコルマンが得られる（命題 3.3）.

多角形ルコルマンを備えた新しい三角圏として注目したのが N -複体の圏である。通常の複体は微分写像 2 回の合成が零になるのに対し、微分写像 N 回の合成で零になるのが N -複体である。概念自体は単体的複体のホモロジー計算に端を発し [28]、最近になって様々な動機から研究対象となっている [2, 4, 8, 9, 10, 11, 16, 20, 22, 25, 26]。実際、加法圏 \mathcal{B} の N -複体のホモトピー圏 $\mathbf{K}_N(\mathcal{B})$ を構成してみると、 $2N$ 角形ルコルマンを見つけることができた（定理 4.9）.

ところで得られた $2N$ 角形ルコルマンを観察してみると、意外な事実が判明した。 $M \in \mathcal{B}$ を $N-1$ 個並べた $M = M = \cdots = M$ は N -複体とみなせる。そこで \mathcal{B} の $N-2$ 条の分裂単射の列 $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \cdots \rightarrow M_{N-1}$ からなる加法圏 $\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})$ を考える。すると、 N -複体のホモトピー圏 $\mathbf{K}_N(\mathcal{B})$ とは、通常の (2 -複体の) ホモトピー圏 $\mathbf{K}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}))$ と三角同値であることが判った（定理 5.5）。たとえば \mathcal{B} として環 R の射影加群の圏を考えれば、 $\mathbf{K}_N(\text{Proj } R) \simeq \mathbf{K}(\text{Proj } T_{N-1}(R))$ ということになる。

1. BOUSFIELD 局所化

1.1. 半直交分解.

定義 1.1 (Bousfield 局所化関手). 三角圏 \mathcal{T} と濃密部分圏 \mathcal{U} に対し、商関手 $Q : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{U}$ が右随伴関手 $L : \mathcal{T}/\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{T}$ を持つとき、 L を **Bousfield 局所化関手 (Bousfield localization functor)** と呼ぶ。このとき、 \mathcal{T} は \mathcal{U} に関して Bousfield 局所化可能であるという。商関手の左随伴関手があれば、Bousfield 余局所化関手と呼ばれる。

命題 1.2 (局所化による圏の完全列). \mathcal{T} は \mathcal{U} に関して Bousfield 局所化可能としよう。

$$\mathcal{U} \xrightarrow{\text{incu}} \mathcal{T} \begin{array}{c} \xrightarrow{Q_{\mathcal{U}}} \\ \xleftarrow{L} \end{array} \mathcal{T}/\mathcal{U}$$

$U^\perp = \mathcal{V}$ とおくと, $U(\mathcal{V})$ に関する包含関手および商関手は, 右 (左) 随伴関手を持ち, 以下の図式が可換である.

$$(1.3) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathcal{T}/\mathcal{V} & & \\ & \swarrow \simeq & \uparrow \Gamma & & \\ \mathcal{U} & \xleftarrow{inc_U} & \mathcal{T} & \xrightarrow{Q_U} & \mathcal{T}/\mathcal{U} \\ & \xrightarrow{U} & \downarrow V & \xleftarrow{L} & \\ & & \mathcal{V} & & \end{array}$$

$(inc_U, U), (Q_U, L), (\Gamma, Q_V), (V, inc_V)$ は随伴関手対である.

定義 1.4 (半直交分解). 三角圏 \mathcal{T} の半直交分解 (semi-orthogonal decomposition) (または安定 \mathfrak{t} 構造 (stable \mathfrak{t} -structure)) とは, 以下の条件をみたす充満部分圏の組 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ である.

- (a) $U = \Sigma U, \mathcal{V} = \Sigma \mathcal{V}$.
- (b) $\mathcal{T}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = 0$.
- (c) \mathcal{T} の各対象 $x \in \mathcal{T}$ に対し, $u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}$ なる完全三角 $u \rightarrow x \rightarrow v \rightarrow \Sigma u$ が存在する.

命題 1.2 における考察をまとめると以下のようなになる.

命題 1.5 (Bousfield 局所化と半直交分解: [29] 9.1). 三角圏 \mathcal{T} の濃密部分圏 \mathcal{U} について以下は同値である.

- (1) \mathcal{T} は \mathcal{U} に関して Bousfield 局所化可能である.
- (2) \mathcal{T} は \mathcal{U}^\perp に関して Bousfield 余局所化可能である.
- (3) $(\mathcal{U}, \mathcal{U}^\perp)$ は \mathcal{T} の半直交分解である.

1.2. ルコルマン.

$(\mathcal{U}, \mathcal{V}), (\mathcal{V}, \mathcal{W})$ がともに \mathcal{T} の半直交分解だとして. 命題 1.2 を繰り返すと, 以下の図式が得られる. ただし上下・左右の矢印はいずれも随伴関手対である.

$$(1.6) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathcal{T}/\mathcal{V} & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{W} \\ & \swarrow \simeq & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \mathcal{U} & \xleftarrow{\simeq} & \mathcal{T} & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{T}/\mathcal{U} \\ & \searrow \simeq & \downdownarrow & \downdownarrow & \down \simeq \\ & & \mathcal{T}/\mathcal{W} & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{V} \end{array}$$

上図の左上-右下のラインを見ると, \mathcal{V} に関する包含関手と商関手がそれぞれ, 右随伴関手と左随伴関手を両方持っていることがわかる.

$$\mathcal{V} \begin{array}{c} \xleftarrow{inc} \\ \xrightarrow{Q} \end{array} \mathcal{T} \begin{array}{c} \xleftarrow{Q} \\ \xrightarrow{inc} \end{array} \mathcal{T}/\mathcal{V}$$

このような状況をルコルマンと呼ぶ. Bellinson-Bernstein-Deligne によって与えられたルコルマンの定義は定義 1.7 の通りであるが, 命題 1.8 で見ると, ルコルマンは, 連続する 2 対の半直交分解 $(\mathcal{U}, \mathcal{V}), (\mathcal{V}, \mathcal{W})$ と捉えてよい.

定義 1.7 (ルコルマン: Bellinson-Bernstein-Deligne [3]). 三角圏と三角関手の図式

$$\mathcal{T}' \begin{array}{c} \xleftarrow{i^*} \\ \xrightarrow{i_*} \\ \xleftarrow{i^!} \end{array} \mathcal{T} \begin{array}{c} \xleftarrow{j^*} \\ \xrightarrow{j_*} \\ \xleftarrow{j^!} \end{array} \mathcal{T}''$$

は、以下の条件をみたすときルコルマン (recollement) と呼ばれる.

- (1) i_* , $j_!$ および j_* は充満忠実.
- (2) (i^*, i_*) , $(i_*, i^!)$, (j_*, j^*) , $(j^*, j_!)$ は随伴関手対.
- (3) 自然な包含 $\text{Im } j_! \hookrightarrow \text{Ker } i^!$, $\text{Im } i_* \hookrightarrow \text{Ker } j^*$,
 $\text{Im } j_* \hookrightarrow \text{Ker } i^*$ は同値関手.

このとき, \mathcal{T} は \mathcal{T}' と \mathcal{T}'' のルコルマン (貼り合せ) であるという.

命題 1.8 (ルコルマンと半直交分解: Bellinson-Bernstein-Deligne [3] 1.4.17, Miyachi [24] 2.7).

- (1)

$$\mathcal{T}' \begin{array}{c} \xleftarrow{i^*} \\ \xrightarrow{i_*} \\ \xleftarrow{i^!} \end{array} \mathcal{T} \begin{array}{c} \xleftarrow{j^*} \\ \xrightarrow{j_*} \\ \xleftarrow{j^!} \end{array} \mathcal{T}''$$

がルコルマンであるとき, $\mathcal{U} = \text{Im } j_*$, $\mathcal{V} = \text{Im } i_*$, $\mathcal{W} = \text{Im } j_!$ とおけば, $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ は \mathcal{T} の半直交分解となる.

- (2) $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ を \mathcal{T} の半直交分解とする. 包含関手を $i_*: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}$ とすると, $\text{Im } j_* = \mathcal{U}$, $\text{Im } j_! = \mathcal{W}$ となるような以下のルコルマンが存在する.

$$\mathcal{V} \begin{array}{c} \xleftarrow{i^*} \\ \xrightarrow{i_*} \\ \xleftarrow{i^!} \end{array} \mathcal{T} \begin{array}{c} \xleftarrow{j^*} \\ \xrightarrow{j_*} \\ \xleftarrow{j^!} \end{array} \mathcal{T}/\mathcal{V}$$

1.3. 多角形ルコルマン.

定義 1.9 (多角形ルコルマン: [19]). \mathcal{T} に連続回帰的な n 個の半直交分解 $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$, $(\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3)$, \dots , $(\mathcal{U}_{n-1}, \mathcal{U}_n)$, $(\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_1)$ があるとき, $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_n)$ を n 角形ルコルマン (n -gon of recollements) と呼ぶ.

n が奇数の場合, n 角形ルコルマンは, 関係する部分圏 \mathcal{U}_i と商圏 $\mathcal{T}/\mathcal{U}_i$ はすべて三角同値になり, 極めて高い対称性を呈する. このことは, 命題 1.2 の議論を繰り返せばわかる. 下図は, 三角形ルコルマン $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W})$ を表している. ただし上下・左右の矢印は随伴関手対である.

(1.10)

命題 1.11 (多角形ルコルマンの対称性; [19]). $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_n)$ を三角圏 \mathcal{T} の n 角形ルコルマンとすると, 以下の三角同値が成り立つ.

- (1) n が奇数のとき, すべての \mathcal{U}_i , $\mathcal{T}/\mathcal{U}_i$ は同値.
- (2) n が偶数のとき,

- (a) すべての \mathcal{U}_{2i} と $\mathcal{T}/\mathcal{U}_{2i+1}$ は同値.
 (b) すべての \mathcal{U}_{2i+1} と $\mathcal{T}/\mathcal{U}_{2i}$ は同値.

対称性の帰結として、三角形ルコルマンがあるときには、部分圏を見ただけで圏全体の情報が得られるという便利な状況になっている。

命題 1.12 ([17] 1.16, [19] 1.7). \mathcal{T}, \mathcal{S} を n 角形ルコルマンを持つような三角圏とし、 $(\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n), (\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n)$ をそれぞれ \mathcal{T}, \mathcal{S} の n 角形ルコルマンとする。三角函手 $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ が $F(\mathcal{U}_i) \subset \mathcal{V}_i$ ($i = 1, \dots, n$) をみたすとする。

- (1) n が奇数の場合、 F の部分圏への制限 $F|_{\mathcal{U}_1}: \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{V}_1$ が同値であれば、 F は同値である。
 (2) n が偶数の場合、 F の部分圏への制限 $F|_{\mathcal{U}_1}: \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{V}_1, F|_{\mathcal{U}_2}: \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{V}_2$ が同値であれば、 F は同値である。

注意 1.13. 四角形ルコルマンに対応するものとして、spherical functor なる概念がある。これは、DG 三角圏の間の函手 $S: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ で一連の性質をみたすものである (Anno-Logvinenko [1])。このとき、貼り合わせ $\mathcal{E} * \mathcal{D}$ に四角形ルコルマンが存在する。逆に、DG 三角圏の四角形ルコルマンからは spherical functor を構成することができる (Halpern-Leistner-Shipman[13])。spherical functor の定義は人工的に見えるが、組紐群の表現に関連した自然な例があるようだ。

2. COHEN-MACAULAY 加群と特異圏

多角形ルコルマンの応用例として、ホモトピー圏と Cohen-Macaulay 加群圏の同値について説明しよう。

定義 2.1. 加法圏 \mathcal{A} のホモトピー圏 $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ において次のような部分圏を考える。

| | $\mathbf{K}^b(\mathcal{A})$ | $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})$ | $\mathbf{K}^{+,b}(\mathcal{A})$ | $\mathbf{K}^{\infty,\emptyset}(\mathcal{A})$ | $\mathbf{K}^{\infty,b}(\mathcal{A})$ |
|----------|-----------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--|--------------------------------------|
| complex | bounded | bounded above | bounded below | unbounded | unbounded |
| homology | bounded | bounded | bounded | acyclic | bounded |

つまり添字の 1 番目はホモロジーについて、2 番目は複体の形状についての記述である。

以下、 R を Iwanaga-Gorenstein 環、すなわち両側ネーター環かつ R の入射次元は両側とも有限とする。有限生成射影加群のホモトピー圏 $\mathbf{K}(\text{proj } R)$ の部分圏を考える。簡単のために、 $\mathbf{K}^{\infty,b}(\text{proj } R)$ 等を $\text{proj } R$ を省略して $\mathbf{K}^{\infty,b}$ 等と略記する。

$\mathbf{K}(\text{proj } R)$ の商部分圏のうち、商圏 $\mathbf{K}^{-,b}/\mathbf{K}^b(\text{proj } R)$ は特異圏 (singularity category) と呼ばれ、環の正則性を判定する。最近は超弦理論への応用も関心を集めているが (Orlov [30], [31])、注目したいのは、特異圏が加群圏でもあることだ。有限生成 R -加群 M で $\text{Ext}_R^i(M, R) = 0$ ($i > 0$) をみたすものを **Cohen-Macaulay 加群** と呼ぶ。¹ Cohen-Macaulay 加群の圏 $\text{CM } R$ は Frobenius 圏ゆえ、安定圏 $\underline{\text{CM}} R$ は三角圏となり (Happel [14])、次の三角同値がある

定理 2.2 (Happel [15], Rickard [32], Buchweitz [7]).

$$\mathbf{K}^{-,b}/\mathbf{K}^b(\text{proj } R) \simeq \underline{\text{CM}} R.$$

一方、次の三角同値があることにも気づく。

$$\mathbf{K}^{\infty,b}/\mathbf{K}^{-,b}(\text{proj } R) \simeq \mathbf{K}^{\infty,\emptyset}(\text{proj } R) \simeq \underline{\text{CM}} R.$$

¹Cohen-Macaulay 加群は一般には正則列によって定義される。上記は、Gorenstein 環上の Cohen-Macaulay 加群を Gorenstein 射影加群として特徴づける性質である。

これらの観察から, $K^{\infty,b}/K^b(\text{proj } R)$ は, Cohen-Macaulay 加群による記述ができるのではないかと推測できる.

定理 2.3 ([17] 4.8).

$$(K^{\infty,b}/K^b)(\text{proj } R) \simeq \underline{\text{CM}} T_2(R)$$

ただし $T_2(R)$ は R 上 2 次の上三角行列環である.

証明: $\underline{\text{CM}} T_2(R)$ というのはイメージしにくいかも知れないが, Cohen-Macaulay R -加群の単射からなる圏と同値である. Cohen-Macaulay 加群の単射 $\lambda: M \rightarrow N$ に対して,

$$\begin{aligned} \cdots &\rightarrow G^{-1} \rightarrow G^0 \xrightarrow{\rho} M \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow N \xrightarrow{\xi} E^1 \rightarrow E^2 \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

が完全列になるような射影加群の複体 G, E を取る. それらを λ で貼り合せた複体

$$F(\lambda): \cdots G^{-1} \rightarrow G^0 \xrightarrow{\epsilon\lambda\rho} E^1 \rightarrow E^2 \rightarrow \cdots$$

を作ると, F は三角関手 $\underline{F}: \underline{\text{CM}} T_2(R) \rightarrow K^{\infty,b}/K^b$ を導く. 同値を直接計算で示そうとすると結構難しい.

定理 2.4 ([17] 2.8). 商圏 $K^{\infty,b}/K^b = K^{\infty,b}(\text{proj } R)/K^b(\text{proj } R)$ は, 次の三角形ルコルマンを持つ.

$$(K^{-,b}/K^b, K^{\infty,\emptyset}, K^{+,b}/K^b)$$

($K^{\infty,\emptyset} \cap K^b = 0$ なので $K^{\infty,\emptyset}/K^b = K^{\infty,\emptyset}$ である.)

定理 2.3 証明続き: 定理 2.4 で得られた三角形ルコルマン $(K^{-,b}/K^b, K^{\infty,\emptyset}, K^{+,b}/K^b)$ に注目して \underline{F} による逆像を考えると, 次の $\underline{\text{CM}} T_2(R)$ の部分圏に対応することがわかる.

$$\begin{aligned} \underline{\text{CM}}_p &= \{M \hookrightarrow P \mid M \in \underline{\text{CM}} R, P \in \text{proj } R\}, \\ \underline{\text{CM}}_1 &= \{M = M \mid M \in \underline{\text{CM}} R\}, \\ \underline{\text{CM}}_0 &= \{0 \rightarrow M \mid M \in \underline{\text{CM}} R\} \end{aligned}$$

特に, $\underline{F}|_{\underline{\text{CM}}_1}$ は, 知られた同値 $\underline{\text{CM}} R \simeq K^{\infty,\emptyset}$ に他ならない. ($\underline{\text{CM}}_p, \underline{\text{CM}}_1, \underline{\text{CM}}_0$) は $\underline{\text{CM}} T_2(R)$ の三角形ルコルマンをなすので, 命題 1.12 より \underline{F} の同値性を得る. (定理 2.3 証明終)

定理 2.4 の証明: 三角形ルコルマンは順次, 以下の半直交分解から得られる. このうち, (1)-(3) は環 R が Iwanaga-Gorenstein でなくても一般に成り立つ.

- (1) $(K^{-,b}, K^{\infty,\emptyset})$ は $K^{\infty,b}$ の半直交分解.
- (2) $(K^{-,b}/K^b, K^{\infty,\emptyset})$ は $K^{\infty,b}/K^b$ の半直交分解.
- (3) $(K^{+,b}/K^b, K^{-,b}/K^b)$ は $K^{\infty,b}/K^b$ の半直交分解.
- (4) $(K^{\infty,\emptyset}, K^{+,b})$ は $K^{\infty,b}$ の半直交分解.
- (5) $(K^{\infty,\emptyset}, K^{+,b}/K^b)$ は $K^{\infty,b}/K^b$ の半直交分解.

(4), (5) は R の Iwanaga-Gorenstein 性から $\text{Hom}_R(-, R)$ によって引き起こされる以下の反変同値が鍵である.

$$K^{\infty,b}(\text{proj } R) \simeq K^{\infty,b}(\text{proj } R^{op})$$

$$K^{-,b}(\text{proj } R) \simeq K^{+,b}(\text{proj } R^{op}), K^{+,b}(\text{proj } R) \simeq K^{-,b}(\text{proj } R^{op}), K^{\infty,\emptyset}(\text{proj } R) \simeq K^{\infty,\emptyset}(\text{proj } R^{op}).$$

従って (1) で得られた $K^{\infty,b}(\text{proj } R^{op})$ の半直交分解 $(K^{-,b}(\text{proj } R^{op}), K^{\infty,\emptyset}(\text{proj } R^{op}))$ は, $\text{Hom}_R(-, R)$ によって $K^{\infty,b}(\text{proj } R)$ の半直交分解 $(K^{\infty,\emptyset}(\text{proj } R), K^{+,b}(\text{proj } R))$ に移される. (証明終)

3. 分数 CALABI-YAU 圏

多角形ルコルマンを自然に導く三角圏の構造について説明しよう。

定義 3.1 (分数 Calabi-Yau 圏). 三角圏 \mathcal{T} の射の空間が体 K 上有限次元ベクトル空間となっているとする. (このとき \mathcal{T} は K -線型な三角圏と呼ばれる). 整数 m, n に対し, \mathcal{T} が $\frac{m}{n}$ -Calabi-Yau 圏とは, 以下の性質をみたす自己同値函手 $S: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ があることをいう.

- 自然な同型 $\mathcal{T}(x, y) \simeq \text{Hom}_k(\mathcal{T}(y, Sx), K)$ が成り立つ. このような函手 S は Serre 函手と呼ばれる.
- 自然な同型 $S^n \simeq \Sigma^m$ が成り立つ

$n = 1$ のときは, 単に **Calabi-Yau 圏**と呼ばれる.

例 3.2 ([21] Example 8.3 (2)). R を A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 型 Dynkin 箆の K 上道代数としたとき, Serre 函手 Σ_τ によって $D^b(\text{mod } R)$ は $\frac{h-2}{h}$ -Calabi-Yau 圏になる. 但し τ は Auslander-Reiten 移動, h は Coxeter 数である.

\mathcal{T} を $\frac{m}{n}$ -Calabi-Yau 圏とする. 函手的有限な三角部分圏 \mathcal{U} に対して, 以下の $2n$ 角形ルコルマンが得られる.

$$(\mathcal{U}, \mathcal{U}^\perp, S\mathcal{U}, (S\mathcal{U})^\perp, \dots, S^{n-1}\mathcal{U}, (S^{n-1}\mathcal{U})^\perp)$$

実際, $(\mathcal{U}^\perp, S\mathcal{U})$ が半直交分解であることは, Serre 函手の定義からわかる. したがって $((S^{n-1}\mathcal{U})^\perp, S^n\mathcal{U})$ は半直交分解だが, $S^n\mathcal{U} = \Sigma^m\mathcal{U} = \mathcal{U}$ である. \mathcal{U} の取り方によっては, 上の $2n$ 角形ルコルマンは, $2n$ の約数 l によって l 角形ルコルマンにできる.

命題 3.3 (分数 Calabi-Yau 圏の多角形ルコルマン; [18]). $\frac{m}{n}$ -Calabi-Yau 圏は, $2n$ 角形ルコルマンを持つ.

因みに, Kuznetsov は, Lefschetz タイプの半直交分解と spherical functor から分数 Calabi-Yau 圏を構成している [23].

4. N 複体の圏4.1. N -複体の圏, ホモトピー圏, 導来圏.

[N -複体の圏] 整数 $N \geq 2$ に対して加法圏 \mathcal{B} 上の N -複体とは, \mathcal{B} における射の列

$$\dots \xrightarrow{d_X^{i-1}} X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} \dots$$

で各 $i \in \mathbf{Z}$ において

$$d_X^{i+N-1} \dots d_X^{i+1} d_X^i = 0$$

をみたすものをいう. 通常の複体は 2-複体である. N 複体の射は, 射の可換図式で与えられる.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} & \xrightarrow{d_X^{i+1}} & \dots \\ & & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} & & \\ \dots & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1} & \xrightarrow{d_Y^{i+1}} & \dots \end{array}$$

すると, N -複体の圏 $\mathbf{C}_N(\mathcal{B})$ を定義することができる.

[N -複体のホモトピー圏] N 複体の射 $f: X \rightarrow Y, g: X \rightarrow Y$ がホモトピー同値 ($f \sim g$) とは, 各 $i \in \mathbf{Z}$ に対して, 以下をみたす射 $s^i \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(X^i, Y^{i-N+1})$ が存在することをいう.

$$(4.1) \quad f^i - g^i = \sum_{j=1}^{N-1} d_Y^{i-1} \dots d_Y^{i-N+j} s^{i+j-1} d_X^{i+j-2} \dots d_X^i$$

N 複体のホモトピー圏 $K_N(\mathcal{B})$ とは, ホモトピー同値類を射とする圏である.

$$\mathrm{Hom}_{K_N(\mathcal{B})}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{C_N(\mathcal{B})}(X, Y) / \sim.$$

$K_N(\mathcal{B})$ の三角圏構造は, $C_N(\mathcal{B})$ の Frobenius 圏構造から得られる. すなわち, 以下のように段階を踏んで遷移と完全三角を定義する.

(1) $C_N(\mathcal{B})$ において, 射の列 $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ で各項 $0 \rightarrow X^i \xrightarrow{f^i} Y^i \xrightarrow{g^i} Z^i \rightarrow 0$ が分裂完全列であるようなものを短完全列 (conflation) と呼ぶことにする. この短完全列に関する入射対象や射影対象を考えてみる. $M \in \mathcal{B}$ および 整数 s に対し, M を第 s 項から左側に N 個並べたものは N -複体になる.

$$\mu_N^s(M) : \cdots \rightarrow 0 \rightarrow M = \cdots = M = M \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

つまり $\mu_N^s(M)^i = M$ ($s - N + 1 \leq i \leq s$), $d_{\mu_N^s(M)}^i = 1_M$ ($s - N + 1 \leq i < s$) である. すると, 以下が成り立つ.

補題 4.2 ([18] 2.2). $\mu_N^s(M)$ は $C_N(\mathcal{B})$ の入射対象かつ射影対象である.

(2) 任意の $X \in C_N(\mathcal{B})$ に対して, 以下の短完全列がある.

$$0 \rightarrow \mathrm{Ker} \rho_X \xrightarrow{\epsilon_X} \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mu_N^n(X^{n-N+1}) \xrightarrow{\rho_X} X \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{\lambda_X} \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mu_N^n(X^n) \xrightarrow{\eta_X} \mathrm{Cok} \lambda_X \rightarrow 0.$$

これは, $C_N(\mathcal{B})$ が入射対象と射影対象を十分に備えていることを意味する. したがって, 以下を得る.

定理 4.3 ([18] 2.1). $C_N(\mathcal{B})$ は Frobenius 圏である.

(3) 一般に Frobenius 圏 \mathcal{F} の安定圏 $\underline{\mathcal{F}}$ は, 三角圏構造を持つことが知られている [15]. このタイプの三角圏を代数的三角圏と呼ぶ. ただし安定圏 $\underline{\mathcal{F}}$ とは, \mathcal{F} と同じ対象からなり,

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{F}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(X, Y) / \mathcal{I}(X, Y)$$

と定義する. $\mathcal{I}(X, Y)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(X, Y)$ に属する射のうち, 射影入射対象を通過するものからなるイデアルである.

(4) $C_N(\mathcal{B})$ の射 $f : X \rightarrow Y$ に対して, 補題 4.2 の第 2 短完全列において $I(X) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mu_N^n(X^n)$, $\Sigma X = \mathrm{Cok} \lambda_X$ とおく. 以下の短完全列の図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\lambda_X} & I(X) & \xrightarrow{\eta_X} & \Sigma X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow \psi_f & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \Sigma X \longrightarrow 0, \end{array}$$

そこで,

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$$

を完全三角とし, $X \mapsto \Sigma X$ を遷移とすれば良い. 写像錘の具体的な記述については [18]2 節を参照されたい.

[N -複体の導来圏] アーベル圏 \mathcal{A} 上の N -複体 に対しては, ホモロジーを定義することができる. N -複体

$$\cdots \rightarrow X^{i-1} \xrightarrow{d_X^{i-1}} X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \rightarrow \cdots$$

および、整数 $0 \leq r \leq N$, $i \in \mathbf{Z}$ に対して、 X の i -次・振幅 r のホモロジー $H_{(r)}^i(X)$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} Z_{(r)}^i(X) &:= \text{Ker}(d_X^{i+r-1} \cdots d_X^i), & B_{(r)}^i(X) &:= \text{Im}(d_X^{i-1} \cdots d_X^{i-r}), \\ C_{(r)}^i(X) &:= \text{Cok}(d_X^{i-1} \cdots d_X^{i-r}), & H_{(r)}^i(X) &:= Z_{(r)}^i(X)/B_{(r)}^i(X). \end{aligned}$$

定義 4.4. $X \in \mathbf{C}_N(\mathcal{A})$ が非輪状とは、任意の $0 < r < N$ および $i \in \mathbf{Z}$ に対して $H_{(r)}^i(X) = 0$ が成り立つことをいう。

たとえば N -複体 $\mu_N^s(M)$ はもちろん、非輪状である。 N -複体のホモロジーには、次数に加えて振幅があるので厄介そうだが、実は、 $H_{(r)}^i(X) = 0$ ($i \in \mathbf{Z}$) がある r について成立していれば、 N -複体 X は非輪状である (Kapranov [20])。

定義 4.5. 非輪状な N -複体からなる $\mathbf{K}_N(\mathcal{A})$ の部分圏 $\mathbf{K}_N^a(\mathcal{A})$ は、三角部分圏となる。商圏 $\mathbf{K}_N(\mathcal{A})/\mathbf{K}_N^a(\mathcal{A})$ を \mathcal{A} の N -複体の導来圏と呼び、 $\mathbf{D}_N(\mathcal{A})$ で表す。

4.2. N -複体の圏における多角形ルコルマン. ($N-1$)-複体は明らかに N -複体である。この事実を、三角関手として捉えてみよう。

[待たせる関手 $I_s : \mathbf{K}_{N-1}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{K}_N(\mathcal{B})$] $X \in \mathbf{K}_{N-1}(\mathcal{B})$, $s \in \mathbf{Z}$ に対して、 $I_s X = I \in \mathbf{K}_N(\mathcal{B})$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} I^{s+iN} &= X^{s+i(N-1)}, & d_I^{s+iN} &= 1_{X^{s+i(N-1)}} \\ I^{s+iN+1} &= X^{s+i(N-1)}, & d_I^{s+iN+1} &= d_X^{s+i(N-1)} \\ I^{s+iN+j} &= X^{s+i(N-1)+j-1}, & d_I^{s+iN+j} &= d_X^{s+i(N-1)+j-1} \quad (2 \leq j < N) \end{aligned}$$

$I = I_s X$ とおくと、三角関手 $I_s : \mathbf{K}_{N-1}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{K}_N(\mathcal{B})$ が定義される。

$$\begin{array}{c} X : \quad \cdots \rightarrow X^s \rightarrow X^{s+1} \rightarrow X^{s+2} \rightarrow \cdots \rightarrow X^{s+(N-1)} \rightarrow X^{s+N} \rightarrow X^{s+N+1} \rightarrow \cdots \\ \quad \quad \quad \parallel \\ I_s X : \quad \cdots \rightarrow X^s \xrightarrow{=} X^s \rightarrow X^{s+1} \rightarrow \cdots \rightarrow X^{s+N-2} \rightarrow X^{s+(N-1)} \xrightarrow{=} X^{s+N-1} \rightarrow \cdots \end{array}$$

[急がせる関手 $J_s : \mathbf{K}_N(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{K}_{N-1}(\mathcal{B})$] 逆に $Y \in \mathbf{K}_N(\mathcal{B})$, $s \in \mathbf{Z}$ に対して $J_s Y = J \in \mathbf{K}_{N-1}(\mathcal{B})$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} J^{s+i(N-1)} &= Y^{s+iN}, & d_J^{s+i(N-1)} &= d_{Y^{s+iN+1}} d_{Y^{s+iN}} \\ J^{s+i(N-1)+1} &= Y^{s+iN+2}, & d_J^{s+i(N-1)+1} &= d_Y^{s+iN+2} \\ J^{s+i(N-1)+j} &= Y^{s+iN+j+1}, & d_J^{s+i(N-1)+j} &= d_Y^{s+iN+j+1} \quad (2 \leq j < N-1) \end{aligned}$$

$J = J_s Y$ とおくと、三角関手 $J_s : \mathbf{K}_N(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{K}_{N-1}(\mathcal{B})$ が定義される。

$$\begin{array}{c} Y : \quad \cdots \rightarrow Y^s \rightarrow Y^{s+1} \rightarrow Y^{s+2} \rightarrow \cdots \rightarrow Y^{s+N-1} \rightarrow Y^{s+N} \rightarrow Y^{s+N+1} \rightarrow \cdots \\ \quad \quad \quad \parallel \\ J_s Y : \quad \cdots \rightarrow Y^s \xrightarrow{d_Y^2} Y^{s+2} \rightarrow Y^{s+3} \rightarrow \cdots \rightarrow Y^{s+N} \xrightarrow{d_Y^2} Y^{s+N+2} \rightarrow Y^{s+N+3} \rightarrow \cdots \end{array}$$

[$\mathbf{K}_N(\mathcal{B})$ のルコルマン]

命題 4.6 ([19] 5.6). 上記の対応は、三角関手 $I_s : \mathbf{K}_{N-1}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{K}_N(\mathcal{B})$, $J_s : \mathbf{K}_N(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{K}_{N-1}(\mathcal{B})$ を定義する。 I_s は J_s の左随伴関手であり。 J_s は I_{s+1} の左随伴関手である。 I_s は忠実充満である。

$$(4.7) \quad \begin{array}{ccc} & \xleftarrow{I_s} & \\ \mathbf{K}_N(\mathcal{B}) & \xrightarrow{J_s} & \mathbf{K}_{N-1}(\mathcal{B}) \\ & \xleftarrow{I_{s+1}} & \end{array}$$

命題 4.6 から, $(\text{Im } I_s, \text{Ker } J_s)$, $(\text{Ker } J_s, \text{Im } I_{s+1})$ が $\mathbf{K}_N(\mathcal{B})$ の半直交分解になっていることがわかる. また命題 1.8 から $\text{Ker } J_s$ は三角関手の像になっているはずである. 合成関手 $\mathbf{K}_N(\mathcal{B}) \xrightarrow{J_s} \mathbf{K}_{N-1}(\mathcal{B}) \xrightarrow{J_s} \mathbf{K}_{N-2}(\mathcal{B}) \cdots \xrightarrow{J_s} \mathbf{K}_2(\mathcal{B})$ を $J_s^{N-2} : \mathbf{K}_N(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{K}_2(\mathcal{B})$ と表すことにする. 同様に $I_s^{N-2} : \mathbf{K}_2(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{K}_N(\mathcal{B})$ も定義する.

$$\text{Ker } J_s = \{X \in \mathbf{K}_N(\mathcal{B}) \mid d_X^j = \text{id} \ (j \equiv s+2, s+3, \dots, s+N-1 \pmod{N})\}$$

より $\text{Ker } J_s = \text{Im } I_{s+2}^{N-2}$ がわかる.

命題 4.8 ([19] 5.10). 任意の整数 s に対して, 以下のルコルマンがある.

$$\begin{array}{ccc} \xleftarrow{J_{s+1}^{N-2}} & & \xleftarrow{I_s} \\ \mathbf{K}_2(\mathcal{B}) \xrightarrow{I_{s+2}^{N-2}} \mathbf{K}_N(\mathcal{B}) & \xrightarrow{J_s} & \mathbf{K}_{N-1}(\mathcal{B}) \\ \xleftarrow{J_{s+2}^{N-2}} & & \xleftarrow{I_{s+1}} \end{array}$$

[$\mathbf{K}_N(\mathcal{B})$ の多角形ルコルマン] $\text{Im } I_s = \mathcal{V}_s$, $\text{Im } I_s^{N-2} = \mathcal{U}_s$ とおくと, 命題 4.6 より, 上記のルコルマンは以下の半直交分解を導く.

$$\cdots (\mathcal{V}_s, \mathcal{U}_{s+2}), (\mathcal{U}_{s+2}, \mathcal{V}_{s+1}), (\mathcal{V}_{s+1}, \mathcal{U}_{s+3}), (\mathcal{U}_{s+3}, \mathcal{V}_{s+2}), \cdots$$

しかし,

$$\mathcal{V}_s = \{X \in \mathbf{K}_N(\mathcal{B}) \mid d_X^j = \text{id} \ (j \equiv s \pmod{N})\},$$

$$\mathcal{U}_s = \{X \in \mathbf{K}_N(\mathcal{B}) \mid d_X^j = \text{id} \ (j \equiv s, s+1, \dots, s+N-2 \pmod{N})\}$$

ゆえ $\mathcal{V}_s = \mathcal{V}_{s+N}$, $\mathcal{U}_s = \mathcal{U}_{s+N}$ である. 従って次を得る.

定理 4.9 ([19]; 5.11). $\mathbf{K}_N(\mathcal{B})$ は, 以下の $2N$ 角形ルコルマンを有する.

$$(\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_0, \mathcal{U}_2, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{U}_N, \mathcal{V}_{N-1})$$

5. 分裂単射の圏

$r < N$ のとき, \mathcal{B} の対象 M を r 個並べた

$$\mu_r^s(M) : \cdots \rightarrow 0 \rightarrow M = \cdots = M = M \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

は N -複体である.

定義 5.1. \mathcal{B} 上の分裂単射の圏 $\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})$ を以下のように定義する.

- $\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})$ の対象は, \mathcal{B} における $N-1$ 条の分裂単射の列 $C : C^1 \xrightarrow{\alpha_C^1} \cdots \xrightarrow{\alpha_C^{N-2}} C^{N-1}$ である.
- $\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})$ における C から D への射は, 以下の可換図式をみたす \mathcal{B} の射の組 $f = (f^1, \dots, f^{N-1})$ である.

$$\begin{array}{ccccccc} C : & C^1 & \xrightarrow{\alpha_C^1} & C^2 & \xrightarrow{\alpha_C^2} & \cdots & \xrightarrow{\alpha_C^{N-2}} & C^{N-1} \\ & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & & & \downarrow f_{N-1} \\ D : & D^1 & \xrightarrow{\alpha_D^1} & D^2 & \xrightarrow{\alpha_D^2} & \cdots & \xrightarrow{\alpha_D^{N-2}} & D^{N-1} \end{array}$$

補題 5.2 ([19] 6.1). $\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})$ の対象 $C : C^1 \xrightarrow{\alpha_C^1} \dots \xrightarrow{\alpha_C^{N-2}} C^{N-1}$ に対して, N -複体

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow C^1 \xrightarrow{\alpha_C^1} \dots \xrightarrow{\alpha_C^{N-2}} C^{N-1} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

を対応させることにより, $\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})$ は, $\mathbf{C}_N(\mathcal{B})$ および $\mathbf{K}_N(\mathcal{B})$ の充満部分圏と同値である. この対応によって

$$\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}) = \left\{ \prod_{r=1}^{N-1} \mu_r^{N-1}(B_r) \mid B_r \in \mathcal{B} \right\}$$

である. $C, D \in \text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})$ に対して,

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}_N(\mathcal{B})}(C, \Sigma^i D) = \text{Hom}_{\mathbf{K}_N(\mathcal{B})}(C, \Sigma^i D) = 0 (i \neq 0).$$

(証明) 前半は明らかである. 後半を示そう. $B \in \mathcal{B}$, $0 < r < N$ に対して $\mathbf{C}_N(\mathcal{B})$ の短完全列

$$0 \rightarrow \mu_r^{N-1}(B) \rightarrow \mu_N^{N-1}(B) \rightarrow \mu_{N-r}^{N-r-1}(B) \rightarrow 0$$

において, 中央の $\mu_N^{N-1}(M)$ は射影入射対象なので, $\Sigma \mu_r^{N-1}(B) = \mu_{N-r}^{N-r-1}(B)$ である. これを繰り返すと一般に次がわかる.

$$\begin{aligned} \Sigma^{2k} \text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}) &= \left\{ \prod_{r=1}^{N-1} \mu_r^{(1-k)N-1}(B_r) \mid B_r \in \mathcal{B} \right\}, \\ \Sigma^{2k+1} \text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}) &= \left\{ \prod_{r=1}^{N-1} \mu_{N-r}^{(1-k)N-r-1}(B_r) \mid B_r \in \mathcal{B} \right\} \end{aligned}$$

すなわち, $i \neq 0$ なら $C, D \in \text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})$ に対して, C と $\Sigma^i D$ の非零項の次数は全く重ならない. ここから最後の式を得る. (証明終)

そこで, $\mathbf{C}_N(\mathcal{B})$ を $\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})$ の 2-複体の圏 $\mathbf{C}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}))$ と比較してみよう.

補題 5.3 ([19] 6.3). $\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathbf{C}_N(\mathcal{B})$ は, 完全函手 $F : \mathbf{C}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})) \rightarrow \mathbf{C}_N(\mathcal{B})$ に拡張できる. F は三角函手 $\underline{F}_N : \mathbf{K}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})) \rightarrow \mathbf{K}_N(\mathcal{B})$ を導く.

証明: 以下のように段階的に三角函手を構成する.

- (1) $F : \coprod_i \Sigma_M^i \text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{C}_N(\mathcal{B})$. $C \in \text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})$ に対して, $F(\Sigma_M C) = \Sigma C$ と定義する. ただし Σ_M は $\mathbf{C}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}))$ における遷移 (-1 次項のみに C を置く 2-複体) を表す.
- (2) $F : \mathbf{C}^b(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})) \rightarrow \mathbf{C}_N(\mathcal{B})$. $\mathbf{C}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}))$ の対象のうち, 有界なものからなる部分圏を $\mathbf{C}^b(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}))$ と書く. $\mathbf{C}^b(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}))$ の対象は, $\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})$ の対象から, 遷移と写像錘を有限回繰り返して得られる. したがって, 上記 $F : \coprod_i \Sigma_M^i \text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{C}_N(\mathcal{B})$ から遷移と写像錘を保つように, $F : \mathbf{C}^b(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})) \rightarrow \mathbf{C}_N(\mathcal{B})$ を定義する.
- (3) $F : \mathbf{C}^-(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})) \rightarrow \mathbf{C}_N(\mathcal{B})$. $\mathbf{C}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}))$ の対象のうち, 右に有界なものからなる部分圏を $\mathbf{C}^-(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}))$ と書く. $X \in \mathbf{C}^-(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}))$, $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\tau_{\geq n} X : \dots \rightarrow 0 \rightarrow X^n \rightarrow X^{n+1} \rightarrow X^{n+2} \rightarrow \dots,$$

とおく. $\tau_{\geq n} X \in \mathbf{C}^b(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}))$ であり, $\tau_{\geq n} X \rightarrow \tau_{\geq n-1} X \rightarrow \dots \rightarrow X = \varinjlim \tau_{\geq i} X$ である. そこで $F(X) = \varinjlim F(\tau_{\geq i} X)$ とすれば良い.

(4) $F : \mathbf{C}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})) \rightarrow \mathbf{C}_N(\mathcal{B})$. $Y \in \mathbf{C}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}))$, $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\tau_{\leq n} Y : \cdots \rightarrow Y^{n-2} \rightarrow Y^{n-1} \rightarrow Y^n \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

とおく. $\tau_{\leq n} Y \in \mathbf{C}^-(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}))$ であり, $\tau_{\leq n} Y \leftarrow \tau_{\leq n+1} Y \leftarrow \cdots \leftarrow Y = \lim_{\leftarrow} \tau_{\leq i} Y$ である. そこで $F(Y) = \lim_{\leftarrow} \tau_{\leq i} F(Y)$ とすれば良い.

(5) $\underline{F} : \mathbf{K}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})) \rightarrow \mathbf{K}_N(\mathcal{B})$. $F : \mathbf{C}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})) \rightarrow \mathbf{C}_N(\mathcal{B})$ が射影入射対象を射影入射対象に送ることを示せば良い. 射影入射対象とは, 恒等射の写像錘の直和因子だが, (2) より, 恒等射の写像錘は, 恒等射の写像錘になる.

(証明終)

注意 5.4. 関手 $F : \mathbf{C}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})) \rightarrow \mathbf{C}_N(\mathcal{B})$ は, 上記の構成を使って具体的に書くことができる. [19]6.6 参照.

[19] の主定理を述べる. 多角形ルコルマンが鍵になっていることに注意してほしい.

定理 5.5 ([19]6.8). $\underline{F} : \mathbf{K}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})) \rightarrow \mathbf{K}_N(\mathcal{B})$ は, 同値である.

(証明) N に関する帰納法による. $N = 2$ なら明らか. $N \geq 3$ とする.

$\underline{F}^{-1}(\mathcal{U}_s) = \mathcal{U}'_s$, $\underline{F}^{-1}(\mathcal{V}_s) = \mathcal{V}'_s$ とおく. すると,

$$(\mathcal{U}'_1, \mathcal{V}'_0, \mathcal{U}'_2, \mathcal{V}'_1, \dots, \mathcal{U}'_N, \mathcal{V}'_{N-1})$$

は $\mathbf{K}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}))$ の $2N$ -角形ルコルマンとなる. [[19]; 4.8] 命題 1.12 より, 以下を示せばよい.

- (1) $\underline{F} \upharpoonright_{\mathcal{U}'_1}$ は同値.
- (2) $\underline{F} \upharpoonright_{\mathcal{V}'_0}$ は同値.

これらは, 以下のように簡単にわかる.

(1) $X \in \mathbf{K}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}))$ は, $\mathbf{K}(\mathcal{B})$ の射の列

$$X_1 \xrightarrow{\alpha_1} X_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{N-1}} X_{N-1}$$

で各 α_i が次数ごとに分裂単射になっているものと捉えられる. 関手の対応を見ると,

$$\mathcal{U}'_1 = \{X \in \mathbf{K}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})) \mid X_1 = \cdots = X_{N-1}\}$$

がわかる. 三角関手 $U : \mathbf{K}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{K}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}))$ を $X \mapsto X = \cdots = X$ と定義すると, 以下の図式が可換である.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{U} & \mathbf{K}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})) \\ \parallel & & \downarrow F \\ \mathbf{K}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{I_1^{N-2}} & \mathbf{K}_N(\mathcal{B}) \end{array}$$

I_1^{N-2} は充満忠実かつ U は同値なので, $F \upharpoonright_{\text{Im } U}$ は同値 $\mathcal{U}'_1 = \text{Im } U \rightarrow \text{Im } I_1^{N-2}$ を導く.

(2) いっぽう \mathcal{V}'_0 は, $\mathcal{V}'_0 = \{X \mid X_1 = 0\}$ である. そこで, 三角関手 $E : \mathbf{K}(\text{Mor}_{N-2}^{\text{sm}}(\mathcal{B})) \rightarrow \mathbf{K}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B}))$ を $E(X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_{N-1}) = (0 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_{N-1})$ として, $\mathcal{V}'_0 = \text{Im } E$ である. 以下の図式が可換である.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}(\text{Mor}_{N-2}^{\text{sm}}(\mathcal{B})) & \xrightarrow{E} & \mathbf{K}(\text{Mor}_{N-1}^{\text{sm}}(\mathcal{B})) \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ \mathbf{K}_{N-1}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{I_0} & \mathbf{K}_N(\mathcal{B}) \end{array}$$

I_0 は充満忠実, 左側の $K(\text{Mor}_{N-2}^{\text{sm}}(\mathcal{B})) \rightarrow K_{N-1}(\mathcal{B})$ は, 帰納法の仮定によって同値である. 従って FE は充満忠実なので, F は同値 $\text{Im } E \rightarrow \text{Im } I_0$ を与える. (証明終)
導来圏についても, 通常の導来圏との三角同値がある.

定理 5.6 ([18]4.2, [19]6.13). \mathcal{A} が直和と射影対象を十分に備えた *Abel* 圏かつ単射の直和が単射である (*Ab4* 圏) のとき, 以下の三角同値がある.

$$D_N(\mathcal{A}) \simeq D(\text{Mor}_{N-1}(\mathcal{A}))$$

但し $\text{Mor}_{N-1}(\mathcal{A})$ は \mathcal{A} の $N-1$ 条の射 (分裂単射とは限らない) のなす圏である.

系 5.7. 環 R に対して, 以下の三角同値が成立する.

$$K_N(\text{Proj } R) \simeq K(\text{Proj } T_{N-1}(R)), \quad D_N(R) \simeq D(T_{N-1}(R)).$$

参考文献

- [1] R. Anno and T. Logvinenko, Spherical DG-functors, arXiv:1309.5035
- [2] R. Berger, Koszulity for nonquadratic algebra, *J. Algebra* 239 (2001) 705–739.
- [3] A. A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, Faisceaux Pervers, *Astérisque* 100 (1982).
- [4] R. Berger, M. Dubois-Violette and M. Wambst, Homogeneous algebras, *J. Algebra* 261 (2003), no. 1, 172–185.
- [5] A. K. Bousfield, The localization of spectra with respect to homology, *Topology* 18 (1979), 257–281.
- [6] E. H. Brown, Jr. Cohomology theories, *Ann. of Math. (2)* 75 (1962), 467–484.
- [7] R.O. Buchweitz, Maximal Cohen-Macaulay modules and Tate-cohomology over Gorenstein rings, Unpublished manuscript (1987), 155 pp.
- [8] C. Cibils, A. Solotar and R. Wisbauer, ‘ N -Complexes as Functors, Amplitude Cohomology and Fusion Rules’, *Commun. Math. Phys.* 272 (2007), 837–849.
- [9] M. Dubois-Violette, R. Kerner, Universal q -differential calculus and q -analog of homological algebra, *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)* 65 (1996), no. 2, 175–188.
- [10] J. Gillespie, ‘The homotopy category of N -complexes is a homotopy category’, arXiv:1207.6792.
- [11] J. Gillespie, M. Hovey, ‘Gorenstein model structures and generalized derived categories’, *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)* 53 (2010), no. 3, 675–696.
- [12] P. Gabriel and M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.
- [13] D. Halpern-Leistner and I. Shipman, Autoequivalences of derived categories via geometric invariant theory, arXiv:1303.5531
- [14] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 119, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [15] D. Happel, On Gorenstein algebras, *Representation theory of finite groups and finite-dimensional algebras* (Bielefeld, 1991), 389–404, *Progr. Math.*, 95, Birkhauser, Basel, 1991.
- [16] N. Hiramatsu, G. C. Kato, Urcohomologies and cohomologies of N -complexes. *Port. Math.* 67 (2010), no. 4, 511–524.
- [17] O. Iyama, K. Kato, and J. Miyachi, *Recollement of homotopy categories and Cohen-Macaulay modules*, *J. K-Theory* 8 (2011), 507–542.
- [18] O. Iyama, K. Kato, and J. Miyachi, Derived categories of N -complexes, arXiv:1309.603
- [19] O. Iyama, K. Kato, and J. Miyachi, Polygons of recollements and N -complexes, arXiv:1603.06056
- [20] M. M. Kapranov, On the q -analog of homological algebra, *Preprint, Cornell University*, 1991; q-alg/961005.
- [21] B. Keller, On triangulated orbit categories, *Doc. Math.* 10 (2005), 551–581 (electronic).
- [22] M. Khovanov, Hopfological algebra and categorification at a root of unity: The first steps, *J. Knot Theory Ramifications*, 25, 1640006 (2016)
- [23] A. Kuznetsov, Calabi-Yau and fractional Calabi-Yau categories, arXiv:1509.07657

- [24] J. Miyachi, Localization of Triangulated Categories and Derived Categories, *J. Algebra* **141** (1991), 463-483.
- [25] D. Mirmohadees, Homologically optimal categories of sequences lead to N -complexes, arXiv:1405.3921.
- [26] D. Mirmohadees, Simplicial structure on complexes, arXiv:1404.0628.
- [27] J. Miyachi, Derived Categories with applications to representations of algebras, Chiba University, 2000. Available at the author's webpage: <http://www.u-gakugei.ac.jp/~miyachi/seminar.html>.
- [28] W. Mayer, A new homology theory I, II, *Annals Math.*, vol 43 (1942).
- [29] A. Neeman, "Triangulated categories", *Ann. of Math. Stud.*, Vol. 148, Princeton University Press, Princeton, 2001.
- [30] D. Orlov, Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities, arXiv: math/0503632.
- [31] D. Orlov, Triangulated categories of singularities and D-branes in Landau-Ginzburg models, *Proc. Steklov Inst. Math.* 2004, no. 3 (246), 227-248.
- [32] J. Rickard, Derived categories and stable equivalence, *J. Pure Appl. Algebra* **61** (1989), no. 3, 303-317.

大阪府立大学大学院理学系研究科, 堺市中区学園町 1-1, 599-8531

E-mail address: kiriko@mi.s.osakafu-u.ac.jp

微分作用素と多項式環

黒田 茂（首都大学東京・理工）

導分（微分作用素）は可換環の研究で重要な概念であり、様々な形で研究が行われている。例えば、導分の核に関する研究の代表的なものとして Nowicki [57] が有名である。一方、多項式環の周辺には多くの基本的な問題が未解決のまま残されており、アフィン代数幾何学や多変数関数論などとも関係を持ちながら、活発な研究が展開されている。関連する問題を幅広く扱った文献として、例えば van den Essen [13] がある。導分概念は、多項式環に関する諸問題の研究でも非常に重要な役割を果たす。本稿では多項式環研究の観点から、導分や関連するいくつかの話題について概説する。

本稿は非専門家を念頭に、可能な限りエッセンスが伝わるよう配慮して執筆した。

1 導分の核と Hilbert の第 14 問題

R を可換環とすると、 $D : R \rightarrow R$ が R における導分（微分作用素）であるとは、任意の $a, b \in R$ に対し $D(a+b) = D(a) + D(b)$ および

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \tag{1.1}$$

が成り立つときにいう。このとき、 D の核 $R^D := \{a \in R \mid D(a) = 0\}$ は R の部分環である。(1.1) より、導分 D は必ず R^D 上の線形写像になる。

S を R の部分環とする。 R^D が S を含むとき、 D を S 導分と呼ぶ。 R^D が S を含むという条件は、 D が S 線形写像であるという条件と同値である。 R における導分全体の集合、 S 導分全体の集合をそれぞれ $\text{Der } R$, $\text{Der}_S R$ で表す。 $X \subset R$ が S 代数 R を生成するとき、 $D_1, D_2 \in \text{Der}_S R$ が $D_1|_X = D_2|_X$ を満たすならば、導分 $D_1 - D_2$ の核は R と等しい。よって、 $D_1 = D_2$ が成り立つ。例えば、 $R = S[x_1, \dots, x_n]$ が多項式環のとき、任意の $D \in \text{Der}_S R$ に対し

$$D = D(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + D(x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}$$

が成り立つ。 R における S 導分 D に対して次の問題は基本的である。

問題 1.1 S 代数 R が有限生成のとき, S 部分代数 R^D の有限生成性を判定せよ.

S が正標数のネーター環ならば R^D は有限生成である. 実際, $R = S[a_1, \dots, a_n]$, $\text{char } S = l$ とすれば, $i = 1, \dots, n$ に対し $D(a_i^l) = la_i^{l-1}D(a_i) = 0$ が成り立つから $R' := S[a_1^l, \dots, a_n^l]$ は R^D に含まれる. R は R' 上整だから, R は有限生成 R' 加群である. R' はネーター環なので R' 部分加群 R^D は有限生成であり, 従って S 代数として有限生成である. なお, S がネーター環でなければ, $\text{char } S > 0$ でも R^D は有限生成とは限らない. 例えば, s, t を可換環 A 上の不定元とするとき, $S := A[s, st, st^2, \dots]$ はネーター環でない. S 上の 2 変数多項式環 $R = S[x, y]$ における S 導分

$$D = s \frac{\partial}{\partial x} + st \frac{\partial}{\partial y}$$

を考える. $R = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d$ を多項式環 R の標準的度数付けとすれば, 任意の $d \geq 1$ に対し $D(R_d) \subset R_{d-1}$ であるので, $R^D = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (R^D \cap R_d)$ が成り立つ. $R^D \cap R_1$ は $tx - y$ を含まないため, $\{st^i(tx - y) \mid i \geq 0\}$ で生成される非有限生成な S 加群になる. 従って, S 代数 R^D は有限生成でない.

以下では k を体, $k[\mathbf{x}] := k[x_1, \dots, x_n]$ を k 上の n 変数多項式環, $k(\mathbf{x})$ をその商体とする. 任意の $D \in \text{Der}_k k[\mathbf{x}]$ は $k(\mathbf{x})$ における k 導分に一意的に拡張できる. これも同じ D で表せば, $k[\mathbf{x}]^D = k(\mathbf{x})^D \cap k[\mathbf{x}]$ が成り立つ. $k(\mathbf{x})^D$ は拡大 $k(\mathbf{x})/k$ の中間体なので, k 代数 $k[\mathbf{x}]^D$ の有限生成性の問題は, 次の Hilbert の第 14 問題の特別な場合に当たる. なお, 上述のように, $\text{char } k > 0$ のとき $k[\mathbf{x}]^D$ は常に有限生成である.

問題 1.2 (Hilbert の第 14 問題) $k(\mathbf{x})/k$ の中間体 L に対し, k 代数 $L \cap k[\mathbf{x}]$ は有限生成か?

Zariski [68] より, $\text{trans.deg}_k L \leq 2$ ならば $L \cap k[\mathbf{x}]$ は有限生成である. $\text{char } k = 0$ のとき, 任意の $0 \neq D \in \text{Der}_k k[\mathbf{x}]$ は $\text{trans.deg}_k k(\mathbf{x})^D < n$ を満たすので, $n \leq 3$ ならば $k[\mathbf{x}]^D$ は有限生成である. 一方, Hilbert の第 14 問題に対する最初の反例は, 1958 年に永田 [55] によって $n = 32$, $\text{trans.deg}_k L = 4$ の場合に与えられた. その後, Roberts [60] は異なる種類の反例を与えた. 各 $l \geq 1$ に対し,

$$P_l := k[x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l, z]$$

を $2l + 1$ 変数多項式環とする. Roberts の反例は $\text{char } k = 0$, $n = 7$, $\text{trans.deg}_k L = 6$ の場合の反例であり, P_3 における k 導分

$$D = x_1^{t+1} \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2^{t+1} \frac{\partial}{\partial y_2} + x_3^{t+1} \frac{\partial}{\partial y_3} + (x_1 x_2 x_3)^t \frac{\partial}{\partial z} \quad (t \geq 2) \quad (1.2)$$

の核として得られる．なお，藏野 [30] は $t = 1$ のとき，この導分の核が k 上 12 個の元で生成されることを示した．

以下，第 3 節まで k は標数 0 の体とする．Roberts の結果を手掛かりに，Hilbert の第 14 問題に対する様々な反例が構成された．小島・宮西 [25] は $l \geq 3, t \geq 2$ のとき， P_l における k 導分

$$D = x_1^{t+1} \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + x_l^{t+1} \frac{\partial}{\partial y_l} + (x_1 \cdots x_l)^t \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.3)$$

の核が有限生成でないことを示した．黒田 [32] は P_l における $k[x_1, \dots, x_l]$ 導分 D で， $D(y_1), \dots, D(y_l), D(z)$ が x_1, \dots, x_l の単項式であるものに対し，核が有限生成でないための詳しい十分条件を与えた．それによれば， $l \geq 4, t = 1$ の場合も (1.3) の核は有限生成でない．また， P_3 における k 導分

$$D = x_1^{\delta_1^1} x_2^{\delta_1^2} x_3^{\delta_1^3} \frac{\partial}{\partial y_1} + x_1^{\delta_2^1} x_2^{\delta_2^2} x_3^{\delta_2^3} \frac{\partial}{\partial y_2} + x_1^{\delta_3^1} x_2^{\delta_3^2} x_3^{\delta_3^3} \frac{\partial}{\partial y_3} + x_1^{\delta_4^1} x_2^{\delta_4^2} x_3^{\delta_4^3} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.4)$$

の核は， $\epsilon_{i,j}^i := \delta_i^i - \delta_j^i > 0$ ($1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4, i \neq j$) かつ

$$\frac{\epsilon_{1,4}^1}{\min\{\epsilon_{1,2}^1, \epsilon_{1,3}^1\}} + \frac{\epsilon_{2,4}^2}{\min\{\epsilon_{2,3}^2, \epsilon_{2,1}^2\}} + \frac{\epsilon_{3,4}^3}{\min\{\epsilon_{3,1}^3, \epsilon_{3,2}^3\}} \leq 1 \quad (1.5)$$

ならば有限生成でない．一方， $\epsilon_{i,j}^i > 0$ ($1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4, i \neq j$) のとき，(1.5) の不等式が成り立たなければ D の核は有限生成であると予想しているが，大きな進展は得られていない ([32, Conjecture 4.8]).

より低次元の反例を得るために，Freudentburg [16] と Daigle-Freudentburg [9] は Roberts の反例に手を加え，それぞれ $n = 6, 5$, $\text{trans.deg}_k L = 5, 4$ の反例を構成した．これらの反例も導分の核として与えられた．例えば [9] は P_2 における k 導分

$$D = x_1^t \frac{\partial}{\partial y_1} + (x_1 y_1 + x_2) \frac{\partial}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial}{\partial z} \quad (t \geq 2) \quad (1.6)$$

の核が有限生成でないことを示した．黒田 [33], [35] は [32] の手法を改良し，それぞれ $n = 4, 3$ の場合に $\text{trans.deg}_k L = 3$ の反例を構成した．これにより，Hilbert の第 14 問題は全ての n について決着した．また， $\text{trans.deg}_k L = 3$ の場合に反例が存在することが初めて分かった．[34] より， $n = 4$ の場合の反例 [33] は導分の核として実現できるので， $k[\mathbf{x}]^D$ の有限生成性の問題も全ての n について決着した．なお， $n = 3$ の場合の反例では， $k(\mathbf{x})/L$ は必然的に代数拡大になる．黒田 [36] は $n = 3$ の場合に，各 $d \geq 3$ に対し， $[k(\mathbf{x}) : L] = d$ を満たす反例 L を構成した．

2 Field Modification Problem

Hilbert の第 14 問題に対する Roberts の反例について考える. P_3 の商体を Q_3 とするとき, (1.2) で定義した導分の核 Q_3^D は

$$K = k(x_1, x_2, x_3, (x_1x_2x_3)^t y_1 - x_1^{t+1}z, (x_1x_2x_3)^t y_2 - x_2^{t+1}z, (x_1x_2x_3)^t y_3 - x_3^{t+1}z)$$

と等しい. 実際, この K が Q_3^D に含まれることは容易に分かるが, $Q_3 = K(z)$ が K 上の 1 変数有理関数体なので, $D(z) = (x_1x_2x_3)^t \neq 0$ と合わせて $Q_3^D = K$ と結論できる. この場合, $\sigma \in \text{Aut}_k Q_3$ を

$$\sigma(x_i) = x_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \sigma(y_i) = (x_1x_2x_3)^t y_i - x_i^{t+1}z \quad (i = 1, 2, 3), \quad \sigma(z) = z$$

で定義でき, K は σ による $k(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ の像と等しい. このように, $k(\mathbf{x})/k$ の分かり易い中間体を $\text{Aut}_k k(\mathbf{x})$ の適当な元で写すことで, Hilbert の第 14 問題の反例が得られることがある (永田の反例について [11] を参照). そこで, 次の問題を考える.

問題 2.1 (Field Modification Problem) $k(\mathbf{x})/k$ の中間体 M が $\text{trans.deg}_k M \cap k[\mathbf{x}] \geq 3$ かつ $M \neq k(\mathbf{x})$ を満たすとき, k 代数 $A := \sigma(M) \cap k[\mathbf{x}]$ が有限生成でなく, $\text{trans.deg}_k A$ と $\text{trans.deg}_k M \cap k[\mathbf{x}]$ が等しいような $\sigma \in \text{Aut}_k k(\mathbf{x})$ は存在するか?

ここで, $k(\mathbf{x})/k$ の中間体 L と, $A := L \cap k[\mathbf{x}]$ の商体 $Q(A)$ の関係について述べる. 明らかに, $Q(A) \subset L$ かつ $Q(A) \cap k[\mathbf{x}] = A$ である. 以下の理由から $Q(A)$ は L において代数的に閉じているので, $\text{trans.deg}_k L = \text{trans.deg}_k A$ ならば $L = Q(A)$ が成り立つ: $f \in L$, $a_0, \dots, a_d \in A$ が $\sum_{i=0}^d a_i f^i = 0$, $a_d \neq 0$ を満たすとき, $a_d f$ は $k[\mathbf{x}]$ 上整なので $k[\mathbf{x}]$ に属する. よって, $a_d f \in L \cap k[\mathbf{x}] = A$ であり, $f \in Q(A)$ を得る.

一方, $L' \cap k[\mathbf{x}] = A$ かつ $\text{trans.deg}_k L' > \text{trans.deg}_k A$ を満たす $k(\mathbf{x})/k$ の中間体 L' は一般に多数存在する. 例えば, 冒頭で見た Roberts の反例の場合, $Q_3 = K(z)$ は K 上の 1 変数有理関数体であり, $K[z]$ は P_3 を含む. 任意の $d \in \mathbf{Z}$ に対し, $K' := K(z^d + z^{-d})$ は $K' \cap K[z] = K$ を満たすから,

$$K' \cap P_3 = K' \cap K[z] \cap P_3 = K \cap P_3 = P_3^D$$

が成り立つ. なお, k が 1 の原始 d 乗根 ζ を含むとき, $\sigma, \tau \in \text{Aut}_K K(z) = \text{Aut}_K Q_3$ が $\sigma(z) = \zeta z$, $\tau(z) = z^{-1}$ で定義される. このとき, K' は $\text{Aut}_k Q_3$ の有限部分群 $\langle \sigma, \tau \rangle$ の不変体である.

問題 2.1 の状況において、 M の体論的性質は σ で写しても保たれるので、この方法により Hilbert の第 14 問題に対する多様な反例が得られる。例えば、 M が $\text{Aut}_k k(\mathbf{x})$ の部分群 G の不変体ならば、 $\sigma(M)$ は $\sigma G \sigma^{-1}$ の不変体である。また、 M が $D \in \text{Der}_k k(\mathbf{x})$ の核ならば、 $\sigma(M)$ は導分 $D' := \sigma D \sigma^{-1}$ の核である。 $f D'(x_1), \dots, f D'(x_n)$ が $k[\mathbf{x}]$ に属するような $f \in k(\mathbf{x})^\times$ に対し、 $f D'$ は $\text{Der}_k k[\mathbf{x}]$ の元を誘導する。このとき、

$$k[\mathbf{x}]^{f D'} = k(\mathbf{x})^{f D'} \cap k[\mathbf{x}] = k(\mathbf{x})^{D'} \cap k[\mathbf{x}] = \sigma(M) \cap k[\mathbf{x}]$$

が成り立つので、有限生成でない核を持つ $\text{Der}_k k[\mathbf{x}]$ の元が得られる。

問題 2.1 は設定が少し厳しいので、この問題の「安定板」を考える。ただし、非負整数 $l \geq 0$ に対し、 $k[\mathbf{x}]^{[l]} := k[x_1, \dots, x_{n+l}]$ は k 上の $n+l$ 変数多項式環とし、 $k(\mathbf{x})/k$ の中間体 M に対して $M^{(l)} := M(x_{n+1}, \dots, x_{n+l})$ と定義する。

問題 2.2 (Stable Field Modification Problem) $k(\mathbf{x})/k$ の中間体 M が $M \neq k(\mathbf{x})$ を満たすとき、 k 代数 $A := \sigma(M^{(l)}) \cap k[\mathbf{x}]^{[l]}$ が有限生成でなく、かつ

$$\text{trans.deg}_k A = \text{trans.deg}_k M \cap k[\mathbf{x}] + l$$

であるような $l \geq 0$ と $\sigma \in \text{Aut}_k k(\mathbf{x})^{(l)}$ は存在するか？

M の様々な性質が $M^{(l)}$ に遺伝する。例えば、 M が $\text{Aut}_k k(\mathbf{x})$ の部分群 G の不変体ならば、 $M^{(l)}$ は $G^{(l)}$ の不変体である。ここで、 $G^{(l)}$ は G から誘導される $\text{Aut}_{k^{(l)}} k(\mathbf{x})^{(l)}$ の部分群とする。同様に、 M が $D \in \text{Der}_k k(\mathbf{x})$ の核ならば、 $M^{(l)}$ は $D^{(l)}$ の核である。ここで、 $D^{(l)}$ は D から定まる $\text{Der}_{k^{(l)}} k(\mathbf{x})^{(l)}$ の元とする。

Hilbert の第 14 問題の反例の以前の構成法を精密化し、次の結果を最近得た [47]。

定理 2.3 問題 2.2 の解は肯定的である。ただし、 $\text{trans.deg}_k M \cap k(\mathbf{x}) \geq 2$ のときは $l = 1$ 、それ以外の場合は $l = 3 - \text{trans.deg}_k M \cap k(\mathbf{x})$ とする。

定理 2.3 から次の系が直ちに従う。 $n = 3, d = 2$ の場合が新しい結果である。

系 2.4 任意の $n \geq 3, d \geq 2$ に対し、Hilbert の第 14 問題の反例 L で $[k(\mathbf{x}) : L] = d$ かつ $\text{trans.deg}_k L \cap k[\mathbf{x}] = n$ を満たすものが存在する。

ところで、位数 n の任意の有限群 G は、各 $\sigma \in G$ を集合 G 上の置換 $G \ni \tau \mapsto \sigma\tau \in G$ と考えることで、 n 次対称群 S_n の部分群と見なせる。さらに、各 $\sigma \in S_n$ を $\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}$ ($i = 1, \dots, n$) で定義される $\text{Aut}_k k(\mathbf{x})$ の元と同一視すれば、 G は $\text{Aut}_k k(\mathbf{x})$ の部分群と見なせる。Noether の問題は、この状況において不変体 $k(G) := k(\mathbf{x})^G$ が k の純超越拡大

であるかを問う問題である. $p = 47$ をはじめ, 様々な素数 p に対し $\mathbf{Q}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ が \mathbf{Q} の純超越拡大でないことが知られている ([21], [65], [67]). 一方, G が有限アーベル群のとき, $\mathbf{Q}(G)$ が \mathbf{Q} の純超越拡大であるための必要十分条件は, ある $l \geq 0$ が存在し, $\mathbf{Q}(G)^{(l)}$ が \mathbf{Q} の純超越拡大となることである ([12]). これらの事実と定理 2.3 から次の系が得られる.

系 2.5 $n = 48$ のとき, $\text{Aut}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\mathbf{x})$ の位数 47 の巡回部分群 G が存在し, $\mathbf{Q}(\mathbf{x})^G$ は \mathbf{Q} の純超越拡大でなく, $A := \mathbf{Q}(\mathbf{x})^G \cap \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$ は有限生成でなく, $\text{trans.deg}_{\mathbf{Q}} A = 48$ である.

3 局所冪零導分

$D \in \text{Der } R$ が局所冪零であるとは, 任意の $a \in R$ に対してある整数 $l \geq 0$ が存在し, $D^l(a) = 0$ を満たすときにいう. R における局所冪零導分全体の集合, 局所冪零 S 導分全体の集合をそれぞれ $\text{LND } R$, $\text{LND}_S R$ で表す. LND は locally nilpotent derivation の略である. 多項式環の研究では, 局所冪零導分が特に重要である. 本節では局所冪零導分に関する基本事項を簡潔に述べる.

$R = S[x]$ が可換環 S 上の 1 変数多項式環のとき, R における S 導分 $D = d/dx$ は局所冪零である. 一方, $D' := xD$ は x を固定するので局所冪零でない. 一般に, R における導分 D は R^D 線形写像なので,

$$(aD)^l(b) = aD(aD(\cdots(aD(b))\cdots)) = a^l D^l(b) \quad (a \in R^D, b \in R, l \geq 0) \quad (3.1)$$

が成り立つ. よって, D が局所冪零ならば, 任意の $a \in R^D$ に対して導分 aD は局所冪零である. 一方, 節末で示すように, R が標数 0 の整域のとき, D が局所冪零か否かに関らず, $D(a) \neq 0$ ならば aD は局所冪零でない.

定義より, $D \in \text{Der } R$ が局所冪零であるための必要十分条件は,

$$\text{Nil}(D) := \{a \in R \mid D^l(a) = 0 \text{ を満たす } l \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \text{ が存在}\}$$

が R と等しいことである. ただし, $\mathbf{Z}_{\geq 0} := \{a \in \mathbf{Z} \mid a \geq 0\}$ とする. (1.1) より

$$D^l(ab) = \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} D^i(a) D^{l-i}(b) \quad (a, b \in R, l \geq 0) \quad (3.2)$$

が成り立つから, $a, b \in \text{Nil}(D)$ ならば $ab \in \text{Nil}(D)$ である. よって, $\text{Nil}(D)$ は R の R^D 部分代数である. S を R の部分環とし, D を R における S 導分とする. このとき, S は $\text{Nil}(D)$ に含まれる. 従って, $\text{Nil}(D)$ が S 代数 R の生成系を含めば, $\text{Nil}(D) = R$ が成り立つので D は局所冪零である.

$D \in \text{Der}_k k[\mathbf{x}]$ が三角であるとは,

$$D(x_1) \in k, D(x_2) \in k[x_1], D(x_3) \in k[x_1, x_2], \dots, D(x_n) \in k[x_1, \dots, x_{n-1}]$$

を満たすときにいう。このとき, $D(x_i) \in \text{Nil}(D) \iff x_i \in \text{Nil}(D)$ に注意し, x_1, \dots, x_n が $\text{Nil}(D)$ に属することを n に関する帰納法で確認できる。よって, 三角導分は局所冪零である。例えば, (1.2), (1.3), (1.4), (1.6) はいずれも三角導分である。なお, 文献によっては, $D(x_i) \in k[x_{i+1}, \dots, x_n]$ ($i = 1, \dots, n$) を満たすとき三角ということもある。本稿では, この条件を満たすとき逆三角ということにする。例えば,

$$T = -2x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (3.3)$$

は逆三角である。 $T(x_1x_3 + x_2^2) = 0$ だから $D := (x_1x_3 + x_2^2)T$ も局所冪零だが, この D は三角でも逆三角でもない。

$D \in \text{LND } R$ に対し, $D(s) = 1$ を満たす $s \in R$ を D のスライスと呼ぶ。 s が D のスライスならば, 任意の $f(x) \in R^D[x]$ に対し $D(f(s)) = f'(s)D(s) = f'(s)$ が成り立つ。ここで, $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする。よって, $f(s) = 0$ ならば $f(x) = 0$ であり, s は R^D 上の超越元となる。今, R を \mathbf{Q} 代数と仮定する。すると, $D(a) \in R^D[s]$ を満たす任意の $a \in R$ に対し, s の多項式としての $D(a)$ の原始関数 $b \in R^D[s]$ が存在する。このとき, $D(a) = D(b)$ だから $a - b \in R^D$ であり, $a \in R^D[s]$ となる。よって,

$$\text{deg}_D a := \max\{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \mid D^n(a) \neq 0\}$$

に関する帰納法により, 任意の $a \in R$ が $R^D[s]$ に属することが分かる。以上より次のスライス定理を得る。

定理 3.1 R を \mathbf{Q} 代数とする。 $D \in \text{LND } R$ と $s \in R$ が $D(s) = 1$ を満たすならば, R は R^D 上の s の多項式環であり, $D = d/ds$ である。

s が D のスライスするとき, R^D 代数の全射準同型

$$\sigma_s^D : R = R^D[s] \ni f(s) \mapsto f(0) \in R^D$$

を Dixmier 写像と呼ぶ。Taylor の公式より

$$\sigma_s^D(a) = \sum_{l \geq 0} \frac{D^l(a)}{l!} (-s)^l \quad (a \in R) \quad (3.4)$$

が成り立つ。なお, スライスは一般に存在するとは限らないが, 任意の $0 \neq D \in \text{LND } R$ に対し, $u := D^l(a) \neq 0, D^{l+1}(a) = 0$ を満たす $l \geq 1$ が必ず存在する。 u が R の冪零元

でなければ、局所化 R_u における導分が D から誘導される。 $D(u) = 0$ なので、この導分も局所幕零であり、 $s = D^{l-1}(a)/u$ はそのスライスである。例えば、(1.6) は三角導分なので局所幕零である。この D はスライスを持たないが、 D の $P_2[x_1^{-1}]$ への拡張はスライス $s = x_1^{-t}y_1$ を持つ。よって、その核 $P_2[x_1^{-1}]^D$ は、Dixmier 写像を用いて

$$\begin{aligned} P_2[x_1^{-1}]^D &= \sigma_s^D(P_2[x_1]^{-1}) = k[\sigma_s^D(x_1^{\pm 1}), \sigma_s^D(x_2), \sigma_s^D(y_1), \sigma_s^D(y_2), \sigma_s^D(z)] \\ &= k \left[x_1^{\pm 1}, x_2, y_2 - (x_1y_1 + x_2)s + x_1^{t+1} \frac{s^2}{2}, z - y_2s + (x_1y_1 + x_2) \frac{s^2}{2} - x_1^{t+1} \frac{s^3}{6} \right] \end{aligned}$$

と記述できる。 $P_2^D = P_2[x_1^{-1}]^D \cap P_2$ が有限生成でないというのが [9] の主結果である。

R が \mathbf{Q} 代数のとき、任意の $D \in \text{LND } R$ に対し、 R^D 代数 R の自己同型 $\exp D$ が

$$(\exp D)(a) := \sum_{l \geq 0} \frac{D^l(a)}{l!} \quad (a \in R)$$

で定義される。一般に、 $D_1, D_2 \in \text{LND } R$ に対し、導分 $D_1 + D_2$ は局所幕零であるとは限らない。しかし、 $D_1 \circ D_2 = D_2 \circ D_1$ を満たすとき $D_1 + D_2$ は局所幕零であり、指数法則 $\exp(D_1 + D_2) = \exp D_1 \circ \exp D_2$ が成り立つ。任意の $a \in R^D$ に対し aD は局所幕零導分であり、 $aD \circ bD = bD \circ aD$ ($a, b \in R^D$) が成り立つ。よって、

$$R^D \ni a \mapsto \exp aD \in \text{Aut}_{R^D} R$$

は加法群 R^D から $\text{Aut}_{R^D} R$ への群準同型である。例えば、 D がスライス s を持つとき、任意の $a \in R^D$ に対し $(\exp aD)(s) = s + aD(s) = s + a$ が成り立つ。この場合、 $\exp aD$ は代入写像 $R^D[s] \ni f(s) \mapsto f(s + a) \in R^D[s]$ である。

ところで、環の準同型 $\epsilon : R \rightarrow R[x]$ が指数写像であるとは、各 $a \in R$ に対して次が成り立つときにいう。ただし、 $\epsilon(a) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ ($a_i \in R$) とし、 y は新しい変数とする。

$$(E1) \ a_0 = a. \quad (E2) \ R[x, y] \text{ において } \sum_{i=0}^m \epsilon(a_i) y^i = \sum_{i=0}^m a_i (x + y)^i.$$

この条件は、準同型 $\epsilon : R \rightarrow R[x] = R \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[x]$ が加法群スキーム $\mathbf{G}_a = \text{Spec}(\mathbf{Z}[x])$ の $\text{Spec}(R)$ への作用を定めるための条件と同値である。例えば、 R が \mathbf{Q} 代数のとき、任意の $D \in \text{LND } R$ に対し

$$R \ni a \mapsto \sum_{l \geq 0} \frac{D^l(a)}{l!} x^l \in R[x] \quad (3.5)$$

は指数写像である。実際、 D は $D(x) = D(y) = 0$ を満たすように $\text{LND } R[x, y]$ の元に拡張でき、 $\exp xD \circ \exp yD = \exp (x + y)D$ が成り立つ。

一方、任意の指数写像 ϵ に対し、(E1) より $\Delta_\epsilon : R \ni a \mapsto a_1 \in R$ は R における導分である。さらに、 R が \mathbf{Q} 代数のとき、(E2) から $\Delta_\epsilon^i(a)/i! = a_i$ ($i \geq 0, a \in R$) が従う。

よって, Δ_ϵ は局所冪零であり, Δ_ϵ から定まる指数写像 (3.5) は ϵ と等しい. ゆえに, \mathbf{Q} 代数における局所冪零導分は \mathbf{G}_a 作用と同値な概念である (cf. [52]).

最後に, R が標数 0 の整域の場合の注意を述べる. 任意の $D \in \text{Der } R$ に対し (3.2) より

$$\deg_D ab \leq \deg_D a + \deg_D b \quad (a, b \in \text{Nil}(D))$$

が成り立つ. ただし, $\deg_D 0 = -\infty$ とする. R が標数 0 の整域のとき, 上の不等式において等号が成り立つ. その帰結として, 局所冪零導分に関する様々な性質が導かれる. 例えば, 任意の $D \in \text{Der } R$ と $a \in R \setminus R^D$ に対し, $D' := aD$ は局所冪零でない. 実際, 仮に D' が局所冪零ならば,

$$\deg_{D'} a - 1 = \deg_{D'} D'(a) = \deg_{D'} aD(a) = \deg_{D'} a + \deg_{D'} D(a) \geq \deg_{D'} a$$

となり矛盾が生じる. また, 任意の $D \in \text{LND } R$ に対し, R^D は R において factorially closed である. ここで, 整域 R の部分環 S が R において factorially closed であるとは, $ab \in S$ を満たす任意の $a, b \in R \setminus \{0\}$ が S に属するときをいう. 例えば, $R = S[x]$ が整域 S 上の多項式環のとき, $f, g \in R \setminus \{0\}$ に対して次が成り立つ:

$$fg \in S \Rightarrow 0 = \deg fg = \deg f + \deg g \Rightarrow \deg f = \deg g = 0 \Rightarrow f, g \in S.$$

よって, S は R において factorially closed である. \deg を \deg_D に変えて考えれば, R^D が R において factorially closed であることも分かる.

一般に, S が R において factorially closed であるとき, $1 \in S$ より $S^\times = R^\times$ が成り立つ. また, R が UFD ならば S は UFD である. これは, $p \in S$ が R の素元であるとき, S の素元であることが分かれば容易に確認できるが, この主張は $pR \cap S = pS$ から従う. そのため, 任意の $D \in \text{LND } k[\mathbf{x}]$ は $k^\times = k[\mathbf{x}]^\times = (k[\mathbf{x}]^D)^\times \subset k[\mathbf{x}]^D$ を満たして k 導分となり, $k[\mathbf{x}]^D$ はネーター環であるか否かに関わらず UFD である.

4 多項式自己同型

多項式環の問題の多くが, 多項式環の自己同型と深く関係している. しかし, 多項式環の自己同型には不明な点が多く, それが多項式環の問題の難しさに影響している. 本節では, k 代数 $k[\mathbf{x}]$ の自己同型群 $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ やその元について考察する.

当面, k は任意標数の体とする. 一般に, k 代数の準同型 $\phi: k[\mathbf{x}] \rightarrow k[\mathbf{x}]$ は x_1, \dots, x_n の像によって一意的に決まるので, ϕ を多項式の組 $(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n))$ と同一視する. ϕ は全射ならば全単射である. すなわち, 次が成り立つ:

$$\phi \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}] \iff k[\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)] = k[\mathbf{x}] \iff x_1, \dots, x_n \in k[\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)].$$

よって、非常に具象的に書けば、

$$\text{Aut}_k k[\mathbf{x}] = \{(f_1, \dots, f_n) \in k[\mathbf{x}]^n \mid x_1, \dots, x_n \in k[f_1, \dots, f_n]\}$$

である。ただし、合成は

$$(f_1, \dots, f_n) \circ (g_1, \dots, g_n) := (g_1(f_1, \dots, f_n), \dots, g_n(f_1, \dots, f_n))$$

で定義する。例えば、

$$f := x_1 - 2(x_1x_3 + x_2^2)x_2 - (x_1x_3 + x_2^2)^2x_3, \quad g := x_2 + (x_1x_3 + x_2^2)x_3 \quad (4.1)$$

に対し、 $\phi_n := (f, g, x_3, \dots, x_n)$ は $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ の元である。このことは、

$$x_1x_3 + x_2^2 = fx_3 + g^2 \in k[f, g, x_3]$$

に気づけば容易に確認できる。もう少し分かり易い $k[\mathbf{x}]$ の自己同型を数種類挙げる。まず、任意の $A \in GL_n(k)$, $b_1, \dots, b_n \in k$ に対し、

$$\alpha = (x_1, \dots, x_n)A + (b_1, \dots, b_n)$$

は $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ に属する。この形の自己同型をアフィン自己同型と呼ぶ。任意の $a \in k^\times$ と $1 \leq l \leq n$, $p \in k[x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_n]$ に対し

$$\epsilon = (x_1, \dots, x_{l-1}, ax_l + p, x_{l+1}, \dots, x_n)$$

も $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ に属する。この形の自己同型を基本自己同型と呼ぶ。 $k[\mathbf{x}]$ の基本自己同型全体で生成される $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ の部分群 $T_n(k)$ を順部分群と呼ぶ。 $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ の元は $T_n(k)$ に属するとき順であるといい、そうでないとき野生であるという。基本自己同型の逆写像は基本自己同型なので、自己同型が順であることと、基本自己同型の合成写像であることは同じである。 $\phi = (f_1, \dots, f_n) \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ に対し、

$$\phi \rightsquigarrow \phi \circ \epsilon = (f_1, \dots, f_{l-1}, af_l + p(f_1, \dots, f_{l-1}, f_{l+1}, \dots, f_n), f_{l+1}, \dots, f_n)$$

の形の変形を基本変形と呼ぶ。自己同型が順であることと、基本変形を繰り返して恒等写像 $\text{id}_{k[\mathbf{x}]} = (x_1, \dots, x_n)$ に変形できることは同値である。例えば、 $n = 2$ のとき

$$\phi = (x_1 + (x_2 + x_1^2)^3, x_2 + x_1^2) \rightsquigarrow (x_1, x_2 + x_1^2) \rightsquigarrow (x_1, x_2)$$

となるから、この ϕ は順である。行列の列基本変形で $GL_n(k)$ の任意の元を単位行列に変形できることから、アフィン自己同型が順であることも分かる。また、 $\text{char } k = 0$ のと

き, $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ が三角ならば, $i = 1, \dots, n$ に対して $g_i \in k[x_1, \dots, x_{i-1}]$ が存在し, $(\exp D)(x_i) = x_i + g_i$ と書ける. $(x_1 + g_1, \dots, x_n + g_n)$ も基本変形を繰り返して $\text{id}_{k[\mathbf{x}]}$ に変形できるので, $\exp D$ は順である. D が逆三角の場合も同様である.

例えば, (3.3) の T と任意の $w \in k[x_3, \dots, x_n]$ に対し, wT は逆三角なので $\exp wT$ は順である. (3.3) の下で述べたように, $h := x_1x_3 + x_2^2$ に対して hT も局所冪零である. (3.1) に注意して計算すれば,

$$\begin{aligned} (\exp hT)(x_1) &= x_1 + hT(x_1) + \frac{1}{2}h^2T^2(x_1) + \cdots = x_1 - 2hx_2 - h^2x_3 = f \\ (\exp hT)(x_2) &= x_2 + hT(x_2) + \cdots = x_2 + hx_3 = g \end{aligned}$$

となる. $(\exp hT)(x_i) = x_i$ ($i \geq 3$) なので, $\exp hT$ は (4.1) で与えた ϕ_n と等しい.

永田 [56] は, $n = 3$ のとき野生自己同型が存在すると予想し, その候補として ϕ_3 を構成した. この予想は 30 年の歳月を経て, 2004 年に Shestakov-Umirbaev [62], [63] によって $\text{char } k = 0$ の場合のみ肯定的に解決された. $\text{char } k > 0$ の場合は依然として未解決である. ただし, $\text{char } k = 2$ の場合も含め, ϕ_3 は野生と考えるのが自然である.

$\text{char } k = 0$ のとき, 自己同型 ϕ_3 は逆三角導分 T と $h \in k[\mathbf{x}]^T$ を用いて $\exp hT$ と書ける. この形の自己同型がいつ野生であるか決定した ([40, Thm. 3.2.3], [41]).

定理 4.1 $n = 3$ とし, $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ を逆三角導分, f を $k[\mathbf{x}]^D$ の元とする. このとき, $\exp fD$ が野生であるためには, 以下が満たされることが必要十分である:

$$D(x_i) \neq 0 \quad (i = 1, 2), \quad D(x_3) = 0, \quad f \notin k[x_3], \quad \frac{\partial D(x_1)}{\partial x_2} \notin D(x_2)k[x_2, x_3].$$

一方, $n \geq 4$ のとき ϕ_n は順である. 一見すると奇妙だが, 以下の方法で簡単に確認できる. 前述のように $\psi := \exp x_n T$ は順である. $\epsilon := (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + h)$ も順であり, $A := k[h, x_3, \dots, x_{n-1}]$ の元を固定する. A は $k[\mathbf{x}]^T$ に含まれるので, ϕ_n, ψ も A の元を固定する. $x_3 \in A$ なので, ϕ_n, ψ, ϵ は $A' := A[x_3^{-1}]$ 代数 $k[\mathbf{x}][x_3^{-1}]$ の自己同型を誘導する. $k[\mathbf{x}][x_3^{-1}] = A'[x_2, x_n]$ は A' 上の 2 変数多項式環なので, これらを x_2, x_n の像の組と同一視すれば $\phi_n = (x_2 + hx_3, x_n)$, $\psi^{\pm 1} = (x_2 \pm x_n x_3, x_n)$, $\epsilon^{\pm 1} = (x_2, x_n \pm h)$ と書ける. このとき,

$$(x_2, x_n - h) \circ (x_2 - x_n x_3, x_n) \circ (x_2, x_n + h) \circ (x_2 + x_n x_3, x_n) = (x_2 + hx_3, x_n)$$

が成り立つ. すなわち, $\epsilon^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \epsilon \circ \psi = \phi_n$ である. ψ, ϵ は順なので ϕ_n も順である. 同様の理由から, 任意の三角導分 $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ と $f \in k[\mathbf{x}]^D$ に対し, $(\exp fD, x_{n+1})$ は $\mathbb{T}_{n+1}(k)$ に属する ([64]).

より一般に、次が成り立つと予想されている。

予想 4.2 (Stable Tameness Conjecture) 任意の $\phi \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ に対し、ある $l \geq 0$ が存在し、 $(\phi, x_{n+1}, \dots, x_{n+l})$ は $T_{n+l}(k)$ に属する。

$\phi(x_i) = x_i$ ($i = 3, \dots, n$) のとき予想が正しいことが Berson-van den Essen-Wright [4] によって示されているが、 $n = 3$ の場合でも完全な解決には至っていない。

上記の事情のため、 $n = 3$ の場合に野生自己同型が存在しても、 $n \geq 4$ の場合に野生自己同型が存在するとは限らない。次の問題は、 $n \geq 4$ の場合や $n = 3$ かつ $\text{char } k > 0$ の場合は未解決である。

問題 4.3 (Tame Generators Problem) $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}] = T_n(k)$ は成り立つか？

一方、 $n = 2$ かつ $\text{char } k = 0$ の場合は Jung [22] によって、 $n = 2$ かつ $\text{char } k > 0$ の場合は van der Kulk [29] によって、それぞれ肯定的に解決された。

問題 4.3 より現実的な以下の問題もあるが、大きな進展はない。

問題 4.4 (1) $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ は $\bigcup_{i=1}^n \text{Aut}_{k[x_i]} k[\mathbf{x}]$ で生成されるか？

(2) $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ は $\exp D$ ($D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$) とアフィン自己同型で生成されるか？

問題 4.3 の研究では、以下で述べる基本簡約の概念が重要である。 $\phi = (f_1, \dots, f_n) \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ の次数を

$$\deg \phi := \deg f_1 + \dots + \deg f_n$$

で定義する。 f_1, \dots, f_n は定数でないので、常に $\deg \phi \geq n$ が成り立つ。 $\deg \phi = n$ であることと、 ϕ がアフィン自己同型であることは同値である。 $\deg \phi > \deg \phi'$ を満たす基本変形 $\phi \rightsquigarrow \phi'$ を基本簡約と呼ぶ。

次の定理より、 $k[x_1, x_2]$ のアフィンでない自己同型は常に基本簡約を許容する。

定理 4.5 (cf. [56]) $(f_1, f_2) \in \text{Aut}_k k[x_1, x_2]$ がアフィン自己同型でないならば、ある $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$, $a \in k^\times$, $l \geq 1$ が存在し、 $\deg(f_i - af_j^l) < \deg f_i$ が成り立つ。

$\phi \in \text{Aut}_k k[x_1, x_2]$ がアフィン自己同型でないとき、基本簡約を繰り返して ϕ をアフィン自己同型に変形できる。アフィン自己同型は順なので ϕ も順である。これより $\text{Aut}_k k[x_1, x_2] = T_2(k)$ を得る。

5 Shestakov-Umirbaev 理論

本節では k は標数 0 の体とし, Shestakov-Umirbaev 理論やその一般化について述べる.

自己同型 ϕ_3 が基本簡約を許容しないことは簡単に確認できるが, それによって ϕ_3 が野生であるとは結論できない. 実際, $n = 3$ の場合に Shestakov-Umirbaev は, アフィン自己同型でなく, 基本簡約も許容しない順自己同型の存在に気づいた. そこで, 彼らは基本簡約の他に 4 種類の「簡約」(I 型簡約から IV 型簡約) を定義し, $\phi \in T_3(k)$ がアフィン自己同型でないとき, 基本簡約または 4 種類の「簡約」のいずれかを必ず許容することを示した ([63]). この結果の証明は非常に複雑で難しいが, ϕ_3 がどの簡約も許容しないことを確かめるのはさほど難しくはない. なお, II 型, III 型, IV 型簡約の概念は理論上の要請で導入されたもので, これらを許容する自己同型が実際に存在するかは不明である.

Shestakov-Umirbaev 理論でも「微分」の概念が重要な役割を果たす. $f_1, \dots, f_r \in k[\mathbf{x}]$ ($1 \leq r \leq n$) に対し, $df_1 \wedge \dots \wedge df_r$ を

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_r = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} J_{i_1, \dots, i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}, \quad J_{i_1, \dots, i_r} = \left| \frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})} \right|$$

と表し, その次数を

$$\deg df_1 \wedge \dots \wedge df_r := \max\{\deg J_{i_1, \dots, i_r} x_{i_1} \dots x_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n\}$$

で定義する. 自己同型の簡約に関する Shestakov-Umirbaev の理論 [63] は, 多項式の次数に関する以下の不等式 [62, Thm. 3] を基礎に構築された: $f, g \in k[\mathbf{x}]$ は k 上代数的独立であるとし, $a := \deg f$, $b := \deg g$ とおく. 多項式 $P \in k[x, y] \setminus \{0\}$ に対し, $\deg_y P$ を $a/\gcd(a, b)$ で割った商と余りをそれぞれ q, r とするとき, 次の不等式が成り立つ.

定理 5.1 (Shestakov-Umirbaev) $\deg P(f, g) \geq q(a'b - a - b + \deg df \wedge dg) + rb$.

正標数の場合にこの不等式が成り立たないため, Shestakov-Umirbaev 理論では標数 0 を仮定する必要がある. なお, 定理 5.1 は [62, Thm. 3] から不要な仮定を省いたものであり, [62, Thm. 3] とは若干異なる. Shestakov-Umirbaev [62] はこの不等式を使い, 定理 4.5 の簡単な別証も与えた.

定理 5.1 の一般化や別証が, 黒田 [37], Makar-Limanov–Yu [49], Vénéreau [66] 等によって与えられた. ここでは [37] の結果を紹介する. $k[\mathbf{x}]$ 上の多項式 $P(y) = \sum_{i \geq 0} p_i y^i$ と $g \in k[\mathbf{x}] \setminus \{0\}$ に対し, $P(g)$ の見かけの次数を $\deg^g P := \max\{\deg p_i g^i \mid i \geq 0\}$ で定

義する．一般に， $\deg P(g) \leq \deg^g P$ が成り立つ． $P^{(i)}$ を $P(y)$ の y に関する i 次導関数とすれば，十分大きな $i \geq 0$ に対し $\deg P^{(i)}(g) = \deg^g P^{(i)}$ が成り立つ．そこで，

$$m^g(P) := \min\{i \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \mid \deg P^{(i)}(g) = \deg^g P^{(i)}\}$$

と定義する．このとき， k 上代数的独立な $f_1, \dots, f_r \in k[\mathbf{x}]$ と $P(y) \in k[f_1, \dots, f_r][y]$ に対して次が成り立つ ([37, Thm. 2.1]). ただし， $\omega := df_1 \wedge \dots \wedge df_r$ とする．

定理 5.2 $\deg P(g) \geq \deg^g P + m^g(P)(\deg \omega \wedge dg - \deg \omega - \deg g)$.

この定理は $m^g(P)$ に関する帰納法で簡単に証明できる．黒田 [39] は定理 5.2 を基礎に，自己同型の簡約に関する Shestakov-Umirbaev の理論を再構築し，IV 型簡約を許容する順自己同型が存在しないことを示した．それにより，自己同型の野生性を判定するとき，IV 型簡約を考慮する必要がなくなった．

応用上，基本簡約などは重み付き次数に対して考えると便利である． Γ を全順序が定義された加法群とし，任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ に対し $\alpha \preceq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \preceq \beta + \gamma$ が成り立つと仮定する．重み $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \Gamma^n$ に対し，単項式の \mathbf{w} 次数を

$$\deg_{\mathbf{w}} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} := i_1 w_1 + \cdots + i_n w_n$$

で定め， $f \in k[\mathbf{x}] \setminus \{0\}$ に現れる単項式の \mathbf{w} 次数の最大値を $\deg_{\mathbf{w}} f$ と定義する．また， f に現れる単項式のうち， \mathbf{w} 次数が $\deg_{\mathbf{w}} f$ と等しいもの全体の和を $f^{\mathbf{w}}$ と表す．例えば， $\Gamma = \mathbf{Z}^n$ に辞書式順序を考え， $\mathbf{w} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ とするとき， $f^{\mathbf{w}}$ は辞書式順序に関する f の先頭項である．ただし， $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ は \mathbf{Z}^n の標準基底とする．このように， w_1, \dots, w_n が \mathbf{Z} 上 1 次独立ならば $f^{\mathbf{w}}$ は常に単項式である．上で述べた [37], [39] の理論は \mathbf{w} 次数を用いて構築されており，その帰結として種々の実用的な野生性判定法が得られている．例えば，次を満たす $\mathbf{w} \in \Gamma^3$ が存在するとき， $\phi = (f_1, f_2, f_3) \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ は野生である：

- (1) w_1, w_2, w_3 は 0 より大きく， \mathbf{Z} 上 1 次独立である．
- (2) $f_1^{\mathbf{w}}, f_2^{\mathbf{w}}, f_3^{\mathbf{w}}$ は k 上代数的従属だが，どの 2 つも k 上代数的独立である．
- (3) $(i, j, l) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ に対し $f_i^{\mathbf{w}} \notin k[f_j^{\mathbf{w}}, f_l^{\mathbf{w}}]$.

なお， \mathbf{w} 次数を使えば (2), (3) はそれぞれ以下のように言い換えられる：

- (2') $\deg_{\mathbf{w}} f_1, \deg_{\mathbf{w}} f_2, \deg_{\mathbf{w}} f_3$ は \mathbf{Z} 上 1 次従属だが，どの 2 つも \mathbf{Z} 上 1 次独立である．
- (3') $(i, j, l) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ に対し $\deg_{\mathbf{w}} f_i \notin \mathbf{Z} \deg_{\mathbf{w}} f_j + \mathbf{Z} \deg_{\mathbf{w}} f_l$.

この判定法の利点は，「簡約」に関する議論をせず $f_1^{\mathbf{w}}, f_2^{\mathbf{w}}, f_3^{\mathbf{w}}$ の情報だけで ϕ の野生性を証明できる点にある．例えば， $\phi_3 = (f, g, x_3)$ の場合，上述の辞書式順序から定まる \mathbf{w} 次数に関して $\deg_{\mathbf{w}} f = (2, 0, 3)$, $\deg_{\mathbf{w}} g = (1, 0, 2)$, $\deg_{\mathbf{w}} x_3 = (0, 0, 1)$ である．これ

らが (2'), (3') を満たすことは容易に分かる. しかし, f_1, f_2, f_3 を具体的に記述することが困難な場合も多く, この方法にも限界がある. 例えば, かなり簡単な $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ でも $(\exp D)(x_i) = x_i + D(x_i) + D^2(x_i)/2 + \dots$ がどのような多項式かよく分からないことが多い. より広範な自己同型の野生性を調べるために, 以下の方法が有効である. 一般に, $k[\mathbf{x}]$ の k 部分代数 A に対し, A 代数 $k[\mathbf{x}]$ の自己同型群 $\text{Aut}_A k[\mathbf{x}]$ は, $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ の部分群である. ϕ が $\text{Aut}_A k[\mathbf{x}]$ に属するとき, 任意の $p \in A$ に対し $\phi(p) = p$ が成り立つので, f_1, f_2, f_3, p の間の関係式が得られる. それらを解析して f_1, f_2, f_3 の情報を取り出し, 野生性判定法を適用することで, 順交叉 $\text{Aut}_A k[\mathbf{x}] \cap \text{T}_3(k)$ の様子を知ることができる. 例えば, 任意の $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ に対し $\exp D$ は $\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^D} k[\mathbf{x}]$ に属するので, $\exp D$ の野生性の研究は順交叉 $\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^D} k[\mathbf{x}] \cap \text{T}_3(k)$ の研究に帰着される. この方法で実際に色々な結果が得られている. 特筆すべき点として, 多くの場合, 順交叉に含まれる自己同型は特殊なものに限定されることが挙げられる.

Shestakov-Umirbaev による永田予想の解決や, その後の進展について, [42] にも解説がある.

6 座標変換

本節を通し k は標数 0 の体とする. $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ が三角ならば $c := D(x_1)$ は定数である. 従って, $c \neq 0$ ならば $s := c^{-1}x_1$ は D のスライスである. (3.4) より, $i = 2, \dots, n$ に対して $g_i \in k[x_1, \dots, x_{i-1}]$ が存在し $\sigma_s^D(x_i) = x_i + g_i$ と書ける. このとき,

$$\phi := (c^{-1}x_1, x_2 + g_2, \dots, x_n + g_n)$$

は $k[\mathbf{x}]$ の順自己同型であり, $\phi^{-1}D\phi = \partial/\partial x_1$ が成り立つ.

一般に, $D \in \text{Der}_k k[\mathbf{x}]$ を固定したとき, 各 $\theta \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ に対して $r(\theta) \in \{0, \dots, n\}$ と $f_{\theta,1}, \dots, f_{\theta,r(\theta)} \in k[\mathbf{x}]$ が存在し,

$$D^\theta := \theta^{-1}D\theta = f_{\theta,1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_{\theta,r(\theta)} \frac{\partial}{\partial x_{r(\theta)}}$$

と書ける. このとき,

$$\text{rank } D := \min\{r(\theta) \mid \theta \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]\}$$

を D の階数と呼ぶ. 例えば, 上で見たように, $D(x_1) \neq 0$ を満たす三角導分 D の階数は 1 である. $D(x_1) = 0$ ならば $\text{rank } D < n$ なので, $k[\mathbf{x}]$ における三角導分の階数は常に n 未満である. D^θ が三角であるような $\theta \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ が存在するとき, D は三角化可能で

あるという。任意の $\theta \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ に対し $\text{rank } D^\theta = \text{rank } D$ が成り立つので、三角化可能な導分の階数も n 未満である。

$\text{rank } D = 1$ ならば $D^\theta = f\partial/\partial x_n$ を満たす $\theta \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$, $f \in k[\mathbf{x}] \setminus \{0\}$ が存在する。このとき, $k[\mathbf{x}]^{D^\theta} = k[\mathbf{x}]^{\partial/\partial x_n} = k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ なので, k 代数 $k[\mathbf{x}]^D = \theta(k[\mathbf{x}]^{D^\theta})$ も $n-1$ 個の元で生成される。さらに, D が局所冪零ならば D^θ も局所冪零なので, f は $k[\mathbf{x}]^{\partial/\partial x_n}$ に属する。よって, 階数 1 の局所冪零導分は常に三角化可能である。

Rentschler [59] は, 任意の $0 \neq D \in \text{LND}_k k[x_1, x_2]$ が $\text{rank } D = 1$ を満たすことを示した。従って, D は三角化可能である。一方, $n = 3$ のとき, 三角化可能でない局所冪零導分の最初の例が Bass [3] によって与えられた。Bass の例は (3.3) の下に挙げた $D = (x_1x_3 + x_2^2)T$ である。その後, Popov [58] は任意の $n \geq 3$ に対してこの D が三角化可能でないことを示した。 $n \geq 3$ のとき, 階数 n の局所冪零導分は三角化可能でない。Daigle [8] は $n = 3$ のとき, 階数 2 の局所冪零導分が三角化可能であるための必要十分条件を与えた。なお, 階数が 2 以下の局所冪零導分 D は, 適当な $\theta \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ と $f_1, f_2 \in k[\mathbf{x}]$ を用いて $D^\theta = f_1\partial/\partial x_1 + f_2\partial/\partial x_2$ と書ける。 $k' := k(x_3, \dots, x_n)$ とし, D^θ を $\text{LND}_{k'} k'[x_1, x_2]$ の元と見なせば Rentschler の結果が使えるので, $n \geq 3$ でも大体の様子は分かる。しかし, 階数が 3 以上の局所冪零導分については不明な点が多く, 一般的な構成法も知られていない。

ところで, $D \in \text{Der}_k k[\mathbf{x}]$ が $\text{rank } D < n$ を満たすための必要十分条件は, $k[\mathbf{x}]^D$ が $k[\mathbf{x}]$ の座標を含むことである。ここで, $f \in k[\mathbf{x}]$ が $k[\mathbf{x}]$ の座標であるとは, $f = \phi(x_i)$ を満たす $\phi \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$, $1 \leq i \leq n$ が存在するときをいう。 ϕ のヤコビアンが k^\times に属するため, 座標には 1 次の単項式が必ず現れる。 ϕ を $T_n(k)$ からとれるとき, f を順座標と呼ぶ。例えば, x_1 や $x_1 + x_2^2$ などは $k[\mathbf{x}]$ の順座標である。また, 三角導分の核は常に順座標を含む。 f が $k[\mathbf{x}]$ の座標であることと, $k[f, f_2, \dots, f_n] = k[\mathbf{x}]$ を満たす $f_2, \dots, f_n \in k[\mathbf{x}]$ が存在することは同値である。従って, $f \in k[\mathbf{x}]$ が $k[\mathbf{x}]$ の座標ならば, 任意の $l \geq 1$ に対して f は $k[x_1, \dots, x_{n+l}]$ の座標である。逆に, $f \in k[\mathbf{x}]$ が $k[x_1, \dots, x_{n+l}]$ の座標であるような $l \geq 1$ が存在するとき, f が $k[\mathbf{x}]$ の座標であるかは大問題である ([48])。 k が体の場合の反例は見つかっていないが, k が正規でない整域の場合の反例は存在する ([5])。

Freudentburg [15] は, $k[\mathbf{x}]$ における階数 n の局所冪零導分の最初の例を, 各 $n \geq 3$ に対して与えた。例えば $n = 3$ のとき, 整数 $l \geq 1$ に対し

$$f := x_1x_3 - x_2^2, \quad r := f^l x_2 + x_1^{2l+1}$$

$$g := \frac{f^{2l+1} + r^2}{x_1} = \frac{f^{2l}(x_1x_3 - x_2^2) + (f^l x_2 + x_1^{2l+1})^2}{x_1} = f^{2l}x_3 + 2f^l x_1^{2l}x_2 + x_1^{4l+1}$$

とおき, $D_{(f,g)} : k[\mathbf{x}] \rightarrow k[\mathbf{x}]$ を

$$D_{(f,g)}(h) := \left| \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \right| \quad (h \in k[\mathbf{x}])$$

で定義する. このとき, $D_{(f,g)}$ は局所冪零導分であり, さらに $k[\mathbf{x}]^{D_{(f,g)}} = k[f, g]$ を満たす (cf. [14, §4.1]). f, g は 1 次の項を持たないので, 1 次の項を持つ多項式は $k[f, g]$ に属さない. よって, $k[\mathbf{x}]^{D_{(f,g)}} = k[f, g]$ であることから $\text{rank } D_{(f,g)} = 3$ が直ちに従う.

黒田 [43] より, 任意の $0 \neq h \in k[f, g]$ に対し $\exp hD_{(f,g)}$ は野生である. $n = 3$ のとき, 階数 3 の局所冪零導分の他の多くの例に対し, 同様の結果を得ている ([40, §7], [41]). $n = 3$ のとき, $\exp D$ が順ならば $\text{rank } D \leq 2$ と予想するのが自然だが, 私はより強い次の予想を立てている. 以下の 3 つの予想では $n = 3, D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ とする.

予想 6.1 $\exp D$ が順ならば, $k[\mathbf{x}]^D$ は少なくとも 1 つ $k[\mathbf{x}]$ の順座標を含む.

$\phi^{-1}D\phi$ が三角となるような $\phi \in T_3(k)$ が存在するとき, $\exp \phi^{-1}D\phi$ は順なので

$$\exp D = \phi \circ (\exp \phi^{-1}D\phi) \circ \phi^{-1}$$

も順である. この逆が成り立つと予想している.

予想 6.2 $\exp D$ が順ならば, $\phi^{-1}D\phi$ が三角であるような $\phi \in T_3(k)$ が存在する.

$k[\mathbf{x}]^D$ が $k[\mathbf{x}]$ の順座標を少なくとも 1 つ含むとき, 予想 6.2 は正しいことを示した ([40, Thm. 3.1.3 (i)], [41]). 従って, 予想 6.1 が正しければ予想 6.2 も正しい. 一方, 三角導分の核は必ず順座標を含むので, $\phi^{-1}D\phi$ が三角であるような $\phi \in T_3(k)$ が存在するとき, $k[\mathbf{x}]^D$ は $k[\mathbf{x}]$ の順座標を少なくとも 1 つ含む. よって, 予想 6.2 が正しければ予想 6.1 も正しく, これら 2 つの予想は同値である. 予想 6.2 が正しければ次の予想も正しい.

予想 6.3 ある $f \in k[\mathbf{x}]^D \setminus \{0\}$ が存在して $\exp fD$ が順ならば, $\exp D$ は順である.

より正確に, $\Sigma \subset \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ が次の 2 つの条件を満たすとき, 任意の $D \in \Sigma$ に対して予想 6.3 は正しい.

(i) 任意の $f \in k[\mathbf{x}]^D, D \in \Sigma$ に対して fD は Σ に属する.

(ii) 任意の $D \in \Sigma$ に対して予想 6.2 は正しい.

実際, $D \in \Sigma, f \in k[\mathbf{x}]^D \setminus \{0\}$ が $\exp fD \in T_3(k)$ を満たすとき, 予想 6.2 より, ある $\phi \in T_3(k)$ が存在して $(fD)^\phi = \phi^{-1}(f) \cdot \phi^{-1}D\phi$ が三角となる. このとき, $\phi^{-1}D\phi$ は三角である. ϕ は順なので, 予想 6.2 の上で述べたように $\exp D$ は順である. 例えば, 核が

順座標を含むような局所冪零導分全体の集合は明らかに (i) を満たし、上述のように (ii) も満たす。よって、このような局所冪零導分に対して予想 6.3 は正しい。

ところで、自己同型の順性の概念は、座標系のとり方に依存する。例えば、 $y_1, \dots, y_n \in k[\mathbf{x}]$ が $k[y_1, \dots, y_n] = k[\mathbf{x}]$ を満たすとき、 $\phi \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ が

$$\phi(y_i) = y_i \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad \phi(y_n) = y_n + 1$$

で定義される。 y_1, \dots, y_n を基準に考えれば ϕ は明らかに順だが、 x_1, \dots, x_n を基準に考えた場合、 ϕ が順であるか否かは y_1, \dots, y_n の選び方による。実際、 $n = 3$ の場合に次のような例が存在する ([40, Thm. 6.1.1], [41]):

(†) $\phi(y_1) = y_1$ を満たす任意の $\text{id}_{k[\mathbf{x}]} \neq \phi \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ は野生である。

この例の (y_1, y_2, y_3) は、ある種の $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ に対する $\exp D$ として与えられた。なお、条件 (†) は $\text{Aut}_{k[y_1]} k[\mathbf{x}] \cap T_3(k) = \{\text{id}_{k[\mathbf{x}]}\}$ と同値であり、これも前節末で述べた順交叉に関する結果の 1 つである。

最後に $0 \neq D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ の核 $k[\mathbf{x}]^D$ の生成系について触れる。上述のように、 $n = 2$ ならば Rentschler [59] より $\text{rank } D = 1$ なので、 $k[\mathbf{x}]^D$ は 1 つの元で生成される。 $n = 3$ のとき、宮西 [54] より $k[\mathbf{x}]^D$ は k 上 2 個の元で生成される。これらの結果は非常に有用である。一方、第 1 節で見たように、 $n \geq 5$ では D が三角でも $k[\mathbf{x}]^D$ は有限生成とは限らない。Daigle-Freudentburg [10] は、 $n = 4$ で D が三角のとき $k[\mathbf{x}]^D$ が有限生成であることを示した。Bhatwadekar-Daigle [6] はこの結果を一般化し、 $n = 4, \text{rank } D \leq 3$ ならば $k[\mathbf{x}]^D$ は有限生成であることを示した。次の問題は依然として未解決である。

問題 6.4 $n = 4$ のとき、 $k[\mathbf{x}]$ における階数 4 の局所冪零導分の核は常に有限生成か？

7 消去問題と線形化問題

本節では、特に断らない限り k は標数 0 の体とする。 $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ がスライス z を持つとき、スライス定理より $D = d/dz$ である。このとき $\text{rank } D = 1$ であるか？実は、この問題は以下で述べる消去問題と同値である。

A を $k[\mathbf{x}]$ の k 部分代数とする。 $k[\mathbf{x}] = A[z]$ を満たす A 上の超越元 $z \in k[\mathbf{x}]$ が存在するとき $k[\mathbf{x}] = A^{[1]}$ と表す。このとき、 $\pi : k[\mathbf{x}] = A[z] \ni f(z) \mapsto f(0) \in A$ は k 代数の全射準同型なので、 $A = \pi(k[\mathbf{x}])$ は k 上高々 n 個の元で生成される。

問題 7.1 (消去問題) $k[\mathbf{x}]$ の k 部分代数 A が $k[\mathbf{x}] = A^{[1]}$ を満たすとき, A は k 上 $n-1$ 個の元で生成されるか?

実際, 問題 7.1 の仮定の下, $k[\mathbf{x}] = A[z]$ における局所冪零導分 $D = d/dz$ は $k[\mathbf{x}]^D = A$ および $D(z) = 1$ を満たす. 従って, “ $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ がスライスを持つとき $\text{rank } D = 1$ ” という主張が真ならば, $A = k[\mathbf{x}]^D$ は $n-1$ 個の元で生成される. 一方, $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ がスライス z を持つとき, 定理 3.1 より $k[\mathbf{x}] = (k[\mathbf{x}]^D)^{[1]}$ である. 従って, 問題 7.1 の解が肯定的ならば, $k[\mathbf{x}]^D = k[y_1, \dots, y_{n-1}]$ を満たす $y_1, \dots, y_{n-1} \in k[\mathbf{x}]^D$ が存在する. このとき, $\theta = (z, y_1, \dots, y_{n-1})$ は $k[\mathbf{x}]$ の自己同型であり, $D^\theta = \partial/\partial x_1$ を満たす.

問題 7.1 は z が $k[\mathbf{x}]$ の座標の場合は易しい. 実際, $k[\mathbf{x}] = k[z_1, \dots, z_{n-1}, z]$ を満たす $z_1, \dots, z_{n-1} \in k[\mathbf{x}]$ が存在するので

$$A \simeq A[z]/(z) = k[z_1, \dots, z_{n-1}, z]/(z) \simeq k[z_1, \dots, z_{n-1}]$$

が成り立つ. 前節で見たように, $n = 2, 3$ のとき, 任意の $0 \neq D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ に対し $k[\mathbf{x}]^D$ は k 上 $n-1$ 個の元で生成される. 問題 7.1 において A は d/dz の核と等しいので, この場合も肯定的である (cf. [1], [18], [53]). Crachiola–Makar-Limanov [7] は, 有限生成 k 整域 A に対し, $\text{LND}_k A = \{0\} \Rightarrow \text{LND}_k A[z] = \text{LND}_A A[z]$ が成り立つことに着目し, $n = 3$ の場合のより簡単な証明を与えた. なお, $\text{char } k > 0$ の場合も $n = 2, 3$ のときは肯定的だが, $n \geq 4$ では反例が存在する (cf. [2], [19], [20]).

次に, ϕ を $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ の元とする. $\phi = (x_1, \dots, x_n)A$ を満たす $A \in GL_n(k)$ が存在するとき, ϕ は線形であるという. $\theta^{-1} \circ \phi \circ \theta = (x_1, \dots, x_n)A$ を満たす $\theta \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ と $A \in GL_n(k)$ が存在するとき, ϕ は線形化可能であるという. 特に, A を対角行列にとれるとき, ϕ は対角化可能であるという. ϕ が対角化可能であるための必要十分条件は,

$$k[f_1, \dots, f_n] = k[\mathbf{x}], \quad \phi(f_i) = \alpha_i f_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

を満たす $f_1, \dots, f_n \in k[\mathbf{x}]$ と $\alpha_1, \dots, \alpha \in k^\times$ が存在することである. 従って, $\phi \neq \text{id}_{k[\mathbf{x}]}$ が対角化可能ならば, $k[\mathbf{x}]$ の座標 f と $\alpha \in k \setminus \{1, 0\}$ が存在し, $\phi(f) = \alpha f$ を満たす.

$A \in GL_n(\mathbf{C})$ が, ある $l \geq 1$ に対し $A^l = E$ を満たすとき, A の最小多項式は $x^l - 1$ の因子なので重解を持たない. よって, 行列 A は対角化可能である. 従って, $\mathbf{C}[\mathbf{x}]$ の自己同型は, 線形かつ有限位数 ならば対角化可能である. 次の問題は Kraft [27] の “eight challenging open problems in affine spaces” の 1 つであり, $n \geq 3$ の場合は未解決である (cf. [26]). 上の注意より, 「対角化可能」を「線形化可能」に変えても問題の意味は変わらない.

問題 7.2 (線形化問題) $\mathbf{C}[\mathbf{x}]$ の自己同型は, 有限位数ならば常に対角化可能か?

この問題の主張は非常に強く, 仮にある $d \geq 2$ が存在し, $\mathbf{C}[\mathbf{x}]$ の位数 d の任意の自己同型が対角化可能ならば, $k = \mathbf{C}$ の場合の問題 7.1 が肯定的に解決する. 実際, ζ を 1 の原始 d 乗根とすると, $k[\mathbf{x}] = A[z]$ の位数 d の自己同型 ϕ が $\phi(p(z)) = p(\zeta z)$ で定義される. 仮定より ϕ は対角化可能なので, 座標 $p(z)$ と $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \{1, 0\}$ が存在し, $p(\zeta z) = \phi(p(z)) = \alpha p(z)$ を満たす. このとき, $(\alpha - 1)p(z) = p(\zeta z) - p(z)$ は z で割り切れるが, $p(z)$ は座標なので $k[\mathbf{x}]$ の既約元である. 従って, z と $p(z)$ は同伴であり, z も $k[\mathbf{x}]$ の座標である.

問題 7.2 は, 簡約代数群のアフィン空間への作用の線形化可能性を問う「上林の線形化問題」の特別な場合である (cf. [23]). $n = 2$ の場合の上林の問題は肯定的に解決しており, そこでは $\text{Aut}_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x_1, x_2] = \text{T}_2(\mathbf{C})$ であることが本質的な役割を果たす. 高次元では反例が見つかっており, 有限群の場合の反例も存在する (cf. [24], [50], [61]). しかし, 有限アーベル群に対する反例は見つかっていない. なお, $\text{char } k = p > 0$ の場合, 例えば $(x_1 + 1, x_2) \in \text{Aut}_k k[x_1, x_2]$ の位数は p だが, $k^2 \ni (a_1, a_2) \mapsto (a_1 + 1, a_2) \in k^2$ が固定点を持たないので線形化可能でない. 実際, 線形自己同型ならば原点が固定されるので, 線形化可能ならば固定点が必ず存在する. 浅沼 [2] は $n \geq 4$ のとき, 位数が p で割り切れないような有限アーベル群に対して線形化問題の反例を与えた.

係数環が体でない場合の線形化問題を考える. k の標数は任意とし, k が代数閉体であることも仮定しない. R を k 整域とし, G を $\text{Aut}_R R[\mathbf{x}]$ の部分群とする. $\theta^{-1}G\theta$ が

$$D_n(k) := \{(a_1x_1, \dots, a_nx_n) \mid a_1, \dots, a_n \in k^\times\}$$

に含まれるような $\theta \in \text{Aut}_R R[\mathbf{x}]$ が存在するとき, G は対角化可能であるという. R の商体を K とすれば, $\text{Aut}_R R[\mathbf{x}]$ は $\text{Aut}_K K[\mathbf{x}]$ の部分群と見なせる. $\theta^{-1}G\theta \subset D_n(k)$ を満たす $\theta \in \text{Aut}_K K[\mathbf{x}]$ が存在しても, このような θ を $\text{Aut}_R R[\mathbf{x}]$ からとれるとは限らない. そのため, G は K 上で対角化可能でも, R 上で対角化可能であるとは限らない. 次の結果は黒田 [44, Thm. 1.1 (i)] による.

定理 7.3 R が PID のとき, $\text{Aut}_R R[x_1, x_2]$ の部分群 G が K 上で対角化可能ならば, G は R 上で対角化可能である.

定理 7.3 は任意の体 k に対して成り立つが, $k = \mathbf{C}$ で R が \mathbf{C} 上有限生成な PID の場合は Kraft-Russell [28, Thm. 3.2] に含まれる.

定理 7.3 から次の系が従う

系 7.4 R を PID, G を $\text{Aut}_R R[x_1, x_2]$ の有限アーベル部分群とする. k が 1 の原始 d 乗根を含むならば, G は R 上で対角化可能である. ただし, $d := \max\{\text{ord } \phi \mid \phi \in G\}$ とする.

上の系において $R = k[x_3]$ とすれば, $\text{Aut}_k k[x_1, x_2, x_3]$ の有限アーベル部分群の線形化に関する部分的な結果が得られる.

以下では k の標数は 0 とする. $0 \neq \delta \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ を任意にとり, $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ の部分群 $\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]$ を考察する. この部分群は, 第 5 節で述べた順交叉の観点からも興味深い. 任意の $D \in \text{LND}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]$ は $k[\mathbf{x}]^D \supset k[\mathbf{x}]^\delta$ を満たすから,

$$\exp D \in \text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^D} k[\mathbf{x}] \subset \text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]$$

が成り立つ. よって,

$$\mathcal{N}_\delta := \{\exp D \mid D \in \text{LND}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]\}$$

は $\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]$ に含まれる. 実は, \mathcal{N}_δ は $\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]$ の正規部分群である. 以下では $\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]$ や剰余群 $(\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}])/\mathcal{N}_\delta$ に関して得られている結果を述べる (cf. [46]).

定理 7.5 $k[\mathbf{x}] \neq (k[\mathbf{x}]^\delta)^{[1]}$ ならば, 剰余群 $(\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}])/\mathcal{N}_\delta$ は k^\times の有限巡回部分群と同型であり, $(\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]) \setminus \mathcal{N}_\delta$ に属する自己同型の位数は常に有限である.

なお, 任意の $0 \neq D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ と $l \geq 1$ に対して $(\exp D)^l = \exp lD \neq \text{id}_{k[\mathbf{x}]}$ が成り立つので, $\mathcal{N}_\delta \setminus \{\text{id}_{k[\mathbf{x}]}\}$ に属する自己同型の位数は常に無限である. また, A を $A^\times \cup \{0\}$ が体であるような \mathbf{Q} 上の UFD とするとき, 定理 7.5 は $k[\mathbf{x}]$, k^\times をそれぞれ A , A^\times に替えても成り立つ.

以下では k を代数閉体とする. 次の 2 つの定理の証明に, 有限位数の自己同型の線形化に関する [44] の結果が使われる.

定理 7.6 $n \geq 3$, $\text{rank } \delta = 2$ と仮定する.

- (1) $(\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]) \setminus \mathcal{N}_\delta$ の任意の元は有限位数かつ線形化可能である.
- (2) δ が既約のとき, $\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}] \neq \mathcal{N}_\delta$ ならば δ は三角化可能である.

ここで, δ が既約であるとは, $\delta(x_1), \dots, \delta(x_n)$ が共通因子を持たないときにいう.

定理 7.7 $n = \text{rank } \delta = 3$ のとき, $(\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]) \setminus \mathcal{N}_\delta$ の任意の元は有限位数であり, かつ線形化可能でない $(\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}] = \mathcal{N}_\delta$ の可能性もある).

参考文献

- [1] S. S. Abhyankar, W. Heinzer and P. Eakin, On the uniqueness of the coefficient ring in a polynomial ring, *J. Algebra* **23** (1972), 310–342.
- [2] T. Asanuma, Nonlinearizable algebraic group actions on \mathbf{A}^n , *J. Algebra* **166** (1994), 72–79.
- [3] H. Bass, A nontriangular action of \mathbf{G}_a on \mathbf{A}^3 , *J. Pure Appl. Algebra* **33** (1984), 1–5.
- [4] J. Berson, A. van den Essen and D. Wright, Stable tameness of two-dimensional polynomial automorphisms over a regular ring, *Adv. Math.* **230** (2012), no. 4-6, 2176–2197.
- [5] S. M. Bhatwadekar and A. K. Dutta, On residual variables and stably polynomial algebras, *Comm. Algebra* **21** (1993), no. 2, 635–645.
- [6] S. M. Bhatwadekar and D. Daigle, On finite generation of kernels of locally nilpotent R -derivations of $R[X, Y, Z]$, *J. Algebra* **322** (2009), no. 9, 2915–2926.
- [7] A. J. Crachiola and L. G. Makar-Limanov, An algebraic proof of a cancellation theorem for surfaces, *J. Algebra* **320** (2008), 3113–3119.
- [8] D. Daigle, A necessary and sufficient condition for triangulability of derivations of $k[X, Y, Z]$, *J. Pure Appl. Algebra* **113** (1996), 297–305.
- [9] D. Daigle and G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert’s fourteenth problem in dimension 5, *J. Algebra* **221** (1999), 528–535.
- [10] D. Daigle and G. Freudenburg, Triangular derivations of $\mathbf{k}[X_1, X_2, X_3, X_4]$, *J. Algebra* **241** (2001), 328–339.
- [11] H. Derksen, The kernel of a derivation, *J. Pure Appl. Algebra* **84** (1993), 13–16.
- [12] S. Endo and T. Miyata, Invariants of finite abelian groups, *J. Math. Soc. Japan* **25** (1973), 7–26.
- [13] A. van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Progress in Mathematics, Vol. 190, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2000.
- [14] G. Freudenburg, Local slice constructions in $k[X, Y, Z]$, *Osaka J. Math.* **34** (1997), 757–767.
- [15] G. Freudenburg, Actions of \mathbf{G}_a on \mathbf{A}^3 defined by homogeneous derivations, *J. Pure Appl. Algebra* **126** (1998), 169–181.

- [16] G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert’s fourteenth problem in dimension six, *Transform. Groups* **5** (2000), 61–71.
- [17] G. Freudenburg, *Algebraic theory of locally nilpotent derivations*, Encyclopaedia Math. Sci., 136, Springer, Berlin, 2006.
- [18] T. Fujita, On Zariski problem, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **55** (1979), 106–110.
- [19] N. Gupta, On the cancellation problem for the affine space \mathbb{A}^3 in characteristic p , *Invent. Math.* **195** (2014), no. 1, 279–288.
- [20] N. Gupta, On Zariski’s cancellation problem in positive characteristic, *Adv. Math.* **264** (2014), 296–307.
- [21] A. Hoshi, On Noether’s problem for cyclic groups of prime order, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **91** (2015), no. 3, 39–44.
- [22] H. Jung, Über ganze birationale Transformationen der Ebene, *J. Reine Angew. Math.* **184** (1942), 161–174.
- [23] T. Kambayashi, Automorphism group of a polynomial ring and algebraic group action on an affine space, *J. Algebra* **60** (1979), 439–451.
- [24] F. Knop, Nichtlinearisierbare Operationen halbeinfacher Gruppen auf affinen Räumen, *Invent. Math.* **105** (1991), 217–220.
- [25] H. Kojima and M. Miyanishi, On Roberts’ counterexample to the fourteenth problem of Hilbert, *J. Pure Appl. Algebra* **122** (1997), 277–292
- [26] H. Kraft and G. Schwarz, Finite automorphisms of affine N -space, in *Automorphisms of affine spaces (Curaçao, 1994)*, 55–66, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.
- [27] H. Kraft, Challenging problems on affine n -space, *Astérisque No. 237* (1996), Exp. No. 802, 5, 295–317.
- [28] H. Kraft and P. Russell, Families of group actions, generic isotriviality, and linearization, *Transform. Groups* **19** (2014), 779–792.
- [29] W. van der Kulk, On polynomial rings in two variables, *Nieuw Arch. Wisk.* (3) **1** (1953), 33–41.
- [30] K. Kurano, Positive characteristic finite generation of symbolic Rees algebras and Roberts’ counterexamples to the fourteenth problem of Hilbert, *Tokyo J. Math.* **16** (1993), no. 2, 473–496.
- [31] S. Kuroda, A condition for finite generation of the kernel of a derivation, *J. Algebra* **262** (2003), 391–400.

- [32] S. Kuroda, A generalization of Roberts' counterexample to the fourteenth problem of Hilbert, *Tohoku Math. J.* **56** (2004), 501–522.
- [33] S. Kuroda, A counterexample to the Fourteenth Problem of Hilbert in dimension four, *J. Algebra* **279** (2004), 126–134.
- [34] S. Kuroda, Fields defined by locally nilpotent derivations and monomials, *J. Algebra* **293** (2005), 395–406.
- [35] S. Kuroda, A counterexample to the Fourteenth Problem of Hilbert in dimension three, *Michigan Math. J.* **53** (2005), 123–132.
- [36] S. Kuroda, Hilbert's fourteenth problem and algebraic extensions, *J. Algebra* **309** (2007), no. 1, 282–291.
- [37] S. Kuroda, A generalization of the Shestakov-Umirbaev inequality, *J. Math. Soc. Japan* **60** (2008), 495–510.
- [38] S. Kuroda, Automorphisms of a polynomial ring which admit reductions of type I, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **45** (2009), 907–917.
- [39] S. Kuroda, Shestakov-Umirbaev reductions and Nagata's conjecture on a polynomial automorphism, *Tohoku Math. J.* **62** (2010), 75–115.
- [40] S. Kuroda, Wildness of polynomial automorphisms in three variables, arXiv:math.AC/1110.1466v1.
- [41] S. Kuroda, Wildness of polynomial automorphisms: applications of the Shestakov-Umirbaev theory and its generalization, in *Higher dimensional algebraic geometry*, 103–120, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B24, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto.
- [42] S. Kuroda, Recent developments related to automorphisms of polynomial rings—the solution to the Nagata conjecture and developments thereafter, *Sūgaku* **65** (2013), no. 1, 45–68.
- [43] S. Kuroda, How to prove the wildness of polynomial automorphisms: an example, in *Automorphisms in birational and affine geometry*, 381–386, Springer Proc. Math. Stat., 79, Springer, Cham.
- [44] S. Kuroda, Subgroups of polynomial automorphisms with diagonalizable fibers, *J. Algebra* **435** (2015), 159–173.
- [45] S. Kuroda, A generalization of Nakai's theorem on locally finite iterative higher derivations, to appear in *Osaka Math. J.*
- [46] S. Kuroda, The automorphism group of a UFD over the kernel of a locally nilpo-

- tent derivation, 第 35 回可換環論シンポジウム報告集, 8 ページ.
- [47] S. Kuroda, Hilbert's Fourteenth Problem and field modifications, in preparation.
 - [48] L. Makar-Limanov, P. van Rossum, V. Shpilrain and J.-T. Yu, The stable equivalence and cancellation problems, *Comment. Math. Helv.* **79** (2004), 341–349.
 - [49] L. Makar-Limanov and J.-T. Yu, Degree estimate for subalgebras generated by two elements, *J. Eur. Math. Soc.* **10** (2008), 533–541.
 - [50] M. Masuda, L. Moser-Jauslin and T. Petrie, Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups: applications, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **88** (1991), 9065–9066.
 - [51] A. A. Mikhalev, V. Shpilrain and J.-T. Yu, *Combinatorial methods*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 19, Springer, New York, 2004.
 - [52] M. Miyanishi, *Curves on rational and unirational surfaces*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 60, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1978.
 - [53] M. Miyanishi and T. Sugie, Affine surfaces containing cylinderlike open sets, *J. Math. Kyoto Univ.* **20** (1980), 11–42.
 - [54] M. Miyanishi, Normal affine subalgebras of a polynomial ring, *Algebraic and Topological Theories—to the memory of Dr. Takehiko Miyata (Tokyo)*, Kinokuniya, 1985, pp. 37–51.
 - [55] M. Nagata, On the fourteenth problem of Hilbert, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1958*, Cambridge Univ. Press, London, New York, 1960, 459–462.
 - [56] M. Nagata, *On Automorphism Group of $k[x, y]$* , Lectures in Mathematics, Department of Mathematics, Kyoto University, Vol. 5, Kinokuniya Book-Store Co. Ltd., Tokyo, 1972.
 - [57] A. Nowicki, *Polynomial derivations and their rings of constants*, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń, 1994.
 - [58] V. L. Popov, On actions of \mathbf{G}_a on \mathbf{A}^n , in *Algebraic groups Utrecht 1986*, 237–242, Lecture Notes in Math., 1271, Springer, Berlin.
 - [59] R. Rentschler, Opérations du groupe additif sur le plan affine, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **267** (1968), 384–387.
 - [60] P. Roberts, An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and

- a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem, *J. Algebra* **132** (1990), no. 2, 461–473.
- [61] G. W. Schwarz, Exotic algebraic group actions, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **309** (1989), 89–94.
- [62] I. P. Shestakov and U. U. Umirbaev, Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials, *J. Amer. Math. Soc.* **17** (2004), no. 1, 181–196.
- [63] I. P. Shestakov and U. U. Umirbaev, The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables, *J. Amer. Math. Soc.* **17** (2004), no. 1, 197–227.
- [64] M. K. Smith, Stably tame automorphisms, *J. Pure Appl. Algebra* **58** (1989), 209–212.
- [65] R. G. Swan, Invariant rational functions and a problem of Steenrod, *Invent. Math.* **7** (1969), 148–158.
- [66] S. Vénéreau, A parachute for the degree of a polynomial in algebraically independent ones, *Math. Ann.* **349** (2011), 589–597.
- [67] V. E. Voskresenskiĭ, On the question of the structure of the subfield of invariants of a cyclic group of automorphisms of the field $Q(x_1, \dots, x_n)$, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **34** (1970), 366–375. MR0274427
- [68] O. Zariski, Interprétations algébriques-géométriques du quatorzième problème de Hilbert, *Bull. Sci. Math.* **78** (1954), 155–168.

〒192-0397 八王子市南大沢 1-1

首都大学東京大学院理工学研究科 数理情報科学専攻

Almost Ring Theory の観点からのホモロジカル予想

下元数馬 (日本大学)

以下で扱う環は全て可換環であると仮定する。ホモロジカル予想とは Hochster が導入したネーター局所環に関する予想の一群のことであるが、中でも良く知られているのが直和因子予想と呼ばれるものである。

Conjecture 1 (直和因子予想). $R \hookrightarrow S$ はネーター環の整拡大、 R は正則であって S は有限生成 R -加群であるとする。このとき、 R は R -加群として S の直和因子である。

この予想は [12] で Hochster によって定式化され、彼自身は正標数の場合を解決した。零標数の場合は比較的易しい。しかしながら R が体を含まない場合、つまり混合標数のケースが未解決のまま残されていた。2002 年に R. Heitmann が 3 次元の場合を解決し ([11] を参照)、2016 年には Y. André により Almost ring theory と Perfectoid 幾何学の理論を用いて完全な解決がもたらされた ([1],[2] を参照)。

Almost ring theory とは、1980 年代に G. Faltings が p -進 Hodge 理論における基本的な問題を解決するために導入した可換環の手法のことである ([8] を参照)。直和因子予想は B. Bhatt ([4] を参照) によって更に簡明な証明が付けられたが、実際には André によって次の強い結果が示された (用語に関しては本文を参照のこと)。

Theorem 2 (André; [1], [2]). k は標数 $p > 0$ の完全体、 $V = W(k)$ は Witt 環を表すとする。また

$$R := V[[x_2, \dots, x_d]] \hookrightarrow S$$

は d 次元完備正則局所環から整閉整域 S への有限生成な整拡大、 $d \geq 2$ であると仮定する。このとき、ある元 $g \in R \setminus pR$ が存在して $R[\frac{1}{pg}] \rightarrow S[\frac{1}{pg}]$ がエタール拡大となる。更に R -代数 T で以下の性質を満たすものが存在する。

1. T は *integral almost perfectoid* 代数である。
2. $pg \in T$ は非零因子であり、任意の自然数 $n > 0$ に対して $(pg)^{\frac{1}{p^n}} \in T$ となる。
3. $T/\mathfrak{m}T$ は T -加群として *almost zero* ではなく、更に

$$(pg)^{\frac{1}{p^n}} \cdot \frac{((p, x_2, \dots, x_i)T :_T x_{i+1})}{(p, x_2, \dots, x_i)T} = 0$$

が全ての自然数 n に対して成立する。

Theorem 2により任意のネーター局所環は big Cohen-Macaulay 代数 (以下、big CM 代数と呼ぶ) を持つことが示され、そこから直和因子予想も容易に従う。尚、定理で得られた S -代数 T は *almost Cohen-Macaulay* 代数と呼ばれているものである。Heitmann の証明からヒントを得て、Hochster は almost CM 代数から big CM 代数を直接構成する方法 (partial algebra modification ; [13] を参照のこと) を見出していた。この論説ではホモロジカル予想、Almost ring theory 周辺の話題、それと直和因子予想の証明のアイデアについてなるべく分かり易い説明を試みる。尚、André の論文 [1] では、Almost purity 定理を更に拡張した Perfectoid Abhyankar 補題と呼ばれる、非常に深い定理を証明してから Theorem 2 を導いていることに注意したい。ホモロジカル予想の歴史については [20] に簡にして要を得た解説があり参照のこと。

謝辞: 代数学シンポジウムにおいて講演の機会を与えて下さり、運営に関わられた皆様方に深く感謝したいと思います。

1 Big Cohen-Macaulay 代数

環は全て可換かつ単位元を持つと仮定する。ネーター局所環 (R, \mathfrak{m}) に対して $d := \dim R$ とおく。与えられたネーター環を考察する際、「その環は Cohen-Macaulay であるか?」という問題を考えることがしばしば重要である。また CM 性のお陰で問題が考えやすくなることがある。仮に環が CM でなくても次の問題を考えることは自然である。

Problem 3. (R, \mathfrak{m}) はネーター局所環とする。以下の性質を満たす R -代数 B が存在するだろうか?

- x_1, \dots, x_d を R のパラメータ系とする。この時、 $B \neq \mathfrak{m}B$ かつ x_1, \dots, x_d は B において正則列となる。

上のような性質を持つ B を一般に **big CM 代数** と呼んでいる。ここで B は必ずしもネーター的とは仮定していないことに注意する。このような代数の存在は、 R が体を含む場合 (等標数) には Hochster-Huneke の仕事によって知られていた。最も難しいのは R が体を含まない場合 (混合標数) であるが、Theorem 2 から次の定理が正しいことが示された (証明に関しては [2] を参照)。

Theorem 4. 任意のネーター局所環は *big CM* 代数を持つ。

次に big CM 代数と直和因子予想との関係について述べたい。

Lemma 5. (R, \mathfrak{m}) は Krull 次元が d である CM ネーター局所環と仮定する。 R の任意のパラメータ系 x_1, \dots, x_d に関して

$$(x_1 \cdots x_d)^n \notin (x_1^{n+1}, \dots, x_d^{n+1})$$

が全ての $n > 0$ に対して成立する。

Lemma 5 はパラメータ系が正則列であるということから容易に従う。「一般の (CM とは限らない) 局所環でも Lemma 5 の結論は成立するだろうか?」というのが **Monomial 予想** と呼ばれているホモロジカル予想の一部であり、Theorem 4 を認めれば正しい。

Theorem 6. *Monomial 予想が成立する。*

Proof. (R, \mathfrak{m}) は Krull 次元が d であるネーター局所環、 x_1, \dots, x_d を R のパラメータ系とし、ある自然数 n に対して

$$(x_1 \cdots x_d)^n \in (x_1^{n+1}, \dots, x_d^{n+1})$$

が成立したと仮定する。Theorem 4 によって big CM 代数 $R \rightarrow B$ が存在する。すると

$$(x_1 \cdots x_d)^n \in (x_1^{n+1}, \dots, x_d^{n+1})B$$

となる。しかし x_1, \dots, x_d は B において正則列なのでこれは矛盾である。 \square

[12] において Hochster は Monomial 予想から直和因子予想が従うことを示した。従って Theorem 4 の証明の鍵となるアイデアを理解すれば良いことが分かった。直和因子予想そのものは big CM 代数の存在を仮定しなくても証明は可能であるが、この論説の主題である Almost ring theory と Theorem 4 とが深く関係していることを強調しておきたい。

2 Almost ring theory

必要な用語を定義することから始めたい。Almost ring theory の基本的文献として [9] を挙げておく。

Definition 7. A は可換環、 π は A の非零因子であるとする。更に $\pi_n := \pi^{\frac{1}{p^n}} \in A$ かつ $\pi_{n+1}^p = \pi_n$ であると仮定する。以下、 $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ を固定する。

1. A -加群 M が **almost zero** であるとは、 $\pi_n \cdot M = 0$ が全ての n に対して成立するときに言う。これを $M \approx 0$ という記号で表す。
2. A -加群の写像 $f: M \rightarrow N$ が **almost isomorphism** であるとは、 $\text{Ker}(f) \approx 0$ かつ $\text{Im}(f) \approx 0$ であるときに言う。

以下、 $(\pi^\infty) := \bigcup_{n > 0} \pi^{\frac{1}{p^n}} A$ とおいて、組 $(A, (\pi^\infty))$ を **基本設定** (basic setup) と呼ぶことにする。イデアル (π^∞) は単項イデアルの順極限なので、 A -加群として平坦である。

Remark 8. 1. 具体例について述べる。 $A := \overline{\mathbb{Z}}_p$ を p -進整数環 \mathbb{Z}_p の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ での整閉包とする。 $\pi_n = p^{\frac{1}{p^n}}$ とおくと、 $(A, (\pi^\infty))$ は基本設定を与えている。また $A/(\pi^\infty)$ は自明でない almost zero な A -加群となる。

2. 「almost zero となる加群は、如何なる条件の下でゼロ加群になるか？」に関しては次の事実が知られている (読者への練習問題とする)。

- A -加群 M がある有限表示型を持つ A -加群の部分加群であって、更に $M \approx 0$ ならば $M = 0$ となる。

Definition 9. (R, \mathfrak{m}) は Krull 次元が d のネーター局所環、 x_1, \dots, x_d をパラメータ系とする。基本設定 $(A, (\pi^\infty))$ を固定し、 T は R -代数かつ A -代数であると仮定する。 T が **almost CM** であるとは、以下の条件が満たされるときに言う。

1. 任意の $n \geq 0$ に対して

$$\pi_n \cdot \frac{((x_1, \dots, x_i)T :_T x_{i+1})}{(x_1, \dots, x_i)T} = 0$$

が成立する。

2. $T/\mathfrak{m}T$ は almost zero でない。

次の定理は Hochster による partial algebra modification を用いて示される。

Theorem 10. (R, \mathfrak{m}) は任意標数のネーター局所環とする。 R 上の *almost CM* 代数が存在すれば R は *big CM* 代数を持つ。

Theorem 10 によって big CM 代数を構成する問題は almost CM 代数を構成する問題に帰着された。まず易しい場合である正標数から始めたい。

Theorem 11. (R, \mathfrak{m}) は完備ネーター局所整域であって、有限体 \mathbb{F}_p を含むとする。

$$R_\infty := \bigcup_{n>0} R^{\frac{1}{p^n}}$$

とする。このとき、 R は *almost CM* R -代数である。

R_∞ は R の完全閉包 (perfect closure) とよばれるもので、フロベニウス写像が全単射で作用する。また R が体で無ければ R_∞ はネーター環とはなり得ないことに注意する。Theorem 11 の証明に関しては [16] を参照。

Remark 12. R_∞ は必ずしも big CM 代数ではないことに注意したい。例えば、 R として F -純かつ CM でないものを取ってくると、 R_∞ は big CM 代数ではない。ここで標数 $p > 0$ のネーター整域 R が \mathbf{F} -純であるとは、 R が R^p -加群として純 (pure) という意味である。ただし、 $R^p = \{x^p \mid x \in R\}$ とする。

Scholze の論文 [17] と André の論文 [1] に従って用語を導入する。

Definition 13. 基本設定 $(A, (\pi^\infty))$ を固定する。 A は \mathbb{Z}_p 上忠実平坦な可換環、任意の自然数 $n > 0$ に対して $t_n := p^{\frac{1}{p^n}} \in A$ において $t_{n+1}^p = t_n$ であると仮定する。

1. A が p -進位相で完備かつ分離的、フロベニウス写像 $F : A/pA \rightarrow A/pA$ に関して $\text{Ker}(F) = t_1 A$ かつ $\pi_n \cdot \text{Coker}(F) = 0$ が全ての自然数 n について成立するとき、 A は **integral almost perfectoid** 代数と呼ぶ。
2. A が **integral perfectoid** 代数であるとは、 A が integral almost perfectoid であって更に $\text{Coker}(F) = 0$ 、つまりフロベニウス写像の全射性が成立するときを言う。

定義に関して注意しておく、応用上興味があるのは、ある元 $g \in A$ が与えられていて $\pi = pg$ という関係を満たしている場合である。既に Theorem 2 において述べたように、André の論文 [1] において、完備ネーター局所環の有限生成な整拡大 $R = V[[x_2, \dots, x_d]] \rightarrow S$ の分岐集合 $V(pg) \subset \text{Spec } R$ を考えている。 $g = 1$ の場合は Faltings による **Almost purity** 定理として良く知られている結果である。また 1 次元の場合は、J. Tate によって 1960 年代に調べられていた。これから Tate は局所体上の Abel 多様体から派生する Tate 加群、 p -divisible 群について幾つかの結果を導いた。Faltings による Almost purity 定理については、次章以降において直和因子予想の証明と関連して説明を試みる。

混合標数の場合には次が問題となる。

Problem 14. (R, \mathfrak{m}) は混合標数を持つ完備ネーター局所整域とする。このとき、完全閉包に相当する可換環を混合標数でも構成できないだろうか？更に CM 性を満たすものが作れないだろうか？

完全閉包の混合標数における類似が integral perfectoid 性を満たすものだと認めれば、Theorem 2 の結論によって上の疑問に答える形で近いものが構成されていることが分かる。より詳しく言うと以下の問題が未解決である。

Problem 15 (下元). (R, \mathfrak{m}) は混合標数を持つネーター局所環とする。このとき、big CM R -代数で integral perfectoid 代数の構造を持つものが存在するだろうか？

また次の問題に対する反例は知られていないようである。ただし、 $\pi = p$ であるならば正しいことが示される。これについては [1] を参照のこと。

Problem 16 (André). 任意の integral almost perfectoid 代数は integral perfectoid であるか？

3 直和因子予想の証明 (特別な場合)

最初に Almost purity 定理を説明する。そのために用語を導入する。 k は標数 $p > 0$ の完全体であるとし、 $V = W(k)$ は Witt 環とする。 $R := V[[x_2, \dots, x_d]]$ は d -次元完備正則局所環とする。また

$$R_n := V[p^{\frac{1}{p^n}}][[x_2^{\frac{1}{p^n}}, \dots, x_d^{\frac{1}{p^n}}]]$$

で $R_\infty := \bigcup_{n>0} R_n$ とおく。構成の仕方から明らかなように、 R_∞ は整閉整域であり、フロベニウス写像 $F : R_\infty/pR_\infty \rightarrow R_\infty/pR_\infty$ は全射である。

Theorem 17 (Faltings; [8]). $R := V[[x_2, \dots, x_d]] \hookrightarrow S$ は完備ネーター局所環の有限生成な整拡大、 S は整閉整域、 $R[\frac{1}{p}] \rightarrow S[\frac{1}{p}]$ はエタール拡大であると仮定する。また S_n は $R_n \otimes_R S$ の全商環での $R_n \otimes_R S$ の整閉包を表すものとし、 $S_\infty := \bigcup_{n>0} S_n$ とおく。このとき

$$R_\infty \rightarrow S_\infty$$

は *almost étale* 拡大となる。

Remark 18. Almost purity 定理は古典的な Nagata-Zariski の定理と深い関係にある。また [8] では、 R が V 上本質有限型なスムーズ代数と仮定されていたが、Scholze[17] により一般化的な状況で示されたことに言及しておく。Almost purity 定理は幾つかの異なるバージョンが知られている。Kedlaya-Liu によるもの [14]、また Davis-Kedlaya によるもの [6] が知られている。特に Davis-Kedlaya による定式化は p -進完備化を取らなくてもよいという利点があり、将来的には \mathbb{Z} 上の Hodge 理論が展開されることが期待される。

まず古典的な状況に関して復習する。

Definition 19. スキーム X と空でない開集合 $U \subset X$ から成る組 (X, U) を考える。 $\mathbf{Et}(X)$ を X 上有限エタールなスキームの作る圏とする。このとき関手

$$\mathbf{Et}(X) \rightarrow \mathbf{Et}(U); Y \mapsto Y' := Y \times_X U$$

が圏同値を与えるとき、 (X, U) を純な対 (pure pair) と呼ぶ。

以下の結果を思い出したい。

Theorem 20. (R, \mathfrak{m}) をネーター局所環とし、 $X := \mathrm{Spec} R$ 、 $U := \mathrm{Spec} R \setminus \{\mathfrak{m}\}$ とおく。以下の事実が成立する。

1. R が正則局所環であり $Krull$ 次元が 2 以上であれば、 (X, U) は純。
2. R が完全交叉であり $Krull$ 次元が 3 以上であれば、 (X, U) は純。

次に純な対という概念を、Almost ring theory の枠組みへと拡張する。定義や用語は [3] に従うものとする。

Definition 21. $(A, (\pi^\infty))$ は基本設定、 R は A -代数、 M と N はともに R -加群とする。

1. M が **almost flat** であるとは、 $\mathrm{Tor}_i^R(M, N) \approx 0$ が任意の $i > 0$ と N に対して成り立つことを言う。

2. M が **almost projective** であるとは、 $\text{Ext}_R^i(M, N) \approx 0$ が任意の $i > 0$ と N に対して成り立つことを言う。
3. M が **almost faithfully flat** であるとは、まず M が almost flat であり更に任意の R -加群 N_1 と N_2 に対して、自然な写像

$$\text{Hom}_R(N_1, N_2) \rightarrow \text{Hom}_R(N_1 \otimes_R M, N_2 \otimes_R M)$$

の核が almost zero となることである。

4. M が **almost finitely generated** であるとは、任意に与えられた自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、ある有限生成な R -加群 M_n と R -準同型 $f_n : M_n \rightarrow M$ 、 $g_n : M \rightarrow M_n$ が存在して、 $f_n \circ g_n = \pi_n \circ \text{Id}_M$ と $g_n \circ f_n = \pi_n \circ \text{Id}_{M_n}$ が成立するときを言う。

以上の準備の下に almost étale 拡大の定義を与える。

Definition 22. $(A, (\pi^\infty))$ は基本設定とする。 A -代数の準同型 $f : B \rightarrow C$ が **almost étale 拡大** であるとは、以下の条件が満たされるときを言う。

1. C は B -加群として almost finitely generated、almost faithfully flat、almost projective である。
2. $\mu : C \otimes_B C \rightarrow C$ を $\mu(b \otimes c) = bc$ で定義する。この写像を通して C を $C \otimes_B C$ -加群とみなす。このとき、 C は $C \otimes_B C$ -加群として almost projective である。

上の定義を $\text{Spec } A$ 上のスキームまで拡張することが可能であるが、詳細については [10] に譲る。また almost étale 拡大に関しては文献によって見かけ上、若干異なる定義が採用されているようである。

Remark 23. 環準同型 $f : B \rightarrow C$ がエタールであるとは、 f が有限表示型、平坦かつ不分岐であることを思い出す。上の定義で現われた「 $C \otimes_B C$ -加群 C が (almost) projective である」という条件はあまり見慣れないかもしれないが、環準同型の不分岐性に関係している。これについては [9] や [15] を参照のこと。

一般に $f : B \rightarrow C$ が平坦で C が $C \otimes_B C$ -加群として平坦である場合には、 $f : B \rightarrow C$ は **weakly étale 拡大** と呼ばれている。Bhatt-Scholze の論文 [5] ではエタール・コホモロジーへの応用が与えられている。

Problem 24. 論文 [5] において次の結果が鍵となる。

- $f : B \rightarrow C$ は weakly étale であるとする。このとき、faithfully flat な ind-étale な準同型写像 $g : C \rightarrow D$ であって合成写像 $g \circ f : B \rightarrow D$ が ind-étale となるものが存在する。

この結果の証明を純粹に環論だけを用いて示すことは可能であろうか? [5] で与えられている証明は、環論以外にも集合・位相空間論などを駆使するもので技術的にもかなり難しい。

純な対の概念を Almost ring theory の枠組みまで拡張する。

Definition 25 (Gabber-Ramero; [10]). $(A, (\pi^\infty))$ は基本設定とする。また R を A -代数、 $I \subset R$ をイデアルとする。 $X := \text{Spec } R$ 、 $U := \text{Spec } R \setminus V(I)$ とおく。 $\mathbf{Et}^a(X)$ を almost étale な X -スキーム達の作る圏とする。このとき関手

$$\mathbf{Et}^a(X) \rightarrow \mathbf{Et}^a(U); Y \mapsto Y' := Y \times_X U$$

が圏同値を与えるとき、 (X, U) を概純な対 (almost pure pair) と呼ぶ。

この定義から意味ある結果を導くためには、 R が整閉整域など技術的な条件が必要であるが、定義も含めた詳細については [10] を参照のこと。冒頭で述べた Faltings の定理は $X = \text{Spec } R_\infty$ 、 $U = \text{Spec } R_\infty[\frac{1}{p}]$ の場合に相当する。

以上の準備の下で、直和因子予想を、Almost purity 定理と同じ仮定の下で証明を与える。以下の証明は [3] によるものであるが、一般の場合の直和因子予想の証明 [4] を理解するための重要なエッセンスが含まれている。取り扱いが困難な混合標数の可換環の問題に取り組む上で役立つ道具や考え方が含まれていることを強調しておきたい。

Theorem 26 (Bhatt; [3]). k は標数 $p > 0$ の完全体、 $V = W(k)$ は Witt 環であるとする。また

$$f : R = V[[x_2, \dots, x_d]] \hookrightarrow S$$

は有限生成な整拡大、 S は整閉整域、更に $R[\frac{1}{p}] \rightarrow S[\frac{1}{p}]$ はエタール拡大であると仮定する。このとき、 R は R -加群として S の直和因子である。

Proof. まず $Q := \text{Coker}(f)$ とおく。すると完全列

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{f} S \rightarrow Q \rightarrow 0$$

より次の長完全列が誘導される。

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(Q, R) \rightarrow \text{Hom}_R(S, R) \rightarrow \text{Hom}_R(R, R) \rightarrow \text{Ext}_R^1(Q, R) \rightarrow \dots$$

そこで $\text{ob}(f) \in \text{Ext}_R^1(Q, R)$ を $\text{Id}_R \in \text{Hom}_R(R, R)$ の像とする。また

$$R_\infty := \bigcup_{n>0} V[p^{\frac{1}{p^n}}][[x_2^{\frac{1}{p^n}}, \dots, x_d^{\frac{1}{p^n}}]]$$

とにおいて基本設定を $(R_\infty, (p^\infty))$ としておく。もし $\text{ob}(f) = 0$ が正しければ、 R -準同型 $g : S \rightarrow R$ で $g \circ f = \text{Id}_R$ を満たすものの存在が言える。そのために以下の事実を示す。

(事実): $\text{ob}(f) \otimes 1 \in \text{Ext}_R^1(Q, R) \otimes_R R_\infty$ で生成された巡回 R_∞ -加群は almost zero である。言い換えると、 $p^{\frac{1}{p^n}} \cdot \text{ob}(f) \otimes 1 = 0$ が任意の $n > 0$ に対して成立する。

正規環 S_∞ は Theorem 17 において定義されたものとする。 $Q_\infty := \text{Ker}(f_\infty : R_\infty \rightarrow S_\infty)$ とおく。上と同様にして $\text{ob}(f_\infty) \in \text{Ext}_{R_\infty}^1(Q_\infty, R_\infty)$ を定義する。次の可換図式を考えたい。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R_\infty & \xrightarrow{\text{Id}_{R_\infty} \otimes f} & R_\infty \otimes_R S & \longrightarrow & R_\infty \otimes_R Q \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & R_\infty & \xrightarrow{f_\infty} & S_\infty & \longrightarrow & Q_\infty \longrightarrow 0 \end{array}$$

すると almost purity 定理によって $R_\infty \rightarrow S_\infty$ が almost étale 拡大であることから、 Q_∞ は almost projective な R_∞ -加群であることが示される (この事実の証明については [3] を参照)。つまり

$$\text{Ext}_{R_\infty}^1(Q_\infty, R_\infty) \approx 0$$

となる。これは $R_\infty \cdot \text{ob}(f_\infty) \approx 0$ を意味する。また構成から分かるように $R \rightarrow R_\infty$ は忠実平坦なので、 R_∞ -加群の同型 $\text{Ext}_{R_\infty}^1(R_\infty \otimes_R Q, R_\infty) \cong \text{Ext}_R^1(Q, R) \otimes_R R_\infty$ が従う。 $R_\infty \otimes_R Q \rightarrow Q_\infty$ から自然に誘導される写像

$$\text{Ext}_{R_\infty}^1(Q_\infty, R_\infty) \xrightarrow{\pi} \text{Ext}_{R_\infty}^1(R_\infty \otimes_R Q, R_\infty) \cong \text{Ext}_R^1(Q, R) \otimes_R R_\infty$$

を考えると、 $\text{ob}(f) \otimes 1 = \pi(\text{ob}(f_\infty))$ となることが確かめられるので、

$$R_\infty \cdot (\text{ob}(f) \otimes 1) \approx 0$$

が出る。これで (事実) が示された。

次に $\text{Ext}_{R_\infty}^1(R_\infty \otimes_R Q, R_\infty) \cong \text{Ext}_R^1(Q, R) \otimes_R R_\infty$ は有限表示型 R_∞ -加群であることに注意する。 $M := R_\infty \cdot (\text{ob}(f) \otimes 1)$ とおく。すると almost zero な R_∞ -加群 M は有限表示型 R_∞ -加群の部分加群なので、 Remark 8 で述べたように $M = 0$ となる。 $R \rightarrow R_\infty$ が忠実平坦であることから $\text{ob}(f) = 0$ となり、これで定理が示された。 \square

Remark 27. 論文 [18] では同様のアイデアを用いて、 Theorem 26 と同じ条件の下で big CM 代数を構成している。本文中で述べた Problem 15 であるが、 [7]、 [19] で展開されている理論が役立つのではないかと思う。ホモロジカル予想を超えてより豊かな理論を作り上げるためには、 big CM 代数の構造を詳しく解析することが不可欠であろう。

次の問題は混合標数の場合が未解決である。

Problem 28. $(R, \mathfrak{m}) \rightarrow (S, \mathfrak{n})$ は完備ネーター局所整域の局所準同型とする。このとき、 big CM R -代数 $\mathcal{B}(R)$ と big CM S -代数 $\mathcal{B}(S)$ で、次の図式を可換にするものは存在するであろうか？

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(R) & \longrightarrow & \mathcal{B}(S) \\ \uparrow & & \uparrow \\ R & \longrightarrow & S \end{array}$$

Andréの論文 [1]、[2]に関するコメントをしておきたい。環準同型 $A \rightarrow B$ が与えられたとして、 $A[\frac{1}{g}] \rightarrow B[\frac{1}{g}]$ がエタール拡大であるような状況を想定したい。Perfectoid Abhyankar 補題とは、従来の Almost purity 定理を超えて、 $(X = \text{Spec } A, U = \text{Spec } A[\frac{1}{g}])$ が概純な対 (almost pure pair) であることを目指しており、数論幾何や可換環論においても強力な道具と成り得ることが期待される。この原稿を執筆している時点において、これらの論文の妥当性についての最終的な判断は下されていないようである。しかしながら論文 [4] においてその有効性が示されており、[1] の詳しい解析が喫緊の課題と言えるであろう。最後に、Perfectoid Abhyankar 補題の特別な場合を紹介して本稿を終えたい。

Theorem 29 (André; [1]). A は *integral perfectoid* 代数、 $g \in A$ は非零因子とする。また任意の自然数 $n > 0$ に対して $g^{1/p^n} \in A$ であり、 B' は $A[\frac{1}{g}]$ 上有限なエタール代数であると仮定する。

$$g^{-\frac{1}{p^\infty}} A := \left\{ b \in A[\frac{1}{g}] \mid g^{\frac{1}{p^n}} \cdot b \in A, \forall n > 0 \right\}$$

とおくと、自然に $A[\frac{1}{g}]$ の部分環とみなせる。 B を B' における $g^{-\frac{1}{p^\infty}} A$ の整閉包の p -進完備化を表すものとする。また $\pi := pg$ とおいて $(A, (\pi^\infty))$ を基本設定としておく。このとき、 B は *integral almost perfectoid* 代数となる。つまりフロベニウス写像 $F : B/pB \rightarrow B/pB$ の余核は *almost zero* となる。

References

- [1] Y. André, *Le lemme d'Abhyankar perfectoïde*, <https://arxiv.org/abs/1609.00320>.
- [2] Y. André, *La conjecture du facteur direct*, <https://arxiv.org/abs/1609.00345>.
- [3] B. Bhatt, *Almost direct summands*, Nagoya Math. J. **214** (2014), 195–204.
- [4] B. Bhatt, *On the direct summand conjecture and its derived variant*, <https://arxiv.org/abs/1608.08882>.
- [5] B. Bhatt and P. Scholze, *The pro-étale topology for schemes*, Astérisque **369** (2015), 99–201.
- [6] C. Davis and K. S. Kedlaya, *On the Witt vector Frobenius*, Proc. Amer. Math. Soc. **142** (2014), 2211–2226.
- [7] G. Dietz, *Big Cohen-Macaulay algebras and seeds*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 5959–5989.
- [8] G. Faltings, *Almost étale extensions: Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques II*, Astérisque, **279** (2002), 185–270.

- [9] O. Gabber and L. Ramero, *Almost ring theory*, Lecture notes in mathematics **1800**, Springer-Verlag, 2003.
- [10] O. Gabber and L. Ramero, *Foundations for almost ring theory*, <https://arxiv.org/abs/math/0409584>.
- [11] R. Heitmann, *The direct summand conjecture in dimension three*, Ann. of Math. **156** (2002), 695–712.
- [12] M. Hochster, *Contracted ideals from integral extensions of regular rings*, Nagoya Math. J. **51** (1973), 25–43.
- [13] M. Hochster, *Big Cohen-Macaulay algebras in dimension three via Heitmann’s theorem*, J. Algebra **254** (2002), 395–408.
- [14] K. S. Kedlaya and R. Liu, *Relative p -adic Hodge theory, I: Foundations*, **371** (2015), Astérisque.
- [15] J.-P. Olivier, *Going up along absolutely flat morphisms*, J. Pure Appl. Algebra **30** (1983), 47–59.
- [16] P. Roberts, A. Singh and V. Srinivas, *Annihilators of local cohomology in characteristic zero*, Illinois J. Math. **51** (2007), 237–254.
- [17] P. Scholze, *Perfectoid spaces*, Publ. Math. de l’IHÉS **116** (2012), 245–313.
- [18] K. Shimomoto, *An application of the almost purity theorem to the homological conjectures*, J. Pure Appl. Algebra **220** (2016), 621–632.
- [19] K. Shimomoto, *An embedding problem of Noetherian rings into the Witt vectors*, <https://arxiv.org/abs/1503.02018>.
- [20] 高木俊輔・高橋亮, 可換環論の発展—ホモロジカル予想を中心として、第54回代数学シンポジウム.

ALMOST GORENSTEIN RINGS

NAOKI TANIGUCHI

CONTENTS

| | |
|--|----|
| 1. Introduction | 1 |
| 2. Survey on one-dimensional almost Gorenstein rings | 2 |
| 3. Almost Gorenstein local rings of higher dimension | 4 |
| 4. Semi-Gorenstein local rings | 9 |
| 5. Almost Gorenstein graded rings | 11 |
| 6. Two-dimensional rational singularities | 13 |
| 7. Almost Gorenstein Rees algebras | 15 |
| References | 17 |

1. INTRODUCTION

This article is based on the works jointly with Shiro Goto, Ryo Takahashi, Naoyuki Matsuoka, and Ken-ichi Yoshida ([8, 9, 10, 11, 15]).

There are known numerous examples of Cohen-Macaulay rings and among the progress of the theory of Cohen-Macaulay rings, we often encounter non-Gorenstein Cohen-Macaulay rings in the field of not only commutative algebra, but also algebraic geometry, representation theory, invariant theory, and combinatorics. On all such occasions, we have a natural query of why there are so many Cohen-Macaulay rings which are not Gorenstein.

The goal of this research is to find a new class of Cohen-Macaulay rings, which may not be Gorenstein, but sufficiently good next to the Gorenstein rings. One of the candidates for such a class is *almost Gorenstein rings*, which was originally studied by V. Barucci and R. Fröberg [2] in 1997. One can refer to [2] for a beautiful theory of almost symmetric numerical semigroups. Nevertheless, since the notion given by [2] was not flexible for the analysis of analytically ramified case, in 2013 S. Goto, N. Matsuoka and T. T. Phuong [7] extended the notion over one-dimensional Cohen-Macaulay local rings, using the first Hilbert coefficients of canonical ideals. More recently, in 2015 S. Goto, R. Takahashi and the author [15] finally gave the definition of almost Gorenstein *graded/local* rings of higher dimension.

Let us start on the definition of almost Gorenstein ring in the sense of [15].

The author was partially supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research 26400054.

Definition 1.1. Let R be a Noetherian local ring with maximal ideal \mathfrak{m} . Then R is said to be an *almost Gorenstein local ring*, if the following conditions are satisfied.

- (1) R is a Cohen-Macaulay local ring, which possesses the canonical module K_R and
- (2) there exists an exact sequence

$$0 \rightarrow R \rightarrow K_R \rightarrow C \rightarrow 0$$

of R -modules such that $\mu_R(C) = e_{\mathfrak{m}}^0(C)$.

Here $\mu_R(C)$ denotes the number of elements in a minimal system of generators for C ,

$$e_{\mathfrak{m}}^0(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_R(C/\mathfrak{m}^{n+1}C)}{n^{d-1}} \cdot (d-1)!$$

is the multiplicity of C with respect to \mathfrak{m} , and $d = \dim R$.

Notice that every Gorenstein local ring is almost Gorenstein (take $C = (0)$) and the converse is also true, if R is Artinian. In the exact sequence quoted in Definition 1.1 (2), if $C \neq (0)$, then C is a Cohen-Macaulay R -module with $\dim_R C = d - 1$ and one has the equality

$$\mathfrak{m}C = (f_2, f_3, \dots, f_d)C$$

for some elements $f_2, f_3, \dots, f_d \in \mathfrak{m}$, provided the residue class field R/\mathfrak{m} of R is infinite. Hence C is a *maximally generated Cohen-Macaulay R -module* in the sense of [3], which is called in the present article an *Ulrich R -module*. Roughly speaking, Definition 1.1 requires that if R is an almost Gorenstein local ring, then R might be a non-Gorenstein local ring but the ring R can be embedded into its canonical module K_R so that the difference K_R/R should be tame and well-behaved.

In the case where $d = 1$, if R is an almost Gorenstein local ring, then $\mathfrak{m}C = (0)$ and R is an almost Gorenstein local ring exactly in the sense of [7, Definition 3.1]. The converse is also true, if R/\mathfrak{m} is infinite. We will later show that many results of [7] of dimension one are extendable over higher-dimensional local rings, which supports the appropriateness of our definition.

In what follows, unless otherwise specified, let R denote a Noetherian local ring with maximal ideal \mathfrak{m} . For each finitely generated R -module M , let $\mu_R(M)$ (resp. $\ell_R(M)$) denote the number of elements in a minimal system of generators for M (resp. the length of M). We denote by $e_{\mathfrak{m}}^0(M)$ the multiplicity of M with respect to \mathfrak{m} .

2. SURVEY ON ONE-DIMENSIONAL ALMOST GORENSTEIN RINGS

Throughout this section, let R be a Cohen-Macaulay local ring with maximal ideal \mathfrak{m} and $\dim R = 1$. Let K_R stand for the canonical module of R . Then an ideal I of R is called *canonical*, if $I \neq R$ and $I \cong K_R$ as an R -module. Notice that this definition implicitly assume the existence of the canonical module. By the result [16, Satz 6.21] of J. Herzog and E. Kunz, R possesses a canonical ideal if and only if the total ring of fractions $Q(\widehat{R})$ of \widehat{R} is Gorenstein, where we denote by \widehat{R} the $\widehat{\mathfrak{m}}$ -adic completion of R . Hence the ring R contains a canonical ideal I if it is analytically unramified. Since I

is faithful and $\dim R = 1$, I is an \mathfrak{m} -primary ideal of R . Therefore there exist integers $e_0(I) > 0$ and $e_1(I)$ such that

$$\ell_R(R/I^{n+1}) = e_0(I) \binom{n+1}{1} - e_1(I)$$

for all integers $n \gg 0$. The integers $e_i(I)$'s are called *the Hilbert coefficients of R with respect to I* . These integers describe the complexity of given local rings, and there are a huge number of preceding researches about them, e.g., [5, 6, 7, 12, 13]. In particular, the integer $e_0(I) > 0$ is called *the multiplicity of R with respect to I* and has been explored very intensively.

Let $r(R)$ stand for the Cohen-Macaulay type of R ([16, Definition 1.20]). Then the almost Gorenstein ring is defined as follows.

Definition 2.1 ([7]). We say that R is an *almost Gorenstein local ring*, if R possesses a canonical ideal I of R such that $e_1(I) \leq r(R)$.

Remember that if R is Gorenstein, then any parameter ideal Q of R is canonical and hence $e_1(Q) < r(R) = 1$, which implies that every Gorenstein local ring is an almost Gorenstein ring.

We now assume that I contains a parameter ideal $Q = (a)$ as a reduction, namely $I^{r+1} = QI^r$ for some integer $r \geq 0$. Note that this assumption is automatically satisfied, if the residue class field R/\mathfrak{m} of R is infinite. We set

$$K = \frac{I}{a} = \left\{ \frac{x}{a} \mid x \in I \right\} \subseteq Q(R).$$

Notice that K is a fractional ideal of R such that

$$R \subseteq K \subseteq \overline{R} \quad \text{and} \quad K \cong K_R$$

where \overline{R} denotes the integral closure of R in $Q(R)$. Then the result [7, Theorem 3.11] says that R is an almost Gorenstein ring if and only if $\mathfrak{m}K \subseteq R$, or equivalently $\mathfrak{m}I = \mathfrak{m}Q$. The latter condition is the original definition of almost Gorenstein ring in the sense of [2]. Therefore if R is analytically unramified, that is \widehat{R} is reduced, then these two definitions of almost Gorenstein ring coincide, provided the residue class field R/\mathfrak{m} of R is infinite.

Before entering the higher dimensional case, let us give examples of almost Gorenstein local rings of dimension one.

Example 2.2. Let k be an infinite field. The following are almost Gorenstein rings.

- (1) $k[[t^3, t^4, t^5]]$
- (2) $k[[t^a, t^{a+1}, \dots, t^{2a-3}, t^{2a-1}]]$ ($a \geq 4$)
- (3) $k[[X, Y, Z]]/(X, Y) \cap (Y, Z) \cap (Z, X)$
- (4) $k[[X, Y, Z, U, V, W]]/I$, where

$$\begin{aligned} I = & (X^3 - Z^2, Y^2 - ZX) + (U, V, W)^2 \\ & + (YU - XV, ZU - XW, ZU - YV, ZV - YW, X^2U - ZW). \end{aligned}$$

3. ALMOST GORENSTEIN LOCAL RINGS OF HIGHER DIMENSION

In this section we summarize some basic results on almost Gorenstein rings of arbitrary dimension. Almost all the results are proved in [15].

In what follows, let (R, \mathfrak{m}) be a Cohen-Macaulay local ring with $d = \dim R$ possessing the canonical module K_R . For simplicity we assume that the residue class field R/\mathfrak{m} of R is infinite.

Definition 3.1 ([15]). We say that R is an *almost Gorenstein local ring*, if there exists an exact sequence

$$0 \rightarrow R \rightarrow K_R \rightarrow C \rightarrow 0$$

of R -modules such that $\mu_R(C) = e_{\mathfrak{m}}^0(C)$, where $\mu_R(C)$ (resp. $e_{\mathfrak{m}}^0(C)$) stands for the number of elements in a minimal system of generators for C (resp. the multiplicity of C with respect to \mathfrak{m}).

We look at an exact sequence

$$0 \rightarrow R \rightarrow K_R \rightarrow C \rightarrow 0$$

of R -modules. Here we do not need to assume that R is almost Gorenstein. If $C \neq (0)$, then C is a Cohen-Macaulay R -module of dimension $d - 1$. Set $\bar{R} = R/[(0) :_R C]$ and let $\bar{\mathfrak{m}}$ denote the maximal ideal of \bar{R} . Choose elements $f_1, f_2, \dots, f_{d-1} \in \mathfrak{m}$ such that $(f_1, f_2, \dots, f_{d-1})\bar{R}$ forms a minimal reduction of $\bar{\mathfrak{m}}$. Then we have

$$e_{\mathfrak{m}}^0(C) = e_{\bar{\mathfrak{m}}}^0(C) = \ell_R(C/(f_1, f_2, \dots, f_{d-1})C) \geq \ell_R(C/\mathfrak{m}C) = \mu_R(C).$$

Therefore $e_{\mathfrak{m}}^0(C) \geq \mu_R(C)$ and we say that C is an *Ulrich R -module* if $e_{\mathfrak{m}}^0(C) = \mu_R(C)$, since C is a *maximally generated maximal Cohen-Macaulay \bar{R} -module* in the sense of B. Ulrich ([3]). Thus C is an Ulrich R -module if and only if

$$\mathfrak{m}C = (f_1, f_2, \dots, f_{d-1})C.$$

Therefore if $\dim R = 1$, then the Ulrich property for C is equivalent to saying that C is a vector space over R/\mathfrak{m} . Therefore we have the following, which ensures that Definition 3.1 is a natural generalization of the definition of almost Gorenstein rings given by S. Goto, N. Matsuoka, and T. T. Phuong [7].

Remark 3.2. Let (R, \mathfrak{m}) be a one-dimensional Cohen-Macaulay local ring. Then the following conditions are equivalent.

- (1) R is an almost Gorenstein local ring in the sense of Definition 3.1
- (2) R is an almost Gorenstein local ring in the sense of [7, Definition 3.1].

One can construct many examples of almost Gorenstein rings of higher dimension. The significant examples of almost Gorenstein rings are one-dimensional Cohen-Macaulay local rings of finite Cohen-Macaulay representation type and two-dimensional rational singularity. Therefore every two-dimensional finite Cohen-Macaulay representation type is almost Gorenstein. Furthermore, for all the known examples of finite

Cohen-Macaulay representation type are almost Gorenstein. Thus, it might be true that for any finite Cohen-Macaulay representation type is almost Gorenstein for arbitrary dimension, which we leave as an open question.

Let us recall the fundamental results on almost Gorenstein rings. We begin with the following, which is called *non-zerodivisor characterization*.

Theorem 3.3. *Let $f \in \mathfrak{m}$ and assume that f is R -regular.*

- (1) *If $R/(f)$ is an almost Gorenstein local ring, then R is an almost Gorenstein local ring. Moreover if R is not a Gorenstein ring, then $f \notin \mathfrak{m}^2$.*
- (2) *Conversely, suppose that R is a non-Gorenstein almost Gorenstein local ring. Consider the exact sequence*

$$0 \rightarrow R \rightarrow K_R \rightarrow C \rightarrow 0$$

of R -modules such that $\mu_R(C) = e_{\mathfrak{m}}^0(C)$. If f is superficial for C with respect to \mathfrak{m} and $d \geq 2$, then $R/(f)$ is an almost Gorenstein local ring.

Proof. We set $\bar{R} = R/(f)$. Remember that $K_R/fK_R = K_{\bar{R}}$, since f is R -regular.

- (1) We take an exact sequence

$$0 \rightarrow \bar{R} \xrightarrow{\psi} K_{\bar{R}} \rightarrow D \rightarrow 0$$

of \bar{R} -modules so that D is an Ulrich \bar{R} -module of dimension $d - 2$. Let $\xi \in K_R$ such that $\psi(1) = \bar{\xi}$, where $\bar{\xi}$ denotes the image of ξ in $K_{\bar{R}} = K_R/fK_R$. We now consider the exact sequence

$$R \xrightarrow{\varphi} K_R \rightarrow C \rightarrow 0$$

of R -modules with $\varphi(1) = \xi$. Then, because $\psi = \bar{R} \otimes_R \varphi$, we get $D = C/fC$, whence $\dim_R C < d$, because $\dim_R D = d - 2$. Consequently, the homomorphism φ must be injective, and hence C is a Cohen-Macaulay R -module of dimension $d - 1$. Therefore, f is C -regular, so that C is an Ulrich R -module and $f \notin \mathfrak{m}^2$. Hence R is almost Gorenstein.

(2) Notice that f is a C -regular element, because f is superficial for C with respect to \mathfrak{m} and $\dim_R C = d - 1 > 0$. Therefore the exact sequence $0 \rightarrow R \rightarrow K_R \rightarrow C \rightarrow 0$ gives rise to the exact sequence of \bar{R} -modules

$$0 \rightarrow \bar{R} \rightarrow K_{\bar{R}} \rightarrow C/fC \rightarrow 0$$

where C/fC is an Ulrich \bar{R} -module. Hence \bar{R} is an almost Gorenstein local ring. \square

We apply Theorem 3.3 (1) to get the following.

Corollary 3.4. *Suppose that $d > 0$. If $R/(f)$ is an almost Gorenstein local ring for every non-zerodivisor $f \in \mathfrak{m}$, then R is a Gorenstein local ring.*

Let us note one example of almost Gorenstein local rings.

Example 3.5 (cf. [18]). Let $S = k[[X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n]]$ ($n \geq 2$) be the formal power series ring over a field k and put

$$R = S/I_2(\mathbb{M})$$

where $I_2(\mathbb{M})$ denotes the ideal of S generated by 2×2 minors of the matrix

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n \end{pmatrix}.$$

Then R is an almost Gorenstein local ring with $\dim R = n + 1$ and $\mathfrak{r}(R) = n - 1$.

Proof. It is well-known that R is a Cohen-Macaulay normal local ring with $\dim R = n + 1$ and $\mathfrak{r}(R) = n - 1$. The sequence $\{X_i - Y_{i-1}\}_{1 \leq i \leq n}$ (here $Y_0 = Y_n$ for convention) forms a regular sequence in R and

$$R/(X_i - Y_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n)R \cong k[[X_1, X_2, \dots, X_n]]/I_2(\mathbb{N}) =: T$$

where

$$\mathbb{N} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_{n-1} & X_n \\ X_2 & X_3 & \cdots & X_n & X_1 \end{pmatrix}.$$

Then T is a Cohen-Macaulay local ring with $\dim T = 1$, such that $\mathfrak{n}^2 = x_1 \mathfrak{n}$ and $\mathbf{K}_T \cong (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, where \mathfrak{n} stands for the maximal ideal of T and x_i denotes the image of X_i in T . Hence T is an almost Gorenstein local ring, because $\mathfrak{n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \subseteq (x_1)$. Thus R is an almost Gorenstein local ring by Theorem 3.3 (1). \square

We are now interested in the question of how the almost Gorenstein property is inherited under flat local homomorphisms of Noetherian local rings. Let us begin with the following.

Theorem 3.6. *Let (S, \mathfrak{n}) be a Noetherian local ring and let $\varphi : R \rightarrow S$ be a flat local homomorphism such that $S/\mathfrak{m}S$ is a regular local ring. Then R is an almost Gorenstein local ring if and only if so is S .*

Proof. Suppose that R is an almost Gorenstein local ring and consider an exact sequence

$$0 \rightarrow R \rightarrow \mathbf{K}_R \rightarrow C \rightarrow 0$$

of R -modules such that $\mu_R(C) = e_{\mathfrak{m}}^0(C)$. If $C = (0)$, then R is a Gorenstein ring, so is S . Suppose $C \neq (0)$. Then $S \otimes_R C$ is an Ulrich S -module, because C is an Ulrich R -module. Note that $\mathbf{K}_S \cong S \otimes_R \mathbf{K}_R$ as S -modules, since $S/\mathfrak{m}S$ is a Gorenstein local ring. Thus S is almost Gorenstein, thanks to the exact sequence of S -modules

$$0 \rightarrow S \rightarrow \mathbf{K}_S \rightarrow S \otimes_R C \rightarrow 0.$$

Suppose now that S is an almost Gorenstein local ring. Let $n = \dim S/\mathfrak{m}S$. We have to show that R is an almost Gorenstein local ring. Assume the contrary and choose a counterexample S so that $\dim S = n + d$ is as small as possible. Then S is not a Gorenstein ring, so that $\dim S = n + d > 0$. We take an exact sequence

$$0 \rightarrow S \rightarrow \mathbf{K}_S \rightarrow D \rightarrow 0$$

of S -modules with $\mu_S(D) = e_n^0(D)$. Suppose $n > 0$. If $d > 0$, then choose an element $g \in \mathfrak{n}$ so that g is superficial for D with respect to \mathfrak{n} and \bar{g} is a part of a regular system of parameters of $S/\mathfrak{m}S$, where \bar{g} denotes the image of g in $S/\mathfrak{m}S$. Then g is S -regular and the composite homomorphism $R \xrightarrow{\varphi} S \rightarrow S/gS$ is flat. Therefore the minimality of $n + d$ forces R to be an almost Gorenstein local ring, because S/gS is an almost Gorenstein local ring by Theorem 3.3 (2). Thus $d = 0$ and $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}S$ is a minimal prime ideal of S . Hence the induced flat local homomorphism $R \xrightarrow{\varphi} S \rightarrow S_{\mathfrak{p}}$ shows that R is a Gorenstein ring, because $S_{\mathfrak{p}}$ is a Gorenstein ring. Thus $n = 0$ and $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}S$.

Suppose now that $d \geq 2$. Then because $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}S$, we may choose an element $f \in \mathfrak{m}$ so that f is R -regular and $\varphi(f)$ is superficial for D with respect to \mathfrak{n} . Then by Theorem 3.3 (2) S/fS is an almost Gorenstein local ring, while the homomorphism $R/fR \rightarrow S/fS$ is flat. Consequently, R/fR is an almost Gorenstein local ring, so that by Theorem 3.3 (1) R is an almost Gorenstein local ring.

Thus $d = 1$ and $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}S$, so that R is an almost Gorenstein local ring by [7, Proposition 3.3], which is the required contradiction. \square

The following plays an important role when we consider the almost Gorenstein property of the Rees algebras.

Lemma 3.7. *Let R be an almost Gorenstein local ring and choose an exact sequence*

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\varphi} K_R \rightarrow C \rightarrow 0$$

of R -modules such that $\mu_R(C) = e_{\mathfrak{m}}^0(C)$. If $\varphi(1) \in \mathfrak{m}K_R$, then R is a regular local ring. Therefore $\mu_R(C) = r(R) - 1$, provided R is not regular.

Proof. Suppose $\varphi(1) \in \mathfrak{m}K_R$. Then $C \neq (0)$ and therefore $d > 0$. Assume $d = 1$. Then $Q(R)$ is a Gorenstein ring. Therefore we get an exact sequence

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\psi} I \rightarrow C \rightarrow 0$$

of R -modules with $\psi(1) \in \mathfrak{m}I$, where $I (\subsetneq R)$ is an ideal of R such that $I \cong K_R$ as an R -module. Let $a = \psi(1)$. Then $\mathfrak{m}I = (a)$, because $\mathfrak{m}C = (0)$ and $a \in \mathfrak{m}I$. Hence R is a discrete valuation ring. Let $d > 1$ and assume that our assertion holds true for $d - 1$. Let $f \in \mathfrak{m}$ be a non-zero-divisor of R such that f is superficial for C with respect to \mathfrak{m} . We set $\bar{R} = R/(f)$ and $\bar{C} = C/fC$. Then by Theorem 3.3 (2) \bar{R} is an almost Gorenstein local ring with the exact sequence

$$0 \rightarrow \bar{R} \xrightarrow{\bar{\varphi}} K_{\bar{R}} \rightarrow \bar{C} \rightarrow 0$$

of \bar{R} -modules, where $\bar{\varphi} = \bar{R} \otimes_R \varphi$ and $K_{\bar{R}} = K_R/fK_R$. Therefore, because $\bar{\varphi}(1) \in \mathfrak{m}K_{\bar{R}}$, the induction argument on d shows \bar{R} is regular and hence so is R .

The second assertion follows from the fact that

$$\mu_R(C) = \mu_R(K_R) - 1 = r(R) - 1$$

since $\varphi(1) \notin \mathfrak{m}K_R$. \square

When R contains a prime ideal \mathfrak{p} such that R/\mathfrak{p} is a regular local ring of dimension $d - 1$, we have the following characterization for $A = R \times \mathfrak{p}$ to be an almost Gorenstein local ring, which is a generalization of [7, Theorem 6.5].

Theorem 3.8. *Suppose that $d = \dim R > 0$. Let $\mathfrak{p} \in \text{Spec} R$ and suppose that R/\mathfrak{p} is a regular local ring of dimension $d - 1$. Then the following conditions are equivalent.*

- (1) $A = R \times \mathfrak{p}$ is an almost Gorenstein local ring.
- (2) R is an almost Gorenstein local ring.

The following example extends [7, Example 6.10].

Example 3.9. Suppose that R is a Gorenstein local ring of positive dimension. Let $\mathfrak{p} \in \text{Spec} R$ and assume that R/\mathfrak{p} is a regular local ring of dimension $d - 1$. We set $A = R \times \mathfrak{p}$. Then, thanks to Theorem 3.8, A is an almost Gorenstein local ring. Therefore because $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \in \text{Spec} A$ with $A/[\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}] \cong R/\mathfrak{p}$, setting

$$R_n = \begin{cases} R & (n = 0) \\ R_{n-1} \times \mathfrak{p}_{n-1} & (n > 0) \end{cases}, \quad \mathfrak{p}_n = \begin{cases} \mathfrak{p} & (n = 0) \\ \mathfrak{p}_{n-1} \times \mathfrak{p}_{n-1} & (n > 0) \end{cases},$$

we get an infinite family $\{R_n\}_{n \geq 0}$ of almost Gorenstein local rings. Note that R_n is not a Gorenstein ring, if $n \geq 2$ (see [7, Lemma 6.6]).

Example 3.10. Let k be an infinite field and $S = k[[X, Y, Z, U, V, W]]$ a formal power series ring over k . Set

$$A = k[[X, Y, Z, U, V, W]]/I$$

where

$$I = (X^3 - Z^2, Y^2 - ZX) + (U, V, W)^2 + (YU - XV, ZU - XW, ZU - YV, ZV - YW, X^2U - ZW).$$

Then it is routine to check that the isomorphism

$$A \cong k[[t^4, t^5, t^6]] \times (t^4, t^5, t^6)$$

and hence A is an almost Gorenstein local ring.

Let us note a characterization of almost Gorenstein property in terms of canonical ideals, which is a generalization of [7, Theorem 3.11].

Theorem 3.11. *Suppose that $d = \dim R > 0$ and $Q(R)$ is a Gorenstein ring. Let $I (\subsetneq R)$ be an ideal of R such that $I \cong K_R$. Then the following conditions are equivalent.*

- (1) R is an almost Gorenstein local ring.
- (2) R contains a parameter ideal $Q = (f_1, f_2, \dots, f_d)$ such that $f_1 \in I$ and $\mathfrak{m}(I + Q) = \mathfrak{m}Q$.

When this is the case, if $d \geq 2$ and R is not a Gorenstein ring, we have the following, where $J = I + Q$.

- (a) $\text{red}_Q(J) = 2$.

(b) $\ell_R(R/J^{n+1}) = \ell_R(R/Q) \cdot \binom{n+d}{d} - r(R) \cdot \binom{n+d-1}{d-1} + \binom{n+d-2}{d-2}$ for $\forall n \geq 0$.
Hence $e_1(J) = r(R)$.

(c) Let $G = \text{gr}_J(R)$. Then f_2, f_3, \dots, f_d is a super-regular sequence with respect to J and $\text{depth}G = d - 1$.

Theorem 3.12 (S. Goto). *Suppose that R is a non-Gorenstein almost Gorenstein local ring with $\dim R \geq 1$. Let M be a finitely generated R -module. If*

$$\text{Ext}_R^i(M, R) = (0)$$

for all $i \gg 0$, then $\text{pd}_R M < \infty$.

As a direct consequence of Theorem 3.12, we have the following.

Corollary 3.13. *Suppose that R is an almost Gorenstein local ring with $\dim R \geq 1$. If R is not a Gorenstein ring, then R is G -regular in the sense of [17], that is*

$$\text{Gdim}_R M = \text{pd}_R M$$

for every finitely generated R -module M .

4. SEMI-GORENSTEIN LOCAL RINGS

In this section we maintain the notation as in Section 3. Let $\mathcal{F} = \{I_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ denote a filtration of ideals of R such that $I_0 = R$, $I_1 \neq R$. We now consider the R -algebras

$$\mathcal{R} = \sum_{n \geq 0} I_n t^n \subseteq R[t], \quad \mathcal{R}' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} I_n t^n \subseteq R[t, t^{-1}], \quad \text{and} \quad G = \mathcal{R}'/t^{-1}\mathcal{R}'$$

associated to \mathcal{F} , where t is an indeterminate. Notice that $\mathcal{R}' = \mathcal{R}[t^{-1}]$ and that $G = \bigoplus_{n \geq 0} I_n/I_{n+1}$. Let N denote the graded maximal ideal of \mathcal{R}' .

Let us begin with the following.

Theorem 4.1. *Suppose that \mathcal{R} is a Noetherian ring. If G_N is an almost Gorenstein local ring and $r(G_N) \leq 2$, then R is an almost Gorenstein local ring.*

Proof. We may assume $r(G_N) = 2$. Since \mathcal{R}'_N is an almost Gorenstein local ring with $r(\mathcal{R}'_N) = 2$, we have

$$0 \rightarrow \mathcal{R}'_N \rightarrow K_{(\mathcal{R}'_N)} \rightarrow C \rightarrow 0$$

where C is isomorphic to a regular local ring of dimension d . Let $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}R[t, t^{-1}]$ and set $P = \mathfrak{p} \cap \mathcal{R}'$. Then $P \subseteq N$, so that $R[t, t^{-1}]_{\mathfrak{p}}$ is an almost Gorenstein local ring, because

$$R[t, t^{-1}]_{\mathfrak{p}} = \mathcal{R}'_P = (\mathcal{R}'_N)_{P\mathcal{R}'_N}.$$

Hence R is an almost Gorenstein local ring, since $R \rightarrow R[t, t^{-1}] \rightarrow R[t, t^{-1}]_{\mathfrak{p}}$ is a flat homomorphism. \square

Example 4.2 (Barucci-Dobbs-Fontana). Let $R = k[[x^4, x^6 + x^7, x^{10}]] \subseteq V$, where $V = k[[x]]$ denotes the formal power series ring over an infinite field k of $\text{ch } k \neq 2$. Let $H = \{v(a) \mid 0 \neq a \in R\}$ be the value semigroup of R . We consider the filtration $\mathcal{F} = \{(xV)^n \cap R\}_{n \in \mathbb{Z}}$ of ideals of R . We then have the following.

- (1) $H = \langle 4, 6, 11, 13 \rangle$.
- (2) $G \cong k[x^4, x^6, x^{11}, x^{13}] (\subseteq k[x])$ and G_N is an almost Gorenstein local ring with $r(G_N) = 3$.
- (3) R is not an almost Gorenstein local ring and $r(R) = 2$.

Therefore $(\mathcal{R}'_N)_{P\mathcal{R}'_N}$ is not an almost Gorenstein local ring. Hence local rings $R_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p} \in \text{Spec}R$) of an almost Gorenstein local ring R are not necessarily almost Gorenstein in general. Now we deal with the special class of almost Gorenstein rings which preserves under localization.

Definition 4.3. We say that R is a *semi-Gorenstein local ring*, if R is an almost Gorenstein local ring which possesses an exact sequence

$$0 \rightarrow R \rightarrow K_R \rightarrow C \rightarrow 0$$

such that either $C = (0)$, or C is an Ulrich R -module and $C = \bigoplus_{i=1}^{\ell} C_i$ for some cyclic R -submodule C_i of C .

Hence every Gorenstein local ring is a semi-Gorenstein local ring and every one-dimensional almost Gorenstein local ring is semi-Gorenstein, since $\mathfrak{m}C = (0)$. We notice that in exact sequence of Definition 4.3, if $C \neq (0)$, then each C_i is a cyclic Ulrich R -module of dimension $d - 1$, whence

$$C_i \cong R/\mathfrak{p}_i$$

for some prime ideal \mathfrak{p}_i of R such that R/\mathfrak{p}_i is a regular local ring of dimension $d - 1$.

We note the following.

Proposition 4.4. *Let R be a semi-Gorenstein local ring. Then $R_{\mathfrak{p}}$ is semi-Gorenstein for $\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec}R$.*

Proof. We may assume that R is not a Gorenstein ring. Choose an exact sequence

$$0 \rightarrow R \rightarrow K_R \rightarrow C \rightarrow 0$$

of R -modules which satisfies the condition as in Definition 4.3. Hence $C = \bigoplus_{i=1}^{\ell} R/\mathfrak{p}_i$, where for each $1 \leq i \leq \ell$, $\mathfrak{p}_i \in \text{Spec}R$ and R/\mathfrak{p}_i is a regular local ring of dimension $d - 1$. Let $\mathfrak{p} \in \text{Spec}R$. Then since $K_{R_{\mathfrak{p}}} = (K_R)_{\mathfrak{p}}$, we get an exact sequence

$$0 \rightarrow R_{\mathfrak{p}} \rightarrow K_{R_{\mathfrak{p}}} \rightarrow C_{\mathfrak{p}} \rightarrow 0$$

of $R_{\mathfrak{p}}$ -modules, where $C_{\mathfrak{p}} = \bigoplus_{\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}} R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_i R_{\mathfrak{p}}$ is a direct sum of finite cyclic Ulrich $R_{\mathfrak{p}}$ -modules $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_i R_{\mathfrak{p}}$, so that by definition the local ring $R_{\mathfrak{p}}$ is semi-Gorenstein. \square

Let us now consider a characterization of semi-Gorenstein local rings in terms of their minimal free resolutions, which is a natural generalization of [7, Corollary 4.2].

Theorem 4.5. *Let (S, \mathfrak{n}) be a regular local ring and $\mathfrak{a} \subsetneq S$ an ideal of S with $n = \text{ht}_S \mathfrak{a}$. Let $R = S/\mathfrak{a}$. Then the following conditions are equivalent.*

- (1) R is a semi-Gorenstein local ring but not a Gorenstein ring.

(2) R is Cohen-Macaulay, $n \geq 2$, $r = r(R) \geq 2$, and R has a minimal S -free resolution of the form:

$$0 \rightarrow F_n = S^r \xrightarrow{\mathbb{M}} F_{n-1} = S^q \rightarrow F_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 = S \rightarrow R \rightarrow 0$$

where

$${}^t\mathbb{M} = \begin{pmatrix} y_{21}y_{22} \cdots y_{2\ell} & y_{31}y_{32} \cdots y_{3\ell} & \cdots & y_{r1}y_{r2} \cdots y_{r\ell} & z_1z_2 \cdots z_m \\ x_{21}x_{22} \cdots x_{2\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{31}x_{32} \cdots x_{3\ell} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x_{r1}x_{r2} \cdots x_{r\ell} & 0, \end{pmatrix},$$

$\ell = n + 1$, $q \geq (r - 1)\ell$, $m = q - (r - 1)\ell$, and $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i\ell}$ is a part of a regular system of parameters of S for every $2 \leq i \leq r$.

When this is the case, one has the equality

$$\mathfrak{a} = (z_1, z_2, \dots, z_m) + \sum_{i=2}^r \mathbf{I}_2 \left(\begin{matrix} y_{i1} & y_{i2} & \cdots & y_{i\ell} \\ x_{i1} & y_{i2} & \cdots & x_{i\ell} \end{matrix} \right),$$

where $\mathbf{I}_2(\mathbb{N})$ denotes the ideal of S generated by 2×2 minors of the submatrix $\mathbb{N} = \begin{pmatrix} y_{i1} & y_{i2} & \cdots & y_{i\ell} \\ x_{i1} & y_{i2} & \cdots & x_{i\ell} \end{pmatrix}$ of \mathbb{M} .

We explore one example.

Example 4.6. Let $V = k[[t]]$ be the formal power series ring over an infinite field k and set $R = k[[t^5, t^6, t^7, t^9]]$. Let $S = k[[X, Y, Z, W]]$ be the formal power series ring and let $\varphi : S \rightarrow R$ be the k -algebra map defined by

$$\varphi(X) = t^5, \quad \varphi(Y) = t^6, \quad \varphi(Z) = t^7, \quad \text{and} \quad \varphi(W) = t^9.$$

Then R has a minimal S -free resolution of the form

$$0 \rightarrow S^2 \xrightarrow{\mathbb{M}} S^6 \rightarrow S^5 \rightarrow S \rightarrow R \rightarrow 0,$$

where

$${}^t\mathbb{M} = \begin{pmatrix} W & X^2 & XY & YZ & Y^2 - XZ & Z^2 - XW \\ X & Y & Z & W & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hence R is a semi-Gorenstein local ring with $r(R) = 2$ and

$$\text{Ker}\varphi = (Y^2 - XZ, Z^2 - XW) + \mathbf{I}_2 \left(\begin{matrix} W & X^2 & XY & YZ \\ X & Y & Z & W \end{matrix} \right).$$

5. ALMOST GORENSTEIN GRADED RINGS

Let us now discuss the graded ring. Let $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ be a Cohen-Macaulay graded ring and assume that R_0 is a local ring and there exists the graded canonical module K_R . Let $a = a(R)$ be an a -invariant of R .

Definition 5.1. Then R is called *an almost Gorenstein graded ring*, if there exists an exact sequence

$$0 \rightarrow R \rightarrow \mathbf{K}_R(-a) \rightarrow C \rightarrow 0$$

of graded R -modules such that $\mu_R(C) = e_{\mathfrak{M}}^0(C)$, where \mathfrak{M} is the unique graded maximal ideal of R . Remember that $\mathbf{K}_R(-a)$ stands for the graded R -module whose underlying R -module is the same as that of \mathbf{K}_R and whose grading is given by $[\mathbf{K}_R(-a)]_n = [\mathbf{K}_R]_{n-a}$ for all $n \in \mathbb{Z}$.

Note that Gorenstein graded ring is by definition an almost Gorenstein graded ring. If R is an almost Gorenstein graded ring, then the local ring $R_{\mathfrak{M}}$ is an almost Gorenstein local ring. Unfortunately, the converse is not true in general.

Example 5.2. Let $U = k[s, t]$ be the polynomial ring over an infinite field k and look at the subring $R = k[s, s^3t, s^3t^2, s^3t^3] \subseteq U$. Let $S = k[X, Y, Z, W]$ be the weighted polynomial ring such that

$$\deg X = 1, \deg Y = 4, \deg Z = 5, \text{ and } \deg W = 6.$$

Let $\psi : S \rightarrow R$ be the k -algebra map defined by

$$\psi(X) = s, \psi(Y) = s^3t, \psi(Z) = s^3t^2, \text{ and } \psi(W) = s^3t^3.$$

Then $\text{Ker } \psi = \mathbf{I}_2 \begin{pmatrix} X^3 & Y & Z \\ Y & Z & W \end{pmatrix}$ and R has a graded minimal S -free resolution

$$0 \rightarrow S(-13) \oplus S(-14) \xrightarrow{\begin{pmatrix} X^3 & Y & Z \\ Y & Z & W \end{pmatrix}} S(-10) \oplus S(-9) \oplus S(-8) \xrightarrow{(\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3)} S \xrightarrow{\psi} R \rightarrow 0$$

where $\Delta_1 = Z^2 - YW$, $\Delta_2 = X^3W - YZ$, and $\Delta_3 = Y^2 - X^3Z$. Therefore, because $\mathbf{K}_S \cong S(-16)$, we get

$$(\sharp) \quad S(-6) \oplus S(-7) \oplus S(-8) \xrightarrow{\begin{pmatrix} X^3 & Y & Z \\ Y & Z & W \end{pmatrix}} S(-3) \oplus S(-2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{K}_R \rightarrow 0.$$

Hence $a(R) = -2$. Let $\xi = \varepsilon\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \in [\mathbf{K}_R]_3$ and we have

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\varphi} \mathbf{K}_R(3) \rightarrow S/(Y, Z, W)(1) \rightarrow 0$$

where $\varphi(1) = \xi$. Hence R_M is a semi-Gorenstein local ring.

On the other hand, by (\sharp) we get $[\mathbf{K}_R]_2 = k\eta \neq (0)$, where $\eta = \varepsilon\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Hence if R is an almost Gorenstein graded ring, we must have

$$\mu_R(\mathbf{K}_R/R\eta) = e_M^0(\mathbf{K}_R/R\eta)$$

which is impossible, because $\mathbf{K}_R/R\eta \cong [S/(X^3, Y, Z)](-3)$.

We explore the almost Gorenstein property of the homogeneous ring.

Theorem 5.3. *Let $R = k[R_1]$ be a Cohen-Macaulay homogeneous ring with $d = \dim R \geq 1$. Suppose that k is an infinite field and R is not a Gorenstein ring. Then the following conditions are equivalent.*

- (1) R is an almost Gorenstein graded ring and level.

(2) $Q(R)$ is a Gorenstein ring and $a(R) = 1 - d$.

Let us consider a few examples.

Example 5.4 (cf. [18]). Let $S = k[X_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n]$ ($2 \leq m \leq n$) be the polynomial ring over an infinite field k and put

$$R = S/I_t(X)$$

where $2 \leq t \leq m$, $X = [X_{ij}]$. Then R is an almost Gorenstein graded ring if and only if either $m = n$, or $m \neq n$ and $t = m = 2$.

Example 5.5. Let $R = k[X_1, X_2, \dots, X_d]$ ($d \geq 1$) be a polynomial ring over an infinite field k . Let $n \geq 1$ be an integer. Then the following assertions are hold.

- (1) $R^{(n)} = k[R_n]$ is an almost Gorenstein graded ring, if $d \leq 2$.
- (2) Suppose that $d \geq 3$. Then $R^{(n)}$ is an almost Gorenstein graded ring if and only if either $n \mid d$, or $d = 3$ and $n = 2$.

6. TWO-DIMENSIONAL RATIONAL SINGULARITIES

Let (R, \mathfrak{m}) denote a Cohen-Macaulay local ring of dimension $d \geq 0$, admitting the canonical module K_R . We assume that R/\mathfrak{m} is infinite. Let $v(R) = \mu_R(\mathfrak{m})$ and $e(R) = e_{\mathfrak{m}}^0(R)$. We denote by

$$G = \text{gr}_{\mathfrak{m}}(R) = \bigoplus \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}$$

the associated graded ring of \mathfrak{m} and put $\mathfrak{M} = G_+$. The purpose of this section is mainly to study the question of when G is an almost Gorenstein graded ring. Remember that $v(R) = e(R) + d - 1$ if and only if $\mathfrak{m}^2 = Q\mathfrak{m}$ for some (and hence any) minimal reduction Q of \mathfrak{m} . When this is the case, G is a Cohen-Macaulay ring and $a(G) = 1 - d$, provided R is not a regular local ring.

The answer for the above question is stated as follows.

Theorem 6.1. *The following assertions hold true.*

- (1) *Suppose that R is an almost Gorenstein local ring with $v(R) = e(R) + d - 1$. Then G is an almost Gorenstein level graded ring.*
- (2) *Suppose that G is an almost Gorenstein level graded ring. Then R is an almost Gorenstein local ring.*

Proof. We only prove the assertion (1). We may assume that R is not a Gorenstein local ring. Hence $d > 0$ and $a(G) = 1 - d$. We will show that G is an almost Gorenstein graded ring by induction on d . First we consider the case $d = 1$. Let \overline{R} denote the integral closure of R in $Q(R)$. Choose an R -submodule K of \overline{R} so that $R \subseteq K \subseteq \overline{R}$ and $K \cong K_R$ as an R -module. We have $\mathfrak{m}K \subseteq R$ by [7, Theorem 3.11] as R is an almost Gorenstein local ring. Hence $\mathfrak{m}K = \mathfrak{m}$, and $\mathfrak{m}^n K = \mathfrak{m}^n$ for all $n \geq 1$. Let $C = K/R$ and consider the \mathfrak{m} -adic filtrations of R , K , and C . We then have the exact sequence

$$(\#) \quad 0 \rightarrow G \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{m}}(K) \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{m}}(C) \rightarrow 0$$

of graded G -modules induced from the canonical exact sequence

$$0 \rightarrow R \rightarrow K \rightarrow C \rightarrow 0$$

of filtered R -modules. Note that $\text{gr}_{\mathfrak{m}}(C) = [\text{gr}_{\mathfrak{m}}(C)]_0$. By the exact sequence (\sharp), G is an almost Gorenstein graded ring, because $\text{gr}_{\mathfrak{m}}(K) \cong K_G$ as a graded G -module.

Suppose that $d > 1$ and that our assertion holds true for $d - 1$. Let

$$0 \rightarrow R \rightarrow K_R \rightarrow C \rightarrow 0$$

be an exact sequence of R -modules such that $\mu_R(C) = e_{\mathfrak{m}}^0(C)$. We take $a \in \mathfrak{m}$ so that a is a part of a minimal reduction of \mathfrak{m} and a is superficial for C with respect to \mathfrak{m} . Let $f = \bar{a} (\in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ denote the image of a in $G = \text{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$. We then have

$$G/fG = \text{gr}_{\mathfrak{m}}(R/(a))$$

and $v(R/(a)) = e(R/(a)) + d - 2$. By the induction argument, G/fG is an almost Gorenstein graded ring, because $R/(a)$ is an almost Gorenstein local ring. Choose an exact sequence

$$0 \rightarrow G/fG \rightarrow K_{G/fG}(d-2) \rightarrow X \rightarrow 0$$

of graded G/fG -modules so that $\mu_{G/fG}(X) = e_{[G/fG]_+}^0(X)$. Recall that $K_{G/fG}(d-2) \cong K_{G/fK_G}(d-1)$ as a graded G -module and we get an exact sequence

$$0 \rightarrow G \rightarrow K_G(d-1) \rightarrow Y \rightarrow 0$$

of graded G -modules such that $\mu_G(Y) = e_{\mathfrak{m}}^0(Y)$. Consequently G is an almost Gorenstein graded ring. \square

In the case where R has a minimal multiplicity, the almost Gorenstein property of R is equivalent to the Gorenstein property of $\mathbb{Q}(G)$.

Corollary 6.2. *Suppose that $v(R) = e(R) + d - 1$. Then the following are equivalent.*

- (1) R is an almost Gorenstein local ring,
- (2) G is an almost Gorenstein graded ring,
- (3) $\mathbb{Q}(G)$ is a Gorenstein ring.

We say that \mathfrak{m} is a *normal ideal*, if \mathfrak{m}^n is an integrally closed ideal for every $n \geq 1$.

Corollary 6.3. *Suppose that $v(R) = e(R) + d - 1$ and that R is a normal ring. If \mathfrak{m} is a normal ideal, then R is an almost Gorenstein local ring.*

Proof. Let $\mathcal{R}' = \mathcal{R}'(\mathfrak{m}) = R[\mathfrak{m}t, t^{-1}]$ be the extended Rees algebra of \mathfrak{m} , where t is an indeterminate. Then \mathcal{R}' is a normal ring, because R is a normal local ring and \mathfrak{m} is a normal ideal. Hence the total ring of fractions of $G = \mathcal{R}'/t^{-1}\mathcal{R}'$ is a Gorenstein ring, so that R is almost Gorenstein by Corollary 6.2. \square

The following is a direct consequence of Corollary 6.3.

Corollary 6.4. *Every 2-dimensional rational singularity is an almost Gorenstein local ring.*

By the result of M. Auslander [1], every two-dimensional Cohen-Macaulay complete local ring R of finite Cohen-Macaulay representation type is a rational singularity, provided R contains a field of characteristic 0. Hence we get the following.

Corollary 6.5. *Every two-dimensional Cohen-Macaulay complete local ring R of finite Cohen-Macaulay representation type is an almost Gorenstein local ring, provided R contains a field of characteristic 0.*

7. ALMOST GORENSTEIN REES ALGEBRAS

In this section we study the problem of when the Rees algebras of ideals and modules over two-dimensional regular local rings are almost Gorenstein graded rings.

Let (R, \mathfrak{m}) be a Gorenstein local ring with $\dim R = 2$ and let $I \subsetneq R$ be an \mathfrak{m} -primary ideal of R . Assume that I contains a parameter ideal $Q = (a, b)$ of R such that $I^2 = QI$. We set $J = Q : I$. Let

$$\mathcal{R} = R[It] \subseteq R[t] \quad \text{and} \quad T = R[Qt] \subseteq R[t],$$

where t stands for an indeterminate over R . Notice that the Rees algebra \mathcal{R} of I is a Cohen-Macaulay ring with $a(\mathcal{R}) = -1$ and

$$\mathcal{R} = T + T \cdot It$$

while the Rees algebra T of Q is a Gorenstein ring of dimension 3 and $a(T) = -1$. Hence $K_T(1) \cong T$ as a graded T -module, where K_T denotes the graded canonical module of T .

Let us begin with the following, which is a special case of [19, Theorem 2.7 (a)].

Lemma 7.1. $K_{\mathcal{R}}(1) \cong J\mathcal{R}$ as a graded \mathcal{R} -module.

Proof. Since \mathcal{R} is a module-finite extension of T , we get

$$K_{\mathcal{R}}(1) \cong \text{Hom}_T(\mathcal{R}, K_T)(1) \cong \text{Hom}_T(\mathcal{R}, T) \cong T :_F \mathcal{R}$$

as graded \mathcal{R} -modules, where $F = Q(T) = Q(\mathcal{R})$ is the total ring of fractions. Therefore

$$T :_F \mathcal{R} = T :_T It$$

because $\mathcal{R} = T + T \cdot It$. Since $Q^n \cap [Q^{n+1} : I] = Q^n [Q : I]$ for every $n \geq 0$, we have

$$T :_T It = JT.$$

Hence $T :_F \mathcal{R} = JT$, so that $JT = J\mathcal{R}$. Thus $K_{\mathcal{R}}(1) \cong J\mathcal{R}$ as a graded \mathcal{R} -module. \square

Corollary 7.2. *Suppose that \mathcal{R} is a normal ring. Then $J = Q : I$ is integrally closed.*

Proof. Since $K_{\mathcal{R}}(1) \cong J\mathcal{R}$, $J\mathcal{R}$ is unmixed and of height one. Therefore $J\mathcal{R}$ is integrally closed in \mathcal{R} , whence J is integrally closed in R , because $\bar{J} \subseteq J\mathcal{R}$. \square

The following is the key in our argument.

Theorem 7.3. *The following conditions are equivalent.*

- (1) \mathcal{R} is a strongly almost Gorenstein graded ring, namely there exists an exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{R}}(1) \rightarrow C \rightarrow 0$$

such that $\mathcal{M}C = (\xi, \eta)C$ for some homogeneous elements $\xi, \eta \in M$.

- (2) There exist elements $f \in \mathfrak{m}$, $g \in I$, and $h \in J$ such that

$$IJ = gJ + Ih \text{ and } \mathfrak{m}J = fJ + \mathfrak{m}h$$

When this is the case, \mathcal{R} is an almost Gorenstein graded ring.

Proof. (2) \Rightarrow (1) Notice that $\mathfrak{M} \cdot J\mathcal{R} \subseteq (f, gt) \cdot J\mathcal{R} + \mathcal{R}h$, since $IJ = gJ + Ih$ and $\mathfrak{m}J = fJ + \mathfrak{m}h$. Consider the exact sequence

$$\mathcal{R} \xrightarrow{\varphi} J\mathcal{R} \rightarrow C \rightarrow 0$$

of graded \mathcal{R} -modules where $\varphi(1) = h$. We then have $\mathfrak{M}C = (f, gt)C$, so that $\dim_{\mathcal{R}_{\mathfrak{M}}} C_{\mathfrak{M}} \leq 2$. Hence by [15, Lemma 3.1] the homomorphism φ is injective and \mathcal{R} is an almost Gorenstein graded ring.

(1) \Rightarrow (2) We may assume that \mathcal{R} is not a Gorenstein ring and consider the exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\varphi} J\mathcal{R} \rightarrow C \rightarrow 0$$

of graded \mathcal{R} -modules with $C \neq (0)$ and $\mathfrak{M}C = (\xi, \eta)C$ for some homogeneous elements ξ, η of \mathfrak{M} . Hence $\mathcal{R}_{\mathfrak{M}}$ is an almost Gorenstein local ring. We set $h = \varphi(1) \in J$, $m = \deg \xi$, and $n = \deg \eta$. Hence $C = J\mathcal{R}/\mathcal{R}h$. Remember that $h \notin \mathfrak{m}J$, since $\mathcal{R}_{\mathfrak{M}}$ is not a regular local ring. If $\min\{m, n\} > 0$, then $\mathfrak{M}C \subseteq \mathcal{R}_+C$, whence $\mathfrak{m}C_0 = (0)$. Therefore $\mathfrak{m}J \subseteq (h)$, so that we have $J = (h) = R$. Thus $\mathcal{R}h = J\mathcal{R}$ and \mathcal{R} is a Gorenstein ring, which is impossible. Assume $m = 0$. If $n = 0$, then $\mathfrak{M}C = \mathfrak{m}C$ since $\xi, \eta \in \mathfrak{m}$, so that

$$C_1 \subseteq \mathcal{R}_+C_0 \subseteq \mathfrak{m}C$$

and therefore $C_1 = (0)$. Hence $IJ = Ih$ which shows (h) is a reduction of J , so that $(h) = R = J$. Therefore \mathcal{R} is a Gorenstein ring, which is impossible. If $n \geq 2$, then because

$$\mathfrak{M} \cdot J\mathcal{R} \subseteq \xi \cdot J\mathcal{R} + \eta \cdot J\mathcal{R} + \mathcal{R}h,$$

we get $IJ \subseteq \xi IJ + Ih$, whence $IJ = Ih$. This is impossible as we have shown above. Hence $n = 1$. Let us write $\eta = gt$ with $g \in I$ and take $f = \xi$. We then have

$$\mathfrak{M} \cdot J\mathcal{R} \subseteq (f, gt) \cdot J\mathcal{R} + \mathcal{R}h,$$

whence $\mathfrak{m}J \subseteq fJ + \mathcal{R}h$. Because $h \notin \mathfrak{m}J$, we get $\mathfrak{m}J \subseteq fJ + \mathfrak{m}h$, so that $\mathfrak{m}J = fJ + \mathfrak{m}h$, while $IJ = gJ + Ih$, because $IJ \subseteq fIJ + gJ + Ih$. This completes the proof. \square

We are now in a position to prove the following.

Theorem 7.4. *Let (R, \mathfrak{m}) be a two-dimensional regular local ring with infinite residue class field and I an \mathfrak{m} -primary integrally closed ideal in R . Then the Rees algebra \mathcal{R} of I is an almost Gorenstein graded ring.*

Proof. We choose a parameter ideal Q of R so that $Q \subseteq I$ and $I^2 = QI$, whence the Rees algebra $\mathcal{R} = \mathcal{R}(I)$ is a Cohen-Macaulay ring. Because \mathcal{R} is a normal ring, $J = Q : I$ is also an integrally closed ideal in R . Consequently, choosing three elements $f \in \mathfrak{m}$, $g \in I$, and $h \in J$ so that f, h are a joint reduction of \mathfrak{m}, J and g, h are a joint reduction of I, J , we readily get by the equalities

$$\mathfrak{m}J = fJ + \mathfrak{m}g \quad \text{and} \quad IJ = gJ + Ih$$

by the result of J. Verma. Hence $\mathcal{R} = \mathcal{R}(I)$ is an almost Gorenstein graded ring. \square

As a direct consequence we have the following.

Corollary 7.5. *Let (R, \mathfrak{m}) be a two-dimensional regular local ring with infinite residue class field. Then $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)$ is an almost Gorenstein graded ring for every integer $\ell > 0$.*

Closing this article, let us explore the question of when the Rees algebras of socle ideals are almost Gorenstein graded rings. Let (R, \mathfrak{m}) be a regular local ring with $d = \dim R \geq 2$ possessing an infinite residue class field R/\mathfrak{m} of R . Let Q be a parameter ideal of R such that $Q \neq \mathfrak{m}$. We set

$$I = Q : \mathfrak{m}$$

the socle ideal of Q .

With this notation, we have the following.

Theorem 7.6. *Suppose that $d \geq 3$. Then the Rees algebra $\mathcal{R}(I)$ of I is an almost Gorenstein graded ring if and only if either $I = \mathfrak{m}$, or $d = 3$ and $I = (x) + \mathfrak{m}^2$ for some $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$.*

For each ideal I of R , we set

$$o(I) = \sup\{n \geq 0 \mid I \subseteq \mathfrak{m}^n\}.$$

Theorem 7.7. *Suppose that $d = 2$. Then the Rees algebra $\mathcal{R}(I)$ of I is an almost Gorenstein graded ring if and only if $o(Q) \leq 2$.*

REFERENCES

- [1] M. Auslander, *Rational singularities and almost split sequences*, Trans. Amer. Math. Soc., **293** (1986), no. 2, 511–531.
- [2] V. Barucci and R. Fröberg, *One-dimensional almost Gorenstein rings*, J. Algebra, **188** (1997), no. 2, 418–442.
- [3] J. P. Brennan, J. Herzog and B. Ulrich, *Maximally generated maximal Cohen-Macaulay modules*, Math. Scand., **61** (1987), no. 2, 181–203.
- [4] S. Goto, *Integral closedness of complete intersection ideals*, J. Algebra, **108** (1987), 151–160.
- [5] L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, K. Ozeki, T. T. Phuong and W. V. Vasconcelos, *Cohen-Macaulayness versus the vanishing of the first Hilbert coefficient of parameter ideals*, J. London Math. Soc., **81** (2010) 679–695.
- [6] L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, K. Ozeki, T. T. Phuong and W. V. Vasconcelos, *The Chern numbers and Euler characteristics of modules*, Acta Math. Vietnam., **40** (2015), no. 1, 37–60.

- [7] S. Goto, N. Matsuoka and T. T. Phuong, *Almost Gorenstein rings*, J. Algebra, **379** (2013), 355–381.
- [8] S. Goto, N. Matsuoka, N. Taniguchi, and K.-i. Yoshida, *The almost Gorenstein Rees algebras over two-dimensional regular local rings*, J. Pure Appl. Algebra, **220** (2016), 3425–3436.
- [9] S. Goto, N. Matsuoka, N. Taniguchi, and K.-i. Yoshida, *The almost Gorenstein Rees algebras of parameters*, J. Algebra, **452** (2016), 263–278.
- [10] S. Goto, N. Matsuoka, N. Taniguchi, and K.-i. Yoshida, *On the almost Gorenstein property in the Rees algebras of contracted ideals*, Preprint 2016.
- [11] S. Goto, N. Matsuoka, N. Taniguchi, and K.-i. Yoshida, *The almost Gorenstein Rees algebras of p_g -ideals, good ideals, and powers of the maximal ideals*, Preprint 2016.
- [12] S. Goto, K. Nishida, and K. Ozeki, *Sally modules of rank one*, Michigan Math. J., **57** (2008), 359–381.
- [13] S. Goto, K. Nishida, and K. Ozeki, *The structure of Sally modules of rank one*, Math. Res. Lett., **15** (2008) 881–892.
- [14] S. Goto and Y. Shimoda, *On the Rees algebras of Cohen-Macaulay local rings*, Commutative algebra (Fairfax, Va., 1979), 201–231, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 68, Dekker, New York, 1982.
- [15] S. Goto, R. Takahashi and N. Taniguchi, *Almost Gorenstein rings – towards a theory of higher dimension*, J. Pure Appl. Algebra, **219** (2015), 2666–2712.
- [16] J. Herzog and E. Kunz, *Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings*, Lecture Notes in Mathematics, 238, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
- [17] R. Takahashi, *On G -regular local rings*, Comm. Algebra, **36** (2008), no. 12, 4472–4491.
- [18] N. Taniguchi, *On the almost Gorenstein property of determinantal rings*, Preprint 2016.
- [19] B. Ulrich, *Ideals having the expected reduction number*, Amer. J. Math., **118** (1996), no. 1, 17–38.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, MEIJI UNIVERSITY,
1-1-1 HIGASHI-MITA, TAMA-KU, KAWASAKI 214-8571, JAPAN

E-mail address: taniguchi@meiji.ac.jp

URL: <http://www.isc.meiji.ac.jp/~taniguchi/>

自己移入的 Koszul 多元環に対する有限条件 (Fg)

板場 綾子 (静岡大学)*

概 要

本報告集は, [5] に基づいている. k を標数が 0 の代数的閉体, A を次数 1 で生成される連結次数付き k -多元環とする. 毛利出氏は, cogeometric な自己移入的 Koszul 多元環 $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$ が, Erdmann らによって導入された有限条件 (Fg) を満たすかどうかの判定法として, 以下のような予想を立てた. ただし, E は射影多様体, σ はその自己同型である.

予想 $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$ を cogeometric で, 自己移入的 Koszul 多元環とし, k の complexity が有限であるとする. このとき, A が (Fg) 条件を満たすことの必要十分条件は, σ の位数が有限であることである.

上の予想は, 非可換代数幾何学と多元環の表現論の内容をつなぐものとなっている. 本報告集では, 上の予想の部分的解決を与える.

1. 序

代数的閉体 k 上の有限次元多元環 Λ に対して, Erdmann, Holloway, Taillefer, Snashall と Solberg [3] は, Λ のホッホシルトコホモロジー環と Ext 多元環 (米田多元環) を用いて, サポート多様体の理論がうまく機能するために有限条件 (Fg) を導入した. さらに, Erdmann たち [3] は, Λ が (Fg) を満たすならば, Snashall と Solberg [8] によって定義されたサポート多様体が, 有限群の群環に対してのサポート多様体に類似した多くの性質を持つことを証明した.

以下では, k を標数が 0 である代数的閉体とし, A を次数 1 で有限生成されている k 上の次数付き多元環とする. Artin, Tate と Van den Bergh [2] は, 非可換代数幾何において次数付き多元環 A を研究する上で重要な役割を果たす, *point* 加群と呼ばれる加群を導入した. また, 毛利出氏 [6] は, *point* 加群の双対概念に相当する加群を定義し, これを *co-point* 加群と名付けた. *co-point* 加群は射影空間の部分集合 E でパラメタライズされる. $p \in E$ に対応する *co-point* 加群を M_p とすると, ΩM_p も *co-point* 加群なので, $\Omega M_p = M_{\sigma(p)}$ となるような写像 $\sigma : E \rightarrow E$ が存在する. この (E, σ) を A の cogeometric pair という. 特に, E が射影多様体, σ が E の自己同型になるとき, $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$ を cogeometric と呼ぶ [6]. 毛利出氏は, cogeometric で, 自己移入的 Koszul 多元環 $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$ が (Fg) を満たすかどうかの判定法として, 以下のような予想を立てた.

予想 $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$ を cogeometric で, 自己移入的 Koszul 多元環とし, k の complexity が有限であるとする. このとき, A が (Fg) を満たすことの必要十分条件は, σ の位数が有限であることである.

一般に, ホッホシルトコホモロジー環の計算をすることは容易ではない. しかし, この予想が正しいならば, 多元環 A が (Fg) を満たすかどうかを直接 A のホッホシルトコ

* 静岡大学理学部数学科 〒422-8529 静岡県静岡市駿河区大谷 336
e-mail: itaba.ayako@shizuoka.ac.jp

ホモロジー環および Ext 多元環を計算することなく, σ の位数を計算するのみで判定出来ることを意味する.

本研究の主結果は, この毛利出氏による予想に対して, 以下のような部分的解決を与えたものである. 自己移入的 Koszul 多元環 $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$ が cogeometric でかつ (Fg) を満たすならば, σ の位数が有限である. すなわち, この予想の一方向は常に成り立っている (Theorem 9). また, E が射影空間 \mathbb{P}^{n-1} の場合, この予想は正しい (Theorem 10). さらに, A が $(\text{rad } A)^4 = 0$ を満たす場合, この予想は正しい (Theorem 13).

2. 有限条件 (Fg)

この節では, [3] で導入された有限条件 (Fg) と加群の complexity の定義と性質を振り返ることにする.

代数的閉体 k 上の有限次元多元環 Λ に対して, Erdmann, Holloway, Taillefer, Snashall と Solberg [3] は, 以下のような条件を導入した.

定義 1. ([3]) 有限次元 k -多元環 Λ が有限条件 (Fg) (以下, 単に (Fg) 条件と記す) を満たすとは, Λ のホッホシルトコホモロジー環 $\text{HH}^*(\Lambda)$ の次数付き部分多元環 H が存在し, 次の 2 条件 (Fg1), (Fg2) を満たすことである:

(Fg1) H は, $H^0 = \text{HH}^0(\Lambda) (= Z(\Lambda) : \Lambda \text{ の中心})$ を満たす可換ネーター環である.

(Fg2) Λ の Ext 多元環

$$E(\Lambda) := \text{Ext}_{\Lambda}^*(\Lambda/\text{rad } \Lambda, \Lambda/\text{rad } \Lambda) = \bigoplus_{i \geq 0}^{\infty} \text{Ext}_{\Lambda}^i(\Lambda/\text{rad } \Lambda, \Lambda/\text{rad } \Lambda)$$

は有限生成 H -加群である.

ここで, Λ のホッホシルトコホモロジー環 $\text{HH}^*(\Lambda)$ とは, 次数付き多元環

$$\text{HH}^*(\Lambda) := \text{Ext}_{\Lambda^e}^*(\Lambda, \Lambda) = \bigoplus_{i \geq 0}^{\infty} \text{Ext}_{\Lambda^e}^i(\Lambda, \Lambda)$$

をいう. ただし, Λ^e は Λ の包絡多元環 $\Lambda \otimes_k \Lambda^{\text{op}}$ を表す.

例えば, 体 k 上の有限群の群環 kG は (Fg) を満たすことが知られている. また, Λ を n 変数の外積代数 $k\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle / (x_i^2, x_i x_j - \alpha_{i,j} x_j x_i) (0 \leq i, j \leq n, \alpha_{i,j} \in k \setminus \{0\})$ とする. このとき, Λ が (Fg) を満たすことの必要十分条件は, $\alpha_{i,j}$ が 1 の原始べき乗根となることである ([4]). この 2 つの例の多元環は, ともに自己移入的多元環であることを注意しておく.

注意 2. 有限次元多元環 Λ が (Fg) を満たすならば, べき零元を法とするホッホシルトコホモロジー環 $\text{HH}^*(\Lambda)/\mathcal{N}_{\Lambda}$ と Ext 多元環 $E(\Lambda)$ はともに多元環として有限生成となる.

次に, k -多元環 Λ の極小射影分解を用いて定められる左 Λ -加群 M の complexity を定義しよう. これは, 極小射影分解の増大度を測る指標である. 以下の列を M の極小射影分解とする:

$$\dots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0.$$

M の complexity $\text{cx}(M)$ を

$$\min \{b \in \mathbb{N}_0 \mid a \in \mathbb{R} \text{ が存在し, 任意の } n \geq 0 \text{ に対して, } \dim_k P_n \leq an^{b-1} \text{ を満たす} \}$$

で定める. また, M が周期的であるとは, ある自然数 m が存在し, $\Omega^m M \cong M$ が成り立つことをいう. ただし, $\Omega^m M$ は, M の m 次 syzygy を表す. 定義より以下の2つの注意がすぐに導かれる.

注意 3. (1) 左 Λ -加群 M の complexity が 0 であることの必要十分条件は, M が有限な射影次元を持つことである. (2) M が周期的であるならば, M の complexity が 1 になる. 一般にはこの逆は成り立たない. しかし, Λ が (Fg) を満たすならば, M が周期的であることと, M の complexity が 1 になることは同値になる.

3. Cogeometric pair と cogeometric algebra

この節では, co-point 加群, cogeometric pair, cogeometric algebra の定義と性質を [6] より振り返る.

Artin, Tate と Van den Bergh [2] は, 非可換代数幾何において次数付き多元環 A を研究する上で重要な役割を果たす, point 加群と呼ばれる加群を導入した. また, 毛利出氏 [6] は, point 加群の双対概念に相当する加群を定義し, これを co-point 加群と名付けた.

ここで, $A = k\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle / I$ とする. ただし, I は A の両側イデアルとする. $n-1$ 次射影空間 \mathbb{P}^{n-1} の各点 $p = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ に対して, 記号の乱用であるが, A から A への左 A -加群準同型 p の 1 の行き先を $p(1) := a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ と定める. このとき, 任意の $f \in A$ に対して, $p(f) = f \cdot (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)$ となる. また, Coker p を M_p とおく.

定義 4. ([6]) 左 A -加群 M が co-point 加群であるとは, 任意の自然数 i に対して, ある点 $p_i \in \mathbb{P}^{n-1}$ が存在し, M の最小自由分解が次のようになることである:

$$\dots \xrightarrow{p_{m+1}} A \xrightarrow{p_m} A \xrightarrow{p_{m-1}} \dots \xrightarrow{p_2} A \xrightarrow{p_1} A \xrightarrow{p_0} A \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0.$$

注意 5. co-point 加群 M の最小自由分解に関して, 各項の自由加群の階数が 1 であり, かつ各 differential が一次式であるということである. 各項の自由加群の階数が 1 であることより, co-point 加群 M の complexity は 1 となる. また, 最小自由分解は完全列であるので, $M = M_{p_0}$, $\Omega^m M = M_{p_m}$ ($\forall m \geq 1$) となる.

co-point 加群は射影空間の部分集合 E でパラメタライズされる. $p \in E$ に対応する co-point 加群を M_p とすると, ΩM_p も co-point 加群なので, $\Omega M_p = M_{\sigma(p)}$ となるような写像 $\sigma: E \rightarrow E$ が存在する. つまり, $p \in E$ に対応する co-point 加群 M_p の最小自由分解が

$$\dots \xrightarrow{\sigma^{m+1}(p)} A \xrightarrow{\sigma^m(p)} A \xrightarrow{\sigma^{m-1}(p)} \dots \xrightarrow{\sigma^2(p)} A \xrightarrow{\sigma(p)} A \xrightarrow{p} A \xrightarrow{\varepsilon} M_p \longrightarrow 0$$

となるような写像 $\sigma: E \rightarrow E$ が存在する.

定義 6. ([6]) 特に, 上の E が射影多様体, σ が E の自己同型になるとき, 幾何的組 (E, σ) を A の cogeometric pair と呼び, また A を cogeometric algebra という. この場合, $\mathcal{P}^1(A) = (E, \sigma)$ and $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$ と各々書くことにする.

[2], [7], [6] を用いると, 定理を得る.

定理 7. 次数付き多元環 A を自己移入的 Koszul とし, k の complexity が有限, かつ $(\text{rad } A)^4 = 0$ とする. このとき, k の complexity は 3 以下であり, A は cogeometric である.

例 8. A を以下の次数付き k -多元環とする:

$$A = k\langle x, y \rangle / (x^2, \alpha xy + yx, y^2) \quad (\alpha \in k \setminus \{0\}).$$

多元環 A は自己移入的多元環で, $\text{cx}(k) = 2$ である. 定理 7 より, A は co-geometric である. よって, 計算することにより, A の cogeometric pair $\mathcal{P}^1(A)$ は (\mathbb{P}^1, σ) となる. ただし,

$$\sigma := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Aut } \mathbb{P}^1 = \text{PGL}_2(k).$$

4. 主結果

この節では, 毛利出氏による予想に関する本研究の主結果とその例を述べていく. ここで, 有限条件 (Fg) と cogeometric algebra $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$ との関係に関する予想を再掲する.

予想 $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$ を cogeometric で, 自己移入的 Koszul 多元環とし, k の complexity が有限であるとする. このとき, A が (Fg) を満たすことの必要十分条件は, σ の位数が有限であることである.

以下, この予想に関する本研究の主結果を述べていく. 最初の定理は, 予想の一方が常に成り立っていることを示している. これは特に Koszul 性を仮定しなくても成立している.

定理 9. ([5]) 有限次元自己移入的 k -多元環 A が cogeometric かつ (Fg) 条件を満たすならば, σ の位数が有限である.

次の定理は, A の cogeometric pair を与える E が $n - 1$ 次射影空間 \mathbb{P}^{n-1} の場合, 上の予想が成り立つことを示したものである.

定理 10. ([5]) $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$ を cogeometric で, 自己移入的 Koszul 多元環とし, k の complexity が有限であるとする. このとき, $A = \mathcal{A}^1(\mathbb{P}^{n-1}, \sigma)$ ならば, A が (Fg) を満たすことの必要十分条件は σ の位数が有限であることである.

[1], [6], [7] を用いることにより, 以下のような, $\text{cx}(k) < \infty$ である自己移入的 Koszul 多元環 A の分類を得る:

(i) $\text{rad } A = 0 \rightsquigarrow A \cong k$ (次数付き k -多元環として), $\mathcal{P}^1(A) = (\phi, \text{id});$

(ii) $(\text{rad } A)^2 = 0 \rightsquigarrow A \cong k[x]/(x^2)$ $\mathcal{P}^1(A) = (\mathbb{P}^0, \text{id});$

(iii) $(\text{rad } A)^3 = 0 \rightsquigarrow$

$$\begin{cases} A \cong k\langle x, y \rangle / (x^2, \alpha xy + yx, y^2) \ (\alpha \in k \setminus \{0\}), \ \mathcal{P}^1(A) = (\mathbb{P}^1, \sigma_1), \\ A \cong k\langle x, y \rangle / (-x^2 + xy, xy + yx, y^2), \ \mathcal{P}^1(A) = (\mathbb{P}^1, \sigma_2), \end{cases}$$

ただし, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.

$(\text{rad } A)^3 = 0$ の場合, E は射影空間になっていることが分かる. 上の分類と定理 10 より, 以下の系を得る.

系 11. ([5]) $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$ を *cogeometric* で, 自己移入的 *Koszul* 多元環とし, k の *complexity* が有限であるとする. このとき, A が $(\text{rad } A)^3 = 0$ を満たすならば, A が (Fg) を満たすことの必要十分条件は σ の位数が有限であることである.

以下において, 系 11 の例を与える.

例 12. 次のような次数付き k -多元環 A を考える:

$$A = k\langle x, y \rangle / (ax^2 + byx, cx^2 + axy + dxy + by^2, cxy + dy^2) \quad (a, b, c, d \in k).$$

このとき, A が自己移入的 *Koszul* 多元環であることの必要十分条件は, $ad - bc \neq 0$ が成り立つことである. また, A は *cogeometric* であるので, 以下のような A の *cogeometric pair* $\mathcal{P}^1(A)$ を得る:

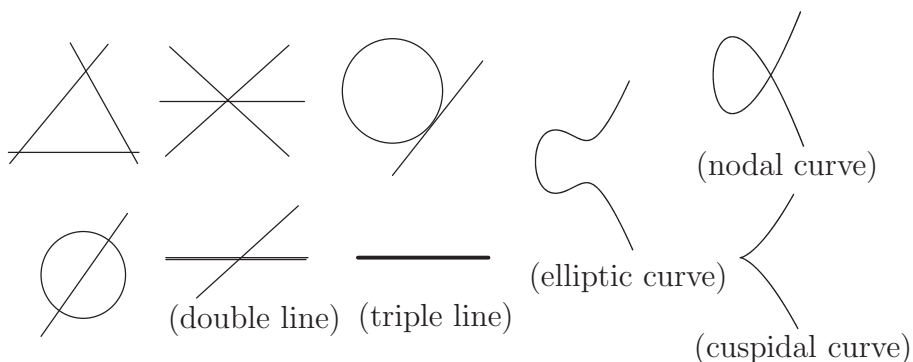
$$\mathcal{P}^1(A) = (\mathbb{P}^1, \sigma) \quad \left(\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \in \text{PGL}_2(k) = \text{Aut } \mathbb{P}^1.$$

さらに, 系 11 を用いると, A が (Fg) を満たすことの必要十分条件は, ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在し, $\sigma^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たすことである.

系 11 より一般的な主張を述べたものが, 次の定理である.

定理 13. ([5]) $A = \mathcal{A}^1(E, \sigma)$ を *cogeometric* で, 自己移入的 *Koszul* 多元環とし, k の *complexity* が有限であるとする. このとき, A が $(\text{rad } A)^4 = 0$ を満たすならば, A が (Fg) を満たすことの必要十分条件は σ の位数が有限であることである.

注意 14. $(\text{rad } A)^3 \neq 0$ かつ $(\text{rad } A)^4 = 0$ の場合, E の候補としては, 射影平面 \mathbb{P}^2 または以下のような \mathbb{P}^2 内の 3 次曲線になることが知られている ([2]).



最後に, 定理 13 に対する例を挙げ, 本報告集を終えることにする.

例 15. (E, σ) を *cogeometric pair* とする. ただし, E は \mathbb{P}^2 の 3 つの直線がなす三角形, $\sigma \in \text{Aut } E$ は 3 つの直線を回すものとする. つまり, 以下を仮定するものとする:

$$E := \mathcal{V}(xyz) = \mathcal{V}(x) \cup \mathcal{V}(y) \cup \mathcal{V}(z),$$

$\sigma(\mathcal{V}(x)) := \mathcal{V}(y), \sigma(\mathcal{V}(y)) := \mathcal{V}(z), \sigma(\mathcal{V}(z)) := \mathcal{V}(x)$. このとき, E の自己同型 $\sigma \in \text{Aut } E$ を決定すると, 次を得る.

$$\begin{cases} \sigma(0, b, c) = (\alpha c, 0, b), \\ \sigma(a, 0, c) = (c, \beta a, 0), \\ \sigma(a, b, 0) = (0, a, \gamma b), \end{cases}$$

ただし, $\alpha\beta\gamma \neq 0, 1$ である. さらに, (E, σ) に対応する cogemetric algebra $A = \mathcal{A}^!(E, \sigma)$ を計算すると,

$$A = k\langle x, y, z \rangle / \begin{pmatrix} x^2 + \beta zy, & xy, \\ y^2 + \gamma xz, & yz, \\ z^2 + \alpha yx, & zx \end{pmatrix}$$

となる. ただし, $\alpha\beta\gamma \neq 0, 1$ である. この多元環 A は, k の complexity が有限な, 自己移入的 Koszul 多元環で, $(\text{rad } A)^4 = 0$ を満たすことが分かる.

一方, $\sigma^3 \in \text{Aut } E$ を計算すると,

$$\begin{cases} \sigma^3(0, b, c) = (0, b, \alpha\beta\gamma c), \\ \sigma^3(a, 0, c) = (\alpha\beta\gamma a, 0, c), \\ \sigma^3(a, b, 0) = (a, \alpha\beta\gamma b, 0). \end{cases}$$

を得る. このとき,

$$|\sigma^3| < \infty \iff |\sigma| < \infty \iff \alpha\beta\gamma : 1 \text{ のべき乗根.}$$

よって, 定理 13 を用いると, A が (Fg) を満たすことの必要十分条件は, $\alpha\beta\gamma$ が 1 のべき乗根であることである.

参考文献

- [1] M. Artin and W. Schelter, *Graded algebras of global dimension 3*, Adv. Math. **66** (1987), 171–216.
- [2] M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, *Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves*, The Grothendieck Festschrift, vol. 1, Progress in Mathematics vol. **86** (Birkhäuser, Basel, 1990) 33–85.
- [3] K. Erdmann, M. Holloway, R. Taillefer, N. Snashall and Ø. Solberg, *Support varieties for selfinjective algebras*, K-Theory **33** (2004), no. 1, 67–87.
- [4] K. Erdmann and Ø. Solberg, *Radical cube zero weakly symmetric algebras and support varieties*, J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), 185–200.
- [5] A. Itaba, *Finiteness condition (Fg) for self-injective Koszul algebras*, submitted.
- [6] I. Mori, *Co-point modules over Koszul algebras*, J. London Math. Soc. **74** (2006), 639–656.
- [7] S. P. Smith, *Some finite dimensional algebras related to elliptic curves*, in Representation Theory of Algebras and Related Topics (Mexico City, 1994), CMS Conf. Proc. **19**. Amer. Math. Soc., Providence, (1996), 315–348.
- [8] N. Snashall and Ø. Solberg, *Support varieties and Hochschild cohomology rings*, Proc. London Math. **81** (2004), 705–732.
- [9] Ø. Solberg, *Support varieties for modules and complexes*, Trends in representation theory of algebras and related topics, Contemp. Math., **406**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2006), 239–270.

微分作用素と多項式環

黒田 茂（首都大学東京・理工）

導分（微分作用素）は可換環の研究で重要な概念であり、様々な形で研究が行われている。例えば、導分の核に関する研究の代表的なものとして Nowicki [57] が有名である。一方、多項式環の周辺には多くの基本的な問題が未解決のまま残されており、アフィン代数幾何学や多変数関数論などとも関係を持ちながら、活発な研究が展開されている。関連する問題を幅広く扱った文献として、例えば van den Essen [13] がある。導分概念は、多項式環に関する諸問題の研究でも非常に重要な役割を果たす。本稿では多項式環研究の観点から、導分や関連するいくつかの話題について概説する。

本稿は非専門家を念頭に、可能な限りエッセンスが伝わるよう配慮して執筆した。

1 導分の核と Hilbert の第 14 問題

R を可換環とすると、 $D : R \rightarrow R$ が R における導分（微分作用素）であるとは、任意の $a, b \in R$ に対し $D(a+b) = D(a) + D(b)$ および

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \tag{1.1}$$

が成り立つときにいう。このとき、 D の核 $R^D := \{a \in R \mid D(a) = 0\}$ は R の部分環である。(1.1) より、導分 D は必ず R^D 上の線形写像になる。

S を R の部分環とする。 R^D が S を含むとき、 D を S 導分と呼ぶ。 R^D が S を含むという条件は、 D が S 線形写像であるという条件と同値である。 R における導分全体の集合、 S 導分全体の集合をそれぞれ $\text{Der } R$, $\text{Der}_S R$ で表す。 $X \subset R$ が S 代数 R を生成するとき、 $D_1, D_2 \in \text{Der}_S R$ が $D_1|_X = D_2|_X$ を満たすならば、導分 $D_1 - D_2$ の核は R と等しい。よって、 $D_1 = D_2$ が成り立つ。例えば、 $R = S[x_1, \dots, x_n]$ が多項式環のとき、任意の $D \in \text{Der}_S R$ に対し

$$D = D(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + D(x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}$$

が成り立つ。 R における S 導分 D に対して次の問題は基本的である。

問題 1.1 S 代数 R が有限生成のとき, S 部分代数 R^D の有限生成性を判定せよ.

S が正標数のネーター環のとき, S 代数 R が有限生成ならば R^D は有限生成である. 実際, $R = S[a_1, \dots, a_n]$, $\text{char } S = l$ とすれば, $i = 1, \dots, n$ に対し $D(a_i^l) = la_i^{l-1}D(a_i) = 0$ が成り立つから $R' := S[a_1^l, \dots, a_n^l]$ は R^D に含まれる. R は R' 上整だから, R は有限生成 R' 加群である. R' はネーター環なので R' 部分加群 R^D は有限生成であり, 従って S 代数として有限生成である. なお, S がネーター環でなければ, 類似の主張は一般に成り立たない. 例えば, s, t を可換環 A 上の不定元とするとき, $S := A[s, st, st^2, \dots]$ はネーター環でない. S 上の 2 変数多項式環 $R = S[x, y]$ における S 導分

$$D = s \frac{\partial}{\partial x} + st \frac{\partial}{\partial y}$$

を考える. $R = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d$ を多項式環 R の標準的度数付けとすれば, 任意の $d \geq 1$ に対し $D(R_d) \subset R_{d-1}$ であるので, $R^D = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (R^D \cap R_d)$ が成り立つ. $R^D \cap R_1$ は $tx - y$ を含まないため, $\{st^i(tx - y) \mid i \geq 0\}$ で生成される非有限生成な S 加群になる. 従って, S 代数 R^D は有限生成でない.

以下では k を体, $k[\mathbf{x}] := k[x_1, \dots, x_n]$ を k 上の n 変数多項式環, $k(\mathbf{x})$ をその商体とする. 任意の $D \in \text{Der}_k k[\mathbf{x}]$ は $k(\mathbf{x})$ における k 導分に一意的に拡張できる. これも同じ D で表せば, $k[\mathbf{x}]^D = k(\mathbf{x})^D \cap k[\mathbf{x}]$ が成り立つ. $k(\mathbf{x})^D$ は拡大 $k(\mathbf{x})/k$ の中間体なので, k 代数 $k[\mathbf{x}]^D$ の有限生成性の問題は, 次の Hilbert の第 14 問題の特別な場合に当たる. なお, 上述のように, $\text{char } k > 0$ のとき $k[\mathbf{x}]^D$ は常に有限生成である.

問題 1.2 (Hilbert の第 14 問題) $k(\mathbf{x})/k$ の中間体 L に対し, k 代数 $L \cap k[\mathbf{x}]$ は有限生成か?

Zariski [68] より, $r := \text{trans.deg}_k(L \cap k[\mathbf{x}]) \leq 2$ ならば $L \cap k[\mathbf{x}]$ は有限生成である. $\text{char } k = 0$ のとき, 任意の $0 \neq D \in \text{Der}_k k[\mathbf{x}]$ は $\text{trans.deg}_k k[\mathbf{x}]^D < n$ を満たすので, $n \leq 3$ ならば $k[\mathbf{x}]^D$ は有限生成である. 一方, Hilbert の第 14 問題に対する最初の反例は, 1958 年に永田 [55] によって $n = 32$, $r = 4$ の場合に与えられた. その後, Roberts [60] は異なる種類の反例を与えた. 各 $l \geq 1$ に対し,

$$P_l := k[x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l, z]$$

を k 上の $2l + 1$ 変数多項式環とする. Roberts の反例は $\text{char } k = 0$, $n = 7$, $r = 6$ の場合の反例であり, P_3 における k 導分

$$D = x_1^{t+1} \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2^{t+1} \frac{\partial}{\partial y_2} + x_3^{t+1} \frac{\partial}{\partial y_3} + (x_1 x_2 x_3)^t \frac{\partial}{\partial z} \quad (t \geq 2) \quad (1.2)$$

の核として得られる．なお，藏野 [30] は $t = 1$ のとき，この導分の核が k 上 12 個の元で生成されることを示した．

以下，第 3 節まで k は標数 0 の体とする．Roberts の結果を手掛かりに，Hilbert の第 14 問題に対する様々な反例が構成された．小島・宮西 [25] は $l \geq 3, t \geq 2$ のとき， P_l における k 導分

$$D = x_1^{t+1} \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + x_l^{t+1} \frac{\partial}{\partial y_l} + (x_1 \cdots x_l)^t \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.3)$$

の核が有限生成でないことを示した．黒田 [32] は P_l における $k[x_1, \dots, x_l]$ 導分 D で， $D(y_1), \dots, D(y_l), D(z)$ が x_1, \dots, x_l の単項式であるものに対し，核が有限生成でないための詳しい十分条件を与えた．それによれば， $l \geq 4, t = 1$ の場合も (1.3) の核は有限生成でない．また， P_3 における k 導分

$$D = x_1^{\delta_1^1} x_2^{\delta_1^2} x_3^{\delta_1^3} \frac{\partial}{\partial y_1} + x_1^{\delta_2^1} x_2^{\delta_2^2} x_3^{\delta_2^3} \frac{\partial}{\partial y_2} + x_1^{\delta_3^1} x_2^{\delta_3^2} x_3^{\delta_3^3} \frac{\partial}{\partial y_3} + x_1^{\delta_4^1} x_2^{\delta_4^2} x_3^{\delta_4^3} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.4)$$

の核は， $\epsilon_{i,j}^i := \delta_i^i - \delta_j^i > 0$ ($1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4, i \neq j$) かつ

$$\frac{\epsilon_{1,4}^1}{\min\{\epsilon_{1,2}^1, \epsilon_{1,3}^1\}} + \frac{\epsilon_{2,4}^2}{\min\{\epsilon_{2,3}^2, \epsilon_{2,1}^2\}} + \frac{\epsilon_{3,4}^3}{\min\{\epsilon_{3,1}^3, \epsilon_{3,2}^3\}} \leq 1 \quad (1.5)$$

ならば有限生成でない．一方， $\epsilon_{i,j}^i > 0$ ($1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4, i \neq j$) のとき，(1.5) の不等式が成り立たなければ D の核は有限生成であると予想しているが，大きな進展は得られていない ([32, Conjecture 4.8]).

より低次元の反例を得るために，Freudentburg [16] と Daigle-Freudentburg [9] は Roberts の反例に手を加え，それぞれ $n = 6, 5, r = 5, 4$ の反例を構成した．これらの反例も導分の核として与えられた．例えば [9] は P_2 における k 導分

$$D = x_1^t \frac{\partial}{\partial y_1} + (x_1 y_1 + x_2) \frac{\partial}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial}{\partial z} \quad (t \geq 2) \quad (1.6)$$

の核が有限生成でないことを示した．黒田 [33], [35] は [32] の手法を改良し，それぞれ $n = 4, 3$ の場合に $r = 3$ の反例を構成した．これにより，Hilbert の第 14 問題は全ての n について決着した．また， $r = 3$ の場合に反例が存在することが初めて分かった．[34] より，[33] で与えた $n = 4$ の場合の反例は導分の核として実現できるので， $k[\mathbf{x}]^D$ の有限生成性の問題も全ての n について決着した．なお， $n = 3$ の場合の反例では， $k(\mathbf{x})/L$ は必然的に代数拡大になる．黒田 [36] は $n = 3$ の場合に，各 $d \geq 3$ に対し， $[k(\mathbf{x}) : L] = d$ を満たす反例 L を構成した．

2 Field Modification Problem

Hilbert の第 14 問題について議論を進めるために, $k(\mathbf{x})/k$ の中間体 L と, $A := L \cap k[\mathbf{x}]$ の商体 $Q(A)$ の関係について注意を述べる. 明らかに, $Q(A) \subset L$ かつ $Q(A) \cap k[\mathbf{x}] = A$ が成り立つ. さらに, $Q(A)$ は L において代数的に閉じている. 実際, $f \in L$ が $Q(A)$ 上代数的ならば, $\sum_{i=0}^d a_i f^i = 0$, $a_d \neq 0$ を満たす $a_0, \dots, a_d \in A$ が存在する. このとき, $a_d f$ は $k[\mathbf{x}]$ 上整なので $k[\mathbf{x}]$ に属する. よって, $a_d f \in L \cap k[\mathbf{x}] = A$ であり, $f \in Q(A)$ を得る. 従って, $\text{trans.deg}_k L = \text{trans.deg}_k A$ であることと, $L = Q(A)$ であることは同値である. 本稿では, $k(\mathbf{x})/k$ の中間体 L がこの条件を満たすとき, L は極小であるという. Hilbert の第 14 問題 (問題 1.2) では, L が極小な場合を考えれば十分である.

具体例として, 第 1 節で述べた Roberts の反例について考える. P_3 の商体を Q_3 とするとき, (1.2) で定義した導分の核 Q_3^D は

$$K = k(x_1, x_2, x_3, (x_1 x_2 x_3)^t y_1 - x_1^{t+1} z, (x_1 x_2 x_3)^t y_2 - x_2^{t+1} z, (x_1 x_2 x_3)^t y_3 - x_3^{t+1} z)$$

と等しい. 実際, この K が Q_3^D に含まれることは容易に分かるが, $Q_3 = K(z)$ が K 上の 1 変数有理関数体なので, $D(z) = (x_1 x_2 x_3)^t \neq 0$ と合わせて $Q_3^D = K$ と結論できる. この K は極小である. 一方, 任意の $d \in \mathbf{Z}$ に対し, $K' := K(z^d + z^{-d})$ は $K' \cap K[z] = K$ を満たす. $P_3 \subset K[z]$ なので,

$$K' \cap P_3 = K' \cap K[z] \cap P_3 = K \cap P_3 = P_3^D$$

が成り立つ. よって, K' も Hilbert の第 14 問題の反例であるが, K' は極小でない. なお, k が 1 の原始 d 乗根 ζ を含むとき, $\sigma, \tau \in \text{Aut}_K K(z) = \text{Aut}_K Q_3$ が $\sigma(z) = \zeta z$, $\tau(z) = z^{-1}$ で定義される. このとき, K' は $\text{Aut}_k Q_3$ の有限部分群 $\langle \sigma, \tau \rangle$ の不変体である.

ところで, $\sigma \in \text{Aut}_k Q_3$ が

$$\sigma(x_i) = x_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \sigma(y_i) = (x_1 x_2 x_3)^t y_i - x_i^{t+1} z \quad (i = 1, 2, 3), \quad \sigma(z) = z$$

で定義され, K は σ による $k(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ の像と等しい. このように, $k(\mathbf{x})/k$ の分かり易い中間体を $\text{Aut}_k k(\mathbf{x})$ の適当な元で写すことで, Hilbert の第 14 問題の反例が得られることがある (永田の反例について [11] を参照). そこで, 次の問題を考える.

問題 2.1 (Field Modification Problem) M を $k(\mathbf{x})/k$ の極小な中間体とし, $M \neq k(\mathbf{x})$ かつ $\text{trans.deg}_k M \geq 3$ を満たすと仮定する. このとき, $\sigma(M)$ が Hilbert の第 14 問題の極小な反例となるような $\sigma \in \text{Aut}_k k(\mathbf{x})$ は常に存在するか?

問題 2.1 の状況において、 M の体論的性質は σ で写しても保たれるので、この方法により Hilbert の第 14 問題に対する多様な反例が得られる。例えば、 M が $\text{Aut}_k k(\mathbf{x})$ の部分群 G の不変体ならば、 $\sigma(M)$ は $\sigma G \sigma^{-1}$ の不変体である。また、 M が $D \in \text{Der}_k k(\mathbf{x})$ の核ならば、 $\sigma(M)$ は導分 $D' := \sigma D \sigma^{-1}$ の核である。 $fD'(x_1), \dots, fD'(x_n)$ が $k[\mathbf{x}]$ に属するような $f \in k(\mathbf{x})^\times$ に対し、 fD' は $\text{Der}_k k[\mathbf{x}]$ の元を誘導する。このとき、

$$k[\mathbf{x}]^{fD'} = k(\mathbf{x})^{fD'} \cap k[\mathbf{x}] = k(\mathbf{x})^{D'} \cap k[\mathbf{x}] = \sigma(M) \cap k[\mathbf{x}]$$

が成り立つので、有限生成でない核を持つ $\text{Der}_k k[\mathbf{x}]$ の元が得られる。

問題 2.1 は設定が少し厳しいので、この問題の「安定板」を考える。ただし、 z は $k(\mathbf{x})$ 上の不定元とし、 $k(\mathbf{x}, z)$ は k 上の $n+1$ 変数有理関数体とする。

問題 2.2 (Stable Field Modification Problem) M を $k(\mathbf{x})/k$ の極小な中間体とし、 $M \neq k(\mathbf{x})$ かつ $\text{trans.deg}_k M \geq 2$ を満たすと仮定する。このとき、 $\sigma(M(z))$ が Hilbert の第 14 問題の極小な反例となるような $\sigma \in \text{Aut}_k k(\mathbf{x}, z)$ は常に存在するか？

M の様々な性質が $M(z)$ に遺伝する。例えば、 M が $\text{Aut}_k k(\mathbf{x})$ の部分群 G の不変体ならば、 $M(z)$ は G' の不変体である。ここで、 G' は G から誘導される $\text{Aut}_{k(z)} k(\mathbf{x}, z)$ の部分群とする。同様に、 M が $D \in \text{Der}_k k(\mathbf{x})$ の核ならば、 $M(z)$ は D' の核である。ここで、 D' は D から定まる $\text{Der}_{k(z)} k(\mathbf{x}, z)$ の元とする。

Hilbert の第 14 問題の反例の以前の構成法を精密化し、次の結果を最近得た [47]。

定理 2.3 問題 2.2 の解は肯定的である。

定理 2.3 から次の系が直ちに従う。 $n = 3, d = 2$ の場合が新しい結果である。

系 2.4 任意の自然数 $n \geq 3, d \geq 2$ に対し、Hilbert の第 14 問題に対する極小な反例 L で $[k(\mathbf{x}) : L] = d$ を満たすものが存在する。

ところで、位数 n の任意の有限群 G は、各 $\sigma \in G$ を集合 G 上の置換 $G \ni \tau \mapsto \sigma\tau \in G$ と考えることで、 n 次対称群 S_n の部分群と見なせる。さらに、各 $\sigma \in S_n$ を $\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}$ ($i = 1, \dots, n$) で定義される $\text{Aut}_k k(\mathbf{x})$ の元と同一視すれば、 G は $\text{Aut}_k k(\mathbf{x})$ の部分群と見なせる。Noether の問題は、この状況において不変体 $k(G) := k(\mathbf{x})^G$ が k の純超越拡大であるかを問う問題である。 $p = 47$ をはじめ、様々な素数 p に対し $\mathbf{Q}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ が \mathbf{Q} の純超越拡大でないことが知られている ([21], [65], [67])。一方、 G が有限アーベル群のとき、 $\mathbf{Q}(G)$ が \mathbf{Q} の純超越拡大であるための必要十分条件は、ある $l \geq 0$ が存在し、 $\mathbf{Q}(G)(z_1, \dots, z_l)$ が \mathbf{Q} の純超越拡大となることである ([12])。ここで、 z_1, \dots, z_l は $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$

上の不定元とする. これらの事実と定理 2.3 から次の系が得られる.

系 2.5 $n = 48$ のとき, $\text{Aut}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\mathbf{x})$ の位数 47 の巡回部分群 G が存在し, $\mathbf{Q}(\mathbf{x})^G$ は \mathbf{Q} の純超越拡大でなく, $A := \mathbf{Q}(\mathbf{x})^G \cap \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$ は有限生成でなく, $\text{trans.deg}_{\mathbf{Q}} A = 48$ である.

3 局所冪零導分

$D \in \text{Der } R$ が局所冪零であるとは, 任意の $a \in R$ に対してある整数 $l \geq 0$ が存在し, $D^l(a) = 0$ を満たすときにいう. R における局所冪零導分全体の集合, 局所冪零 S 導分全体の集合をそれぞれ $\text{LND } R$, $\text{LND}_S R$ で表す. LND は locally nilpotent derivation の略である. 多項式環の研究では, 局所冪零導分が特に重要である. 本節では局所冪零導分に関する基本事項を簡潔に述べる.

$R = S[x]$ が可換環 S 上の 1 変数多項式環のとき, R における S 導分 $D = d/dx$ は局所冪零である. 一方, $D' := xD$ は x を固定するので局所冪零でない. 一般に, R における導分 D は R^D 線形写像なので, 任意の $a \in R^D$, $b \in R$, $l \geq 0$ に対し

$$(aD)^l(b) = aD(aD(\cdots(aD(b))\cdots)) = a^l D^l(b) \quad (3.1)$$

が成り立つ. よって, D が局所冪零ならば, 任意の $a \in R^D$ に対して導分 aD は局所冪零である. 一方, 節末で示すように, R が標数 0 の整域のとき, D が局所冪零か否かに関らず, $D(a) \neq 0$ ならば aD は局所冪零でない.

定義より, $D \in \text{Der } R$ が局所冪零であるための必要十分条件は,

$$\text{Nil}(D) := \{a \in R \mid D^l(a) = 0 \text{ を満たす } l \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \text{ が存在}\}$$

が R と等しいことである. ただし, $\mathbf{Z}_{\geq 0} := \{a \in \mathbf{Z} \mid a \geq 0\}$ とする. (1.1) より

$$D^l(ab) = \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} D^i(a) D^{l-i}(b) \quad (a, b \in R, l \geq 0) \quad (3.2)$$

が成り立つ. よって, $a, b \in \text{Nil}(D)$ ならば $ab \in \text{Nil}(D)$ であり, $\text{Nil}(D)$ は R の R^D 部分代数となる. S を R の部分環とし, D を R における S 導分とする. このとき, S は $\text{Nil}(D)$ に含まれる. 従って, $\text{Nil}(D)$ が S 代数 R の生成系を含めば, $\text{Nil}(D) = R$ が成り立つので D は局所冪零である.

$D \in \text{Der}_k k[\mathbf{x}]$ が三角であるとは,

$$D(x_1) \in k, D(x_2) \in k[x_1], D(x_3) \in k[x_1, x_2], \dots, D(x_n) \in k[x_1, \dots, x_{n-1}]$$

を満たすときにいう。このとき、 $D(x_i) \in \text{Nil}(D) \iff x_i \in \text{Nil}(D)$ に注意し、 x_1, \dots, x_n が $\text{Nil}(D)$ に属することを n に関する帰納法で確認できる。よって、三角導分は局所冪零である。例えば、(1.2), (1.3), (1.4), (1.6) はいずれも三角導分である。なお、文献によっては、 $D(x_i) \in k[x_{i+1}, \dots, x_n]$ ($i = 1, \dots, n$) を満たすとき三角ということもある。本稿では、この条件を満たすとき逆三角ということにする。例えば、

$$T = -2x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (3.3)$$

は逆三角である。 $T(x_1x_3 + x_2^2) = 0$ だから $D := (x_1x_3 + x_2^2)T$ も局所冪零だが、この D は三角でも逆三角でもない。

$D \in \text{LND } R$ に対し、 $D(s) = 1$ を満たす $s \in R$ を D のスライスと呼ぶ。 s が D のスライスならば、任意の $f(x) \in R^D[x]$ に対し $D(f(s)) = f'(s)D(s) = f'(s)$ が成り立つ。ここで、 $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする。よって、 $f(s) = 0$ ならば $f'(s) = 0$ である。これより、 $\text{char } R = 0$ のとき s が R^D 上の超越元であることが分かる。今、 R を \mathbf{Q} 代数と仮定する。すると、 $D(a) \in R^D[s]$ を満たす任意の $a \in R$ に対し、 s の多項式としての $D(a)$ の原始関数 $b \in R^D[s]$ が存在する。このとき、 $D(a) = D(b)$ だから $a - b \in R^D$ であり、 $a \in R^D[s]$ となる。よって、

$$\deg_D a := \max\{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \mid D^n(a) \neq 0\}$$

に関する帰納法で、任意の $a \in R$ が $R^D[s]$ に属することが分かる。ゆえに、 $R = R^D[s]$ である。以上より次のスライス定理を得る。

定理 3.1 R を \mathbf{Q} 代数とする。 $D \in \text{LND } R$ と $s \in R$ が $D(s) = 1$ を満たすとき、 s は R^D 上の超越元であり、 $R = R^D[s]$, $D = d/ds$ が成り立つ。

定理 3.1 の状況において、 R^D 代数の全射準同型

$$\sigma_s^D : R = R^D[s] \ni f(s) \mapsto f(0) \in R^D$$

が定義される。この写像を Dixmier 写像と呼ぶ。 $f(0) = f(s - s)$ を Taylor 展開し、

$$\sigma_s^D(a) = \sum_{l \geq 0} \frac{D^l(a)}{l!} (-s)^l \quad (a \in R) \quad (3.4)$$

を得る。なお、スライス是一般に存在するとは限らないが、任意の $0 \neq D \in \text{LND } R$ に対し、 $u := D^l(a) \neq 0$, $D^{l+1}(a) = 0$ を満たす $l \geq 1$ が必ず存在する。 u が R の冪零元でなければ、局所化 R_u における導分が D から誘導される。 $D(u) = 0$ なので、この導分も

局所冪零であり, $s = D^{l-1}(a)/u$ はそのスライスである. 例えば, (1.6) は三角導分なので局所冪零である. この D はスライスを持たないが, D の $P_2[x_1^{-1}]$ への拡張はスライス $s = x_1^{-t}y_1$ を持つ. よって, その核 $P_2[x_1^{-1}]^D$ は, Dixmier 写像を用いて

$$\begin{aligned} P_2[x_1^{-1}]^D &= \sigma_s^D(P_2[x_1^{-1}]) = k[\sigma_s^D(x_1^{\pm 1}), \sigma_s^D(x_2), \sigma_s^D(y_1), \sigma_s^D(y_2), \sigma_s^D(z)] \\ &= k \left[x_1^{\pm 1}, x_2, y_2 - (x_1y_1 + x_2)s + x_1^{t+1} \frac{s^2}{2}, z - y_2s + (x_1y_1 + x_2) \frac{s^2}{2} - x_1^{t+1} \frac{s^3}{6} \right] \end{aligned}$$

と記述できる. $P_2^D = P_2[x_1^{-1}]^D \cap P_2$ が有限生成でないというのが [9] の主結果である.

R が \mathbf{Q} 代数のとき, 任意の $D \in \text{LND } R$ に対し, R^D 代数 R の自己同型 $\exp D$ が

$$(\exp D)(a) := \sum_{l \geq 0} \frac{D^l(a)}{l!} \quad (a \in R)$$

で定義される. 一般に, $D_1, D_2 \in \text{LND } R$ に対し, 導分 $D_1 + D_2$ は局所冪零であるとは限らない. しかし, $D_1 \circ D_2 = D_2 \circ D_1$ を満たすとき $D_1 + D_2$ は局所冪零であり, 指数法則 $\exp(D_1 + D_2) = \exp D_1 \circ \exp D_2$ が成り立つ. 任意の $a \in R^D$ に対し aD は局所冪零導分であり, $aD \circ bD = bD \circ aD$ ($a, b \in R^D$) が成り立つ. よって,

$$R^D \ni a \mapsto \exp aD \in \text{Aut}_{R^D} R$$

は加法群 R^D から $\text{Aut}_{R^D} R$ への群準同型である. 例えば, D がスライス s を持つとき, 任意の $a \in R^D$ に対し $(\exp aD)(s) = s + aD(s) = s + a$ が成り立つ. この場合, $\exp aD$ は代入写像 $R^D[s] \ni f(s) \mapsto f(s + a) \in R^D[s]$ である.

ところで, 環の準同型 $\epsilon: R \rightarrow R[x]$ が指数写像であるとは, 各 $a \in R$ に対して次が成り立つときにいう. ただし, $\epsilon(a) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ ($a_i \in R$) とし, y は新しい変数とする.

$$(E1) \ a_0 = a. \quad (E2) \ R[x, y] \text{ において } \sum_{i=0}^m \epsilon(a_i) y^i = \sum_{i=0}^m a_i (x + y)^i.$$

この条件は, 準同型 $\epsilon: R \rightarrow R[x] = R \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[x]$ が加法群スキーム $\mathbf{G}_a = \text{Spec}(\mathbf{Z}[x])$ の $\text{Spec}(R)$ への作用を定めるための条件と同値である. 例えば, R が \mathbf{Q} 代数のとき, 任意の $D \in \text{LND } R$ に対し

$$R \ni a \mapsto \sum_{l \geq 0} \frac{D^l(a)}{l!} x^l \in R[x] \quad (3.5)$$

は指数写像である. 実際, D は $D(x) = D(y) = 0$ を満たすように $\text{LND } R[x, y]$ の元に拡張でき, $\exp xD \circ \exp yD = \exp (x + y)D$ が成り立つ. 一方, 任意の指数写像 ϵ に対し, ϵ が環の準同型であることと (E1) より, 写像 $\Delta_\epsilon: R \ni a \mapsto a_1 \in R$ は R における導分である. さらに, R が \mathbf{Q} 代数のとき, (E2) から $\Delta_\epsilon^i(a)/i! = a_i$ ($i \geq 0, a \in R$) が従う. 十

分大きな i に対して $a_i = 0$ なので, Δ_ϵ は局所冪零である. また, Δ_ϵ から定まる指数写像 (3.5) は ϵ と等しい. ゆえに, \mathbf{Q} 代数における局所冪零導分は \mathbf{G}_a 作用と同値な概念である (cf. [52]).

最後に, R が標数 0 の整域の場合の注意を述べる. 任意の $D \in \text{Der } R$ に対し (3.2) より

$$\deg_D ab \leq \deg_D a + \deg_D b \quad (a, b \in \text{Nil}(D))$$

が成り立つ. ただし, $\deg_D 0 = -\infty$ とする. R が標数 0 の整域のとき, 上の不等式において等号が成り立つ. その帰結として, 局所冪零導分の様々な性質が導かれる. 例えば, 任意の $D \in \text{Der } R$ と $a \in R \setminus R^D$ に対し, $D' := aD$ は局所冪零でない. 実際, 仮に D' が局所冪零ならば,

$$\deg_{D'} a - 1 = \deg_{D'} D'(a) = \deg_{D'} aD(a) = \deg_{D'} a + \deg_{D'} D(a) \geq \deg_{D'} a$$

となり矛盾が生じる. また, 任意の $D \in \text{LND } R$ に対し, R^D は R において factorially closed である. ここで, 整域 R の部分環 S が R において factorially closed であるとは, $ab \in S$ を満たす任意の $a, b \in R \setminus \{0\}$ が S に属するときをいう. 例えば, $R = S[x]$ が整域 S 上の多項式環のとき, $f, g \in R \setminus \{0\}$ に対して次が成り立つ:

$$fg \in S \Rightarrow 0 = \deg fg = \deg f + \deg g \Rightarrow \deg f = \deg g = 0 \Rightarrow f, g \in S.$$

よって, S は R において factorially closed である. \deg を \deg_D に変えて考えれば, R^D が R において factorially closed であることも分かる.

一般に, S が R において factorially closed であるとき, $1 \in S$ より $S^\times = R^\times$ が成り立つ. また, R が UFD ならば S は UFD である. これは, $p \in S$ が R の素元であるとき, S の素元であることが分かれば容易に確認できるが, この主張は $pR \cap S = pS$ から従う. そのため, 任意の $D \in \text{LND } k[\mathbf{x}]$ は $k^\times = k[\mathbf{x}]^\times = (k[\mathbf{x}]^D)^\times \subset k[\mathbf{x}]^D$ を満たして k 導分となり, $k[\mathbf{x}]^D$ はネーター環であるか否かに関わらず UFD である.

4 多項式自己同型

多項式環の問題の多くが, 多項式環の自己同型と深く関係している. しかし, 多項式環の自己同型には不明な点が多く, それが多項式環の問題の難しさに影響している. 本節では, k 代数 $k[\mathbf{x}]$ の自己同型群 $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ やその元について考察する.

当面, k は任意標数の体とする. 一般に, k 代数の準同型 $\phi: k[\mathbf{x}] \rightarrow k[\mathbf{x}]$ は x_1, \dots, x_n の像によって一意的に決まるので, ϕ を多項式の組 $(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n))$ と同一視する. ϕ

は全射ならば全単射である．すなわち，次が成り立つ：

$$\phi \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}] \iff k[\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)] = k[\mathbf{x}] \iff x_1, \dots, x_n \in k[\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)].$$

よって，非常に具象的に書けば，

$$\text{Aut}_k k[\mathbf{x}] = \{(f_1, \dots, f_n) \in k[\mathbf{x}]^n \mid x_1, \dots, x_n \in k[f_1, \dots, f_n]\}$$

である．ただし，合成は

$$(f_1, \dots, f_n) \circ (g_1, \dots, g_n) := (g_1(f_1, \dots, f_n), \dots, g_n(f_1, \dots, f_n))$$

で定義する．例えば， $n \geq 3$ のとき，

$$f := x_1 - 2(x_1x_3 + x_2^2)x_2 - (x_1x_3 + x_2^2)^2x_3, \quad g := x_2 + (x_1x_3 + x_2^2)x_3 \quad (4.1)$$

に対し $\phi_n := (f, g, x_3, \dots, x_n)$ は $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ の元である．このことは，

$$x_1x_3 + x_2^2 = fx_3 + g^2 \in k[f, g, x_3]$$

に気づけば容易に確認できる．もう少し分かり易い $k[\mathbf{x}]$ の自己同型を数種類挙げる．まず，任意の $A \in GL_n(k)$, $b_1, \dots, b_n \in k$ に対し，

$$\alpha = (x_1, \dots, x_n)A + (b_1, \dots, b_n)$$

は $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ に属する．この形の自己同型をアフィン自己同型と呼ぶ．任意の $a \in k^\times$ と $1 \leq l \leq n$, $p \in k[x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_n]$ に対し

$$\epsilon = (x_1, \dots, x_{l-1}, ax_l + p, x_{l+1}, \dots, x_n)$$

も $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ に属する．この形の自己同型を基本自己同型と呼ぶ． $k[\mathbf{x}]$ の基本自己同型全体で生成される $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ の部分群 $T_n(k)$ を順部分群と呼ぶ． $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ の元は $T_n(k)$ に属するとき順であるといい，そうでないとき野生であるという．基本自己同型の逆写像は基本自己同型なので，自己同型が順であることと，基本自己同型の合成写像であることは同じである． $\phi = (f_1, \dots, f_n) \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ に対し，

$$\phi \rightsquigarrow \phi \circ \epsilon = (f_1, \dots, f_{l-1}, af_l + p(f_1, \dots, f_{l-1}, f_{l+1}, \dots, f_n), f_{l+1}, \dots, f_n)$$

の形の変形を基本変形と呼ぶ．自己同型が順であることと，基本変形を繰り返して恒等写像 $\text{id}_{k[\mathbf{x}]} = (x_1, \dots, x_n)$ に変形できることは同値である．例えば， $n = 2$ のとき

$$\phi = (x_1 + (x_2 + x_1^2)^3, x_2 + x_1^2) \rightsquigarrow (x_1, x_2 + x_1^2) \rightsquigarrow (x_1, x_2)$$

となるから、この ϕ は順である。行列の列基本変形で $GL_n(k)$ の任意の元を単位行列に変形できることから、アフィン自己同型が順であることも分かる。また、 $\text{char } k = 0$ のとき、 $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ が三角ならば、 $i = 1, \dots, n$ に対して $g_i \in k[x_1, \dots, x_{i-1}]$ が存在し、 $(\exp D)(x_i) = x_i + g_i$ と書ける。 $(x_1 + g_1, \dots, x_n + g_n)$ も基本変形を繰り返して $\text{id}_{k[\mathbf{x}]}$ に変形できるので、 $\exp D$ は順である。 D が逆三角の場合も同様である。

例えば、(3.3) の T と任意の $w \in k[x_3, \dots, x_n]$ に対し、 wT は逆三角なので $\exp wT$ は順である。(3.3) の下で述べたように、 $h := x_1x_3 + x_2^2$ に対して hT も局所冪零である。この場合、 $\exp hT$ は (4.1) で与えた ϕ_n と等しい。実際、(3.1) に注意して計算すれば、

$$\begin{aligned} (\exp hT)(x_1) &= x_1 + hT(x_1) + \frac{1}{2}h^2T^2(x_1) + \cdots = x_1 - 2hx_2 - h^2x_3 = f \\ (\exp hT)(x_2) &= x_2 + hT(x_2) + \cdots = x_2 + hx_3 = g \end{aligned}$$

であり、 $i = 3, \dots, n$ に対し $(\exp hT)(x_i) = x_i$ となる。

永田 [56] は、 $n = 3$ のとき野生自己同型が存在すると予想し、その候補として ϕ_3 を構成した。この予想は 30 年の歳月を経て、2004 年に Shestakov-Umirbaev [62], [63] によって $\text{char } k = 0$ の場合のみ肯定的に解決された。 $\text{char } k > 0$ の場合は依然として未解決である。ただし、 $\text{char } k = 2$ の場合も含め、 ϕ_3 は野生と考えるのが自然である。

上述のように、 $\text{char } k = 0$ のとき ϕ_3 は逆三角導分 T と $h \in k[\mathbf{x}]^T$ を用いて $\exp hT$ と書ける。このような自己同型がいつ野生であるか完全に分かる ([40, Thm. 3.2.3], [41])。

定理 4.1 $n = 3$ とし、 $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ を逆三角導分、 f を $k[\mathbf{x}]^D$ の元とする。このとき、 $\exp fD$ が野生であるためには、以下が満たされることが必要十分である：

$$D(x_i) \neq 0 \quad (i = 1, 2), \quad D(x_3) = 0, \quad f \notin k[x_3], \quad \frac{\partial D(x_1)}{\partial x_2} \notin D(x_2)k[x_2, x_3].$$

一方、 $n \geq 4$ のとき ϕ_n は順である。一見すると奇妙だが、以下の方法で容易に確認できる。前述のように $\psi := \exp x_n T$ は順である。 $\epsilon := (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + h)$ も順であり、 $A := k[h, x_3, \dots, x_{n-1}]$ の元を固定する。 A は $k[\mathbf{x}]^T$ に含まれるので、 ϕ_n, ψ も A の元を固定する。 $x_3 \in A$ なので、 ϕ_n, ψ, ϵ は $A' := A[x_3^{-1}]$ 代数 $k[\mathbf{x}][x_3^{-1}]$ の自己同型を誘導する。 $k[\mathbf{x}][x_3^{-1}] = A'[x_2, x_n]$ は A' 上の 2 変数多項式環なので、これらを x_2, x_n の像の組と同一視すれば $\phi_n = (x_2 + hx_3, x_n)$, $\psi^{\pm 1} = (x_2 \pm x_n x_3, x_n)$, $\epsilon^{\pm 1} = (x_2, x_n \pm h)$ と書ける。このとき、

$$(x_2, x_n - h) \circ (x_2 - x_n x_3, x_n) \circ (x_2, x_n + h) \circ (x_2 + x_n x_3, x_n) = (x_2 + hx_3, x_n)$$

が成り立つ。すなわち、 $\epsilon^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \epsilon \circ \psi = \phi_n$ である。 ψ, ϵ は順なので ϕ_n も順である。

同様の理由から、任意の三角導分 $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ と $f \in k[\mathbf{x}]^D$ に対し、 $(\exp fD, x_{n+1})$ は $T_{n+1}(k)$ に属する ([64]).

より一般に、次が成り立つと予想されている.

予想 4.2 (Stable Tameness Conjecture) 任意の $\phi \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ に対し、ある $l \geq 0$ が存在し、 $(\phi, x_{n+1}, \dots, x_{n+l})$ は $T_{n+l}(k)$ に属する.

$\phi(x_i) = x_i$ ($i = 3, \dots, n$) のとき予想が正しいことが Berson-van den Essen-Wright [4] によって示されているが、 $n = 3$ の場合でも完全な解決には至っていない.

上記の事情のため、 $n = 3$ の場合に野生自己同型が存在しても、 $n \geq 4$ の場合に野生自己同型が存在するとは限らない. 次の問題は、 $n \geq 4$ の場合や $n = 3$ かつ $\text{char } k > 0$ の場合は未解決である.

問題 4.3 (Tame Generators Problem) $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}] = T_n(k)$ は成り立つか?

一方、 $n = 2$ かつ $\text{char } k = 0$ の場合は Jung [22] によって、 $n = 2$ かつ $\text{char } k > 0$ の場合は van der Kulk [29] によって、問題 4.3 はそれぞれ肯定的に解決された.

問題 4.3 よりも肯定的な結果を期待できる以下のような問題もあるが、余り進展はない.

問題 4.4 (1) $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ は $\bigcup_{i=1}^n \text{Aut}_{k[x_i]} k[\mathbf{x}]$ で生成されるか?

(2) $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ は $\exp D$ ($D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$) とアフィン自己同型で生成されるか?

問題 4.3 の研究では、以下で述べる基本簡約の概念が重要である. $\phi = (f_1, \dots, f_n) \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ の次数を

$$\deg \phi := \deg f_1 + \dots + \deg f_n$$

で定義する. f_1, \dots, f_n は定数でないので、常に $\deg \phi \geq n$ が成り立つ. $\deg \phi = n$ であることと、 ϕ がアフィン自己同型であることは同値である. $\deg \phi > \deg \phi'$ を満たす基本変形 $\phi \rightsquigarrow \phi'$ を基本簡約と呼ぶ.

次の定理より、 $k[x_1, x_2]$ のアフィンでない自己同型は常に基本簡約を許容する.

定理 4.5 (cf. [56]) $(f_1, f_2) \in \text{Aut}_k k[x_1, x_2]$ がアフィン自己同型でないならば、ある $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$, $a \in k^\times$, $l \geq 1$ が存在し、 $\deg(f_i - af_j^l) < \deg f_i$ が成り立つ.

$\phi \in \text{Aut}_k k[x_1, x_2]$ がアフィン自己同型でないとき、基本簡約を繰り返して ϕ をアフィン自己同型に変形できる. アフィン自己同型は順なので ϕ も順である. このことから、 $\text{Aut}_k k[x_1, x_2] = T_2(k)$ が成り立つことが分かる.

5 Shestakov-Umirbaev 理論

本節では k は標数 0 の体とし、Shestakov-Umirbaev 理論やその一般化について述べる。

自己同型 ϕ_3 が基本簡約を許容しないことは簡単に確認できるが、それによって ϕ_3 が野生であるとは結論できない。実際、 $n = 3$ の場合に Shestakov-Umirbaev は、アフィン自己同型でなく、基本簡約も許容しない順自己同型の存在に気づいた。そこで、彼らは基本簡約の他に 4 種類の「簡約」(I 型簡約から IV 型簡約) を定義し、 $\phi \in T_3(k)$ がアフィン自己同型でないとき、基本簡約または 4 種類の「簡約」のいずれかを必ず許容することを示した ([63])。この結果の証明は非常に複雑で難しいが、 ϕ_3 がどの簡約も許容しないことを確かめるのはさほど難しくない。なお、II 型、III 型、IV 型簡約の概念は理論上の要請で導入されたもので、これらを許容する自己同型が実際に存在するかは不明である。

Shestakov-Umirbaev 理論でも「微分」の概念が重要な役割を果たす。 $f_1, \dots, f_r \in k[\mathbf{x}]$ ($1 \leq r \leq n$) に対し、 $df_1 \wedge \dots \wedge df_r$ を

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_r = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} J_{i_1, \dots, i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}, \quad J_{i_1, \dots, i_r} = \left| \frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})} \right|$$

と表し、その次数を

$$\deg df_1 \wedge \dots \wedge df_r := \max\{\deg J_{i_1, \dots, i_r} x_{i_1} \dots x_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n\}$$

で定義する。自己同型の簡約に関する Shestakov-Umirbaev の理論 [63] は、多項式の次数に関する以下の不等式 [62, Thm. 3] を基礎に構築された： $f, g \in k[\mathbf{x}]$ は k 上代数的独立であるとし、 $a := \deg f$, $b := \deg g$ とおく。多項式 $P \in k[x, y] \setminus \{0\}$ に対し、 $\deg_y P$ を $a/\gcd(a, b)$ で割った商と余りをそれぞれ q, r とするとき、次の不等式が成り立つ。

定理 5.1 (Shestakov-Umirbaev) $\deg P(f, g) \geq q(a'b - a - b + \deg df \wedge dg) + rb$.

k が正標数の場合にこの不等式が成り立たないため、Shestakov-Umirbaev 理論では標数 0 を仮定する必要がある。なお、定理 5.1 は [62, Thm. 3] から不要な仮定を除いたものであり、[62, Thm. 3] とは若干異なる。Shestakov-Umirbaev [62] はこの結果を使い、定理 4.5 の簡単な別証も与えた。

定理 5.1 の一般化や別証が、黒田 [37], Makar-Limanov–Yu [49], Vénéreau [66] 等によって与えられた。ここでは [37] の結果を紹介する。 $k[\mathbf{x}]$ 上の多項式 $P(y) = \sum_{i \geq 0} p_i y^i$ と $g \in k[\mathbf{x}] \setminus \{0\}$ に対し、 $P(g)$ の見かけの次数を $\deg^g P := \max\{\deg p_i g^i \mid i \geq 0\}$ で定

義する．一般に， $\deg P(g) \leq \deg^g P$ が成り立つ． $P^{(i)}$ を $P(y)$ の y に関する i 次導関数とすれば，十分大きな $i \geq 0$ に対し $\deg P^{(i)}(g) = \deg^g P^{(i)}$ が成り立つ．そこで，

$$m^g(P) := \min\{i \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \mid \deg P^{(i)}(g) = \deg^g P^{(i)}\}$$

と定義する．このとき， k 上代数的独立な $f_1, \dots, f_r \in k[\mathbf{x}]$ と $P(y) \in k[f_1, \dots, f_r][y]$ に対して次が成り立つ ([37, Thm. 2.1]). ただし， $\omega := df_1 \wedge \dots \wedge df_r$ とする．

定理 5.2 $\deg P(g) \geq \deg^g P + m^g(P)(\deg \omega \wedge dg - \deg \omega - \deg g)$.

この定理は $m^g(P)$ に関する帰納法で証明できる．黒田 [39] は定理 5.2 を基礎に，自己同型の簡約に関する Shestakov-Umirbaev の理論を再構築し，IV 型簡約を許容する順自己同型が存在しないことを示した．それにより，自己同型の野生性を判定するとき，IV 型簡約を考慮する必要がなくなった．

応用上，基本簡約などは重み付き次数に対して考えると便利である． Γ を全順序が定義された加法群とし，任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ に対し $\alpha \preceq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \preceq \beta + \gamma$ が成り立つと仮定する．重み $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \Gamma^n$ に対し，単項式の \mathbf{w} 次数を

$$\deg_{\mathbf{w}} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} := i_1 w_1 + \cdots + i_n w_n$$

で定め， $f \in k[\mathbf{x}] \setminus \{0\}$ に現れる単項式の \mathbf{w} 次数の最大値を $\deg_{\mathbf{w}} f$ と定義する．また， f に現れる単項式のうち， \mathbf{w} 次数が $\deg_{\mathbf{w}} f$ と等しいもの全体の和を $f^{\mathbf{w}}$ と表す．例えば， $\Gamma = \mathbf{Z}^n$ に辞書式順序を考え， $\mathbf{w} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ とするとき， $f^{\mathbf{w}}$ は辞書式順序に関する f の先頭項である．ただし， $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ は \mathbf{Z}^n の標準基底とする．このように， w_1, \dots, w_n が \mathbf{Z} 上 1 次独立ならば $f^{\mathbf{w}}$ は常に単項式である．上で述べた [37], [39] の理論は \mathbf{w} 次数を用いて構築されており，その帰結として種々の実用的な野生性判定法が得られている．例えば，次を満たす $\mathbf{w} \in \Gamma^3$ が存在するとき， $\phi = (f_1, f_2, f_3) \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ は野生である：

- (1) w_1, w_2, w_3 は 0 より大きく， \mathbf{Z} 上 1 次独立である．
- (2) $f_1^{\mathbf{w}}, f_2^{\mathbf{w}}, f_3^{\mathbf{w}}$ は k 上代数的従属だが，どの 2 つも k 上代数的独立である．
- (3) $(i, j, l) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ に対し $f_i^{\mathbf{w}} \notin k[f_j^{\mathbf{w}}, f_l^{\mathbf{w}}]$.

なお， \mathbf{w} 次数を使えば (2), (3) はそれぞれ以下のように言い換えられる：

- (2') $\deg_{\mathbf{w}} f_1, \deg_{\mathbf{w}} f_2, \deg_{\mathbf{w}} f_3$ は \mathbf{Z} 上 1 次従属だが，どの 2 つも \mathbf{Z} 上 1 次独立である．
- (3') $(i, j, l) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ に対し $\deg_{\mathbf{w}} f_i \notin \mathbf{Z} \deg_{\mathbf{w}} f_j + \mathbf{Z} \deg_{\mathbf{w}} f_l$.

この判定法の利点は，「簡約」に関する議論をせず $f_1^{\mathbf{w}}, f_2^{\mathbf{w}}, f_3^{\mathbf{w}}$ の情報だけで ϕ の野生性を証明できる点にある．例えば， $\phi_3 = (f, g, x_3)$ の場合，上述の辞書式順序から定まる \mathbf{w} 次数に関して $\deg_{\mathbf{w}} f = (2, 0, 3)$, $\deg_{\mathbf{w}} g = (1, 0, 2)$, $\deg_{\mathbf{w}} x_3 = (0, 0, 1)$ である．これ

らが (2'), (3') を満たすことは容易に分かる. しかし, f_1, f_2, f_3 を具体的に記述することが困難な場合も多く, この方法にも限界がある. 例えば, かなり簡単な $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ でも $(\exp D)(x_i) = x_i + D(x_i) + D^2(x_i)/2 + \dots$ がどのような多項式かよく分からないことが多い. より広範な自己同型の野生性を調べるために, 以下の方法が有効である. 一般に, $k[\mathbf{x}]$ の k 部分代数 A に対し, A 代数 $k[\mathbf{x}]$ の自己同型群 $\text{Aut}_A k[\mathbf{x}]$ は, $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ の部分群である. ϕ が $\text{Aut}_A k[\mathbf{x}]$ に属するとき, 任意の $p \in A$ に対し $\phi(p) = p$ が成り立つので, f_1, f_2, f_3, p の間の関係式が得られる. それらを解析して f_1, f_2, f_3 の情報を取り出し, 野生性判定法を適用することで, 順交叉 $\text{Aut}_A k[\mathbf{x}] \cap \text{T}_3(k)$ の様子を知ることができる. 例えば, 任意の $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ に対し $\exp D$ は $\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^D} k[\mathbf{x}]$ に属するので, $\exp D$ の野生性の研究は順交叉 $\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^D} k[\mathbf{x}] \cap \text{T}_3(k)$ の研究に帰着される. この方法で実際に色々な結果が得られている. 多くの場合, 順交叉に含まれる自己同型は特殊なものに限定される点が興味深い.

Shestakov-Umirbaev による永田予想の解決や, その後の進展について, [42] にも解説がある.

6 座標変換

本節を通し k は標数 0 の体とする. $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ が三角ならば $c := D(x_1)$ は定数である. 従って, $c \neq 0$ ならば $s := c^{-1}x_1$ は D のスライスである. (3.4) より, $i = 2, \dots, n$ に対して $g_i \in k[x_1, \dots, x_{i-1}]$ が存在し $\sigma_s^D(x_i) = x_i + g_i$ と書ける. このとき,

$$\phi := (c^{-1}x_1, x_2 + g_2, \dots, x_n + g_n)$$

は $k[\mathbf{x}]$ の順自己同型であり, $\phi^{-1}D\phi = \partial/\partial x_1$ が成り立つ.

一般に, $D \in \text{Der}_k k[\mathbf{x}]$ を固定したとき, 各 $\theta \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ に対して $r(\theta) \in \{0, \dots, n\}$ と $f_{\theta,1}, \dots, f_{\theta,r(\theta)} \in k[\mathbf{x}]$ が存在し,

$$D^\theta := \theta^{-1}D\theta = f_{\theta,1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_{\theta,r(\theta)} \frac{\partial}{\partial x_{r(\theta)}}$$

と書ける. このとき,

$$\text{rank } D := \min\{r(\theta) \mid \theta \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]\}$$

を D の階数と呼ぶ. 例えば, 上で見たように, $D(x_1) \neq 0$ を満たす三角導分 D の階数は 1 である. $D(x_1) = 0$ ならば $\text{rank } D < n$ なので, $k[\mathbf{x}]$ における三角導分の階数は常に n 未満である. D^θ が三角であるような $\theta \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ が存在するとき, D は三角化可能で

あるという。任意の $\theta \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ に対し $\text{rank } D^\theta = \text{rank } D$ が成り立つので、三角化可能な導分の階数も n 未満である。

$\text{rank } D = 1$ ならば $D^\theta = f\partial/\partial x_n$ を満たす $\theta \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$, $f \in k[\mathbf{x}] \setminus \{0\}$ が存在する。このとき, $k[\mathbf{x}]^{D^\theta} = k[\mathbf{x}]^{\partial/\partial x_n} = k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ なので, k 代数 $k[\mathbf{x}]^D = \theta(k[\mathbf{x}]^{D^\theta})$ も $n-1$ 個の元で生成される。さらに, D が局所冪零ならば D^θ も局所冪零なので, f は $k[\mathbf{x}]^{\partial/\partial x_n}$ に属する。よって, 階数 1 の局所冪零導分は常に三角化可能である。

Rentschler [59] は, 任意の $0 \neq D \in \text{LND}_k k[x_1, x_2]$ が $\text{rank } D = 1$ を満たすことを示した。従って, D は三角化可能である。一方, $n = 3$ のとき, 三角化可能でない局所冪零導分の最初の例が Bass [3] によって与えられた。Bass の例は (3.3) の下に挙げた $D = (x_1x_3 + x_2^2)T$ である。その後, Popov [58] は任意の $n \geq 3$ に対してこの D が三角化可能でないことを示した。 $n \geq 3$ のとき, 階数 n の局所冪零導分は三角化可能でない。従って, 三角化可能性の問題は, 階数が n 未満の場合を考えればよい。Daigle [8] は $n = 3$ のとき, 階数 2 の局所冪零導分が三角化可能であるための必要十分条件を与えた。なお, 階数が 2 以下の局所冪零導分 D は, 適当な $\theta \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ と $f_1, f_2 \in k[\mathbf{x}]$ を用いて $D^\theta = f_1\partial/\partial x_1 + f_2\partial/\partial x_2$ と書ける。 $k' := k(x_3, \dots, x_n)$ とし, D^θ を $\text{LND}_{k'} k'[x_1, x_2]$ の元と見なせば Rentschler の結果が使えるので, $n \geq 3$ でも大体の様子は分かる。しかし, 階数が 3 以上の局所冪零導分については不明な点が多く残されている。

ところで, $D \in \text{Der}_k k[\mathbf{x}]$ が $\text{rank } D < n$ を満たすための必要十分条件は, $k[\mathbf{x}]^D$ が $k[\mathbf{x}]$ の座標を含むことである。ここで, $f \in k[\mathbf{x}]$ が $k[\mathbf{x}]$ の座標であるとは, $f = \phi(x_i)$ を満たす $\phi \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$, $1 \leq i \leq n$ が存在するときをいう。 ϕ のヤコビアンが k^\times に属するため, 座標には 1 次の単項式が必ず現れる。 ϕ を $T_n(k)$ からとれるとき, f を順座標と呼ぶ。例えば, x_1 や $x_1 + x_2^2$ などは $k[\mathbf{x}]$ の順座標である。また, 本節冒頭の考察より, 三角導分の核は常に順座標を含む。 f が $k[\mathbf{x}]$ の座標であることと, $k[f, f_2, \dots, f_n] = k[\mathbf{x}]$ を満たす $f_2, \dots, f_n \in k[\mathbf{x}]$ が存在することは同値である。従って, $f \in k[\mathbf{x}]$ が $k[\mathbf{x}]$ の座標ならば, 任意の $l \geq 1$ に対して f は $k[x_1, \dots, x_{n+l}]$ の座標である。逆に, $f \in k[\mathbf{x}]$ が $k[x_1, \dots, x_{n+l}]$ の座標であるような $l \geq 1$ が存在するとき, f が $k[\mathbf{x}]$ の座標であるかは大問題である ([48])。 k が体の場合の反例は見つかっていないが, k が正規でない整域の場合の反例は存在する ([5])。

Freudentburg [15] は, $k[\mathbf{x}]$ における階数 n の局所冪零導分の最初の例を, 各 $n \geq 3$ に対して与えた。例えば $n = 3$ のとき, 整数 $l \geq 1$ に対し $f := x_1x_3 - x_2^2$, $r := f^l x_2 + x_1^{2l+1}$,

$$g := \frac{f^{2l+1} + r^2}{x_1} = \frac{f^{2l}(x_1x_3 - x_2^2) + (f^l x_2 + x_1^{2l+1})^2}{x_1} = f^{2l}x_3 + 2f^l x_1^{2l}x_2 + x_1^{4l+1}$$

とおき, $D_{(f,g)} : k[\mathbf{x}] \rightarrow k[\mathbf{x}]$ を

$$D_{(f,g)}(h) := \left| \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \right| \quad (h \in k[\mathbf{x}])$$

で定義する. このとき, $D_{(f,g)}$ は局所冪零導分であり, さらに $k[\mathbf{x}]^{D_{(f,g)}} = k[f, g]$ を満たす (cf. [14, §4.1]). f, g は 1 次の項を持たないので, 1 次の項を持つ多項式は $k[f, g]$ に属さない. よって, $k[\mathbf{x}]^{D_{(f,g)}} = k[f, g]$ であることから $\text{rank } D_{(f,g)} = 3$ が直ちに従う.

上の例において, 任意の $0 \neq h \in k[f, g]$ に対し $\exp hD_{(f,g)}$ は野生である ([43]). $n = 3$ のとき, 階数 3 の局所冪零導分の他の多くの例に対し同様の結果がある ([40, §7], [41]). 従って, $n = 3$ のとき, “ $\exp D$ が順ならば $\text{rank } D \leq 2$ ” と予想するのが自然だが, 私はより強い次の予想を立てている. 以下の 3 つの予想では $n = 3, D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ とする.

予想 6.1 $\exp D$ が順ならば, $k[\mathbf{x}]^D$ は少なくとも 1 つ $k[\mathbf{x}]$ の順座標を含む.

$\phi^{-1}D\phi$ が三角となるような $\phi \in T_3(k)$ が存在するとき, $\exp \phi^{-1}D\phi$ は順なので

$$\exp D = \phi \circ (\exp \phi^{-1}D\phi) \circ \phi^{-1}$$

も順である. この逆が成り立つと予想している.

予想 6.2 $\exp D$ が順ならば, $\phi^{-1}D\phi$ が三角であるような $\phi \in T_3(k)$ が存在する.

$k[\mathbf{x}]^D$ が $k[\mathbf{x}]$ の順座標を少なくとも 1 つ含むとき, 予想 6.2 は正しいことを示した ([40, Thm. 3.1.3 (i)], [41]). 従って, 予想 6.1 が正しければ予想 6.2 も正しい. 一方, 三角導分の核は必ず順座標を含むので, $\phi^{-1}D\phi$ が三角であるような $\phi \in T_3(k)$ が存在するとき, $k[\mathbf{x}]^D$ は $k[\mathbf{x}]$ の順座標を少なくとも 1 つ含む. よって, 予想 6.2 が正しければ予想 6.1 も正しく, これら 2 つの予想は同値である. 予想 6.2 が正しければ次の予想も正しい.

予想 6.3 ある $f \in k[\mathbf{x}]^D \setminus \{0\}$ が存在して $\exp fD$ が順ならば, $\exp D$ は順である.

より正確に, $\Sigma \subset \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ が次の 2 つの条件を満たすとき, 任意の $D \in \Sigma$ に対して予想 6.3 は正しい.

(i) 任意の $f \in k[\mathbf{x}]^D, D \in \Sigma$ に対して fD は Σ に属する.

(ii) 任意の $D \in \Sigma$ に対して予想 6.2 は正しい.

実際, $D \in \Sigma, f \in k[\mathbf{x}]^D \setminus \{0\}$ が $\exp fD \in T_3(k)$ を満たすとき, (i) より $fD \in \Sigma$ なので, (ii) よりある $\phi \in T_3(k)$ が存在して $(fD)^\phi = \phi^{-1}(f) \cdot \phi^{-1}D\phi$ が三角となる. このとき, $\phi^{-1}D\phi$ は三角である. ϕ は順なので, 予想 6.2 の上で述べたように $\exp D$ は順

である。例えば、核が順座標を含むような局所冪零導分全体の集合は明らかに (i) を満たし、上述のように (ii) も満たす。よって、このような局所冪零導分に対して予想 6.3 は正しい。

ところで、自己同型の順性の概念は、座標系のとり方に依存する。例えば、 $y_1, \dots, y_n \in k[\mathbf{x}]$ が $k[y_1, \dots, y_n] = k[\mathbf{x}]$ を満たすとき、 $\phi \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ が

$$\phi(y_i) = y_i \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad \phi(y_n) = y_n + 1$$

で定義される。 y_1, \dots, y_n を基準に考えれば ϕ は明らかに順だが、 x_1, \dots, x_n を基準に考えた場合、 ϕ が順であるか否かは y_1, \dots, y_n の選び方による。実際、 $n = 3$ の場合に次のような例が存在する ([40, Thm. 6.1.1], [41]):

(†) $\phi(y_1) = y_1$ を満たす任意の $\text{id}_{k[\mathbf{x}]} \neq \phi \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ は野生である。

この例の (y_1, y_2, y_3) は、ある種の $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ に対する $\exp D$ として与えられた。なお、条件 (†) は $\text{Aut}_{k[y_1]} k[\mathbf{x}] \cap T_3(k) = \{\text{id}_{k[\mathbf{x}]}\}$ と同値であり、これも前節末で述べた順交叉に関する結果の 1 つである。

最後に $0 \neq D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ の核 $k[\mathbf{x}]^D$ の生成系について触れる。上述のように、 $n = 2$ ならば Rentschler [59] より $\text{rank } D = 1$ なので、 $k[\mathbf{x}]^D$ は 1 つの元で生成される。 $n = 3$ のとき、宮西 [54] より $k[\mathbf{x}]^D$ は k 上 2 個の元で生成される。これらの結果は非常に有用である。一方、第 1 節で見たように、 $n \geq 5$ では D が三角でも $k[\mathbf{x}]^D$ は有限生成とは限らない。Daigle-Freudenburg [10] は、 $n = 4$ で D が三角のとき $k[\mathbf{x}]^D$ が有限生成であることを示した。Bhatwadekar-Daigle [6] はこの結果を一般化し、 $n = 4$, $\text{rank } D \leq 3$ ならば $k[\mathbf{x}]^D$ は有限生成であることを示した。次の問題は依然として未解決である。

問題 6.4 $n = 4$ のとき、 $k[\mathbf{x}]$ における階数 4 の局所冪零導分の核は常に有限生成か？

7 消去問題と線形化問題

本節では、特に断らない限り k は標数 0 の体とする。 $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ がスライス z を持つとき、スライス定理より $D = d/dz$ である。このとき $\text{rank } D = 1$ であるか？実は、この問題は以下で述べる消去問題と同値である。

A を $k[\mathbf{x}]$ の k 部分代数とする。 $k[\mathbf{x}] = A[z]$ を満たす A 上の超越元 $z \in k[\mathbf{x}]$ が存在するとき $k[\mathbf{x}] = A^{[1]}$ と表す。このとき、 $\pi : k[\mathbf{x}] = A[z] \ni f(z) \mapsto f(0) \in A$ は k 代数の全射準同型なので、 $A = \pi(k[\mathbf{x}])$ は k 上高々 n 個の元で生成される。

問題 7.1 (消去問題) $k[\mathbf{x}]$ の k 部分代数 A が $k[\mathbf{x}] = A^{[1]}$ を満たすとき, A は k 上 $n-1$ 個の元で生成されるか?

実際, 問題 7.1 の仮定の下, $k[\mathbf{x}] = A[z]$ における局所冪零導分 $D = d/dz$ は $k[\mathbf{x}]^D = A$ および $D(z) = 1$ を満たす. 従って, “ $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ がスライスを持つとき $\text{rank } D = 1$ ” という主張が真ならば, $A = k[\mathbf{x}]^D$ は $n-1$ 個の元で生成される. 一方, $D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ がスライス z を持つとき, 定理 3.1 より $k[\mathbf{x}] = (k[\mathbf{x}]^D)^{[1]}$ である. 従って, 問題 7.1 の解が肯定的ならば, $k[\mathbf{x}]^D = k[y_1, \dots, y_{n-1}]$ を満たす $y_1, \dots, y_{n-1} \in k[\mathbf{x}]^D$ が存在する. このとき, $\theta = (z, y_1, \dots, y_{n-1})$ は $k[\mathbf{x}]$ の自己同型であり, $D^\theta = \partial/\partial x_1$ を満たす.

問題 7.1 は z が $k[\mathbf{x}]$ の座標の場合は易しい. 実際, $k[\mathbf{x}] = k[z_1, \dots, z_{n-1}, z]$ を満たす $z_1, \dots, z_{n-1} \in k[\mathbf{x}]$ が存在するので

$$A \simeq A[z]/(z) = k[z_1, \dots, z_{n-1}, z]/(z) \simeq k[z_1, \dots, z_{n-1}]$$

が成り立つ. 前節で見たように, $n = 2, 3$ のとき, 任意の $0 \neq D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ に対し $k[\mathbf{x}]^D$ は k 上 $n-1$ 個の元で生成される. 問題 7.1 において A は d/dz の核と等しいので, この場合も肯定的である (cf. [1], [18], [53]). Crachiola–Makar-Limanov [7] は, 有限生成 k 整域 A に対し “ $\text{LND}_k A = \{0\} \Rightarrow \text{LND}_k A[z] = \text{LND}_A A[z]$ ” が成り立つことに着目し, $n = 3$ の場合のより簡単な証明を与えた. なお, $\text{char } k > 0$ の場合も $n = 2, 3$ のときは肯定的だが, $n \geq 4$ では反例が存在する (cf. [2], [19], [20]).

次に, ϕ を $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ の元とする. $\phi = (x_1, \dots, x_n)A$ を満たす $A \in \text{GL}_n(k)$ が存在するとき, ϕ は線形であるという. $\theta^{-1} \circ \phi \circ \theta = (x_1, \dots, x_n)A$ を満たす $\theta \in \text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ と $A \in \text{GL}_n(k)$ が存在するとき, ϕ は線形化可能であるという. 特に, A を対角行列にとれるとき, ϕ は対角化可能であるという. ϕ が対角化可能であるための必要十分条件は,

$$k[f_1, \dots, f_n] = k[\mathbf{x}], \quad \phi(f_i) = \alpha_i f_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

を満たす $f_1, \dots, f_n \in k[\mathbf{x}]$ と $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k^\times$ が存在することである. 従って, $\phi \neq \text{id}_{k[\mathbf{x}]}$ が対角化可能ならば, $k[\mathbf{x}]$ の座標 f と $\alpha \in k \setminus \{1, 0\}$ が存在し, $\phi(f) = \alpha f$ を満たす.

$A \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ が, ある $l \geq 1$ に対し $A^l = E$ を満たすとき, A の最小多項式は $x^l - 1$ の因子なので重解を持たない. よって, 行列 A は対角化可能である. 従って, $\mathbf{C}[\mathbf{x}]$ の自己同型は, 線形かつ有限位数 ならば対角化可能である. 次の問題は Kraft [27] の “eight challenging open problems in affine spaces” の 1 つであり, $n \geq 3$ の場合は未解決である (cf. [26]). 上の注意より, 「対角化可能」を「線形化可能」に変えても問題の意味は変わらない.

問題 7.2 (線形化問題) $\mathbf{C}[\mathbf{x}]$ の自己同型は, 有限位数ならば常に対角化可能か?

この問題の主張は非常に強く, 仮にある $d \geq 2$ が存在し, $\mathbf{C}[\mathbf{x}]$ の位数 d の任意の自己同型が対角化可能ならば, $k = \mathbf{C}$ の場合の問題 7.1 が肯定的に解決する. 実際, ζ を 1 の原始 d 乗根とすると, A 代数 $k[\mathbf{x}] = A[z]$ の位数 d の自己同型 ϕ が $\phi(z) = \zeta z$ で定義される. 仮定より ϕ は対角化可能なので, 座標 $p(z)$ と $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \{1, 0\}$ が存在し, $p(\zeta z) = \phi(p(z)) = \alpha p(z)$ を満たす. このとき, $(\alpha - 1)p(z) = p(\zeta z) - p(z)$ は z で割り切れるが, $p(z)$ は座標なので $k[\mathbf{x}]$ の既約元である. 従って, z と $p(z)$ は同伴であり, z も $k[\mathbf{x}]$ の座標である.

問題 7.2 は, 簡約代数群のアフィン空間への作用の線形化可能性を問う「上林の線形化問題」の特別な場合である (cf. [23]). $n = 2$ の場合の上林の問題は肯定的に解決しており, そこでは $\text{Aut}_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x_1, x_2] = \text{T}_2(\mathbf{C})$ であることが本質的な役割を果たす. 高次元では反例が見つかっており, 有限群の場合の反例も存在する (cf. [24], [50], [61]). しかし, 有限アーベル群に対する反例は見つかっていない. なお, $\text{char } k = p > 0$ の場合, 例えば $(x_1 + 1, x_2) \in \text{Aut}_k k[x_1, x_2]$ の位数は p だが, $k^2 \ni (a_1, a_2) \mapsto (a_1 + 1, a_2) \in k^2$ が固定点を持たないので線形化可能でない. 実際, 線形自己同型ならば原点が固定されるので, 線形化可能ならば固定点が必ず存在する. 浅沼 [2] は $n \geq 4$ のとき, 位数が p で割り切れないような有限アーベル群に対して線形化問題の反例を与えた.

係数環が体でない場合の線形化問題を考える. k の標数は任意とし, k が代数閉体であることも仮定しない. R を k 整域とし, G を $\text{Aut}_R R[\mathbf{x}]$ の部分群とする. $\theta^{-1}G\theta$ が

$$D_n(k) := \{(a_1x_1, \dots, a_nx_n) \mid a_1, \dots, a_n \in k^\times\}$$

に含まれるような $\theta \in \text{Aut}_R R[\mathbf{x}]$ が存在するとき, G は対角化可能であるという. R の商体を K とすれば, $\text{Aut}_R R[\mathbf{x}]$ は $\text{Aut}_K K[\mathbf{x}]$ の部分群と見なせる. $\theta^{-1}G\theta \subset D_n(k)$ を満たす $\theta \in \text{Aut}_K K[\mathbf{x}]$ が存在しても, このような θ を $\text{Aut}_R R[\mathbf{x}]$ からとれるとは限らない. そのため, G は K 上で対角化可能でも, R 上で対角化可能であるとは限らない. 次の結果は黒田 [44, Thm. 1.1 (i)] による.

定理 7.3 R が PID のとき, $\text{Aut}_R R[x_1, x_2]$ の部分群 G が K 上で対角化可能ならば, G は R 上で対角化可能である.

定理 7.3 は任意の体 k に対して成り立つが, $k = \mathbf{C}$ で R が \mathbf{C} 上有限生成な PID の場合は Kraft-Russell [28, Thm. 3.2] に含まれる.

定理 7.3 から次の系が従う

系 7.4 R を PID, G を $\text{Aut}_R R[x_1, x_2]$ の有限アーベル部分群とする. k が 1 の原始 d 乗根を含むならば, G は R 上で対角化可能である. ただし, $d := \max\{\text{ord } \phi \mid \phi \in G\}$ とする.

上の系において $R = k[x_3]$ とすれば, $\text{Aut}_k k[x_1, x_2, x_3]$ の有限アーベル部分群の線形化に関する部分的な結果が得られる.

以下では再び k の標数は 0 とする. $0 \neq \delta \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ を任意にとり, $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ の部分群 $\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]$ について考察する. この部分群は, 第 5 節で述べた順交叉の観点からも興味深い. 任意の $D \in \text{LND}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]$ は $k[\mathbf{x}]^D \supset k[\mathbf{x}]^\delta$ を満たすから,

$$\exp D \in \text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^D} k[\mathbf{x}] \subset \text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]$$

が成り立つ. よって,

$$\mathcal{N}_\delta := \{\exp D \mid D \in \text{LND}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]\}$$

は $\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]$ に含まれる. 実は, \mathcal{N}_δ は $\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]$ の正規部分群である. 以下では $\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]$ や剰余群 $(\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}])/\mathcal{N}_\delta$ に関して得られている結果を述べる (cf. [46]).

定理 7.5 $k[\mathbf{x}] \neq (k[\mathbf{x}]^\delta)^{[1]}$ ならば, 剰余群 $(\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}])/\mathcal{N}_\delta$ は k^\times の有限巡回部分群と同型であり, $(\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]) \setminus \mathcal{N}_\delta$ に属する自己同型の位数は常に有限である.

なお, 任意の $0 \neq D \in \text{LND}_k k[\mathbf{x}]$ と $l \geq 1$ に対して $(\exp D)^l = \exp lD \neq \text{id}_{k[\mathbf{x}]}$ が成り立つので, $\mathcal{N}_\delta \setminus \{\text{id}_{k[\mathbf{x}]}\}$ に属する自己同型の位数は常に無限である. また, A を $A^\times \cup \{0\}$ が体であるような \mathbf{Q} 上の UFD とするとき, 定理 7.5 は $k[\mathbf{x}]$, k^\times をそれぞれ A , A^\times に替えても成り立つ.

以下では k を代数閉体とする. 次の 2 つの定理の証明に, 有限位数の自己同型の線形化に関する [44] の結果が使われる.

定理 7.6 $n \geq 3$, $\text{rank } \delta = 2$ と仮定する.

- (1) $(\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]) \setminus \mathcal{N}_\delta$ の任意の元は有限位数かつ線形化可能である.
- (2) δ が既約のとき, $\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}] \neq \mathcal{N}_\delta$ ならば δ は三角化可能である.

ここで, δ が既約であるとは, $\delta(x_1), \dots, \delta(x_n)$ が共通因子を持たないときにいう.

定理 7.7 $n = \text{rank } \delta = 3$ のとき, $(\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}]) \setminus \mathcal{N}_\delta$ の任意の元は有限位数であり, かつ線形化可能でない $(\text{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta} k[\mathbf{x}] = \mathcal{N}_\delta$ の可能性もある).

参考文献

- [1] S. S. Abhyankar, W. Heinzer and P. Eakin, On the uniqueness of the coefficient ring in a polynomial ring, *J. Algebra* **23** (1972), 310–342.
- [2] T. Asanuma, Nonlinearizable algebraic group actions on \mathbf{A}^n , *J. Algebra* **166** (1994), 72–79.
- [3] H. Bass, A nontriangular action of \mathbf{G}_a on \mathbf{A}^3 , *J. Pure Appl. Algebra* **33** (1984), 1–5.
- [4] J. Berson, A. van den Essen and D. Wright, Stable tameness of two-dimensional polynomial automorphisms over a regular ring, *Adv. Math.* **230** (2012), no. 4-6, 2176–2197.
- [5] S. M. Bhatwadekar and A. K. Dutta, On residual variables and stably polynomial algebras, *Comm. Algebra* **21** (1993), no. 2, 635–645.
- [6] S. M. Bhatwadekar and D. Daigle, On finite generation of kernels of locally nilpotent R -derivations of $R[X, Y, Z]$, *J. Algebra* **322** (2009), no. 9, 2915–2926.
- [7] A. J. Crachiola and L. G. Makar-Limanov, An algebraic proof of a cancellation theorem for surfaces, *J. Algebra* **320** (2008), 3113–3119.
- [8] D. Daigle, A necessary and sufficient condition for triangulability of derivations of $k[X, Y, Z]$, *J. Pure Appl. Algebra* **113** (1996), 297–305.
- [9] D. Daigle and G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert’s fourteenth problem in dimension 5, *J. Algebra* **221** (1999), 528–535.
- [10] D. Daigle and G. Freudenburg, Triangular derivations of $\mathbf{k}[X_1, X_2, X_3, X_4]$, *J. Algebra* **241** (2001), 328–339.
- [11] H. Derksen, The kernel of a derivation, *J. Pure Appl. Algebra* **84** (1993), 13–16.
- [12] S. Endo and T. Miyata, Invariants of finite abelian groups, *J. Math. Soc. Japan* **25** (1973), 7–26.
- [13] A. van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Progress in Mathematics, Vol. 190, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2000.
- [14] G. Freudenburg, Local slice constructions in $k[X, Y, Z]$, *Osaka J. Math.* **34** (1997), 757–767.
- [15] G. Freudenburg, Actions of \mathbf{G}_a on \mathbf{A}^3 defined by homogeneous derivations, *J. Pure Appl. Algebra* **126** (1998), 169–181.

- [16] G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert’s fourteenth problem in dimension six, *Transform. Groups* **5** (2000), 61–71.
- [17] G. Freudenburg, *Algebraic theory of locally nilpotent derivations*, Encyclopaedia Math. Sci., 136, Springer, Berlin, 2006.
- [18] T. Fujita, On Zariski problem, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **55** (1979), 106–110.
- [19] N. Gupta, On the cancellation problem for the affine space \mathbb{A}^3 in characteristic p , *Invent. Math.* **195** (2014), no. 1, 279–288.
- [20] N. Gupta, On Zariski’s cancellation problem in positive characteristic, *Adv. Math.* **264** (2014), 296–307.
- [21] A. Hoshi, On Noether’s problem for cyclic groups of prime order, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **91** (2015), no. 3, 39–44.
- [22] H. Jung, Über ganze birationale Transformationen der Ebene, *J. Reine Angew. Math.* **184** (1942), 161–174.
- [23] T. Kambayashi, Automorphism group of a polynomial ring and algebraic group action on an affine space, *J. Algebra* **60** (1979), 439–451.
- [24] F. Knop, Nichtlinearisierbare Operationen halbeinfacher Gruppen auf affinen Räumen, *Invent. Math.* **105** (1991), 217–220.
- [25] H. Kojima and M. Miyanishi, On Roberts’ counterexample to the fourteenth problem of Hilbert, *J. Pure Appl. Algebra* **122** (1997), 277–292
- [26] H. Kraft and G. Schwarz, Finite automorphisms of affine N -space, in *Automorphisms of affine spaces (Curaçao, 1994)*, 55–66, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.
- [27] H. Kraft, Challenging problems on affine n -space, *Astérisque No. 237* (1996), Exp. No. 802, 5, 295–317.
- [28] H. Kraft and P. Russell, Families of group actions, generic isotriviality, and linearization, *Transform. Groups* **19** (2014), 779–792.
- [29] W. van der Kulk, On polynomial rings in two variables, *Nieuw Arch. Wisk.* (3) **1** (1953), 33–41.
- [30] K. Kurano, Positive characteristic finite generation of symbolic Rees algebras and Roberts’ counterexamples to the fourteenth problem of Hilbert, *Tokyo J. Math.* **16** (1993), no. 2, 473–496.
- [31] S. Kuroda, A condition for finite generation of the kernel of a derivation, *J. Algebra* **262** (2003), 391–400.

- [32] S. Kuroda, A generalization of Roberts' counterexample to the fourteenth problem of Hilbert, *Tohoku Math. J.* **56** (2004), 501–522.
- [33] S. Kuroda, A counterexample to the Fourteenth Problem of Hilbert in dimension four, *J. Algebra* **279** (2004), 126–134.
- [34] S. Kuroda, Fields defined by locally nilpotent derivations and monomials, *J. Algebra* **293** (2005), 395–406.
- [35] S. Kuroda, A counterexample to the Fourteenth Problem of Hilbert in dimension three, *Michigan Math. J.* **53** (2005), 123–132.
- [36] S. Kuroda, Hilbert's fourteenth problem and algebraic extensions, *J. Algebra* **309** (2007), no. 1, 282–291.
- [37] S. Kuroda, A generalization of the Shestakov-Umirbaev inequality, *J. Math. Soc. Japan* **60** (2008), 495–510.
- [38] S. Kuroda, Automorphisms of a polynomial ring which admit reductions of type I, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **45** (2009), 907–917.
- [39] S. Kuroda, Shestakov-Umirbaev reductions and Nagata's conjecture on a polynomial automorphism, *Tohoku Math. J.* **62** (2010), 75–115.
- [40] S. Kuroda, Wildness of polynomial automorphisms in three variables, arXiv:math.AC/1110.1466v1.
- [41] S. Kuroda, Wildness of polynomial automorphisms: applications of the Shestakov-Umirbaev theory and its generalization, in *Higher dimensional algebraic geometry*, 103–120, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B24, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto.
- [42] S. Kuroda, Recent developments related to automorphisms of polynomial rings—the solution to the Nagata conjecture and developments thereafter, *Sūgaku* **65** (2013), no. 1, 45–68.
- [43] S. Kuroda, How to prove the wildness of polynomial automorphisms: an example, in *Automorphisms in birational and affine geometry*, 381–386, Springer Proc. Math. Stat., 79, Springer, Cham.
- [44] S. Kuroda, Subgroups of polynomial automorphisms with diagonalizable fibers, *J. Algebra* **435** (2015), 159–173.
- [45] S. Kuroda, A generalization of Nakai's theorem on locally finite iterative higher derivations, to appear in *Osaka Math. J.*
- [46] S. Kuroda, The automorphism group of a UFD over the kernel of a locally nilpo-

- tent derivation, 第 35 回可換環論シンポジウム報告集, 8 ページ.
- [47] S. Kuroda, Hilbert's fourteenth problem and field modifications, in preparation.
 - [48] L. Makar-Limanov, P. van Rossum, V. Shpilrain and J.-T. Yu, The stable equivalence and cancellation problems, *Comment. Math. Helv.* **79** (2004), 341–349.
 - [49] L. Makar-Limanov and J.-T. Yu, Degree estimate for subalgebras generated by two elements, *J. Eur. Math. Soc.* **10** (2008), 533–541.
 - [50] M. Masuda, L. Moser-Jauslin and T. Petrie, Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups: applications, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **88** (1991), 9065–9066.
 - [51] A. A. Mikhalev, V. Shpilrain and J.-T. Yu, *Combinatorial methods*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 19, Springer, New York, 2004.
 - [52] M. Miyanishi, *Curves on rational and unirational surfaces*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 60, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1978.
 - [53] M. Miyanishi and T. Sugie, Affine surfaces containing cylinderlike open sets, *J. Math. Kyoto Univ.* **20** (1980), 11–42.
 - [54] M. Miyanishi, Normal affine subalgebras of a polynomial ring, *Algebraic and Topological Theories—to the memory of Dr. Takehiko Miyata (Tokyo)*, Kinokuniya, 1985, pp. 37–51.
 - [55] M. Nagata, On the fourteenth problem of Hilbert, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1958*, Cambridge Univ. Press, London, New York, 1960, 459–462.
 - [56] M. Nagata, *On Automorphism Group of $k[x, y]$* , Lectures in Mathematics, Department of Mathematics, Kyoto University, Vol. 5, Kinokuniya Book-Store Co. Ltd., Tokyo, 1972.
 - [57] A. Nowicki, *Polynomial derivations and their rings of constants*, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń, 1994.
 - [58] V. L. Popov, On actions of \mathbf{G}_a on \mathbf{A}^n , in *Algebraic groups Utrecht 1986*, 237–242, Lecture Notes in Math., 1271, Springer, Berlin.
 - [59] R. Rentschler, Opérations du groupe additif sur le plan affine, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **267** (1968), 384–387.
 - [60] P. Roberts, An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and

- a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem, *J. Algebra* **132** (1990), no. 2, 461–473.
- [61] G. W. Schwarz, Exotic algebraic group actions, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **309** (1989), 89–94.
- [62] I. P. Shestakov and U. U. Umirbaev, Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials, *J. Amer. Math. Soc.* **17** (2004), no. 1, 181–196.
- [63] I. P. Shestakov and U. U. Umirbaev, The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables, *J. Amer. Math. Soc.* **17** (2004), no. 1, 197–227.
- [64] M. K. Smith, Stably tame automorphisms, *J. Pure Appl. Algebra* **58** (1989), 209–212.
- [65] R. G. Swan, Invariant rational functions and a problem of Steenrod, *Invent. Math.* **7** (1969), 148–158.
- [66] S. Vénéreau, A parachute for the degree of a polynomial in algebraically independent ones, *Math. Ann.* **349** (2011), 589–597.
- [67] V. E. Voskresenskiĭ, On the question of the structure of the subfield of invariants of a cyclic group of automorphisms of the field $Q(x_1, \dots, x_n)$, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **34** (1970), 366–375. MR0274427
- [68] O. Zariski, Interprétations algébriques-géométriques du quatorzième problème de Hilbert, *Bull. Sci. Math.* **78** (1954), 155–168.

〒192-0397 八王子市南大沢 1-1

首都大学東京大学院理工学研究科 数理情報科学専攻