

# Ehrhart 多項式と Ehrhart 環

東谷 章弘 (京都産業大学)

ahigashi@cc.kyoto-su.ac.jp

## 概要

整凸多面体の研究において、整凸多面体に付随する Ehrhart 多項式・Ehrhart 環は非常に重要な研究対象であり、様々な観点 (組合せ論・可換環論・トーリック幾何) から研究が行われている。また、Ehrhart 多項式の母函数に現れる非負整数列である  $h^*$  列はこれらの研究において重要な役割を担う。本稿では、整凸多面体の Ehrhart 多項式・Ehrhart 環の研究として「 $h^*$  列の特徴付け」および「 $h^*$  列の unimodal 性」について紹介する。

## 1 導入

$P \subset \mathbb{R}^d$  を整凸多面体 (lattice polytope)、つまり頂点が全て  $\mathbb{Z}^d$  の点であるような凸多面体とし、 $\dim P = d$  とする。任意の正の整数  $n$  に対し、

$$i(P, n) = |nP \cap \mathbb{Z}^d|$$

と定める。ただし、 $nP = \{n\alpha : \alpha \in P\}$  とする。1962 年に Ehrhart により、この数え上げ函数  $i(P, n)$  が  $n$  に関する  $d$  次多項式でその定数項が 1 であることが証明された。この多項式  $i(P, n)$  は  $P$  の **Ehrhart 多項式** (Ehrhart polynomial) と呼ばれている。さらに、Macdonald により、**Ehrhart–Macdonald 相互法則** (reciprocity law) と呼ばれる等式

$$|nP^\circ \cap \mathbb{Z}^d| = (-1)^d i(P, -n) \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}) \quad (1.1)$$

(ただし  $P^\circ$  は  $P$  の内部を表す) が成立することが証明された。Ehrhart 多項式については [6, Chapter 3–4] (あるいは [14, Part II]) に詳細に書かれているので参照されたい。

また、Ehrhart 多項式の母函数  $1 + \sum_{n \geq 1} i(P, n)t^n$  を考えると、次のような有理関数の形になることが知られている：

$$1 + \sum_{n \geq 1} i(P, n)t^n = \frac{h_0^* + h_1^*t + \cdots + h_d^*t^d}{(1-t)^{d+1}}.$$

この母函数の分子の係数からなる数列  $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$  を  $P$  の  $h^*$  列 ( $h^*$ -vector) と呼ぶ。( $h^*$ -vector は  $\delta$ -vector や Ehrhart  $h$ -vector などとも呼ばれている。) また  $h^*$  列を係

数とする多項式  $h_P^*(t) = h_0^* + h_1^*t + \dots + h_d^*t^d$  を  $P$  の  $h^*$  多項式 ( $h^*$ -polynomial) と呼ぶ。さらに等式 (1.1) により  $(1-t)^{d+1} \sum_{n \geq 1} |nP^\circ \cap \mathbb{Z}^d| t^n = \sum_{j=1}^{d+1} h_{d+1-j}^* t^j$  を得る。特に、

$$\min\{\ell : \ell P^\circ \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset\} = d + 1 - \max\{i : h_i^* \neq 0\} \quad (1.2)$$

が成り立つ。

定義から明らかかもしれないが、 $P$  の Ehrhart 多項式と  $h^*$  列は同値な対象である。実際、 $i(P, n)$  は  $h^*$  列を使って

$$i(P, n) = \sum_{j=0}^d h_j^* \binom{n-d+j}{d}$$

と表される。

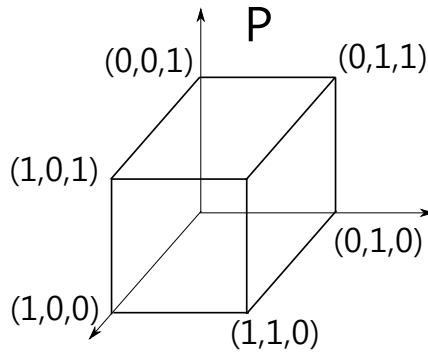
$d$  次元整凸多面体  $P$  の  $h^*$  列  $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$  は次のような性質を満たす。

- $h_0^* = 1$ ,  $h_1^* = |P \cap \mathbb{Z}^d| - (d+1)$ ,  $h_d^* = |P^\circ \cap \mathbb{Z}^d|$  が成り立つ。したがって  $h_1^* \geq h_d^*$  が成り立つ。
- 各  $h_i^*$  は非負整数。
- もし  $P^\circ \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset$  ならば  $1 \leq i \leq d-1$  に対して  $h_i^* \geq h_1^*$  が成立する ([16])。
- $i(P, n)$  の最高時の係数  $(\sum_{j=0}^d h_j^*)/d!$  は  $P$  の体積に一致する ([6, Corollary 3.20, 3.21])。

例 1.1  $P$  を下図のような 3 次元整凸多面体とする。このとき、

$$i(P, n) = (n+1)^3, \quad h^*(P) = (1, 4, 1, 0), \quad h_P^*(t) = 1 + 4t + t^2$$

となる。実際、 $P$  の体積は 1 であり、 $i(P, n)$  の最高次の係数も  $(h^*$  列の和)/3! も 1 である。



注 1.2  $P$  を  $d$  次元整凸多面体とし  $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$  とする。このとき等式 ( $P$  の体積) =  $\sum_{j=0}^d h_j^*/d!$  が成立するが、これはピックの公式の高次元化に他ならない。実際、 $d = 2$  とし、 $h_0^* = 1$  および  $h_1^* = |P \cap \mathbb{Z}^d| - (d+1)$  および  $h_d^* = |P^\circ \cap \mathbb{Z}^d|$  を  $\sum_{j=0}^d h_j^*$  に代入すると

$$\begin{aligned} (P \text{ の面積}) &= \frac{h_0^* + h_1^* + h_2^*}{2!} = \frac{1 + |P \cap \mathbb{Z}^2| - 3 + |P^\circ \cap \mathbb{Z}^2|}{2} \\ &= |P^\circ \cap \mathbb{Z}^2| + \frac{|\partial P \cap \mathbb{Z}^2|}{2} - 1 \end{aligned}$$

を得る。

整凸多面体に付随する次数付き代数を定義する。 $k$  を体とする。整数点  $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d$  に対し、 $\mathbf{X}^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d}$  という Laurent 単項式を定める。整凸多面体  $P \subset \mathbb{R}^d$  に対し、 $k[P]$  を Laurent 単項式の集合  $\{\mathbf{X}^\alpha Y^n : \alpha \in nP \cap \mathbb{Z}^d, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$  で生成される  $k$  代数とする。つまり、

$$k[P] = k[X^\alpha Y^n : \alpha \in nP \cap \mathbb{Z}^d, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}] \subset k[X_1^\pm, \dots, X_d^\pm, Y]$$

とする。この  $k$  代数を  $P$  の **Ehrhart 環** (Ehrhart ring) と呼ぶ。

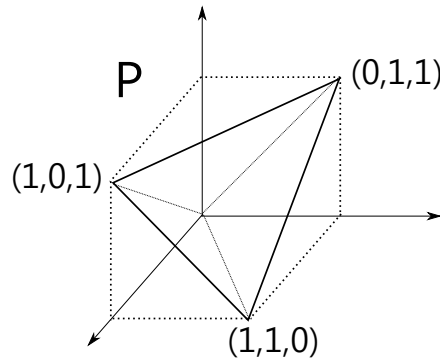
Ehrhart 環は次のような性質を満たす。

- $k[P]$  は  $\deg(\mathbf{X}^\alpha Y^n) = n$  (ただし  $\alpha \in nP \cap \mathbb{Z}^d$ ) という次数付けに関して有限生成次数付き  $k$  代数の構造を持つ。
- $k[P]$  は標準的度数付き (standard graded)、つまり次数 1 の元で生成されるとは限らないが、一般に半標準的度数付き (semi-standard graded)、つまり次数 1 の元で生成される部分環上有限生成加群になる。
- $k[P]$  の Krull 次元は  $\dim P + 1$  に一致する。
- $k[P]$  の Hilbert 関数  $\dim_k(k[P])_n$  は  $i(P, n)$  に一致する。 ( $k[P]$  が Ehrhart 環と呼ばれる所以である。)
- $k[P]$  は正規アフィン半群環の構造を持つ。特に、**Cohen–Macaulay** 整域である。

例 1.3  $P$  を下図のような 3 次元整凸多面体とする。このとき

$$\begin{aligned} k[P] &= k[Y, X_1 X_2 Y, X_1 X_3 Y, X_2 X_3 Y, X_1 X_2 X_3 Y^2] \\ &\cong k[x_1, x_2, x_3, x_4, y] / (x_1 x_2 x_3 x_4 - y^2) \quad (\deg x_i = 1, \deg y = 2) \end{aligned}$$

となる。この Ehrhart 環の例は標準的度数付きではないが半標準的度数付きとなっている。



## 2 整凸多面体の $h^*$ 列の特徴付け

整凸多面体の重要な研究として、下記の 2 つの問題の解決が挙げられる。

**問題 2.1** 任意に与えられた非負整数列  $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}$  が  $d$  次元整凸多面体の  $h^*$  列になるための必要十分条件を与えよ。

**問題 2.2**  $d$  次元整凸多面体の  $h^*$  列  $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$  に対し、 $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$  と同じ  $h^*$  列を持つ  $d$  次元整凸多面体を unimodular 同値を除いて全て分類せよ。

前述の通り、Ehrhart 多項式と  $h^*$  列は同値な対象であるので、問題 2.1 は Ehrhart 多項式の特徴付けを考えていることに他ならない。様々な組合せ論的对象の数え上げ関数が整凸多面体の Ehrhart 多項式として記述できるので、整凸多面体の Ehrhart 多項式を特徴付けることは数え上げ組合せ論において重要な問題であると言える。また、整凸多面体の構造そのものを調べる上では、同じ Ehrhart 多項式 ( $h^*$  列) を持つ整凸多面体を (ある種の同型を除いて) 分類することも非常に自然な問題である。

第 2 章では問題 2.1 を様々な条件の下で考察する。

## 2.1 次元が小さい場合

まず、 $d$  が小さい場合にいつ非負整数列  $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}$  が  $d$  次元整凸多面体の  $h^*$  列になるかを議論する。 $d = 1$  の場合はほとんど自明である。

**命題 2.3** 任意の非負整数  $a$  に対し、 $(1, a)$  は 1 次元整凸多面体 (端点が整数の有界閉区間) の  $h^*$  列になる。

証明:  $P = [0, a + 1] \subset \mathbb{R}$  とすれば良い。 □

$d = 2$  の場合は決して自明ではないが、次の結果が知られている。

**定理 2.4** ([27]) 非負整数  $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し、 $(1, a, b)$  が 2 次元整凸多面体の  $h^*$  列である必要十分条件は  $a, b$  が次のいずれかを満たすときである:

- $b = 0$ ;   •  $1 \leq b \leq a \leq 3b + 3$ ;   •  $a = 7$  かつ  $b = 1$  となる。

$d = 3$  の場合は  $d = 2$  の場合に比べて急に難しくなり、知られている結果はほとんどない。関連する重要な結果といえば、[8, 9] において、 $h_1^* \leq 2$  となる 3 次元整凸多面体を全て分類した (つまり問題 2.2 を  $d = 3$  かつ  $h_1^* \leq 2$  の場合に解決した) 結果があり、その系として  $h_1^* \leq 2$  なる 3 次元整凸多面体の  $h^*$  列の特徴付けが得られる。

## 2.2 体積が小さい場合

次に、 $\sum_{j=0}^d h_j^*$  が小さい場合を考える。第 1 章で紹介したように、 $h^*$  列は  $h_0^* = 1$  や  $h_1^* \geq h_d^*$  を満たすが、さらに次の 2 つ不等式が成り立つことも知られている。 $d$  次元整凸多面体  $P$  の  $h^*$  列  $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$  に対し、 $s = \max\{i : h_i^* \neq 0\}$  とする。このとき

$$h_0^* + h_1^* + \dots + h_i^* \leq h_s^* + h_{s-1}^* + \dots + h_{s-i}^* \quad 0 \leq i \leq s \quad (2.1)$$

が成り立つ ([29])。さらに、

$$h_d^* + h_{d-1}^* + \cdots + h_{d-i}^* \leq h_1^* + h_2^* + \cdots + h_{i+1}^* \quad 0 \leq i \leq d-1, \quad (2.2)$$

が成り立つ ([16, Remark (1.4)])。

つまりこれらの条件は任意に与えられた非負整数列  $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}$  が  $d$  次元整凸多面体の  $h^*$  列であるための必要条件である。逆に、 $\sum_{j=0}^d h_j^* \leq 3$  のとき、これらは十分条件となることも知られている。

**定理 2.5** ([18, Theorem 0.1])  $d \geq 3$  とし、非負整数列  $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}$  は  $h_0^* = 1$  かつ  $\sum_{j=0}^d h_j^* \leq 3$  を満たすとする。このとき  $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$  となる  $d$  次元整凸多面体  $P$  が存在する必要十分条件は  $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$  が不等式 (2.1) および (2.2) を満たすことである。

ただしこの定理は  $\sum_{j=0}^d h_j^* = 4$  のとき成立しない。つまり不等式 (2.1) および (2.2) だけでは十分でないが、[17, Theorem 4.1] において、 $\sum_{j=0}^d h_j^* = 4$  の場合の特徴付けも与えられている。さらに、 $\sum_{j=0}^d h_j^* \geq 5$  の場合に向けて、 $\sum_{j=0}^d h_j^*$  が素数である整単体の  $h^*$  列が満たす条件が [19, Theorem 1.1] において与えられており、この必要条件が  $\sum_{j=0}^d h_j^* = 5$  または 7 のときは十分条件にもなることが知られている ([19, Theorem 1.2, Theorem 1.3])。

## 2.3 次数が小さい場合

$P$  を  $d$  次元整凸多面体とし、 $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$  とする。 $P$  の次数  $\deg(P)$  を

$$\deg(P) = \max\{i : h_i^* \neq 0\}$$

で定める。次数が小さい場合の  $h^*$  列の特徴付けについて考える。

次はよく知られた命題である。

**命題 2.6** (c.f. [6, Theorem 2.4])  $d$  次元整凸多面体  $P \subset \mathbb{R}^d$  に対し、

$$P' = \text{conv}(\{(\alpha, 0) \in \mathbb{R}^{d+1} : \alpha \in P\} \cup \{(0, \dots, 0, 1)\})$$

とおく。 $(P'$  は  $P$  の **lattice pyramid** と呼ばれる。) このとき、 $P'$  は  $d+1$  次元整凸多面体であり、 $h_{P'}^*(t) = h_P^*(t)$  となる。特に、 $\deg(P') = \deg(P)$  が成り立つ。

この命題を念頭に置くと、次数が 1 の  $h^*$  列の特徴付けはほとんど自明である。

**命題 2.7** 任意の正の整数  $a$  および  $d$  に対し、 $(1, a, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}$  は  $d$  次元整凸多面体の  $h^*$  列になる。

証明： $P$  として  $[0, a+1] \subset \mathbb{R}$  を  $(d-1)$  回 lattice pyramid をとったものとすればよい。□

次数が 2 の場合についても次の結果が知られている。

**定理 2.8** ([13, 30]) 非負整数  $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0} (b \neq 0)$  および  $d \geq 2$  に対し、 $(1, a, b, 0, \dots, 0)$  が  $d$  次元整凸多面体の  $h^*$  列である必要十分条件は  $a, b$  が次のいずれかを満たすときである：

- $a \leq 3b + 3$  ;
- $a = 7$  かつ  $b = 1$  となる。

次数が 3 以上の場合については、ほとんど未解決である。そもそも  $d = 3$  の場合が解決していないので完全解決はまだまだ先になりそうな状況である。

## 2.4 対称な場合

$P$  を  $d$  次元整凸多面体とし  $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$  とし  $\deg(P) = s$  とする。このとき  $h^*(P)$  が対称 (symmetric) であるとは  $h_i^* = h_{s-i}^*$  ( $0 \leq i \leq s$ ) が成り立つときに言う。

対称な  $h^*$  列に関して次のことが良く知られている。

**命題 2.9** (1)  $P$  の  $h^*$  列が対称であることと  $P$  の Ehrhart 環が Gorenstein であることは同値である ([29])。

(2)  $P$  の  $h^*$  列が対称かつ  $\deg(P) = d$  であることと  $P$  が反射的凸多面体 (reflexive polytope) と unimodular 同値であることは同値である ([2, 15])。

この命題を考慮すると、対称な  $h^*$  列を研究することは可換環論・トーリック幾何の観点からも重要であると言える。

4 次元以下の反射的凸多面体は完全に分類されている ([22, 23])。つまり  $d \leq 4$  かつ対称な場合に問題 2.2 が解決されている。よってその系として、 $d \leq 4$  かつ対称な場合の  $h^*$  列の特徴付けも得られる。

## 2.5 非零の項が少ない場合

最後に非負整数列  $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$  の非零の項が少ない場合の  $h^*$  列の特徴付けについて考える。この場合、 $h^*$  列の代わりに  $h^*$  多項式  $h_P^*(t)$  を考えた方がわかりやすい。

まずは非零の項が 2 つの場合を考える。

**命題 2.10** 正の整数  $a, d, k$  に対し、 $1 + at^k$  が  $d$  次元整凸多面体の  $h^*$  多項式であるための必要十分条件は  $2k \leq d + 1$  である。

$1 + at^k$  の形をした  $h^*$  多項式を持つ  $d$  次元整凸多面体の分類が、 $k = 1$  の場合は Batyrev–Nill([5])、 $k = (d + 1)/2$  の場合は Batyrev–Hofscheier([3])、 $1 < k < (d + 1)/2$  の場合は Batyrev–Hofscheier([4]) によって解決されている。つまり Batyrev らの一連の仕事により、非零の項が 2 つの場合において問題 2.2 が完全に解決された。

これらの仕事の続きとして、非零の項が 3 つの場合、つまり  $1 + at^k + bt^\ell$  ( $a, b > 0, 1 \leq k < \ell \leq d$ ) の場合が考えられるが、まずは  $\ell = 2k$  かつ  $b = 1$  の場合、つまり対称な場合について考えてみる。

定理 2.11 ([21, Corollary 1.1])  $m \geq 3, d \geq 2, k \geq 1$  を満たす整数  $m, d, k$  に対し、 $1 + (m-2)t^k + t^{2k}$  が  $d$  次元整凸多面体の  $h^*$  多項式である必要十分条件は  $m, d, k$  が次のいずれかを満たすことである：

- $k = 1, 3 \leq m \leq 9, d \geq 2$  (c.f. 定理 2.8 の系として得られる)；
- $k \geq 2, m \in \{3, 4, 6, 8, 9\}, d \geq 3k - 1$ ；
- $k = 2^{\ell-3}a, m = 2^\ell, d \geq 4k - 1$ , ただし  $a \geq 1, \ell \geq 4$ ；
- $k = 3^{\ell-2}a, m = 3^\ell, d \geq 3k - 1$ , ただし  $a \geq 1, \ell \geq 3$  となる。

[21] では実際には、 $1 + (m-2)t^k + t^{2k}$  を  $h^*$  多項式に持つ  $d$  次元整単体を完全に分類している。つまり、非零の項が 3 つで対称な場合において問題 2.2 が解決されている。

## 2.6 今後の課題

[21] の仕事の続きとして、正の整数  $a, b, k, d$  に対して  $1 + at^k + bt^{2k}$  を  $h^*$  多項式に持つ  $d$  次元整凸多面体の分類が今後の課題として挙げられる。Batyrev–Hofscheier([3]) において、 $1 + at^{(d+1)/2}$  という形の  $h^*$  多項式を持つ  $d$  次元整凸多面体が分類されたが、そのような整凸多面体は **Cayley polytope** と呼ばれる非常に特殊な構造を持つ。この結果のある種の一般化として、 $1 + at^{(d+1)/3} + bt^{2(d+1)/3}$  という形の  $h^*$  多項式を持つ  $d$  次元整凸多面体を考えたときに Cayley polytope の構造を持つかどうかを考えるのは自然であり、非常に興味深い。また、次数が 2 の整凸多面体の分類も興味深い。

## 3 整凸多面体の $h^*$ 列の unimodal 性

### 3.1 unimodal 性、log-concave 性、alternatingly increasing 性

非負実数列  $(a_0, a_1, \dots, a_d)$  に対し、

- $(a_0, a_1, \dots, a_d)$  が **unimodal** であるとは、ある  $0 \leq c \leq d$  が存在して

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_c \geq a_{c+1} \geq \dots \geq a_d$$

が成り立つときに言う。

- $(a_0, a_1, \dots, a_d)$  が **log-concave** であるとは、任意の  $1 \leq i \leq d-1$  に対して

$$a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$$

が成り立つときに言う。

- ([26, Definition 2.9])  $a_i > 0$  としたとき、 $(a_0, a_1, \dots, a_d)$  が **alternatingly increasing** であるとは、 $0 \leq i \leq \lfloor (d-1)/2 \rfloor$  で  $a_i \leq a_{d-i}$  が成り立ち、 $1 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor$  で  $a_{d+1-i} \leq a_i$  が成り立つときに言う。つまり、

$$a_0 \leq a_d \leq a_1 \leq a_{d-1} \leq \dots \leq a_{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} \leq a_{d-\lfloor (d-1)/2 \rfloor} \leq a_{\lfloor (d+1)/2 \rfloor}$$

が成り立つときである。

正の実数列が log-concave または alternatingly increasing ならば unimodal である。つまり、log-concave 性と alternatingly increasing 性は unimodal 性より強い性質である。一方で、log-concave 性と alternatingly increasing 性の間には強弱関係はない。(図 1 参照)

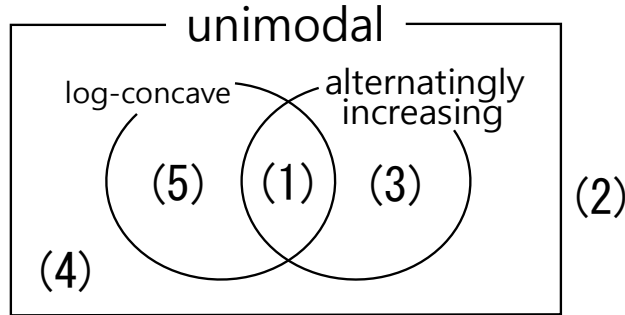


図 1: unimodal 性と関連する 2 つの性質

例 3.1  $(1, 2, 4, 5, 4, 3, 2)$  は log-concave かつ alternatingly increasing な数列である。つまり、図 1 の (1) に対応するものである。

次の例は図 1 の (2)、(3)、(4)、(5) それぞれに対応する数列である。

(2)  $(1, 2, 3, 2, 3, 2, 2)$  (3)  $(1, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1)$  (4)  $(1, 1, 2, 3, 1)$  (5)  $(1, 2, 3, 4, 5, 3, 1)$

### 3.2 IDP を持つ整凸多面体の $h^*$ 列の unimodal 性

整凸多面体の  $h^*$  列の研究において、次の問題の解決も重要な研究の 1 つである。

問題 3.2 (c.f. [26, Question 1.1])  $P \subset \mathbb{R}^d$  を整凸多面体とし、 $P^\circ \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset$  とする。また  $P$  の Ehrhart 環が標準的度数付きであると仮定する。このとき、 $P$  の  $h^*$  列は常に unimodal になるか？もしくは、log-concave になるか？alternatingly increasing になるか？

注 3.3 (1) 問題 3.2 では、 $P^\circ \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset$  なる整凸多面体  $P$  を考えているが、これは  $P$  の  $h^*$  列  $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$  が正の整数列になるための条件である。実際、 $h_d^* = |P^\circ \cap \mathbb{Z}^d|$  より、 $P^\circ \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset$  ならば  $h_d^* > 0$  を得る。一方で、 $h_1^* \geq h_d^*$  が一般に成り立ち、さらに [16] より  $h_i^* \geq h_1^*$  ( $1 \leq i \leq d-1$ ) が成り立つので、 $h_i^* > 0$  ( $1 \leq i \leq d-1$ ) を得る。

(2)  $P$  の Ehrhart 環  $k[P]$  が標準的度数付きであることと  $P$  が **integer decomposition property (IDP)** を持つことは同値である。ここで、 $P$  が IDP を持つとは、任意の正の整数  $n$  および任意の  $\alpha \in nP \cap \mathbb{Z}^d$  に対し、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in P \cap \mathbb{Z}^d$  が存在して  $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  と表せるときに言う。

(3) Stanley ([28]) によって次の主張が予想された：標準的度数付き Cohen–Macaulay 整域の  $h$  列は常に log-concave である。この予想は未解決と思われる。(おそらく反例も見つかって



いない。) 整凸多面体の  $h^*$  列は、Ehrhart 環という Cohen–Macaulay 整域の  $h$  列に他ならないので、問題 3.2 はこの Stanley の予想の特別な場合を考えていることになる。

**注 3.4** 数え上げ組合せ論の文脈で登場する整数列の unimodal 性や log-concave 性は昔からよく調べられていたが、alternatingly increasing 性はほとんど調べられていない。しかし  $h^*$  列に関して言えば、alternatingly increasing 性は不等式 (2.1) と (2.2) を考慮すると自然に考えられるべきものである。

整凸多面体  $P$  に対して  $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$  とし  $\deg(P) = d$  と仮定する。このとき不等式 (2.1) および (2.2) が成り立つので、 $0 \leq i \leq \lfloor (d-1)/2 \rfloor$  に対して  $h_0^* + h_1^* + \dots + h_i^* \leq h_d^* + h_{d-1}^* + \dots + h_{d-i}^* \leq h_1^* + h_2^* + \dots + h_{i+1}^*$  が成り立つ。一方で、alternatingly increasing とは  $0 \leq i \leq \lfloor (d-1)/2 \rfloor$  に対して  $h_i^* \leq h_{d-i}^* \leq h_{i+1}^*$  が成り立つことである。つまり、alternatingly increasing 性は不等式 (2.1) および (2.2) を少しだけ強めた条件であると思える。

問題 3.2 は次のような部分的な結果が知られている。

1. 5次元以下の反射的凸多面体の  $h^*$  列は unimodal である。さらに、6次元以上の任意の反射的凸多面体の  $h^*$  列も unimodal であると予想された ([14, §34]) が、Mustařa や Payne ([24, 25]) によって反例が構成された。しかし、それらの反例は全て IDP を持たないので、問題 3.2 の反例にはなっていない。
2. Bruns–Römer ([11]) によって、正則 unimodular 三角形分割を持つ反射的凸多面体の  $h^*$  列が常に unimodal であることが証明されている。ここで、整凸多面体が正則 unimodular 三角形分割を持つならば IDP を持ち、反射的凸多面体は内部に原点を唯一の整数点として含むので、[11] の結果は問題 3.2 の部分的解決になっている。
3. Birkhoff 多面体の  $h^*$  列は log-concave である ([1])。また内部に整数点を含む一般次元の平行六面体は alternatingly increasing である ([26])。

### 3.3 膨らませた整凸多面体の $h^*$ 列 (図 1(1) の $h^*$ 列)

問題 3.2 の部分的解決として、下記のような結果も知られている。

**定理 3.5** ([20, Theorem 1.2])  $P \subset \mathbb{R}^d$  を  $d$  次元整凸多面体とし、 $s = \deg(P)$  とする。正の整数  $m$  に対して、 $h^*(mP) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$  とする。このとき次が成立する。

- (i)  $m \geq s$  ならば  $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$  は log-concave である。
- (ii)  $m \geq \max\{s, d+1-s\}$  ならば  $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$  は alternatingly increasing である。

一方で、[10] および [7] において次が証明されている： $d$  次元整凸多面体  $P$  に対して、ある整数  $n_d$  が存在して、任意の  $m \geq n_d$  に対して  $mP$  の  $h^*$  列は log-concave かつ alternatingly increasing になる。定理 3.5 は  $n_d$  の下限を与えており、 $\max\{s, d+1-s\}$  という下限はある意味で最良なものである。実際、定理 3.5 と同じ記号を用いると、(1.2) から  $m \geq d+1-s$

と  $mP^\circ \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset$  が同値であることがわかるし、[12, Theorem 1.1] から  $m \geq s$  ならば  $mP$  は IDP を持つこともわかる。したがって、問題 3.2 の設定を満たす整凸多面体として  $m \geq \max\{s, d+1-s\}$  に対する  $mP$  を考えるのが妥当であり、その場合に  $mP$  の  $h^*$  列は log-concave かつ alternatingly increasing になる。

### 3.4 様々な $h^*$ 列の例 ((2)、(3)、(4)、(5) の $h^*$ 列)

定理 3.5 は図 1 の (1) に対応する  $h^*$  列の例であった。本章では残りの (2)、(3)、(4)、(5) に対応する  $h^*$  列の例について紹介する。

その前に、いくつか注意をしておく。 $P$  を  $\deg(P) = d$  なる  $d$  次元整凸多面体とすると、 $d \leq 4$  ならば  $h^*(P)$  は常に alternatingly increasing である。また、 $d \leq 3$  かつ  $P$  が IDP を持つならば  $h^*(P)$  は常に log-concave である。

**例 3.6** ([20, Section 3]) (2) の  $h^*$  列 : 任意の  $d \geq 5$  と任意の  $m \geq 1$  に対し、 $d$  次元整凸多面体  $P$  で  $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$  が  $h_d^* = m$  かつ unimodal でないものが存在する。例えば、

$$P = \text{conv}((0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, 0), (32, 55, 55, 55, 55, 55, 56)) \subset \mathbb{R}^7$$

とすると、 $h^*(P) = (1, 4, 10, 11, 7, 10, 10, 3)$  となる。(一般には、 $P$  の最後の頂点の座標が  $d$  と  $m$  によって決まり、それに応じて  $h^*$  列が変わる。)

(3) の  $h^*$  列 : 任意の  $d \geq 4$  と任意の  $m \geq 1$  に対し、 $d$  次元整凸多面体  $P$  で  $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$  が  $h_d^* = m$  かつ alternatingly increasing であるが log-concave でないものが存在する。例えば、

$$P = \text{conv}((0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, 0), (65, 65, 65, 84, 84, 84, 85)) \subset \mathbb{R}^7$$

とすると、 $h^*(P) = (1, 5, 9, 13, 33, 12, 8, 4)$  となる。(一般には、 $P$  の最後の頂点の座標が  $d$  と  $m$  によって決まり、それに応じて  $h^*$  列が変わる。)

(4) の  $h^*$  列 : 任意の  $d \geq 5$  の奇数と任意の  $m \geq 1$  に対し、 $d$  次元整凸多面体  $P$  で  $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$  が  $h_d^* = m$  かつ unimodal であるが alternatingly increasing でも log-concave でもないものが存在する。例えば、

$$P = \text{conv}((0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, 0), (32, 37, 37, 37, 37, 37, 38)) \subset \mathbb{R}^7$$

とすると、 $h^*(P) = (1, 3, 6, 7, 6, 6, 6, 3)$  となる。(一般には、 $P$  の最後の頂点の座標が  $d$  と  $m$  によって決まり、それに応じて  $h^*$  列が変わる。)

(5) の  $h^*$  列 :  $h^*$  列が log-concave であるが alternatingly increasing でない整凸多面体の例に関して、次元が小さいところではいくつか例を構成することが出来ているが、一般次元での存在はまだわかっていない。例えば、

$$P = \text{conv}((0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, 1, 0, 0), (2, 2, 2, 2, 3, 0), (16, 16, 16, 16, 3, 30)) \subset \mathbb{R}^6$$

とすると、 $h^*(P) = (1, 6, 20, 22, 23, 15, 3)$  となる。

### 3.5 今後の課題

例 3.6 以外の  $h^*$  列の例を (存在するのであれば) 構成したい。例えば、

- 6 以上の偶数次元整凸多面体の  $h^*$  列で unimodal だが alternatingly increasing でも log-concave でもないもの
- 5 以上の任意の次元での整凸多面体の  $h^*$  列で log-concave だが alternatingly increasing でないもの

などが挙げられる。

また、注 3.4 で述べたように、alternatingly increasing 性は不等式 (2.1) および (2.2) を少しだけ強めた条件にすぎないので、何か整凸多面体に “良い” 性質を仮定すれば自然に成り立ってもおかしくない性質であると思われる。どのような “良い” 性質が  $h^*$  列の alternatingly increasing 性を導くかを代数的・組合せ論的な観点から調べていきたい。

### 参考文献

- [1] C. Athanasiadis, Ehrhart polynomials, simplicial polytopes, magic squares and a conjecture of Stanley, *J. Reine Angew. Math.* **583** (2005), 163–174.
- [2] V. Batyrev, Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi–Yau hypersurfaces in toric varieties, *J. Algebraic Geom.* **3** (1994), 493–535.
- [3] V.V. Batyrev and J. Hofscheier, A generalization of a theorem of G. K. White, arXiv:1004.3411, (2010).
- [4] V.V. Batyrev and J. Hofscheier, Lattice polytopes, finite abelian subgroups in  $SL(n; \mathbb{C})$  and coding theory, arXiv:1309.5312, (2013).
- [5] V.V. Batyrev and B. Nill, Multiples of lattice polytopes without interior lattice points. *Mosc. Math. J.*, **7** (2007), 195–207.
- [6] M. Beck and S. Robins, “Computing the Continuous Discretely”, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2007.
- [7] M. Beck and A. Stapledon, On the log-concavity of Hilbert series of Veronese subrings and Ehrhart series, *Math. Z.* **264** (2010), 195–207.
- [8] M. Blanco and F. Santos, Lattice 3-polytopes with five lattice points, arXiv:1409.6701, 2014.
- [9] M. Blanco and F. Santos. Lattice 3-polytopes with six lattice points, arXiv:1501.01055, 2015.
- [10] F. Brenti and V. Welker, The Veronese construction for formal power series and graded algebras, *Adv. in Appl. Math.* **42** (2009), 545–556.
- [11] W. Bruns and T. Römer,  $h$ -vectors of Gorenstein polytopes, *J. Combin. Theory Ser. A* **114** (2007), 65–76.
- [12] D. A. Cox, C. Haase, T. Hibi and A. Higashitani, Integer decomposition property of dilated polytopes, *Electron. J. Comb.* **21** (2014), 1–17.

- [13] M. Henk and M. Tagami, Lower bounds on the coefficients of Ehrhart polynomials, *European J. Combinatorics*, **30** (2009), 70–83.
- [14] T. Hibi, “Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes”, Carslaw Publications, Glebe NSW, Australia, 1992.
- [15] T. Hibi, Dual polytopes of rational convex polytopes, *Combinatorica* **12** (1992), 237–240.
- [16] T. Hibi, A lower bound theorem for Ehrhart polynomials of convex polytopes, *Adv. in Math.* **105** (1994), 162 – 165.
- [17] T. Hibi, A. Higashitani and N. Li, Hermite normal forms and  $\delta$ -vectors, *J. Comb. Theory Ser. A* **119** (2012), 1158–1173.
- [18] T. Hibi, A. Higashitani and Y. Nagazawa, Ehrhart polynomials of convex polytopes with small volume, *European J. Combinatorics* **32** (2011), 226–232.
- [19] A. Higashitani, Ehrhart polynomials of integral simplices with prime volumes, *INTEGERS*, **14** A45 (2014), 1–15.
- [20] A. Higashitani, Unimodality on  $\delta$ -vectors of lattice polytopes and two related properties, arXiv:1411.5250.
- [21] A. Higashitani, B. Nill and A. Tsuchiya, Gorenstein polytopes with trinomial  $h^*$ -polynomials, arXiv:1503.05685.
- [22] M. Kreuzer and H. Skarke, On the classification of reflexive polyhedra, *Comm. Math. Phys.* **185** (1997), 495–508.
- [23] M. Kreuzer and H. Skarke, Classification of polyhedra in three dimensions, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998), 853–871.
- [24] M. Mustața and S. Payne, Ehrhart polynomials and stringy Betti numbers, *Math. Ann.* **113** (2006), 718–725.
- [25] S. Payne, Ehrhart series and lattice triangulations, *Discrete Comput. Geom.* **40** (2008), 365–376.
- [26] J. Schepers and L. Van Langenhoven, Unimodality Questions for Integrally Closed Lattice Polytopes, *Ann. Comb.* **17** (2013), 571–589.
- [27] P. R. Scott, On convex lattice polygons, *Bull. Austral. Math. Soc.* **15** (1976), 395 – 399.
- [28] R.P. Stanley, Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry, Graph Theory and Its Applications: East and West, *New York Acad. Sci.* **576** (1989), 500 – 535.
- [29] R. P. Stanley, On the Hilbert function of a graded Cohen–Macaulay domain, *J. Pure and Appl. Algebra* **73** (1991), 307 – 314.
- [30] J. Treutlein, Lattice polytopes of degree 2, *J. Comb. Theory. Ser. A*, **117** (2010), 354–360.