岩澤理論の高次元化をとりまく風景

落合理 (大阪大学理学研究科)

CONTENTS

1. イデアル類群の円分岩澤理論の復習: 岩澤理論は何をしたい理論なのか?

今回は, 岩澤理論の高次元化[1]の現状について概説する機会をいただいた. ここでは, 講演で話した流れに沿って可能な限り, 今の風景と展望を記すことを試みた. しかしながら, 著者の展望能力も知識も限られているので自分の視界が及ぶ範囲でしか紹介できなかった. そもそも, 同じものを目にしてもみている世界の階層が完全に違うこともあるかもしれない. また, かなり偏った風景を描写してしまっているかもしれないことも懸念されるがその点もご容赦願いたい.

さて, 一般化の現状を概説するには当然古典的な状況を認識していることが前提となる. 必ずしも専門家でない読者を想定して, この節では駆け足で古典的なイデアル類群の円分岩澤主予想を振り返りたい.

まず, 記号や概念を固定しておく. p: 奇素数 (以下固定する), N: p と素な自然数とする. 各自然数 n ごとに, $A_n := \mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\zeta_{Np^n}))[p^\infty]$, $G_{\mathrm{cyc},n} := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{Np^n})/\mathbb{Q}(\zeta_N))$ とする.

代数的側面 (Selmer 群)

岩澤理論には, 代数的側面と解析的側面がある. その両側面の理解を深めたり, あるいはその両側を結ぶ岩澤主予想を考えたい. まず代数的側面から振り返る.

次は「岩澤代数的類数公式」と呼ばれ, 代数体の族における類数に関する数少ない一般的な結果であり, 岩澤による無限次の円分塔を考えるアイデアの重要性を示す最初の金字塔である.

[1]高次元化とはそもそも何であるかについては 2 節の最後の方も参照のこと.

定理 1.1 (岩澤, 1950 年代)**.** 非負整数 λ_p, μ_p と整数 ν_p が存在して, 十分大きな n で

$$\#A_n = p^{\lambda_p n + \mu_p p^n + \nu_p}$$

が成り立つ. (実は *Ferrero-Washington* によって $\mu_p = 0$ が示されている)

今, A_n に $G_{\mathrm{cyc},n}$ が作用することより, イデアル類群の順極限 $\mathcal{A} := \varinjlim_n A_n$ にはガロワ群の逆極限 $G_{\mathrm{cyc}} := \varprojlim_n G_{\mathrm{cyc},n}$ が作用する. (無限次拡大のガロワ理論より, $G_{\mathrm{cyc}} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{Np^\infty})/\mathbb{Q}(\zeta_N))$ であることにも注意する)

以下では, **岩澤代数**とよばれる完備群環 $\Lambda_{\mathrm{cyc}} := \mathbb{Z}_p[[G_{\mathrm{cyc}}]]$ が大事な役割を演じる. 完備群環は日常生活で馴染みのない人も多いので, つきあうのに不安を感じるかもしれない. ただ, 岩澤-Serre の同型によって Λ_{cyc} は $\mathbb{Z}_p[[X]]$ の $p-1$ 個の直積に非標準的に同型をつくれるので, 安心して付き合っていただきたい.

今, $\mathcal{X} := \mathcal{A}^\vee$ とおくと, $\mathcal{X}$ は自然に有限生成 Λ_{cyc} 加群とみなされる.
注: 一般に, 有限生成 Λ_{cyc} 加群のことを**岩澤加群**とよぶ.

岩澤代数的類数公式の（証明の）系として次が得られる.

定理 1.2 (岩澤, 1950 年代)**.** $\mathcal{X}$ は有限生成ねじれ Λ_{cyc} 加群である.

今, 普通の有限次代数体のイデアル類群を $\mathbb{Z}$ 加群とみなしたり, イデアル類群の p 部分を $\mathbb{Z}_{(p)}$ 加群や $\mathbb{Z}_p$ 加群とみなすとき, それらは有限なのでねじれ加群である. 一般に, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{(p)}$, $\mathbb{Z}_p$ などの高さ 1 の素イデアルによる剰余体が有限な環においては, 有限生成加群に対して, ねじれ的であることと有限であることは同値である. よって, この類似からみたときに上の定理は代数的整数論におけるイデアル類群の有限性定理の岩澤理論的な類似物 (対応物) であると捉えられる.

解析的側面 (p 進 L 函数)
次に解析的な側面に話を移す. 後で現れる p 進 L 函数が話の主人公であるが, いきなりそれを紹介する前に, 少し寄り道になるがアルキメデス的な世界と非アルキメデス的な世界の類似に注意しておくことは有用であろう.

アルキメデス世界と非アルキメデス世界の類似の復習
複素平面やその上の正則函数の環はアルキメデス的な世界での大事な対象である. 次のような類似が基本である.

$$\text{複素平面}\ \mathbb{C} \overset{\text{類似}}{\longleftrightarrow} G_{\mathrm{cyc}}\ \text{上の}\ p\ \text{進連続}\ (1\ \text{次})\ \text{指標の集合}$$

$$\mathbb{C}\ \text{上の正則函数の環} \overset{\text{類似}}{\longleftrightarrow} \text{岩澤代数}\ \Lambda_{\mathrm{cyc}}$$

G_{cyc} の (1 次) 指標は G_{cyc} の位相的生成元を固定するとその行き先で一意に決まるので, (1 次) 指標全体の集合は p 進単位開円盤と思える. 上では複素平面ではなく複素平面の原点の周りの複素単位開円盤と対比するのがより正確だったかもしれない. しかしながら, 次のような類似も大事なので, ここでは複素平面を対比させた.

$$\mathbb{C}\ \text{の中の整数点} \overset{\text{類似}}{\longleftrightarrow} G_{\mathrm{cyc}}\ \text{上の}\textbf{数論的指標}\text{の集合}$$

ただし, $\chi_{\mathrm{cyc}}: G_{\mathrm{cyc}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$ を標準的な p 進円分指標とするとき,

$$\text{連続指標}\ \eta:\ G_{\mathrm{cyc}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times\ \text{が}\textbf{数論的指標}$$
$$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}\ \text{ある整数}\ w\ \text{と位数有限の指標}\ \phi\ \text{が存在し},\ \eta = \chi_{\mathrm{cyc}}^w \phi$$

と定義する. 上の整数 w は η に対して一意に定まり, η の「重さ」と呼ばれる. 岩澤代数は複素関数論の正則函数の環の類似であるので, 例えば岩澤代数の元に対しても一致の定理などが成り立つことが知られている.

ψ を導手 N の Dirichlet 指標とし, $\mathbb{Z}_p[\psi]$ を $\mathbb{Z}_p$ に ψ の値を付け加えた環とする. 次が Riemann ゼータ函数 $\zeta(s)$ や Dirichlet L 函数 $L(\psi, s)$ の p 進類似となる p 進 L 函数である.

定理 1.3 (久保田-Leopoldt, Mazur, Coleman, 岩澤, 他)**.** $L_p(\psi) \in \frac{1}{\gamma - \chi_{\mathrm{cyc}}(\gamma)}\Lambda_{\mathrm{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\psi]$ が存在して, 重さ $j \leq 0$ の勝手な数論指標 $\chi_{\mathrm{cyc}}^j \phi$ に対して

$$\chi_{\mathrm{cyc}}^j \phi(L_p(\psi)) = \left(1 - \frac{(\psi\phi^{-1})(p)}{p^j}\right) L(\psi\phi^{-1}, j)$$

なる補間性質が成り立つ. ここで, γ は G_{cyc} の位相的生成元とする. 加群 $\frac{1}{\gamma - \chi_{\mathrm{cyc}}(\gamma)}\Lambda_{\mathrm{cyc}}$ は γ の選び方に依存しないことに注意する. また, 一致の定理により, $L_p(\psi)$ は上の補間性質で一意に特徴付けられる. また, $\psi \neq \mathbf{1}$ ならば, 極はなく $L_p(\psi) \in \Lambda_{\mathrm{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\psi]$ となる.

しばしば, この p 進 L 函数は最初の仕事である久保田-Leopoldt の名前をとって[2]「久保田-Leopoldt の p 進 L 函数」とよばれる. このような, p 進 L 函数を「構成」するのは非自明な問題であるが, 上の p 進 L 函数には様々な別構成が知られている. 様々な別証明があることによって, 我々に豊かな理解を提供されると同時に応用上でも一長一短がある. p 進 L 函数のいくつかの構成に対してコメントしておく.

- 岩澤による Stickelberger 元を使った構成で p 進 L 函数を群環の元として理解出来るようになった. また, 他の構成に比べて有限指標 ϕ での値も計算しやすいなどの利点もある.
- Mazur による Γ-transform を使った構成では p 進 L 函数が調べやすい多項式的なものからの変換となる. これによって, しばしば μ 不変量をはじめとした p 進 L 函数の性質を調べるのに役立つことがある.
- Coleman による円単数の Euler 系を使った構成は, Rubin による円単数の Euler 系を使った岩澤主予想の証明でイデアル類群と p 進 L 函数を結びつける大事な仲立ちとなる.

岩澤主予想

岩澤主予想を述べるのに大事な言葉を準備する.

[2]久保田-Leopoldt の構成はここで定式化したような群環の元を与えているわけではなく, その意味ではここでの定式化よりも若干弱いかもしれない.

定義 1.1. *R を UFD, M を有限生成ねじれ R 加群とするとき,* **特性イデアル***を,*

$$\mathrm{char}_R M := \prod_{\mathfrak{p}:R\ \text{の高さ 1 の素イデアル}} \mathfrak{p}^{\ell(\mathfrak{p};M)}$$

と定義する. ただし, $\ell(\mathfrak{p};M) = \mathrm{length}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}$ とする. また, M がねじれ加群でないときには $\mathrm{char}_R M := 0$ とする.

$\mathcal{X}_\psi$ を $\mathcal{X}$ の $(\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$ 作用に関する$)$ 最大 ψ 部分とすると, 先の岩澤の定理によって $\mathcal{X}_\psi$ は有限生成ねじれ $\Lambda_{\mathrm{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\psi]$ 加群となることに注意する.

岩澤によって提出された「イデアル類群の円分岩澤主予想」は以下のように述べられる:

定理 1.4 (岩澤主予想; Mazur-Wiles の定理)**.** *次の $\Lambda_{\mathrm{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\psi]$ のイデアルの等式が成り立つ:*

$$\mathrm{char}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[\psi]} \mathcal{X}_\psi = (L_p(\psi)\ \text{の分子}).$$

岩澤主予想の証明に関するコメント

定理 1.4 の証明のためには, 次のイデアル類群の岩澤理論に限定された特殊事情が大事である.

命題 1.1 (**解析的類数公式の原理**)**.**

$$(a)\quad \text{全ての}\ \psi\ \text{で},\ \mathrm{char}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[\psi]} \mathcal{X}_\psi \subset (L_p(\psi)\ \text{の分子})$$

または

$$(b)\quad \text{全ての}\ \psi\ \text{で},\ \mathrm{char}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[\psi]} \mathcal{X}_\psi \supset (L_p(\psi)\ \text{の分子})$$

の何れかを示せば岩澤主予想の等式が正しい

この特殊事情に基づいて次の 2 種類の証明が知られている.

- Mazur-Wiles による最初の証明においては, Eisenstein イデアルの方法によって, (a) の包含関係が示された.
- Rubin の円単数の Euler 系による別証明においては, (b) の包含関係が示された.

ここでは, これらの証明がどのようなものであるかについては説明しないが, 後の 3 節の楕円曲線の岩澤理論のところで, もう少し説明を加える予定である.

高次元以外の別の一般化の可能性

これから岩澤理論を「高次元化」する話に入る前に「高次元化以外の一般化」について少しだけコメントしておく. 以降の高次元化の設定とそれ以外の一般化の「ファイバー積」をとることでまた新しい問題を考えられるかもしれない.

- 高次 Fitting イデアルを用いた**精密化された岩澤理論**が栗原氏をはじめとした人々によって研究されている.

Fitting イデアルについて簡単に復習する. R を可換環, M を有限表示を持つねじれ R 加群とするとき, M の表示

$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

をとる. i **次 Fitting イデアル**を上の表示が定める $m \times n$ 行列の $n-i$ 次小行列式全体で生成されるイデアルとして $\mathrm{Fitt}_{R,i}M$ と記す. R が一般の UFD としたとき, 0 次 Fitting イデアル $\mathrm{Fitt}_{R,0}M$ の reflexive closure が特性イデアルに等しい. また, R が特に PID のときには, 有限生成ねじれ R 加群 M, N が同型であるための必要十分条件はすべての $i \geq 0$ で $\mathrm{Fitt}_{R,i}M = \mathrm{Fitt}_{R,i}N$ となることである. こういった意味で Fitting イデアルは特性イデアルより精密な情報を復元すると言える.

さて, 栗原氏をはじめとした人々に研究される精密化された岩澤理論においては, 各 i で i 次の Stickelberger イデアル Θ_i を定め,

$$\mathrm{Fitt}_i \mathcal{X}_\psi = \Theta_i$$

が成り立つという形の岩澤主予想を期待する. この定式化に合わせて Euler 系の理論を精密化するなどの研究が行われている.

- 1 の p ベキ根を付け加えて得られる $\mathbb{Z}_p$ 拡大の代わりに, 半直積 $\mathbb{Z}_p \ltimes \mathbb{Z}_p$ や $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ などの非可換な p 進 Lie 群をガロワ群に持つ p 進 Lie 拡大上でイデアル類群や p 進 L 函数を考える**非可換岩澤理論**が Coates 氏らによって研究されている. 最終的に非可換岩澤理論を定式化した Coates-Fukaya-Kato-Sujatha-Venjokob の論文では既に楕円曲線を中心に定式化されていた. しかしながら, イデアル類群の場合でも非可換岩澤理論は非自明であり, 上述の Coates-Fukaya-Kato-Sujatha-Venjokob の論文ののち, Burns, 加藤, 原などによる研究を得て, Kakude や Ritter-Weiss によって最終的にイデアル類群に対する非可換岩澤理論が解決した.
- 元々の岩澤理論では円分塔 $\mathbb{Q}(\zeta_{Np^\infty})$ の上の p イデアル類群で得られる岩澤加群を考えた. 言い換えると, $\mathbb{Q}(\zeta_{Np^\infty})$ 上の最大不分岐アーベル p 拡大 L_∞ のガロワ群 $\mathrm{Gal}(L_\infty/\mathbb{Q}(\zeta_{Np^\infty}))$ からなるガロワ加群を考えた. $L_\infty^{(1)} = L_\infty$, $L_\infty^{(n)}$ を $L_\infty^{(n-1)}$ 上の最大不分岐アーベル p 拡大とすることで $L_\infty^{(n)}/L_\infty^{(n-1)}$ のガロワ群からなる岩澤加群が逐次考えられ, 面白い研究対象となる. このような**類体塔の岩澤理論**が尾崎氏をはじめとした人々により研究されている.
- 後で説明するように, イデアル類群の一般化としてガロワ表現の Selmer 群の概念があり, 絶対ガロワ群 $G_\mathbb{Q}$ のガロワ表現 A に対する Selmer 群は, ガロワコホモロジー群 $H^1(\mathbb{Q}, A)$ の適当な局所条件による部分群として定義される. Selmer 群を定義する係数ガロワ加群を非可換な群に一般化する**非可換係数の岩澤理論** (佐久川憲児 2013 年度大阪大学博士論文) の研究もある. Minhyong Kim 氏の定義した Selmer variety の torsion 版を定義して円分塔での振る舞いなどが調べられている. 非可換係数のガロワコホモロジーは点付き集合ではあるがもはや群にはならず, 点付き集合の取り扱いの言葉などの一般的な枠組みの整備も必要となることに注意する.

2. 高次元化による一般化の道: 高次元化とは何だろうか？

イデアル類群に続く最初の一般化の試み

イデアル類群の岩澤理論の成功をうけてもっと一般の数論的対象に岩澤理論を高次元化する動きが現れる. イデアル類群の次に研究が試みられたのは, Mazur, Greenberg, Coates らによる「p 通常的な楕円曲線の岩澤理論」である. 特に以下が主要なポイントである.

(1) Selmer 群の振る舞い (Mazur のコントロール定理, 1970 年頃)
(2) p 進 L 函数の構成 (Mazur–Swinnerton-Dyer 他)
(3) 岩澤主予想の提出 (Mazur, 1970 年頃)

これらをもう少し詳しく説明していきたい.

代数的側面 (Selmer 群)

E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とするとき, 代数体 F 上での E の p-Selmer 群を次で定義する:

$$\mathrm{Sel}_E(F) := \mathrm{Ker}\left[H^1(F, E[p^\infty]) \longrightarrow \prod_{v:F\text{ の素点}} \frac{H^1(F_v, [p^\infty])}{E(F_v)\otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}\right].$$

Selmer 群には, 次の完全列がある:

$$0 \longrightarrow E(F)\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathrm{Sel}_E(F) \longrightarrow Ш_E(F)[p^\infty] \longrightarrow 0.$$

この短完全列において, Mordell-Weil 群 $E(F)\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ は代数体における単数群の楕円曲線類似, Tate-Shafarevich 群 $Ш_E(F)$ は代数体におけるイデアル類群の楕円曲線類似である.

$F = \mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$ の場合を考えよう. $\mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee$ に自然に G_{cyc} が作用し, 簡単な議論によって $\mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee$ は有限生成 Λ_{cyc} 加群となることが知られている.

次は上述の岩澤の定理の楕円曲線類似である

定理 2.1 (Rubin-Rohrlich, 加藤-Rohrlich)**.** p で通常還元 *(ordinary reduction)* を持つと仮定すると, $\mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee$ は有限生成ねじれ Λ_{cyc} 加群である

証明には Euler 系が必要であり, イデアル類群のときの場合の岩澤の定理の証明に比べて大変な道のりである. 後で岩澤主予想の証明と合わせて追加説明する.

解析的側面 (p 進 L 函数)

E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とするとき,

$$L(E,s) = \prod_{\ell:\text{ 素数}, E\text{ が良還元}} \frac{1}{(1-a_\ell(E)\ell^{-s}+\ell^{1-2s})} \times (\text{悪い Euler 因子})$$

と Euler 積で E の L 函数を定める. ただし, $a_\ell(E) := \ell + 1 - \#\widetilde{E}_\ell(\mathbb{F}_\ell)$ とする.
$L(E,s)$ は $\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{2}$ で収束し, Wiles, Taylar-Wiles 及び Breuil-Conrad-Diamond-Taylar によって E はモジュラーであることが知られているから $L(E,s)$ は全 $\mathbb{C}$ 平面に正則に接続される.

$L(E,s)$ の Euler 積を Dirichlet 級数として $L(E,s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(E)}{n^s}$ と表すとき, 勝手な Dirichlet 指標 ϕ に対して ϕ ひねりの L 函数を次で定義する:

$$L(E,\phi,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(E)\phi(n)}{n^s}.$$

$L(E,\phi,s)$ も $\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{2}$ で収束し全 $\mathbb{C}$ 平面に正則に接続される.

特殊値の代数性の復習
E の $\mathbb{Z}$ 上の Néron モデルの正則微分形式 (**Néron 微分**) を ω_E をおくとき,

$$\Omega_E^+ := \int_{E(\mathbb{R})} |\omega_E| \quad (\textbf{Néron 周期})$$

とする (同様に, $\Omega_E^- := \int_{H_1(E(\mathbb{C}),\mathbb{Z})^-} |\omega_E|$ と定める).
このとき, 次のような $s=1$ における $L(E,s)$ の値の代数性が成り立つ.

定理 2.2 (志村, Manin 他)**.** 勝手な *Dirichlet* 指標 ϕ に対して

$$\frac{L(E,\phi,1)}{\Omega_E^\pm} \in \mathbb{Q}[\phi]$$

が成り立つ. ただし, $\pm$ は $\phi(-1)$ の符号で決める.

この代数性の結果によって, $\dfrac{L(E,\phi,1)}{\Omega_E^\pm}$ を p 進数とみなすことができる.

定理 2.3 (Manin, Mazur–Swinnerton-Dyer 他)**.** E は p で通常還元を持つと仮定する. このとき, 一意的な $L_p(E) \in \Lambda_{\mathrm{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ が存在して, 重さ 0 の勝手な数論指標 ϕ に対して次の補間性質

$$\phi(L_p(E)) = \mathrm{Eul}(E,\phi) \times \tau(\phi) \times \frac{L(E,\phi^{-1},1)}{\Omega_E^\pm}$$

が成り立つ. ただし, $\tau(\phi)$ は *Dirichlet* 指標 ϕ に付随した *Gauss* 和とする. また, α_E を $X^2 - a_p(E)X + p$ の p 進単数根として $\mathrm{Eul}(E,\phi) = \begin{cases} (1-\frac{1}{\alpha_E})^2 & \phi = \mathbf{1} \\ (\frac{1}{\alpha_E})^{\mathrm{ord}_p(\mathrm{Cond}(\phi))} & \phi \neq \mathbf{1} \end{cases}$ とおく.

定理 2.3 の証明は第 4 節で説明する予定である.

岩澤主予想
代数的な側と解析的な側での準備の下で, イデアル類群のときと同様に両者をを結びつける岩澤主予想が考えられる.

予想 2.1 (岩澤主予想; Mazur らが定式化)**.** *E は p で通常還元を持つと仮定する. このとき, 次の等式が成り立つだろう:*

$$(L_p(E)) = \begin{cases} (\gamma - \chi(\gamma))\mathrm{char}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}}\mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee. & E \text{ が } p \text{ で分裂乗法的還元を持つとき}, \\ \mathrm{char}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}}\mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee. & \text{それ以外のとき}. \end{cases}$$

岩澤主予想の結果や証明は, E が虚数乗法を持つ場合か E が虚数乗法を持たない場合のいづれかで大分様相が異なる.

虚数乗法を持つ場合
楕円曲線が虚数乗法を持つ場合には次が成り立つ:

定理 2.4 (Rubin-Rohrlich)**.** *E がある虚 2 次体 K で虚数乗法を持つ p 通常的な $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とするとき次が成り立つ.*

(1) *$\mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee$ は有限生成ねじれ Λ_{cyc} 加群である.*

(2) *次の等式が成り立つ:*

$$\mathrm{char}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}}\mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee = (L_p(E)).$$

虚数乗法を持つ場合の証明のあらすじは以下の通りである.

(I) Rubin による Euler system bound の定理
前節のイデアル類群の岩澤理論の虚 2 次体 K への一般化がある. K が虚 2 次体のとき, K 上でガロワ群が $\mathbb{Z}_p$ の直和になるような最大 $\mathbb{Z}_p^d$ 拡大 K_∞ は $d = 2$ で得られる.
虚 2 次体では K_∞(の有限次拡大) 上のイデアル類群を考えることで, 2 変数 Selmer 群, 2 変数の p 進 L 函数, 2 変数の岩澤主予想が考えられるが, Rubin は楕円単数の Euler 系を用いることで, Selmer 群の大きさを抑えて次の包含関係を示した:

$$(2 \text{ 変数 Selmer 群の特性イデアル}) \supset (\text{楕円単数の Euler 系の } 2 \text{ 変数特性イデアル}).$$

(II) Coates, Yager, de Shalit らによる Coleman 写像
前節で紹介した Coleman による円単数の Euler 系を使った構成があったが, その構成の楕円単数類似が Coates, Yager, de Shalit らによって与えられている:

$$(\text{楕円単数の Euler 系の } 2 \text{ 変数特性イデアル}) = (2 \text{ 変数の } p \text{ 進 } L \text{ 函数}).$$

(III) (I) と (II) の組み合わせ
上の (I) と (II) の包含関係をつなげると次が得られる:

$$(2 \text{ 変数 Selmer 群の特性イデアル}) \supset (2 \text{ 変数の } p \text{ 進 } L \text{ 函数}).$$

(IV) 虚 2 次体 K に対する解析的類数公式の原理
前節の円分体のときと同じように今の場合も片方の包含関係が示せれば自動的に等式が成り立つという原理が成り立つ[3]:

$$(2\text{ 変数 Selmer 群の特性イデアル}) = (2\text{ 変数の } p \text{ 進 } L \text{ 函数}).$$

これは, 「虚 2 次体の 2 変数岩澤主予想の解決」に他ならない.

(V) (ある)1 変数に特殊化
虚 2 次体 K で虚数乗法を持つ楕円曲線 E の p べき等分点の座標を K に付け加えることで K の $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大が得られるので, 上で得られた等式を適当にひねって 1 変数に特殊化すると次が得られる:

$$\mathrm{char}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}}\mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee = (L_p(E)).$$

(VI) Rohrlich の定理
p 進 L 函数が補間するような楕円曲線 E の L 函数 $L(E,s)$ の函数等式の中心 $s=1$ での値は, Mordell-Weil 群が無限のときには 0 となる. A priori にはそれを Γ_{cyc} のいろいろな有限指標 ϕ でひねっても常に $L(E,\phi,1)$ の $s=1$ での値が消えてしまう心配がある. Rohrlich は Γ_{cyc} の有限指標を動かすとひねった L 函数の $s=1$ での値が消えないことがあることを示した. これにより, $L_p(E) \neq 0$ がわかる:

$$\begin{aligned}\text{上式で } (L_p(E)) \neq 0 &\Longrightarrow \mathrm{char}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}}\mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee \neq 0\\ &\Longrightarrow \mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee \text{ は有限生成ねじれ } \Lambda_{\mathrm{cyc}} \text{ 加群.}\end{aligned}$$

以上で楕円曲線 E が虚数乗法を持つ場合の円分岩澤主予想の結果である定理 2.4 の証明のあらすじを終える.

虚数乗法を持たない場合
楕円曲線が虚数乗法を持たない場合には次が成り立つ:

定理 2.5 (加藤-Rohrlich)**.** *E が虚数乗法を持たない p 通常的な $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とするとき次が成り立つ.*

(1) $\mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee$ *は有限生成ねじれ* Λ_{cyc} *加群である*
(2) *(若干の条件の下で) 次の不等式が成り立つ:*

$$\mathrm{char}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}}\mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee \supset (L_p(E))$$

.

[3]あまり有限 Hecke 指標ひねりをこめた正確な設定を述べなかったが, すべての有限 Hecke 指標ひねりで一斉に同方向の包含関係が成り立たねばならない.

虚数乗法を持たないときの証明のあらすじは以下の通りである.

(I) 加藤による Euler 系の構成 (Beilinson-加藤の Euler 系)
虚数乗法を持つ場合と同じく Euler 系が大事な役割を演じるが, 楕円単数の Euler 系とは異なる Beilinson-加藤の Euler 系が活躍する. Beilinson-加藤の Euler 系は, 楕円単数の Euler 系に比べて構成自体が既に大仕事である. アファインモジュラー曲線 Y が与えられたときに, Y 上の Siegel 単数と呼ばれるよい函数がある. 函数は $K_1(Y)$ の元なので, それらを組みにしたモジュラー曲線の $K_2(Y)$ の元を Beilinson 元とよぶ. Beilinson はこの元が楕円曲線の L 函数の $s=2$ での値と regulator 写像で結びつくことを示した. 加藤はこれを p 進的な手法で修正して, explicit reciprocity law などの力技を用いることで, $s=1$ での値に結びつく Beilinson-加藤の Euler 元を構成した.

(II) Euler system bound の定理
楕円単数や円単数のときと同じように, ノルム条件などの公理をみたす Euler 系があると標準的な議論で Selmer 群の大きさが抑えられる. かくして次の包含関係が得られる:

$$(\text{Selmer 群の特性イデアル}) \supset (\text{Beilinson-加藤の Euler 系の特性イデアル}).$$

(Euler 系の公理がどのようなものであるかについて, 一般的な Euler system bound の定理の正確なステートメントについては, 次節でも説明する)

(III) Coleman 写像の理論
Beilinson-加藤の Euler 系も構成から L 函数の特殊値と関係が深いので, 一般化された Coleman 写像の理論による Euler 系から p 進 L 函数 $L_p(E)$ の別構成があり, 次の等式が得られる:

$$(\text{Beilinson-加藤の Euler 系の特性イデアル}) = (L_p(E)).$$

(IV) (II) と (III) の組み合わせ
上の (II) と (III) の包含関係をつなげると次が得られる:

$$\mathrm{char}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}}\mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee \supset (L_p(E)).$$

(V) Rohrlich の定理
Rohrlich の結果やその証明は虚数乗法の有無に関係ないので, 虚数乗法を持つ場合と全く同じように $L_p(E) \neq 0$ がわかる:

$$\begin{aligned} \text{上式で } (L_p(E)) \neq 0 &\Longrightarrow \mathrm{char}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}}\mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee \neq 0 \\ &\Longrightarrow \mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee \text{ は有限生成ねじれ } \Lambda_{\mathrm{cyc}} \text{ 加群.} \end{aligned}$$

以上で楕円曲線 E が虚数乗法を持たない場合の円分岩澤主予想の結果である定理 2.5 の証明のあらすじを終える.

逆方向の包含関係
虚数乗法を持たない場合には, 解析的類数公式の原理が知られていないので, 片方の包含関係を示しても等式は得られない.

Skinner-Urban は, (適当な条件のもとで) Euler 系の方法とは全く異なる $U(2,2)$ での Eisenstein イデアルの手法によって次を主張した:

$$\mathrm{char}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}}\mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee \subset (L_p(E)).$$

この逆方向の包含関係の議論については次節でもう少し踏み込んで説明する.
これを認めると, 加藤の結果である定理 2.5 と合わせて (適当な条件下で) 次を得るというアイデアである.

$$\mathrm{char}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}}\mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee = (L_p(E)).$$

以上で, 楕円曲線の場合の簡単な概観を終える. 楕円曲線の円分岩澤理論にとどまらないさらなる円分岩澤理論の一般化の枠組みが, Greenberg, Coates, 加藤 をはじめとした人々によって提唱されており, 我々は

楕円曲線の岩澤理論

$\Downarrow$

さらに高次元の岩澤理論

と進んでいきたい. ここでの「高次元化」には次のように幾つかの意味が考えられる.

- 高い階数のガロワ表現へ一般化
  (例. イデアル類群は階数 1, 楕円曲線は階数 2 のガロワ表現)
- 高い次元の代数多様体 (モチーフ) へ一般化
  (例. イデアル類群は 0 次元, 楕円曲線は 1 次元のモチーフ)
- 高い階数の代数群の保型表現 (モジュラー形式) へ一般化
  (例. イデアル類群は GL_1, 楕円曲線は GL_2 の保型表現)

これら異なる捉え方は, 少しずれもあるが Langlands 予想やコホモロジー的な実現を通してお互い密接に関連している. 「高次元化」を語るとき, 我々はときと場合に応じてこれらの異なる見方を使い分けて　いずれかの状況を想定している.
そして, 岩澤理論のこのような「高次元化」において, 次が主な課題であろう.

予想 A: Selmer 群の Pontrjagin 双対は有限生成ねじれ岩澤加群だろう.

予想 B: 適切な補間性質を持つ p 進 L 函数が存在するだろう.

予想 C: (Selmer 群の特性イデアル) = (p 進 L 函数) が成り立つだろう.

3. 高次元岩澤主予想の証明の現状: Euler 系 VS Eisenstein イデアル

この節では, 特に予想 A と予想 C についての現状を論じる.

予想 A と予想 C には Euler 系が有効な道具立てになると期待されている. 今までにたびたび話に登場した Euler 系について, 一般の枠組みである程度正確な定義とある程度正確な結果を紹介しておきたい.

Euler 系とは?
状況設定として
$T \cong \mathbb{Z}_p^{\oplus d}$: 絶対ガロワ群 $G_{\mathbb{Q}}$ の (幾何的な) 連続表現
が与えられているとする. $A = T \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ に対して, Selmer 群:

$$\mathrm{Sel}_A(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})) \underset{\text{局所条件}}{\subset} H^1_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}), A)$$

が Bloch-加藤や Greenberg による標準的な定義で定まっており, イデアル類群や楕円曲線の Selmer 群の一般化となっている. この Selmer 群 $\mathrm{Sel}_A(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))$ の大きさを L 函数の特殊値を使って抑えたい.

$d^+ := \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(T^*(1))^{c=+}$ とおく. 各素数 ℓ に対して $P_\ell(X) \in \mathbb{Z}_p[X]$ を $P_\ell(X) := \det(1 - \mathrm{Fr}_\ell X; T^*(1))$ と定める.

ノルム条件をみたすガロワコホモロジー群の元の系

$$\left\{ z_m(\ell_1 \cdots \ell_r) \in \wedge^{d^+} H^1_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}(\mu_{p^m \ell_1 \cdots \ell_r}), T^*(1)) \right\}$$

で, ノルム条件:

$$\text{(Nr)}\ \mathrm{Nr}_{\mathbb{Q}(\mu_{p^m \ell_1 \cdots \ell_r})/\mathbb{Q}(\mu_{p^m \ell_1 \cdots \ell_{r-1}})}(z_m(\ell_1 \cdots \ell_r)) = P_{\ell_r}(\mathrm{Fr}_{\ell_r}) z_m(\ell_1 \cdots \ell_{r-1})$$

をみたすものを **Euler 系**という ($\ell_1, \ldots, \ell_r \neq p$ は相異なる素数).
さらに, Σ: 素点の有限集合 $\supset \{$ 分岐素点, p, $\infty\}$
$\mathbb{Q}_\Sigma$: Σ の外不分岐な $\mathbb{Q}$ の最大ガロワ拡大
と記号を定める. このとき, ガロワコホモロジーの Euler Poincaré 公式によって

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}} \varprojlim_m H^1_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}(\mu_{p^m}), T^*(1)) \\
= d^+ + \mathrm{rank}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}} \varprojlim_m H^0_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}(\mu_{p^m}), T^*(1)) \\
+ \mathrm{rank}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}} \varprojlim_m H^2_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}(\mu_{p^m}), T^*(1))
\end{aligned}$$

がわかる. ガロワコホモロジーの大域双対定理, Chebotarev の密度定理, などを用いた抑えたいアーベル群の生成元の個数に関係する (非常に複雑な!) 帰納的な議論によって, 次の定理 (**Euler system bound**) が示される

定理 3.1 (加藤, Perrin-Riou, Rubin)**.** *T へのガロワ表現の像が”十分大きい”と仮定する. このとき, 次が成立する:*

(1) $\varprojlim_m H^2_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}(\mu_{p^m}), T^*(1))$ は有限生成ねじれ Λ_{cyc} 加群である.
(2) 適当な技術的条件下で次が成り立つ:

$$\begin{aligned}&\mathrm{char}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}} \varprojlim_m H^2_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}(\mu_{p^m}), T^*(1)) \\ &\qquad\qquad \supset \mathrm{char}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}} \left(\wedge^{d^+} \varprojlim_m H^1_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}(\mu_{p^m}), T^*(1)) \right) \Big/ \Lambda_{\mathrm{cyc}} \varprojlim_m z_m(1).\end{aligned}$$

前節の加藤-Rohrlich の定理 (定理 2.5) の証明のあらすじの (II) の説明が大雑把であったので, 前節で約束したようにもう一歩踏み込んでそのステップ (II) の部分を解説する. 定理 3.1 を $T = T_pE$ として応用する際に, $d = 2$, $d^+ = 1$ であることに注意する. よって, 例えば外ベキ $\wedge^{d^+}$ はとる必要がなくなる.

今, 適当な条件下で, ガロワコホモロジーの大域双対定理は次の 4 項完全列を導く.

$$\begin{aligned}0 &\longrightarrow \varprojlim_m H^1_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}(\mu_{p^m}), T^*(1)) \Big/ \Lambda_{\mathrm{cyc}} \varprojlim_m z_m(1) \\ &\longrightarrow \varprojlim_m H^1_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^m}), T^*(1)/\mathrm{Fil}^+_p T^*(1)) \Big/ \Lambda_{\mathrm{cyc}} \varprojlim_m \mathrm{loc}_p z_m(1) \\ &\longrightarrow \mathrm{Sel}_A(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee \longrightarrow \varprojlim_m H^2_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}(\mu_{p^m}), T^*(1)) \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

この加群の系列の完全性より

$$\begin{aligned}&(\text{第 4 項の特性イデアル}) \supset (\text{第 1 項の特性イデアル}) \\ &\qquad \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} (\text{第 3 項の特性イデアル}) \supset (\text{第 2 項の特性イデアル})\end{aligned}$$

なる同値性が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned}&E \text{ が虚数乗法をもたない} \\ &\overset{\text{Serre の定理}}{\Rightarrow} \text{ガロワ表現 } G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p} T_pE \text{ の像は"十分大きい"} \\ &\overset{\text{上の定理}}{\Rightarrow} (\text{第 4 項の特性イデアル}) \supset (\text{第 1 項の特性イデアル}) \\ &\overset{\text{上の同値}}{\Rightarrow} (\text{第 3 項の特性イデアル}) \supset (\text{第 2 項の特性イデアル})\end{aligned}$$

この最後の不等式が示すべき「加藤-Rohrlich の証明のあらすじの (II)」の結論に他ならない. かくして, 非自明な Euler 系の存在は「岩澤主予想の半分」に相当する片方の包含関係を導くのである.

よって, 自然に次の問題が浮上してくる.

問題：より多くの幾何的な p 進ガロワ表現 T で, 非自明な Euler 系

$$\left\{z_m(\ell_1\cdots\ell_r)\in\wedge^{d^+}H^1_{\mathrm{gal}}(\mathbb{Q}(\mu_{p^m\ell_1\cdots\ell_r}),T^*(1))\right\}$$

を見つけよ.

知られている Euler 系の例

Euler 系がみつかっている幾つかの状況を思い出しておく.

抑える Selmer 群	d	d^+	Euler 系	K 群の次数
$\mathbb{Q}$ のアーベル拡大の イデアル類群	1	1	円単数	K_1
虚 2 次体のアーベル拡大の イデアル類群	2	1	楕円単数	K_1
虚 2 次体上の楕円曲線の Selmer 群	2	1	Heegner 点	K_0
楕円カスプ形式の Selmer 群	2	1	Beilinson-加藤元	K_2

Euler 系における現状と今後の課題

- 一般に, 構成法からはつくった元の非自明性はわからない (現状では L 函数の特殊値が消えていないことにより regulator map を介して非自明性を示す方法しかない).
- $d^+>1$ の例はほとんど知られていないようである.
- 楕円モジュラー形式の Rankin-Selberg 積 $f\otimes g$ の場合に Darmon-Rotger の仕事を修正して, Lei-Loeffler-Zerbes らが構成した Beilinson-Flach 元を用いた Euler 系がある (このとき $d=4$, $d^+=2$). 特別な条件下で若干の応用も得られている.

Eisenstein イデアルの方法とは?

$A=T\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ に対して, Selmer 群は

$$\mathrm{Sel}_{A[p^n]}(F)\underset{\text{局所条件}}{\subset}H^1_{\mathrm{gal}}(F,A[p^n])$$

と定義されたことを思い出そう.

また, ガロワコホモロジーや群コホモロジーのよく知られた一般論によって,

$$H^1_{\mathrm{gal}}(F,A[p^n])\xrightarrow{\sim}\{0\longrightarrow A[p^n]\longrightarrow M\longrightarrow\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\longrightarrow 0\}/\sim \tag{1}$$

なる同一視があり, 1 次ガロワコホモロジーは自明な表現の $A[p^n]$ による拡大の同型類と一対一に対応する. よって, 自明な表現の $A[p^n]$ による拡大で局所条件をみたすものが沢山あることを言えば, $\mathrm{Sel}_{A[p^n]}(F)$ が十分大きいことが言えるのである.

以後, A が「モジュラー」な場合を考える. つまり,

$$\text{ガロワ表現 }A\overset{\text{Langlands 対応}}{\longleftrightarrow}\text{ある代数群 }G\text{ の保型表現 }\pi$$

なる状況を考える.

次をみたす組 $(\widetilde{G}, P)$ を一組選ぶ:

- G の階数 d より真に大きな階数 $\widetilde{d}$ を持つ代数群 $\widetilde{G}$
- 放物部分群 $P \subset \widetilde{G}$ で P の Levi 部分群が $G \times GL_1$ を成分として含むもの

さらに, P に関する $\widetilde{G}$ の Eisenstein series $\widetilde{E}_\pi$ で $L(\pi, s)|L(\widetilde{E}_\pi, s)$ なるものを考える. 今, 次の合同条件を仮定する:

(C)$\widetilde{G}$ の尖点保型表現 $\widetilde{\pi}$ が存在して $L(\widetilde{\pi}, s) \equiv L(\widetilde{E}_\pi, s) \bmod p^n$ をみたす.

このとき, 次が成り立つ.

補題 3.1 (Ribet の補題)**.** *考えている $\widetilde{G}$ の尖点保型表現 $\widetilde{\pi}$ に対して次の条件たち*[4]*を仮定する:*

- *$\widetilde{\pi}$ に付随する $L(\widetilde{\pi}, s) = L(V_{\widetilde{\pi}}, s)$ となる G_F の p 進ガロワ表現 $V_{\widetilde{\pi}}$ が存在する.*
- *$V_{\widetilde{\pi}}$ は既約なガロワ表現である.*

このとき, G_F の作用で安定な格子 $\widetilde{T} \subset V_{\widetilde{\pi}}$ をうまく取り替えて, ある階数 $\widetilde{d} - d$ の mod p^n 表現 $B[p^n]$ の $A[p^n]$ による非分裂な拡大

$$0 \longrightarrow A[p^n] \longrightarrow \widetilde{T}/p^n\widetilde{T} \xrightarrow{q} B[p^n] \longrightarrow 0 \tag{2}$$

を得ることができる.

今, 次の条件 (B) も仮定する.

(B) P の Levi 部分群の成分 GL_1 に対応して表現 $B[p^n]$ の自明な部分表現 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ が存在して, (2) を $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \hookrightarrow B[p^n]$ で引き戻して得られる拡大:

$$0 \longrightarrow A[p^n] \longrightarrow q^{-1}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{3}$$

が非自明になる.

この (3) が各素点 (特に p 上の素点) で局所条件をみたすことを示せば, $\mathrm{Sel}_{A[p^n]}(F) \neq 0$ が従う. この, 構成と L 函数の特殊値をつなげるために, 次の対象を考える:

- $\widetilde{G}$ の Hecke 環の $\widetilde{\pi}$ に付随する成分 $\mathcal{H}_{\widetilde{G},\widetilde{\pi}}$
- $\mathcal{H}_{\widetilde{G},\widetilde{\pi}}$ の Eisenstein イデアル I_π

Eisenstein イデアル I_π は $\widetilde{E}_\pi$ と $\widetilde{G}$ のカスプ形式との合同を統制するイデアルである. 今までの議論を定量的に行うことができれば, 簡単な誤差を除いて

$$\#\mathcal{H}_{\widetilde{G}}/(I_\pi, p^n) \leq \#\mathrm{Sel}_{A[p^n]}(F)$$

が得られると期待される. Eisenstein 級数 $\widetilde{E}_\pi$ の定数項は $L(\pi, s)$ の特殊値と関係し, 簡単な誤差を除いて $\#\mathcal{H}_{\widetilde{G}}/I_\pi$ は $L(\pi, s)$ の特殊値と結びつくことも期待される. かくして, $L(\pi, s)$ の特殊値で $\mathrm{Sel}_{A[p^n]}(F)$ の位数を下から抑えられるという寸法である. 上のような $G, \widetilde{G}$ の重さやレベルを固定した保型形式の空間での議論だけでなく, 肥田

[4] $\widetilde{G} = GL_2$ のときには, 前者の条件は Deligne や志村 (unpublished) の結果, 後者の条件は Ribet の結果として示されていた.

変形などの変形空間においても同様な議論を展開することができる. このような議論で, $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$ の部分体 F や係数加群のねじれ指数 p^n が動くときの極限をとることによる包含関係

$$(T \text{ の } p \text{ 進 L 函数}) \supset \mathrm{char}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}}\mathrm{Sel}_A(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee$$

が得られるはずである. 大きな群 $\widetilde{G}$ の Eisenstein イデアルを仲立ちとして, 「岩澤主予想の半分」を示すこのようなアイデアを **Eisenstein イデアルの方法**とよぶ.

今までに Eisenstein イデアルの方法が既に試みられた $(G, \widetilde{G}, P)$ がいくらかある. 特にイデアル類群の岩澤主予想に関する Ribet, Mazur-Wiles, Wiles の仕事での $(G, \widetilde{G}, P)$ は, $G = GL_1$, $\widetilde{G} = GL_2$, $d = 1$, $\widetilde{d} = 2$, P の Levi 部分群は $GL_1 \times GL_1$ であった. また, 前節で紹介された Skinner-Wiles の仕事での $(G, \widetilde{G}, P)$ は, $G = GL_2$, $\widetilde{G} = U(2,2)$, $d = 2$, $\widetilde{d} = 4$, P の Levi 部分群は $GL_2 \times GL_1 \times GL_1$ である.

Eisenstein イデアルの方法における現状と今後の課題

- 「1 次ガロワコホモロジーの解釈」をそのまま使うには, $\widetilde{d} - d = 1$ の状況が望ましいが, その場合 $\widetilde{G}$ の対称空間には代数多様体の構造が入らないかもしれない (例えば, $G = GL_2$, $\widetilde{G} = GL_3$ のとき).
- 一方で, 上の議論の条件 (B) でみたように, $\widetilde{d} - d > 1$ の場合にはうまく非自明な拡大を取り出す部分で苦労する (例えば $G = GL_2$, $\widetilde{G} = U(2,2)$ のとき)
- Euler 系側での「加藤, Perrin-Riou, Rubin による Euler system bound の定理」や Mazur-Rubin の研究で一般論が確立され, 一般論を整備した多くの論文が出ている. 一方で, Eisenstein イデアルの側では文献が少なく数少ない文献における議論も ad hoc であったりほとんど詳細がなかったりする. Euler 系の側では数多く存在するような定量的評価の一般論の文献も見当たらないようである.

4. p 進保型 L 函数に関連する諸問題: 高次元 p 進 L 函数の深い理解を目指して

予想 B は, 前節で論じた予想 A や予想 C に比べるとより多くの部分的な進展がみられ, 予想 B の研究を深めていくことは, 予想 A や予想 C の一つの突破口になるのではと感じている. この節では, 予想 B のもう少し正式な定式化を述べた上で, 基本的な GL_2 の場合の復習や現状を論じる.
状況設定として:
$T \cong \mathbb{Z}_p^{\oplus d}$: 絶対ガロワ群 $G_\mathbb{Q}$ のモチーフから来るような幾何的な連続表現, $V = T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$
が与えられているとする. $D_{\mathrm{crys}}(V)$ を Fontaine のフィルター加群, φ をフロベニウス作用素とするとき,

$$L(V,s) := \prod_{\ell \neq p} \det(1 - \mathrm{Frob}_\ell X; V^{I_\ell})|_{X=\ell^{-s}} \times \det(1 - \varphi X; D_{\mathrm{crys}}(V))|_{X=p^{-s}}$$

と Hasse-Weil L 函数を定める. ただし, 次が知られていることに注意する.

- $\det(1-\mathrm{Frob}_\ell X; V^{I_\ell}), \det(1-\varphi X; D_{\mathrm{crys}}(V)) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ が成り立つ[5].
- w を V に付随するモチーフの重さとするとき, $L(V,s)$ は $\mathrm{Re}(s) > \frac{w}{2}+1$ で絶対収束する.

予想 4.1 (Hasse-Weil 予想)**.** *V を幾何的な p 進表現, w を V に付随した純モチーフの重さとするとき次が期待される:*

- *$L(V,s)$ は全 $\mathbb{C}$ 平面に有理型に解析接続されるだろう*
- *V が r 回 Tate ひねり表現 $\mathbb{Q}_p(r)$ を含まなければ $L(V,s)$ は正則*
- *適当な Γ 函数からなる「無限因子」$\Gamma(V,s)$ によって $\Lambda(V,s)=\Gamma(V,s)L(V,s)$ とおくとき, 函数等式:*

$$\Lambda(V,s) = a(V)^{\frac{w+1}{2}}\epsilon(V)\Lambda(V^*,1-s)$$

が成り立つだろう. ここで, $a(V)\in\mathbb{Z}$ は V の Artin 導手, $\epsilon(V)\in\mathbb{C}$ は V の epsilon 因子とよばれる不変量である.

以下, 与えられたガロワ表現に対しては常に Hasse-Weil 予想を仮定することとする.

$\mathrm{Crit}(V)\subset\mathbb{Z}$ を

$$\mathrm{Crit}(V) := \{ j\in\mathbb{Z} \mid L(V,s),\ L(V^*(1),s) \text{ の無限因子が } s=j \text{ で pole を持たない} \}$$

とおく.

例 4.1.

- *$V=\mathbb{Q}_p$ ならば $\mathrm{Crit}(V)=\{$ 正の偶数 $\}\cup\{$ 負の奇数 $\}$ である (このとき, $L(V,s)$ は Riemann のゼータ函数 $\zeta(s)$ に一致することに注意する).*
- *V が Artin 表現の Tate ひねりでないならば $\mathrm{Crit}(V)$ は有限集合である.*
- *V が重さ $k\geq 2$ の Hecke 固有カスプ形式に対して Deligne や志村 (unpublished) が与えたガロワ表現 V_f のとき, $\mathrm{Crit}(V)=\{1,2,\ldots,k-1\}$ となる.*

定義 4.1. *$\mathbb{M}_V$ を V に対応するモチーフ, $\mathbb{Q}_V$ を $\mathbb{M}_V$ の係数体とする.*

(1) **周期写像**を以下の合成写像として定義する:

$$\begin{aligned}\mathrm{Per}^{\pm}(V(j)) : H_{\mathrm{Betti}}(\mathbb{M}(j))^{\pm}\otimes_{\mathbb{Q}_V}\mathbb{C} &\hookrightarrow H_{\mathrm{Betti}}(\mathbb{M}(j))\otimes_{\mathbb{Q}_V}\mathbb{C} \\ &\xrightarrow[\text{de Rham の定理}]{\sim} H_{\mathrm{dR}}(\mathbb{M}_V(j))\otimes_{\mathbb{Q}_V}\mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathrm{Fil}^0 H_{\mathrm{dR}}(\mathbb{M}_V(j))\otimes_{\mathbb{Q}_V}\mathbb{C}.\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{Per}^{(-1)^j}(V(j))$ が同型のとき, **周期**を

$$\Omega^{\pm}(V(j)) = \det(\mathrm{Per}^{\pm}(V(j)))$$

と定義する.

$\mathrm{Crit}(V)$, $\mathrm{Per}^{\pm}(V(j))$ に関する大事な定義や性質をまとめておく.

- $j\in\mathbb{Z}$ に対して「$j\in\mathrm{Crit}(V) \Leftrightarrow \mathrm{Per}^{(-1)^j}(V(j))$ が同型」なる同値が成り立つ.

[5] $\ell\neq p$ で良還元を持つ場合は Deligne による. 一般の場合や p での Euler 因子では Rapoport-Zink, de Jong, Katz-Messing などの結果を組み合わせて従う.

- $\Omega^{\pm}(V(j)) \in \mathbb{C}$ は $H_{\mathrm{Betti}}(\mathbb{M}(j))^{\pm} \otimes_{\mathbb{Q}_V}$ や $\mathrm{Fil}^0 H_{\mathrm{dR}}(\mathbb{M}_V(j)) \otimes_{\mathbb{Q}_V}$ の $\mathbb{Q}_V$ 基底の選び方に依存するが, $\mathbb{C}/(\mathbb{Q}_V)^{\times}$ の元として well-defined である.
- $j, j+2 \in \mathrm{Crit}(V)$ ならば $\dfrac{\Omega^{(-1)^j}(V(j+2))}{\Omega^{(-1)^j}(V(j))} \sim (2\pi\sqrt{-1})^{2d_+}$ が成り立つ.

p 進 L 函数の存在予想を述べる準備

$L(V,s)$ を Dirichlet 指標でひねった L 函数の特殊値を p 進補間する p 進 L 函数の存在定理 (基本予想 B) を正確に述べたい. そのために幾らか準備をしておく.

予想 4.2 (Deligne による特殊値の代数性予想)**.** *ϕ を Dirichlet 指標, $j \in \mathrm{Crit}(V \otimes \phi)$ とするとき,*

$$\frac{L(V,\phi,j)}{\Omega^{(-1)^j\phi(-1)}(V(j))} \in \mathbb{Q}_V[\phi, \tau(\phi)]$$

が成り立つだろう.

$\mathbb{Q}_V[\phi] \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ より, Deligne 予想によって $\dfrac{L(V,\phi,j)}{\Omega^{(-1)^j\phi(-1)}(V(j))}$ は自然に p 進数とみなせることに注意する.

定義 4.2 (Panchishkin 条件)**.** *V を $G_{\mathbb{Q}}$ の幾何的な p 進ガロワ表現, $D_p \subset G_{\mathbb{Q}}$ を p での分解群とする. 部分 $\mathbb{Q}_p[D_p]$ 加群 $\mathrm{Fil}_p^+ V \subset V$ が存在して,*

$$\begin{cases} \mathrm{Fil}_p^+ V \text{ の Hodge-Tate weight は全て正} \\ V/\mathrm{Fil}_p^+ V \text{ の Hodge-Tate weight は全て 0 以下} \end{cases}$$

がともに成り立つとき, V は p で **Panchishkin 型**であるという*.*

上の定義において, Hodge-Tate weight の定義を説明しなかった. Hodge-Tate weight の定義を復習しない代わりに Panchishkin 型の具体例を述べておく.

例 4.2.
- *$V = V_pE$ (E は楕円曲線) のとき, 次は同値である: V が p で Panchishkin 型 $\Leftrightarrow$ E は p で通常的.*
- *$V = V_f$ (f: 重さ $k \geq 2$ の Hecke 固有カスプ形式) のとき, 次は同値である (Deligne, Wiles らの結果) :*
  V が p で Panchishkin 型 $\Leftrightarrow$ $a_p(f)$ が p 進単数.

以上の準備のもと,「p 進 L 函数の存在予想」は以下のように定式化される:

予想 4.3 (Coates–Perrin-Riou, Panchishkin 他)**.** *V を幾何的なガロワ表現として, $\mathrm{Crit}(V) \neq \emptyset$, V は p で Panchishkin 型であることを仮定する. さらに, 周期 $\Omega^{\pm}(V)$ を固定する.*

このとき, $L_p(V,\Omega^{\pm}(V)) \in \Lambda_{\mathrm{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ が一意に存在して, $j \in \mathrm{Crit}(V \otimes \phi)$ なる勝手な $j \in \mathbb{Z}$, 重さ 0 の勝手な数論的指標 ϕ に対して次が成り立つ:

$$\chi_{\mathrm{cyc}}^{j}\phi(L_p(V,\Omega^{\pm}(V))) = \Gamma(V,j) \times \mathrm{Eul}(V,\phi,j) \times \tau(\phi) \times \frac{L(V,\phi,j)}{\Omega^{(-1)^j\phi(-1)}(V)(2\pi\sqrt{-1})^j}$$

ただし, $\tau(\phi) := \displaystyle\sum_{i=1}^{\mathrm{Cond}(\phi)} \phi(i)\zeta_{\mathrm{Cond}(\phi)}^{i}$ は *Gauss* 和とする. $\mathrm{Eul}(V,\phi,j)$ の定義は述べないが適当な *Euler* 因子である.

楕円曲線の場合の構成の一般的なあらすじ

E が $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線で $V = V_pE$ のときには, 定理 2.3 で結果のみを紹介したように基本予想 B は既に示されている. 一般の場合の展望を得るための指針ともなるので, この場合の証明のあらすじを紹介したい.

まず, Wiles, Taylar-Wiles, Breuil-Conrad-Diamond-Taylar らによる志村-谷山予想の解決のおかげで, $L(E,s) = L(f_E,s)$ となる重さ 2 の Hecke 固有カスプ形式 f_E が存在する. 知られている全ての例の p 進 L 函数の構成は非常に「モジュラー的」なので, 今の場合も, 実際のところ E に付随する Hecke 固有カスプ形式 f_E に対する p 進 L 函数を構成する.

構成は主に次の流れで行われる

(I) [有限レベルでの測度]

各 $n \in \mathbb{N}$ で,

$$\phi(\Xi_n(f_E;\Omega^{\pm}(V))) = \mathrm{Eul}(V,\phi,0) \times \tau(\phi) \times \frac{L(V,\phi,0)}{\Omega^{\phi(-1)}(V)}$$

をみたす $\Xi_n(f_E;\Omega^{\pm}(V)) \in \mathbb{Q}_p[G_{\mathrm{cyc},n}]$ を構成する.

(II) [distribution property]

各 $n \in \mathbb{N}$ で, 自然な射 $\mathbb{Q}_p[G_{\mathrm{cyc},n+1}] \longrightarrow \mathbb{Q}_p[G_{\mathrm{cyc},n}]$ において, $\Xi_{n+1}(f_E;\Omega^{\pm}(V))$ の像が $\Xi_n(f_E;\Omega^{\pm}(V))$ に等しく $\{\Xi_n(f_E;\Omega^{\pm}(V))\}_{n\in\mathbb{N}}$ が射影系をなることを示す.

(III) [有界性]

$\chi_{\mathrm{cyc},n}(\gamma_n(a)) = a \bmod p^n$ なる一意的な元 $\gamma_n(a) \in G_{\mathrm{cyc},n}$ を用いて, $\Xi_n(f_E;\Omega^{\pm}(V))$ を

$$\Xi_n(f_E;\Omega^{\pm}(V)) = \sum_{\substack{0<a<p^n \\ (a,p)=1}} c_n(a)\gamma_n(a)$$

と展開するとき, $n \in \mathbb{N}$ や $0 < a < p^n$ なる自然数 a がうごくときの $c_n(a) \in \mathbb{Q}_p$ の分母たちが有界であることを示す.

(II), (III) より, $L_p(V;\Omega^{\pm}(V)) := \varprojlim_n \Xi_n(f_E;\Omega^{\pm}(V))$ は $\Lambda_{\mathrm{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ の元となり, (I) より $L_p(V;\Omega^{\pm}(V))$ は望む補間性質をみたす.

もちろん, (I) において $\Xi_n(f_E;\Omega^{\pm}(V))$ を具体的に構成できることが大事であり, この $\Xi_n(f_E;\Omega^{\pm}(V))$ の構成には, 「モジュラーシンボルの方法」 or 「Rankin-Selberg の方法」 の大きく二つの異なる方法がある. 以下, それぞれの場合に $\Xi_n(f_E;\Omega^{\pm}(V))$ の構成のみ紹介しておく

モジュラーシンボルの方法による構成

Manin, Mazur らによる元々の構成はモジュラーシンボルの手法を用いて行われた. $\mathfrak{H}$ の境界であるカスプ $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ の 2 点 P, Q を結ぶ $\mathfrak{H}$ 上の経路 $\{P, Q\}$ を**モジュラーシンボル**とよぶ.

Mellin 変換の公式によって, 導手 p^n の Dirichlet 指標 ϕ に対して

$$\tau(\phi)\frac{L(E,\phi^{-1},1)}{2\pi\sqrt{-1}} = \sum_{\substack{0<i<p^n\\(a,p)=1}} \phi(a)\int_{\{\frac{a}{p^n},\infty\}} f_E(z)dz$$

となる. このことから, 欲しい $\Xi_n(f_E;\Omega^{\pm}(V)) = \sum_{\substack{0<a<p^n\\(a,p)=1}} c_n(a)\gamma_n(a)$ の $\gamma_n(a) \in G_{\mathrm{cyc},n}$ の係数 $c_n(a) \in \mathbb{Q}_p$ を以下のように定めればよい:

$$c_n(a) := \frac{1}{2}\sum_{\substack{0<a<p^n\\(a,p)=1}} \left(\frac{1}{\alpha_E}\right)^n \frac{\int_0^{\sqrt{-1}\infty}\left(f_E(z+\frac{a}{p^n})+f_E(z-\frac{a}{p^n})\right)dz}{\Omega_E^+}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\substack{0<a<p^n\\(a,p)=1}} \left(\frac{1}{\alpha_E}\right)^n \frac{\int_0^{\sqrt{-1}\infty}\left(f_E(z+\frac{a}{p^n})-f_E(z-\frac{a}{p^n})\right)dz}{\Omega_E^-}$$

Rankin-Selberg の方法による構成

以下, $\begin{cases} \psi_{\pm}(-1) = \pm 1 \\ L(E,\psi_{\pm},1) \neq 0 \end{cases}$ なる Dirichlet 指標 $\psi_{\pm}$ を固定する.
(ただし, $(\mathrm{Cond}(\psi_{\pm}), \mathrm{Cond}(E)) = 1$ とする)

$\psi_{\pm}\phi(-1) = -1$ となる Dirichlet 指標 ϕ に対して, 重さ 1 の Eisenstein 級数 $G_\phi^{\psi_{\pm}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(G_\phi^{\psi_{\pm}})q^n$ で $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(G_\phi^{\psi_{\pm}})}{n^s} = L(\psi,s)L(\phi,s)$ となるものをとる.

補題 4.1. $D(f_E, G_\phi^{\psi_{\pm}}, s) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(f_E)a_n(G_\phi^{\psi_{\pm}})}{n^s}$ とおくと,

$$D(f_E, G_\phi^{\psi_{\pm}}, s) = \frac{L(E,\psi_{\pm},s)L(E,\phi,s)}{L(\psi_{\pm}\phi,s)}$$

が成り立つ. ただし, $L(\psi_\pm\phi, s)$ は *Dirichlet* L 函数とする.

定義 4.3 (Petersson 内積)**.** $f \in S_2(\Gamma_1(M))$, $h \in M_2(\Gamma_1(M))$ に対して **Petersson 内積**を

$$\langle f, h\rangle := \int_{\mathfrak{H}/\Gamma_1(M)} \overline{f(z)}h(z)dz$$

で定める.

補題 4.2 (志村)**.** $D(f_E, G_\phi^{\psi_\pm}, 1) =$ 簡単な有理定数 $\times \langle f_E, G_\phi^{\psi_\pm} G_{\psi_\pm\phi}^{\mathbf{1}}\rangle$ が成り立つ (ここで, 新しく現れた重さ *1* の *Eisenstein* 級数 $G_{\psi_\pm\phi}^{\mathbf{1}}$ は *unfolding* の *Eisenstein* 級数とよばれる).

定理 4.1 (志村)**.** 正しい偶奇性を持つ勝手な ϕ に対して

$$\frac{\langle f_E, G_\phi^{\psi_\pm} G_{\psi_\pm\phi}^{\mathbf{1}}\rangle}{\langle f_E, f_E\rangle} \in \mathbb{Q}[\psi_\pm, \phi] \quad (\text{複合同順})$$

志村の定理によって, $\Omega_E(\psi_\pm) :=$ 簡単な有理定数 $\times \dfrac{L(\psi_\pm\phi, 1)\langle f_E, f_E\rangle}{L(E, \psi_\pm, 1)}$ とおくと $\dfrac{L(E, \phi^{-1}, 1)}{\Omega_E(\psi_\pm)} \in \mathbb{Q}[\psi_\pm, \phi]$ である.
$\gamma_n(a) \in G_{\mathrm{cyc},n}$ の係数 $c_n(a) \in \mathbb{Q}_p$ を以下のように定めて $\Xi_n(f_E; \Omega^\pm(V))$ を得る:

$$c_n(a) := \sum_{\substack{0<a<p^n \\ (a,p)=1}} \left(\frac{1}{\alpha_E}\right)^n \frac{\langle f_E, R_n^+(a)\rangle}{\langle f_E, f_E\rangle} + \sum_{\substack{0<a<p^n \\ (a,p)=1}} \left(\frac{1}{\alpha_E}\right)^n \frac{\langle f_E, R_n^-(a)\rangle}{\langle f_E, f_E\rangle}.$$

ただし, $R_n^\pm(a)$ は以下で定めるモジュラー形式とする:

$$R_n^\pm(a) := \tfrac{1}{(p-1)p^{n-1}} \left(\sum_{\substack{\phi:\mathrm{mod}\ p^n\ \text{の Dirichlet 指標} \\ \psi_\pm\phi(-1)=-1}} \phi^{-1}(a) G_\phi^{\psi_\pm} G_{\psi_\pm\phi}^{\mathbf{1}} \right).$$

今までに p 進 L 函数の構成が「試みられた」状況
上で有理数体上の GL_2 の場合の p 進 L 函数について解説した. より高次元の場合にも 1 変数円分 p 進 L 函数の構成の試みがなされている. それらをいくらか思い出してリストアップしておきたい.

- 総実体上の GL_1 の保型表現に付随する p 進 L 函数
  (Deligne-Ribet: Hilbert モジュラー多様体のコンパクト化を用いる方法)
  (Barsky, Cassou-Noguès: コーン分解と新谷理論の方法)
- CM 体上の GL_1 の保型表現に付随する p 進 L 函数
  (Katz: (実解析的な)Eisenstein 級数の p 進変形族の CM 点における特殊化の方法)

- 総実体上の GL_2 の保型表現に付随する p 進 L 函数
(Manin: Hilbert モジュラー多様体の高次元モジュラーシンボル・サイクルの方法)
- 一般の代数体上の GL_2 の保型表現に付随する p 進 L 函数
(Haran: 付随する対称空間上の高次元モジュラーシンボル・サイクルの方法)
- GL_2 の保型形式 f の対称積 $\mathrm{Sym}^2 f$ に付随する p 進 L 函数
(Coates-Schmidt, Schmidt: Rankin-Selberg の方法)
- Shalika モデルを持つ GL_{2n} の保型表現に付随する p 進 L 函数
(Ash-Ginzburg: 高次元モジュラーシンボル・サイクルの方法)
(Warning! レベルは p と素, 最小のコホモロジカルな重さなどの強い制限, 周期は Deligne の予想する幾何的な周期と一致するか不明)
- $GL_n \times GL_{n+1}$ の保型表現に付随する p 進 L 函数
(Schmidt, Januszewski: 高次元モジュラーシンボル・サイクルの方法)
(Warning! レベルや重さにも制限あり, 周期は Deligne の予想する幾何的な周期と一致するか不明, 異なる critical value j の間の「横方向の congruence」が未解決, 「縦方向の congruence」は示されている)
- GL_3 の保型表現に付随する p 進 L 函数
(Mahnkopf: Rankin-Selberg の方法)
(Warning! レベルにおそらく制限あり, 最小のコホモロジカルな重さなどの強い制限, 周期は Deligne の予想する幾何的な周期と一致するか不明)

以上, いくらかの仕事を挙げてみた. ここでは, 円分変形の p 進 L 函数に限って紹介している. 反円分変形や肥田変形などでの p 進 L 函数などは一切考えていない. また, ここで触れたもの以外にも GSp_4 の standard 表現の場合なども含めていくらか仕事があると思われる. ここで全てを網羅することは不可能なのでこれくらいにとどめておく.

高次元 p 進 L 函数に関連した研究の現状と今後の課題
p 進 L 函数の構成や性質に関連する大事な問題をリストアップしておく.

- p 進 L 函数を考えるには, 先の Deligne 予想でも現れたような複素周期 $\Omega^{\pm}(V)$ が大事である. また, 複素周期の取り方はあまり標準的なものがないが, 対応するモチーフの de Rham 実現や Betti 実現を正しく正規化して, p 進単数による乗法を除いて well-defined な **p-optimal な周期**に正規化したい.
(例えば, 先述の第 2 節の Néron 周期 $\Omega^{\pm}_E$, Katz の CM 周期などは p-opitimal である)
 p-optimal な周期は Birch–Swinnerton-Dyer 予想やその一般化のような特殊値の精密な予想と対応するという動機からしても大事である.
- 正しく p-optimal に正規化された複素周期に対応する p 進 L 函数は, (a priori には単に $\Lambda_{\mathrm{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ の元であったが)Λ_{cyc} の元になるという**整性**が成立すると期待される. 整性はもっともらしいが決して自明なことではなく, 楕円モジュラーカスプ形式の p 進 L 函数の場合にも正確な定義と精密な仕事によって初めて示される事実である.

- V が保型表現のテータ対応の理論などによって複数の「geometric origin」を持つとき「p-optimal な周期」同士の比は p 進単数か?

  例えば, レベルが p と素な重さ 2 の CM 楕円カスプ形式 f を考えるとき, f に対して定まる二つの p-optimal な周期「p-optimal なモジュラーシンボル型周期」と「Katz の CM 型周期」の比が p 進単数になることが Wiles の 1995 年の有名な論文の中で示されている. ただこの比が p 進単数になることは, レベルが p で割れたり重さが 3 以上の CM 楕円カスプ形式に対しては一般に未解決である. 他に, 楕円カスプ形式 f の adjoint L 函数 $L(\mathrm{ad}(f), s)$ の場合には, Prasanna (2003 年, 博士論文), 市野-Prasanna によって,「p-optimal なモジュラー曲線型周期」と「p-optimal な志村曲線型周期」の比が p 進単数になることが示されている.
- 上で見たように, 高次元での p 進 L 函数の知られた構成では最小のコホモロジカルな重さを持つ保型表現に限られていることが多い. この場合には, 保型表現に付随する Betti 実現が, 志村多様体や対称空間上の定数局所系のコホモロジーで得られている. その Betti 実現が志村多様体や対称空間上の非定数局所系のコホモロジーで得られるような高い重さを持つ保型表現の p 進 L 函数の構成への一般化が期待される[6].
- 上で見たように, 高次元での p 進 L 函数の知られた構成では分岐する素点の Euler 因子が抜けていたり無限素点の積分が具体的に計算されていなかったりすることがある. これら分岐する素点や無限素点における問題を個別に解決していく必要がある. 織田スクールによる積分表示の無限成分の具体計算の蓄積, B.Sun の一般的な非消滅定理など保型表現に現れる無限素点の積分の計算にも進歩があるようである.
- GL_1 の p 進 L 函数の特殊値には零でない値が沢山あり, このことから p 進 L 函数が自明でない (つまり, 恒等的に零ではない) ことは明らかである. 一方で, 定理 2.3 の楕円曲線の p 進 L 函数を考えると, 楕円曲線の Mordell-Weil ランクが零でないときは p 進 L 函数の $s = 1$ での特殊値が消える. それ以外の点の中に零でない値があるかどうかは明らかではなく, したがって p 進 L 函数が非自明であるかを示すことは大事な課題である. 構成した p 進 L 函数の非自明性を示すためには, 保型 L 函数の特殊値を p ベキの導手を持つ指標たちでひねったときに特殊値が零でないということを示さねばならない. $GL_2(\mathbb{Q})$ のときは, Rohrlich によってこのような結果は知られているが, $GL_2(\mathbb{Q})$ 以外の代数群に付随した保型 L 函数ではこのような generically non vanishing はほとんど知られていない[7].
- 構成した p 進 L 函数が岩澤不変量 $\mu = 0$ を持つこと (つまり, mod p で零でないこと) を示すためには, 保型 L 函数を p ベキの導手を持つ指標たちでひねったときに特殊値が mod p で消えないことを示したい. $GL_1(\mathbb{Q})$ のときは, Ferrero-Washington, Sinnott らによって示されているが, $GL_2(\mathbb{Q})$ のときは周

[6]現状でさぼらずに高い重さが扱われているのは GL_2 のときのみかもしれない.

[7]重さ $(2, \ldots, 2)$ を持つ Hilbert カスプ形式の場合でも知られていない.

期を p-optimal にとったときの p 進 L 函数の $\mu = 0$ 予想は大事な未解決問題である.

以上, 取り留めもなく問題点やこれからの課題を挙げてみた. p 進 L 函数の構成や性質を調べる問題は, 予想 A, C に比べると手のつく問題も沢山あるように思われる. また, p 進 L 函数の研究での知見の蓄積は Euler 系の構成などにもヒントを与え得るのではないだろうか. 岩澤理論の高次元化への直近の課題としては, 特に p 進 L 函数の研究が大事なように思われるのである.

5. 岩澤理論の高次元化と多変数化から派生する新しい問題: 周辺の数学領域との相互作用を目指して

高次元化に加えて (モチーフやガロワ表現の変形からくる) **多変数化**も組み合わせることで, **「ガロワ変形の岩澤理論」**とでも言うべきさらなる一般化も考えられる. そして, このような高次元かつ多変数の岩澤理論と長く向き合っていると, 周辺分野との新しい相互作用を孕んだ様々な自然な問題に思い至るのである. この論説の最後に, 今後の方向性を提示すると同時にそれと関係した新しい研究領域の可能性を考えたい.

- 従来の岩澤理論では, $\mathbb{Z}_p^d$ 拡大のガロワ群に対する岩澤代数のような正則局所環上で物事を考えた. ガロワ変形に対する岩澤理論の一般化では肥田の Hecke 環のような特異点を許す環上で物事を考える必要がある.
  $\Rightarrow$ **正則でない混標数完備局所環の研究**が必要となる. 例えば, 特異点を持ち得る混標数の完備局所環に対して, local Bertini theorem と超平面切断の族での特性イデアルたちから元の完備局所環上の加群の特性イデアルを復元する問題 (下元-落合), 加群の擬零部分群や加群のホモロジー次元の研究 (Greenberg), など岩澤理論の一般化の研究から派生する可換環論の自然な問題の研究が行われている.
- 非可換環岩澤理論と高次元化や多変数化の岩澤理論の融合も大事な課題になってきている.
  $\Rightarrow$ **非可換環上の加群の構造の研究**が必要となる. 非可換の岩澤代数上の加群の構造に対しては, Venjakob をはじめとした人々よりいくらか研究がなされたが, まだ調べることが沢山残されているように思われる.
- 従来の岩澤理論では, p での局所理論として p 進 Hodge 理論が大事な道具立として大事であった.
  $\Rightarrow$ 必ずしも $\mathbb{Z}_p^d$ 拡大からは来ないガロワ変形を考える p 進ガロワ変形に適用できる **p 進ガロワ変形の p 進 Hodge 理論**が大事になりそうである. Sen の理論や (Φ,Γ) 加群の理論などはある程度普通の p 進表現を変形に置き換えても成り立つことがあるが, やはりまだ変形の岩澤理論の必要性などの観点から見ると p 進 Hodge 理論は整備され尽くされていないように思われる. また, 岩澤理論ではフィルター加群や周期環の integral structure の理解も大事であるが, やはり integral structure の取り扱いに関してもわからないことも多いように思われる.

- ガロワ変形の Euler 系の理論 (落合 2005) の研究において, 群のコホモロジーの取り扱いの難しさから技術的条件が課されていた. 技術的の一つとして副有限群のコホモロジーに関する未解決の問題が残されている.
  $\Rightarrow$ **p 進 Lie 群とは限らない巨大な p 進解析的群の研究**, 特にそのような群の表現やコホモロジー群の研究が必要である. 例えば, 肥田変形のガロワ像で現れる $GL_n(\Lambda_{\mathrm{cyc}})$ の閉部分群には巨大な p 進解析的群が現れる. このような群に対して, 適切な「有限性定理」は期待できるだろうか? p 進 Lie 群のコホモロジーの有限性定理を得るには, p 進 Lie 群と p 進 Lie 環を結びつける Lazard 理論が大事な役割を演じた. p 進 Lie 群における一連の Lazard 理論は肥田理論のガロワ像に現れる巨大な副有限群などに一般化されるだろうか?
- 前節で詳しく述べた p 進 L 函数の構成や様々な問題は直近の課題である.
  $\Rightarrow$ そのためには, まず**保型 L 函数と保型周期の理解**が大事になる. 特に, 保型周期の様々な関係式, 保型 L 函数に付随した無限素点や悪い有限素点での局所積分の具体表示, 様々な non vanishing の定理が期待される. これらの研究においては, 技術的には可能でも動機の欠如から停滞している問題もあるかもしれない. p 進 L 函数の研究などからくる必要性を明らかにしていくことで発展が期待される.

などが, 岩澤理論の高次元化と多変数化を追求していくことで出会う様々な周辺の数学領域との絡みの一例である.

最後に

岩澤理論は遠くの滝の上に美しくかかる虹のような孤高の美しさだけに終わるものではなく, 今もダイナミズムも失っていないように思う. 今後の新しい数学を生む起爆剤を沢山隠し持っており, 新しい参入者によってさらに大きく成長していくことが期待される.

この原稿のかなりの部分は, 拙著「岩澤理論とその展望 (上)」と「岩澤理論とその展望 (下)[8]」の内容に含まれる. 岩澤理論においても時代の変化につれて大事なポイントが変わって来ており, 今後の指針として特に初学者に手にとってもらえれば幸いである. 本項の執筆では, 多くのことに対して正確な記述が与えられなかったり, 参考文献をあげる時間的余裕がなかったので一切参考文献を挙げなかった. これらに関しても上述の拙著に譲り, そちらを参照していただくことでお許し願いたい.

[8]下巻は現在原稿修正中です.