On an algebro-geometric realization of the cohomology ring of conical symplectic resolutions

疋田辰之 (京都大学)

Abstract

A 型 Springer fiber のコホモロジー環の記述に関する DeConcini-Procesi, Tanisaki の結果を conical symplectic resolution のコホモロジー環の記述に一般化する予想について述べる. 予想の定式化には Braden-Licata-Proudfoot-Webster により提唱された symplectic duality と呼ばれる双対性を用いる.

1 Introduction

1.1 Springer theory for type A

Jordan 標準形の理論により, $n \times n$ 冪零行列の共役類は n の分割と 1 対 1 に対応している. 一方で n の分割は n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{C}$ 上の既約表現と 1 対 1 に対応していることはよく知られている. これらを合わせると $n \times n$ 冪零行列の共役類と $\mathfrak{S}_n$ の対称群の既約表現が 1 対 1 に対応していることになるが, この対応は冪零元に付随する Springer fiber と呼ばれる代数多様体の最高次のコホモロジーを考えることにより, n の分割を経由することなく与えることができる. これは Springer 対応の特別な場合である.

少し記号を準備する. ここでは簡単のため G を SL_n とする. G は $\mathbb{C}$ 上の代数群とみなす. $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数, $B \subset G$ を上三角行列全体からなる Borel 部分群, $\mathfrak{b}$ をその Lie 代数とする. $\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}$ を冪零行列全体からなる閉部分代数多様体 (冪零錐) とする. $e \in \mathcal{N}$ に対して, e に付随する Springer fiber $\mathcal{B}_e$ を

$$\mathcal{B}_e = \{gB \in G/B \mid \mathrm{Ad}(g)^{-1}e \in \mathfrak{b}\}$$

で定義する. これは旗多様体 G/B の閉部分代数多様体であり, 容易にわかるように $\mathcal{B}_e$ は自然な同型を除いて e の共役類のみに依存する.

このとき $G = \mathrm{SL}_n$ に対する Springer 対応は次で与えられる.

Theorem 1 (Springer)**.** $\mathrm{H}^*(\mathcal{B}_e, \mathbb{C})$ には自然に $\mathfrak{S}_n$ が作用し, e の Jordan block の type が $\lambda \vdash n$ のとき $\mathfrak{S}_n$ の表現として $\mathrm{H}^{2\dim(\mathcal{B}_e)}(\mathcal{B}_e, \mathbb{C}) \simeq L_\lambda$ となる. ここで L_λ は λ に対応する $\mathfrak{S}_n$ の既約表現である.

G が一般の半単純な $\mathbb{C}$ 上の代数群の場合にも同様に Springer fiber は定義でき, そのコホモロジーには Weyl 群 W が作用する. W の既約表現の分類を得るためには別の有限群の作用でコホモロジーを分解する必要がある. 詳細は [8] などの教科書を参照. W 作用の構成については後で述べる.

Example 2. $\lambda = (n)$ のとき, e は regular で $\mathcal{B}_e = \mathrm{pt}$ となり, $\mathrm{H}^0(\mathcal{B}_e, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{triv} = L_{(n)}$.

Example 3. $\lambda = (1^n)$ のとき, $e = 0$ で $\mathcal{B}_e = G/B$ は旗多様体全体になる. 旗多様体のコホモロジー環はよく知られているように余不変式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/\left(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_+^{\mathfrak{S}_n}\right)$ と次数付き環として同型であり, 余不変式環には $\mathfrak{S}_n$ が自然に作用する. 最高次のコホモロジーは差積 $\prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_i - x_j)$ で張られる 1 次元部分空間であり, $\mathrm{H}^{2\dim(G/B)}(G/B, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{sgn} = L_{(1^n)}$ となる.

Example 4. $\lambda = (n-1, 1)$ のとき, e は subregular であり $\mathcal{B}_e$ は $n-1$ 個の $\mathbb{P}^1$ の chain となる. このとき $\mathrm{H}^2(\mathcal{B}_e, \mathbb{C})$ は $n-1$ 次元で対称群の表現としては $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{t}$ と同型, また $\mathrm{H}^0(\mathcal{B}_e, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{triv}$ となる.

Remark 5. $\mathrm{H}^*(\mathcal{B}_e, \mathbb{C})$ 全体の $\mathfrak{S}_n$ 表現としての構造を考えると, 例えば Kostka 数やその q 変形といった組み合わせ論的な対象が現れる. 単なるコホモロジーの代わりに同変 K 群を考えるとアファイン Hecke 環の既約表現の分類などに応用することもできる ([8] を参照). さらに Springer fiber や後述する Slodowy variety の連接層の導来圏には exotic t-structure と呼ばれる t-structure があり, その heart は正標数の Lie 環のモジュラー表現論などと関係していることが知られている (cf. [2], [19] など).

1.2 Cohomology ring of Springer fibers of type A

一般に Springer fiber の奇数次のコホモロジーは消えることが知られている (DeConcini-Lusztig-Procesi [9]). よってそのコホモロジー環は可換環になる. A 型 Springer fiber の場合は自然な準同型写像 $\mathrm{H}^*(G/B, \mathbb{C}) \to \mathrm{H}^*(\mathcal{B}_e, \mathbb{C})$ が全射となり, この可換環は余不変式環の商として具体的に記述することができる.

$\lambda \vdash n$ に対応する冪零軌道を $\mathcal{O}_\lambda$ で表し, $\overline{\mathcal{O}_\lambda}$ をその閉包とする. λ^T で λ の転置を表す.

Theorem 6 (DeConcini-Procesi [10], Tanisaki [24])**.** $e \in \mathcal{O}_\lambda$ とする. このとき次数付き代数として

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{B}_e, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{t} \cap \overline{\mathcal{O}}_{\lambda^T}].$$

ここで $\mathfrak{t} \cap \overline{\mathcal{O}}_{\lambda^T}$ は $\mathfrak{g}$ でのスキーム論的共通部分であり, その座標環の次数は $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathfrak{g}$, $s \cdot X = s^{-2}X$, から誘導される $\mathfrak{t} \cap \bar{\mathcal{O}}_{\lambda^T}$ への $\mathbb{C}^*$ により定まる.

$\mathbb{C}[\mathfrak{t} \cap \bar{\mathcal{O}}_{\lambda^T}]$ には自然に $\mathfrak{S}_n$ が作用し, この同型は $\mathrm{H}^*(\mathcal{B}_\lambda, \mathbb{C})$ への $\mathfrak{S}_n$ 作用と compatible になる. A 型の場合, 冪零軌道の閉包の定義方程式としては例えば [24] で予想され Weyman ([26]) によって証明されたものが知られている. それを用いれば定理の右辺をより具体的に表示することもできる.

Remark 7. A 型以外の Springer fiber の場合, 部分的な結果としては [7] がある. 一般には A 型の場合と類似の同型は成立しない.

本稿ではこの定理を Braden-Licata-Proudfoot-Webster ([3]) による symplectic duality と呼ばれる双対性と関係付けることでこれを一般化する. この双対性は conical symplectic resolution とそこへの良い $\mathbb{C}^*$ 作用の組の間の双対性である. §2 では conical symplectic resolution について説明する. §3 では symplectic duality と上の定理との間の関係について述べる.

2 Conical symplectic resolutions

2.1 Definition

$\mathfrak{M}$ を smooth algebraic symplectic variety, ω をその上の symplectic form とする.

Definition 8 (conical symplectic resolution)**.** $\mathfrak{M}$ とそこへの $\mathbb{S} = \mathbb{C}^*$ 作用の組 $(\mathfrak{M}, \mathbb{S})$ が conical symplectic resolution であるとは,

1. $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して $s^*\omega = s^\ell\omega$, $s \in \mathbb{S}$,
2. $\pi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_0 := \operatorname{Spec}\mathbb{C}[\mathfrak{M}]$ は projective birational,
3. $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_0 = \mathbb{C}$, $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_{<0} = 0$,

が成り立つことを言う. ここで $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_i$ は $\mathbb{S}$-weight が i の部分を表し, $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_{<0} = \oplus_{i<0}\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_i$ である.

$\mathfrak{M}_0$ は normal であり, 唯一の $\mathbb{S}$ 固定点 o を持つ. 基本的な conical symplectic resolution の性質としては例えば次のようなものがある.

Proposition 9. $(\mathfrak{M}, \mathbb{S})$ を conical symplectic resolution とする. このとき次が成り立つ.

1. $R\pi_*\mathcal{O}_{\mathfrak{M}} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{M}_0}$, つまり $\mathfrak{M}_0$ は有理特異点を持つ.
2. $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{L} := \pi^{-1}(o)$ はホモトピー同値, 特に $\mathrm{H}^*(\mathfrak{M}, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{H}^*(\mathfrak{L}, \mathbb{C})$.
3. $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}$ は Lagrangian subvariety.

例えば $\mathfrak{M}$ が後述する Slodowy variety の場合を考えれば $\mathfrak{L}$ は Springer fiber と一致し, そのコホモロジー環は Slodowy variety のコホモロジー環と同型になる.

Theorem 10 (Kaledin [14])**.**
1. 有限個の strata による stratification $\mathfrak{M}_0 = \sqcup_\alpha \mathfrak{M}_\alpha$ であって各 $\mathfrak{M}_\alpha$ が smooth symplectic になるものが存在する.
2. π は semismall, つまり $\operatorname{codim}_{\mathfrak{M}_0}\{x \in \mathfrak{M}_0 \mid \dim \pi^{-1}(x) \geq d\} \geq 2d$ が任意の $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して成立する.
3. $\mathrm{H}^{\mathrm{odd}}(\mathfrak{M}, \mathbb{C}) = 0$

上に現れる $\mathfrak{M}_\alpha$ を $\mathfrak{M}_0$ の symplectic leaf と呼ぶ. 奇数次のコホモロジーが消えるという主張は先述の Springer fiber に対する DeConcini-Lusztig-Procesi の結果の conical symplectic resolution への一般化になっている.

2.2 Quantization of conical symplectic resolutions

ω により $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$ は Poisson 代数の構造を持つ. $\mathfrak{M}_0$ の smooth locus 上にある symplectic form を用いると, smooth locus 上の Poisson 構造が定まるが, $\mathfrak{M}_0$ が normal であることからこれは $\mathfrak{M}_0$ 全体に延びる.

Definition 11 (quantization)**.** $(\mathfrak{M}, \omega)$ の量子化とは

1. $\mathcal{Q}$: $\mathfrak{M}$ 上の結合的な平坦 $\mathbb{C}[\![\hbar]\!]$-代数の (Zariski 位相に関する) 層であって $\hbar$-進位相に関して完備なもの
2. $\mathcal{Q}/\hbar\mathcal{Q} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$: 代数の同型

の組であって $\mathcal{Q}/\hbar\mathcal{Q}$ が可換になることから誘導される Poisson 代数の構造が同型 $\mathcal{Q}/\hbar\mathcal{Q} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$ と compatible になるようなものを言う.

$Q(\mathfrak{M},\omega)$ で $(\mathfrak{M},\omega)$ の量子化の同型類の集合を表すことにする．このとき次の結果が知られている．

Theorem 12 (Bezrukavnikov-Kaledin [1])**.** 自然な全単射 (noncommutative period map と呼ばれる)

$$\mathrm{Per} : Q(\mathfrak{M},\omega) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(\mathfrak{M},\mathbb{C})[\![\hbar]\!]$$

が存在する．

$\mathrm{Per}(\mathcal{Q}) = 0$ となる量子化を canonical な量子化と呼ぶ．$\mathbb{S}$ 作用を用いると $\mathbb{S}$ 同変な量子化の概念を定義することができる．ただし $\hbar$ の $\mathbb{S}$-weight は ℓ とする．$Q(\mathfrak{M},\omega)^{\mathbb{S}}$ で $\mathbb{S}$ 同変な量子化の同型類の集合を表すことにする．このとき次が知られている．

Proposition 13 (Losev [18])**.** Per は次の全単射を誘導する

$$Q(\mathfrak{M},\omega)^{\mathbb{S}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(\mathfrak{M},\mathbb{C})$$

$\mathcal{Q} \in Q(\mathfrak{M},\omega)^{\mathbb{S}}$ とする．$\mathcal{D} := \mathcal{Q}[\hbar^{-1/\ell}]$ とおき，$\mathcal{D}(m) \subset \mathcal{D}$ を $\mathcal{D}(0) := \mathcal{Q}[\hbar^{1/\ell}]$, $\mathcal{D}(m) := \hbar^{-m/\ell}\mathcal{D}(0)$ により定める．$A := \Gamma(\mathfrak{M},\mathcal{D})^{\mathbb{S}}$ とするとこれは filtration $A(0) \subset A(1) \subset \ldots \subset A$ $(A(m) := \Gamma(\mathfrak{M},\mathcal{D}(m))^{\mathbb{S}})$ を持ち，$\mathrm{gr}\, A$ は $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]$ と次数付き Poisson 代数として同型になる．

2.3 Springer resolutions

代表的な conical symplectic resolution の例としては例えば Springer resolution がある．G を $\mathbb{C}$ 上の半単純代数群，B をその Borel 部分群，U を B の冪単根基，$T \subset B$ を Cartan 部分群，$\mathcal{N}_G \subset \mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ を冪零錐とする．

$$\tilde{\mathcal{N}_G} := \{(gB, X) \in G/B \times \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(g)^{-1}X \in \mathrm{Lie}(U)\}$$

を Springer resolution と呼ぶ．$\mathfrak{g}$ 上の G 不変で非退化な内積を固定し，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ を同一視すると $\tilde{\mathcal{N}_G}$ は $T^*(G/B)$ と同型になり，従って smooth かつ symplectic form を持つ．さらに第 2 成分への射影 $\pi : \tilde{\mathcal{N}_G} \to \mathcal{N}_G$ は projective かつ birational である．$\tilde{\mathcal{N}_G}$ への $\mathbb{S}$ 作用は $s \cdot (gB, X) = (gB, s^{-2}X)$ により与える．

Proposition 14.

1. $\tilde{\mathcal{N}_G}$ は conical symplectic resolution で，その affinization は $\mathcal{N}_G$.
2. $\mathcal{N}_G$ の symplectic leaf は G の adjoint 作用に関する軌道で与えられる．
3. $\lambda \in \mathrm{H}^2(\tilde{\mathcal{N}_G},\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{t}^*$ に対応する $\mathbb{C}[\mathcal{N}_G]$ の量子化は $U(\mathfrak{g})/(\mathrm{Ker}\,\chi_\lambda)$．ここで $U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環であり，$Z(\mathfrak{g})$ をその中心とすると $\chi_\lambda : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ は highest weight $\lambda - \rho$ の Verma 加群の中心指標である．

2.4 Slodowy varieties

Springer resolution を冪零軌道の slice に制限することで別の conical symplectic resolution が得られる．$e \in \mathcal{N}_G$ を冪零元，(e,h,f) を e を含む $\mathfrak{sl}_2$-triple とする．$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(f)$ を $\mathfrak{g}$ の中での f の centralizer とする．このとき $S_e := (e + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(f)) \cap \mathcal{N}_G$ を Slodowy slice と呼び，そこへの Springer resolution の制限を $\pi : \tilde{S}_e \to S_e$ と書く．$\tilde{S}_e$ を Slodowy variety と呼ぶ．$\tilde{S}_e$ への $\mathbb{S}$ 作用は $s \cdot (gB, X) = (s^h gB, s^{-2}\,\mathrm{Ad}(s^h)X)$ により定める．$e \in S_e$ は S_e の唯一の $\mathbb{S}$ 固定点になる．

Proposition 15. 1. $\tilde{S}_e$ は conical symplectic resolution で, その affinization は S_e.

2. S_e の symplectic leaf は G の adjoint 軌道と $e + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(f)$ の共通部分.

3. $\lambda \in \mathrm{H}^2(\tilde{S}_e, \mathbb{C})$ が $\mathrm{H}^2(\tilde{\mathcal{N}}_G, \mathbb{C})$ から来ているとき, 対応する $\mathbb{C}[S_e]$ の量子化は有限 W-代数の central quotient.

Remark 16. 一部の例外を除いて (特に G が simply-laced ならいつでも) $\mathrm{H}^2(\tilde{S}_e, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{H}^2(\tilde{\mathcal{N}}_G, \mathbb{C})$ (cf. [5], [16])

2.5 Cotangent bundle of partial flag varieties

$B \subset P \subset G$ を放物型部分群とする. Springer resolution は $T^*(G/B)$ と同一視できたが, 一般に $T^*(G/P)$ もまた conical symplectic resolution となり, 例えば A 型の場合にはその affinization も具体的に与えられる. 簡単のためここでは $G = \mathrm{SL}_n$ とする. P を放物型部分群, L_P をその Levi 部分群, U_P を P の冪単根基とする. L_P の block の大きさをみることで分割 $\lambda \vdash n$ が定まる. $\mathcal{N}_P := \mathrm{Ad}(G)\,\mathrm{Lie}(U_P) \subset \mathcal{N}_G$ とおく. このとき

$$T^*(G/P) \simeq \{(gP, X) \in G/P \times \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(g)^{-1}X \in \mathrm{Lie}(U_P)\}$$

であり, 第 2 成分への射影は $\pi : T^*(G/P) \to \mathcal{N}_P$ という射を与える. $T^*(G/P)$ への $\mathbb{S}$ 作用は Springer resolution の場合と同じく $s \cdot (gP, X) = (gP, s^{-2}X)$ で与える.

Proposition 17. 1. $\mathcal{N}_P = \bar{\mathcal{O}}_{\lambda^T}$.

2. $T^*(G/P)$ は conical symplectic resolution で, その affinization は $\mathcal{N}_P$.

3. $\mathcal{N}_P$ の symplectic leaf は G の adjoint 軌道.

Remark 18. A 型以外では一般に π は generically finite で, π が birational でも $\mathcal{N}_P$ (これは Richardson orbit と呼ばれる冪零軌道の閉包になる) は normal とは限らない.

2.6 Other examples

他にも

- S3-variety : Slodowy variety の放物版 (特に $\tilde{S}_e$ や $T^*(G/P)$ を含む)
- hypertoric variety : $\mathbb{C}^{2n}$ のトーラスによる Hamiltonian reduction であって smooth なもの
- $\mathbb{C}^2$ 上の n 点の Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$, あるいはより一般に $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の crepant resolution 上の n 点の Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}^n(\widetilde{\mathbb{C}^2/\Gamma})$ ($\Gamma \subset \mathrm{SL}_2$: 有限部分群)
- $\mathbb{P}^2$ 上の framed torsion-free sheaf の moduli 空間
- affine Grassmannnian $G(\!(\epsilon)\!)/G[\![\epsilon]\!]$ の $G[\![\epsilon]\!]$-軌道の閉包の中での別の $G[\![\epsilon]\!]$-軌道の transversal slice の resolution (存在すれば)
- 箙多様体

などが conical symplectic resolution の例になっている.

2.7 Poisson deformation

既に述べたように $\mathfrak{M}$ の非可換方向への変形のパラメータは $\check{\mathfrak{t}} := \mathrm{H}^2(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ で与えられていたが, 同様に可換な方向への変形のパラメータも $\check{\mathfrak{t}}$ で与えられることが知られている．ここでの変形は Poisson 構造のデータ込みで考えている．

$(X, \{,\})$ を Poisson スキームとする．$\mathrm{Art}_{\mathbb{C}}$ を局所 Artin$\mathbb{C}$-代数 $(A, \mathfrak{m}_A)$ であって $A/\mathfrak{m}_A \simeq \mathbb{C}$ となるもののなす圏とする．$(A, \mathfrak{m}_A) \in \mathrm{Art}_{\mathbb{C}}$ に対して, $(X, \{,\})$ の $S = \mathrm{Spec}(A)$ 上無限小 Poisson 変形とは, 平坦射 $\mathcal{X} \to S$ と S 上 relative な Poisson 構造 $\{,\} : \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \times \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ の組であって $\mathfrak{m}_A$ に対応する点に制限したとき $(X, \{,\})$ と一致するようなもののことを言う．PD_X で $(A, \mathfrak{m}_A)$ に対して S 上の Poisson 変形全体の集合を対応させる $\mathrm{Art}_{\mathbb{C}}$ から集合の圏への関手を表す．このとき, $\mathfrak{M}$ や $\mathfrak{M}_0$ の Poisson 変形に関して例えば次のような結果が知られている．

Theorem 19 (Namikawa [21], [22], [23])**.** 以下の性質を満たす可換図式が存在する．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{M}_0 \arrow[d, "g"] \\ \check{\mathfrak{t}} \arrow[r, "h"] & \check{\mathfrak{t}}/\mathrm{W} \end{tikzcd}$$

1. W は有限群 (Namikawa Weyl 群と呼ばれる) で, W は $\check{\mathfrak{t}}$ に作用する．
2. $\mathcal{M} \to \check{\mathfrak{t}}$, $\mathcal{M}_0 \to \check{\mathfrak{t}}/\mathrm{W}$ の原点での formal completion は $\mathrm{PD}_{\mathfrak{M}}$, $\mathrm{PD}_{\mathfrak{M}_0}$ を pro-represent する．特に $f^{-1}(0) \simeq \mathfrak{M}$ かつ $g^{-1}(h(0)) \simeq \mathfrak{M}_0$.
3. $\check{\mathfrak{t}}$ の有限個の余次元 1 の線型部分空間 $\check{\mathcal{H}} = \{H\}$ が存在して, $t \in \check{\mathfrak{t}}$ に対し, $f^{-1}(t) \not\simeq g^{-1}(h(t))$ であることと, $t \in \cup_{H \in \check{\mathcal{H}}} H$ となることは同値.

2.8 Grothendieck simultaneous resolutions

$\mathfrak{M} = \tilde{\mathcal{N}}_G$ の場合, 上の定理に現れる可換図式は Grothendieck simultaneous resolution としてよく知られたものになる．このとき $\check{\mathfrak{t}} \simeq \mathfrak{t}^* \simeq \mathfrak{t}$ となり, Namikawa Weyl 群は通常の Weyl 群と一致する．$\mathcal{M}_0 \simeq \mathfrak{g}$ であり, 射 $\mathcal{M}_0 \to \check{\mathfrak{t}}/\mathrm{W}$ は自然な射 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\!\!/G \simeq \mathfrak{t}/\mathrm{W}$ により与えられる．$\mathcal{M}$ は

$$\tilde{\mathfrak{g}} := \{(gB, X) \in G/B \times \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(g)^{-1}X \in \mathfrak{b}\}$$

で与えられ, 射 $\mathcal{M} \to \check{\mathfrak{t}}$ は $\mathrm{Ad}(g)^{-1}X$ の $\mathfrak{b}/[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \simeq \mathfrak{t}$ での像を対応させることで得られる．$\pi_{\mathfrak{g}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_0$ は第 2 成分への射影とする．このとき, $\check{\mathcal{H}}$ は coroot が定める hyperplane $(\subset \mathfrak{t}^*)$ と一致する．したがって一般の conical symplectic resolution に対する $\check{\mathcal{H}}$ は coroot hyperplane の類似とみなせる．

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathcal{N}}_G \arrow[rr] \arrow[dr, hook] \arrow[dd] & & \mathcal{N}_G \arrow[dr, hook] \arrow[dd] & \\ & \tilde{\mathfrak{g}} \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathfrak{g} \arrow[dd] \\ \{0\} \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & \{0\} \arrow[dr, hook] & \\ & \mathfrak{t} \arrow[rr] & & \mathfrak{t}/\mathrm{W} \end{tikzcd}$$

2.9 Weyl group action

Grothendieck simultaneous resolution を用いると Springer fiber のコホモロジーへの Weyl 群作用が以下のように構成できる.

Proposition 20. $\pi_{\mathfrak{g}} : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ は small, つまり $\operatorname{codim}_{\mathfrak{g}}\{X \in \mathfrak{g} \mid \dim \pi_{\mathfrak{g}}^{-1}(X) \geq d\} > 2d$ が任意の $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して成り立つ.

このことから $\pi_{\mathfrak{g}*}\mathbb{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \simeq \mathrm{IC}(\mathfrak{g}^{\mathrm{rs}}, (\pi_{\mathfrak{g}*}\mathbb{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}}) \mid_{\mathfrak{g}^{\mathrm{rs}}})$ となることがわかる. ここで $\mathfrak{g}^{\mathrm{rs}}$ は regular semisimple 元からなる locus であり, IC は intermediate extension である. $\pi_{\mathfrak{g}}$ の $\mathfrak{g}^{\mathrm{rs}}$ への制限は W-covering になっていることから $(\pi_{\mathfrak{g}*}\mathbb{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}}) \mid_{\mathfrak{g}^{\mathrm{rs}}}$ には W が作用する. IC を取る操作は functorial であるから $\pi_{\mathfrak{g}*}\mathbb{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}}$ にも W が作用する. $e \in \mathfrak{g}$ でのファイバーを取ると $\mathrm{H}(\mathcal{B}_e, \mathbb{C})$ への W 作用が得られる.

同様にして $\mathrm{H}^*(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ には Namikawa Weyl 群が作用することもわかる.

3 Conjectures

3.1 Category $\mathcal{O}$

Braden-Licata-Proudfoot-Webster により提唱された symplectic duality では conical symplectic resolution に別の良い $\mathbb{T} := \mathbb{C}^*$ 作用が入る状況を考える. 以下, conical symplectic resolution とそこへの $\mathbb{T}$ 作用の組 $(\mathfrak{M}, \mathbb{S}, \mathbb{T})$ に次の条件を仮定する.

1. $\mathbb{T}$ の $\mathfrak{M}$ への作用は Hamiltonian であり, $\mathbb{S}$ の作用と可換.
2. $\mathfrak{M}^{\mathbb{T}}$ は有限集合.
3. $\mathfrak{M}_0$ の minimal symplectic leaf は $\{o\}$.

$\mathcal{Q} \in Q(\mathfrak{M}, \omega)$ から § 2.2 で述べたように $\mathcal{D}$ や代数 A を構成すると, A には $\mathbb{T}$ が作用する. その weight への分解を $A = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ と書く. $\mathcal{O}_a$ を有限生成 A 加群であって $A^{\geq 0}$ が locally finite に作用するものからなる圏とする. また $\mathcal{O}_g$ を “good” な $\mathbb{S}$-同変 $\mathcal{D}$-加群であって support が $\mathfrak{M}^+ := \{p \in \mathfrak{M} \mid \lim_{\mathbb{T} \ni t \to 0} t \cdot p \text{ exists}\}$ に入るものからなる圏とする (詳細は [3] を参照).

例えば $\mathfrak{M} = \tilde{\mathcal{N}}_G$ で量子化のパラメータが regular, つまり Weyl 群の作用に関する stabilizer が自明になるとき, $\mathcal{O}_a$ は通常の BGG category $\mathcal{O}$ と圏同値になる. 従って $\mathcal{O}_a$ は category $\mathcal{O}$ の一般化とみなせる. Beilinson-Bernstein 型の局所化定理の類似として, 多くのパラメータで $\mathcal{O}_a \simeq \mathcal{O}_g$ が成り立つことが知られている ([4]). 局所化定理が成り立つとき, $\mathcal{O}$ でその category $\mathcal{O}$ を表すことにする. また 2 つの量子化のパラメータが $\mathrm{H}^*(\mathfrak{M}, \mathbb{Z})$ だけ異なるとき, 対応する $\mathcal{O}_g$ は圏同値になることも知られている ([3]).

Theorem 21 (Braden-Licata-Proudfoot-Webster [3])**.** $\mathcal{O}_g$ は highest weight category.

Conjecture 22 (Braden-Licata-Proudfoot-Webster [3])**.** $\mathcal{O}$ は (standard) Koszul.

3.2 Symplectic duality

$(\mathfrak{M}, \mathbb{S}, \mathbb{T})$ を上のとおりとする．G を $\mathbb{S}$ と可換な $\mathfrak{M}$ の Hamiltonian symplectomorphism のなす群とする．これは簡約代数群になる．$\mathrm{T} \subset \mathrm{G}$ を $\mathbb{T}$ を含む (唯一の) 極大トーラス (cf. [3]), $\mathbb{W}$ を G の Weyl 群とする．$\mathfrak{M}$ に対する coroot(正確にはそれが定める hyperplane) の概念は既に述べたが, $\mathfrak{M}$ に対する root の概念も, $\mathfrak{M}^{\mathbb{T}} = \mathfrak{M}^{\mathrm{T}} \subset \mathfrak{M}$ の normal bundle に現れる T-weight として定義することができる (例えば [20])．$\mathcal{H}$ を $\mathfrak{M}$ の root が定める $\mathfrak{t}$ の hyperplane の集合とする．

Conjecture 23 (Braden-Licata-Proudfoot-Webster [3])**.** 別の conical symplectic resolution と良い $\mathbb{C}^*$ 作用の組 $(\mathfrak{M}^!, \omega^!, \mathbb{S}^!, \mathbb{T}^!)$ (symplectic dual と呼ばれる) が存在して, $\mathfrak{M}^!$ に対応する記号には ! を付けることにすると

1. $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}^!$ は Koszul dual. ここで量子化のパラメータは “integral” なものを取る (詳細は [3] を参照).
2. $\mathrm{W} \simeq \mathbb{W}^!$ かつ $\mathbb{W} \simeq \mathrm{W}^!$.
3. $\check{\mathfrak{t}} \simeq \mathfrak{t}^!$ かつ $\mathfrak{t} \simeq \check{\mathfrak{t}}^!$, つまり変形パラメータと同変パラメータが入れ替わる.
4. $\check{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^!$ かつ $\mathcal{H} = \check{\mathcal{H}}^!$, つまり coroot hyperplane と root hyperplane が入れ替わる.
5. etc.

Remark 24. $(\mathfrak{M}^!, \omega^!, \mathbb{S}^!, \mathbb{T}^!)$ の symplectic dual は $(\mathfrak{M}, \omega, \mathbb{S}, \mathbb{T})$.

例としては以下の様なペアが symplectic dual であると考えられている.

- $\mathcal{N}_G$ と $\mathcal{N}_{\check{G}}$ は symplectic dual ($\check{G}$ は G の Langlands 双対).
- A 型 S3 variety は別の A 型 S3 variety と symplectic dual.
- hypertoric variety は別の (Gale dual な) hypertoric variety と symplectic dual.
- $\mathrm{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ ($\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ の閉部分多様体であって台の重心が原点になる locus) は $\mathrm{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ と symplectic dual.
- $\mathrm{Hilb}^n(\widetilde{\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})})$ は $\mathbb{P}^2$ 上の rank r, $c_2 = n$ の framed torsion free sheaf の moduli と symplectic dual.
- ADE 型 quiver variety (であって良い $\mathbb{C}^*$ 作用を持つもの) はある affine Grassmannian の slice (であって resolution を持つもの) と symplectic dual.

3.3 Conjectures

本題に戻り symplectic duality と DeConcini-Procesi-Tanisaki の定理との関係について説明する．そのためにまずこの定理の symplectic dual 版と言える命題を述べる．

再び $G = \mathrm{GL}_n$ とする．$P = L_P U_P \subset G$ を放物型部分群とする．$e \in \mathfrak{l}_P = \mathrm{Lie}(L_P)$ を Levi の中で regular になるような冪零元とする．$\lambda \vdash n$ を P に対応する分割とすると, e の Jordan type は λ である．e を含む $\mathfrak{sl}_2$-triple (e, h, f) を取る．

Remark 25. $\tilde{S}_e$ と $T^*(G/P)$ は symplectic dual.

Proposition 26 ([13])**.** 次数付き代数として

$$\mathrm{H}^*(G/P,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[(e+\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}_P}(f))\cap S_e].$$

ここで右辺の次数は $\mathbb{S}$ 作用から定まるもの.

Remark 27. 両辺の各次数ごとの次元が一致することは例えば [19] から読み取れる.

Proposition 17 を用いて DeConcini-Procesi-Tanisaki の定理を言い換えると

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{B}_e,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{t}\cap\mathcal{N}_P]$$

となる. これらを比較すると $T^*(G/P)$ の central fiber のコホモロジー環が $\tilde{S}_e$ の affinization を用いて書け, 逆に $\tilde{S}_e$ の central fiber のコホモロジー環が $T^*(G/P)$ の affinization を用いて書けていることが見て取れる. Proposition 9 より central fiber のコホモロジー環は全体のコホモロジー環と同型であるから, 一般に conical symplectic resolution のコホモロジー環がその symplectic dual の座標環を用いて書けることが期待される.

スキーム論的な共通部分 $\mathfrak{t}\cap\mathcal{N}_P$ や $(e+\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}_P}(f))\cap S_e$ の一般化を述べるために記号を準備する. H を $\mathbb{C}$ 上定義されたトーラスとし, $X=\mathrm{Spec}(R)$ を $\mathbb{C}$ 上のスキームであって H が作用するものとしたとき, その固定点スキーム X^H ([11]) を H 作用に関する weight が 0 でない homogeneous な元全体で生成されるイデアルで定義される閉部分スキームとする. すると $\mathfrak{t}\cap\mathcal{N}_P=\mathcal{N}_P^T$, $(e+\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}_P}(f))\cap S_e=S_e^{Z(L_P)}$ と書けることがわかる. これを一般化して次の予想を得る.

Conjecture 28 ([13])**.** $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{M}^!$ が symplectic dual のとき, 次数付き代数として

$$\mathrm{H}^*(\mathfrak{M},\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[(\mathfrak{M}_0^!)^{\mathbb{T}^!}],$$
$$\mathrm{H}^*(\mathfrak{M}^!,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[(\mathfrak{M}_0)^{\mathbb{T}}].$$

ここで右辺の次数は $\mathbb{S}^!$, $\mathbb{S}$ 作用から定まるもの.

Theorem 29 ([13])**.** この予想は A 型 S3 variety, hypertoric variety, $\mathrm{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ の場合に正しい.

証明は各々の場合に知られているコホモロジー環の記述を用いて明示的に同型を作ることにより得られる. コホモロジー環の記述としては A 型 S3 variety の場合は [6], hypertoric variety の場合は [12] や [15], $\mathrm{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ の場合は [17] や [25] で知られている.

すでに述べたように $\mathrm{H}^*(\mathfrak{M},\mathbb{C})$ には Namikawa Weyl 群 W が自然に作用する. 一方で $\mathbb{W}$ が $\mathbb{C}[(\mathfrak{M}_0)^{\mathbb{T}}]$ に自然に作用することもすぐにわかる. 従って次のように予想することは自然であると思われる.

Conjecture 30. 予想の同型は $\mathrm{W}\simeq\mathbb{W}^!$, $\mathrm{W}^!\simeq\mathbb{W}$ 作用と compatible.

また, symplectic duality においては変形パラメータと同変パラメータが入れ替わることを思い出すと次の予想が得られる.

Conjecture 31. 次数付き代数として

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{G}^!}(\mathfrak{M}^!,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[\mathcal{M}_0^{\mathbb{T}}],$$
$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{T}^!}(\mathfrak{M}^!,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[(\check{\mathfrak{t}}\times_{\check{\mathfrak{t}}/\mathrm{W}}\mathcal{M}_0)^{\mathbb{T}}].$$

上では symplectic form を保つ群作用に関する同変コホモロジーを考えたが, symplectic form を保たない $\mathbb{S}$ 作用に関する同変コホモロジーに関しても次のように予想することができる．A を canonical な量子化から定まる $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]$ の量子化とする．A は filtration を持つので, その Rees 代数 $A_\hbar$ を考えることができる．ここで $\hbar$ は Rees 代数を取るときに付け加えられるパラメータである．$A_\hbar^k$ を $\mathbb{T}$-weight が k の部分とする．

Conjecture 32. 次数付き代数として

$$\mathrm{H}^*_{\mathbb{S}^!}(\mathfrak{M}^!, \mathbb{C}) \simeq A_\hbar^0/(\sum_{k>0} A_\hbar^{-k} A_\hbar^k).$$

ただし $\mathrm{H}^*_{\mathbb{S}^!}(\mathrm{pt}) \simeq \mathbb{C}[\hbar]$ とみなす.

References

[1] R. Bezrukavnikov, D. Kaledin, Fedosov quantization in algebraic context, Mosc. Math. J. 4 (2004), no. 3, 559–592

[2] R. Bezrukavnikov, I. Mirković, Representations of semisimple Lie algebras in prime characteristic and the noncommutative Springer resolution, Ann. of Math. (2) 178 (2013), no. 3, 835–919

[3] T. Braden, A. Licata, N. Proudfoot, B. Webster, Quantizations of conical symplectic resolutions II: category $\mathcal{O}$ and symplectic duality, arXiv:1407.0964

[4] T. Braden, N. Proudfoot, B. Webster, Quantizations of conical symplectic resolutions I: local and global structure, arXiv:1208.3863

[5] A. Braverman, D. Maulik, A. Okounkov, Quantum cohomology of the Springer resolution, Adv. Math. 227 (2011), no. 1, 421–458

[6] J. Brundan, V. Ostrik, Cohomology of Spaltenstein varieties, Transform. Groups, 16 (2011), 619–648

[7] J. Carrell, Orbits of the Weyl group and a theorem of DeConcini and Procesi Compositio Math. 60 (1986), no. 1, 45–52

[8] N. Chriss, V. Ginzburg, Representation theory and complex geometry, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997

[9] C. DeConcini, G. Lusztig, C. Procesi, Homology of the zero-set of a nilpotent vector field on a flag manifold, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), no. 1, 15–34

[10] C. DeConcini, C. Procesi, Symmetric functions, conjugacy classes and the flag variety, Invent. Math., 64 (1981), 203–219

[11] J. Fogarty, Fixed point schemes, Amer. J. Math., 95 (1973), 35–51

[12] T. Hausel, B. Sturmfels, Toric hyperKähler varieties, Doc. Math., 7 (2002), 495–534

[13] T. Hikita, An algebro-geometric realization of the cohomology ring of Hilbert scheme of points in the affine plane, arXiv:1501.02430

[14] D. Kaledin, Symplectic singularities from the Poisson point of view, J. Reine Angew. Math. 600 (2006), 135–156

[15] H. Konno, Cohomology rings of toric hyperkähler manifolds, Internat. J. Math., 11 (2000), 1001–1026

[16] M. Lehn, Y. Namikawa, C. Sorger, Slodowy slices and universal Poisson deformations, Compos. Math. 148 (2012), no. 1, 121–144

[17] M. Lehn, C. Sorger, Symmetric groups and the cup product on the cohomology of Hilbert schemes, Duke Math. J., 110 (2001), 345–357

[18] I. Losev, Isomorphisms of quantizations via quantization of resolutions, Adv. Math. 231 (2012), no. 3-4, 1216–1270

[19] G. Lusztig, Bases in equivariant K-theory. II, Represent. Theory., 3 (1999), 281–353

[20] D. Maulik, A. Okounkov, Quantum Groups and Quantum Cohomology, arXiv:1211.1287

[21] Y. Namikawa, Poisson deformations of affine symplectic varieties, Duke Math. J. 156 (2011), no. 1, 51–85

[22] Y. Namikawa, Poisson deformations of affine symplectic varieties, II, Kyoto J. Math. 50 (2010), no. 4, 727–752

[23] Y. Namikawa, Poisson deformations and birational geometry, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 22 (2015), no. 1, 339–359

[24] T. Tanisaki, Defining ideals of the closures of the conjugacy classes and representations of the Weyl groups, Tôhoku Math. J. (2), 34 (1982), 575–585

[25] E. Vasserot, Sur l'anneau de cohomologie du schéma de Hilbert de $\mathbf{C}^2$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 332 (2001), 7–12

[26] J.Weyman, The equations of conjugacy classes of nilpotent matrices, Invent. Math., 98 (1989), 229–245