等号付き多重ゼータ値と 2-1 公式

山本 修司（慶應義塾大学）

1 イントロダクション

等号付き多重ゼータ値，または**多重ゼータスター値**（multiple zeta-star value，以下 **MZSV** と略す）とは，

$$\zeta^\star(k_1,\dots,k_n)=\sum_{m_1\geq\cdots\geq m_n>0}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}}$$

なる多重級数の値である．ここで $k_1,\dots,k_n$ は正整数であり，収束のために $k_1\geq 2$ という条件を付ける．以下，このような列 $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_n)$ を**収束インデックス**といい，$k_1+\cdots+k_n$ を $\mathbf{k}$ の**重さ**と呼ぶ．

「等号付き」というのは，和をとるときに動くダミー変数 $m_1,\dots,m_n$ が等号付きの不等式で条件づけられているということであり，もちろん等号なしのバージョンを考えることもできる．実際，単に**多重ゼータ値**（multiple zeta value, 以下 **MZV**）といえば，普通は等号なしの

$$\zeta(k_1,\dots,k_n)=\sum_{m_1>\cdots>m_n>0}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}}$$

という値を指すことになっている．MZV の方が数論幾何や結び目理論など様々な分野との結びつきも強く，MZSV よりも「筋の良い」対象であるというのが一般的な認識だと思うが，本稿のテーマである 2-1 公式ではむしろ MZSV の方が主役である．

2-1 公式というのは，Ohno-Zudilin [2] により予想された，MZSV と $\frac{1}{2}$-MZV（後述）の間に成り立つ等式である．予想そのものは Zhao [5] によって証明されたが，等式が成立する背景を含めて十分に解明されたとは言えない，と筆者は思っている．そこで本稿では，2-1 公式の両辺に現れる値に関する筆者の結果を述べた後，筆者が抱えている疑問について説明したい．なお，多重ゼータ値に関する基本的な事柄について，本稿ではあまり説明しない．それらについては荒川・金子 [1] などを参照していただきたい．

2 2-1 公式

2-1 公式の主張を述べるため，まず t 多重ゼータ値というものを導入する．

定義 2.1 t を不定元とする．収束インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_n)$ に対し，

$$\zeta^t(\mathbf{k})=\sum_{\mathbf{p}} t^{\sigma(\mathbf{p})}\zeta(\mathbf{p})\in\mathbb{R}[t]$$

とおく．これを **t 多重ゼータ値**（**t-MZV**）と呼ぶ．ここで，右辺は

$$\mathbf{p}=(k_1\square k_2\square\dots\square k_n)$$

において $n-1$ 個の $\square$ にそれぞれ「$+$」または「,」のいずれかを挿入して得られるインデックス $\mathbf{p}$ 全体にわたる和であり，$\sigma(\mathbf{p})$ は $\mathbf{p}$ を作るときに「$+$」を挿入した個数を表す．

例 2.2 $\zeta^t(k_1,k_2,k_3)=\zeta(k_1,k_2,k_3)+t\zeta(k_1+k_2,k_3)+t\zeta(k_1,k_2+k_3)+t^2\zeta(k_1+k_2+k_3)$.

注意 2.3 $t=0$ を代入すると $\zeta^0(\mathbf{k})=\zeta(\mathbf{k})$ となることは定義から明らかである．一方 $t=1$ を代入すると $\zeta^1(\mathbf{k})=\zeta^\star(\mathbf{k})$ となる．すなわち，t-MZV は MZV と MZSV を補間する多項式になっている．

定理 2.4 (2-1 公式，Zhao [5, Theorem 1.1]) 非負整数列 $\mathbf{j}=(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^n$ が $j_1\ge 1$ を満たすとき，

$$\zeta^\star(\{2\}^{j_1},1,\{2\}^{j_2},1,\dots,\{2\}^{j_n},1)=2^n\zeta^{1/2}(2j_1+1,2j_2+1,\dots,2j_n+1) \tag{2.1}$$

が成り立つ．ここで，$\{2\}^j$ は 2 を j 個並べた列を表す．

例 2.5 $n=1$ のとき，

$$\zeta^\star(\overbrace{2,\dots,2}^{j},1)=2\zeta(2j+1).$$

$n=2$ のとき，

$$\zeta^\star(\overbrace{2,\dots,2}^{j_1},1\overbrace{2,\dots,2}^{j_2},1)=4\zeta(2j_1+1,2j_2+1)+2\zeta(2j_1+2j_2+2).$$

なおこれらは，それぞれ Zlobin [6] および Ohno-Zudilin [2] によって証明されていた．

等式 (2.1) の左辺を $X(\mathbf{j})$，右辺を $Y(\mathbf{j})$ とおく．以下の 2 節で，$Y(\mathbf{j})$ と $X(\mathbf{j})$ のそれぞれについて，関連する筆者の結果を述べる．

3 $Y(\mathbf{j})$ について：t 調和積

$Y(\mathbf{j})$ は 2^n の因子を除き $\frac{1}{2}$-MZV で表される．この節では，まず通常の MZV が満たす調和関係式を復習した後，その t-MZV への拡張である t 調和関係式を述べ，さらにそれを $t=\frac{1}{2}$ に特殊化することで $Y(\mathbf{j})$ についての関係式が得られることを示す．

定義 3.1 $\mathfrak{h}^1=\mathbb{Q}\langle z_k \mid k=1,2,\ldots\rangle$ を，無限個の変数 $z_1,z_2,\ldots$ に関する非可換多項式環とし，その $\mathbb{Q}$ 部分空間 $\mathfrak{h}^0\subset\mathfrak{h}^1$ を

$$\mathfrak{h}^0=\mathbb{Q}\oplus\bigoplus_{k\geq 2} z_k\mathfrak{h}^1$$

と定義する．また，$\mathbb{Q}$ 双線型写像 $*\colon\mathfrak{h}^1\times\mathfrak{h}^1\to\mathfrak{h}^1$ を以下のように定め，**調和積**と呼ぶ：

$$\begin{gathered}1*w=w*1=w,\\ z_kw*z_lw'=z_k(w*z_lw')+z_l(z_kw*w')+z_{k+l}(w*w').\end{gathered}$$

ただし $k,l\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $w,w'\in\mathfrak{h}^1$ とする．

例 3.2

$$\begin{aligned}z_k*z_l&=z_k(1*z_l)+z_l(z_k*1)+z_{k+l}(1*1)\\&=z_kz_l+z_lz_k+z_{k+l},\\ z_{k_1}z_{k_2}*z_l&=z_{k_1}(z_{k_2}*z_l)+z_l(z_{k_1}z_{k_2}*1)+z_{k_1+l}(z_{k_2}*1)\\&=z_{k_1}z_{k_2}z_l+z_{k_1}z_lz_{k_2}+z_{k_1}z_{k_2+l}+z_lz_{k_1}z_{k_2}+z_{k_1+l}z_{k_2}.\end{aligned}$$

命題 3.3 $\mathfrak{h}^1$ は $*$ を積として可換 $\mathbb{Q}$ 代数をなし，$\mathfrak{h}^0$ はその部分 $\mathbb{Q}$ 代数となる．さらに $\mathbb{Q}$ 線型写像 $Z\colon\mathfrak{h}^0\to\mathbb{R}$ を

$$Z(1)=1,\quad Z(z_{k_1}\cdots z_{k_n})=\zeta(k_1,\ldots,k_n)$$

で定義すると，Z は $\mathbb{Q}$ 代数の準同型となる．

この命題の後半部分は，MZV の間に

$$\zeta(k)\zeta(l)=\zeta(k,l)+\zeta(l,k)+\zeta(k+l)$$

のような関係式が成り立つことを意味する．これらを MZV の**調和関係式**と呼ぶ．

次に t-MZV への拡張を考える．$\mathbb{Q}[t]$ 上の非可換多項式環 $\mathbb{Q}[t]\langle z_k \mid k\geq 1\rangle$ を $\mathfrak{h}^1[t]=\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{h}^1\,t^n$ と同一視して，後者の記号で表す（t は各 z_k と可換であることに注意）．

定義 3.4 $\mathbb{Q}[t]$ 双線型写像 $\overset{t}{*}\colon\mathfrak{h}^1[t]\times\mathfrak{h}^1[t]\to\mathfrak{h}^1[t]$ を以下のように定め，***t* 調和積**と呼ぶ：

$$\begin{gathered}1\overset{t}{*}w=w\overset{t}{*}1=w,\\ z_kw\overset{t}{*}z_lw'=z_k(w\overset{t}{*}z_lw')+z_l(z_kw\overset{t}{*}w')+(1-2t)z_{k+l}(w\overset{t}{*}w')+(t^2-t)z_{k+l}\circ(w\overset{t}{*}w').\end{gathered}$$

ただし $k,l\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $w,w'\in\mathfrak{h}^1[t]$．また $z_k\circ(\ )\colon\mathfrak{h}^1[t]\to\mathfrak{h}^1[t]$ は

$$z_k\circ 1=0,\quad z_k\circ(z_lw)=z_{k+l}w$$

で定義される $\mathbb{Q}[t]$ 線型写像とする．

定理 3.5 (Y. [3]) $\mathfrak{h}^1[t]$ は $\overset{t}{*}$ を積として可換 $\mathbb{Q}[t]$ 代数をなし，$\mathfrak{h}^0[t]$ はその部分 $\mathbb{Q}[t]$ 代数となる．さらに $\mathbb{Q}[t]$ 線型写像 $Z^t\colon \mathfrak{h}^0[t] \to \mathbb{R}[t]$ を

$$Z^t(1) = 1, \quad Z^t(z_{k_1} \cdots z_{k_n}) = \zeta^t(k_1, \ldots, k_n)$$

で定義すると，Z^t は $\mathbb{Q}[t]$ 代数の準同型となる．

さて，定義 3.4 において $t = \frac{1}{2}$ を代入すれば $\mathfrak{h}^1$ 上の $\frac{1}{2}$ 調和積 $\overset{1/2}{*}$ が得られ，$(\mathfrak{h}^1, \overset{1/2}{*})$ は可換 $\mathbb{Q}$ 代数となる．さらに $t = 1/2$ での特殊事情として次の事実が成り立つ．

系 3.6 $\mathfrak{h}^{1,\mathrm{odd}} = \mathbb{Q}\langle z_k \mid k \geq 1 : \mathrm{odd}\rangle$, $\mathfrak{h}^{0,\mathrm{odd}} = \mathfrak{h}^{1,\mathrm{odd}} \cap \mathfrak{h}^0$ とおくと，これらは $(\mathfrak{h}^1, \overset{1/2}{*})$ の部分 $\mathbb{Q}$ 代数となる．

この部分 $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathfrak{h}^{0,\mathrm{odd}}$ に $\mathbb{Q}$ 準同型 $Z^{1/2}$ を適用すれば次を得る．

系 3.7 $Y(j_1, \ldots, j_n)$ $(j_1 \geq 1,\ j_2, \ldots, j_n \geq 0)$ および 1 が生成する $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{Y}$ とおくと，$\mathcal{Y} = Z^{1/2}(\mathfrak{h}^{0,\mathrm{odd}})$ であり，したがって $\mathcal{Y}$ は $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$ 代数をなす．

例 3.8 (1) $k, l \geq 1$ について

$$z_k \overset{1/2}{*} z_l = z_k z_l + z_l z_k$$

が成り立つ．特に $k = 2j+1$, $l = 2j'+1$ とし，両辺を 4 倍して $Z^{1/2}$ を適用すると

$$Y(j)Y(j') = Y(j, j') + Y(j', j) \tag{3.1}$$

を得る．

(2) $k_1, l \geq 2$, $k_2 \geq 1$ について

$$z_{k_1} z_{k_2} \overset{1/2}{*} z_l = z_{k_1} z_{k_2} z_l + z_{k_1} z_l z_{k_2} + z_l z_{k_1} z_{k_2} - \frac{1}{4} z_{k_1+k_2+l}$$

が成り立つ．特に $k_1 = 2j_1+1$, $k_2 = 2j_2+1$, $l = 2j'+1$ とし，両辺を 8 倍して $Z^{1/2}$ を適用すると

$$Y(j_1, j_2)Y(j') = Y(j_1, j_2, j') + Y(j_1, j', j_2) + Y(j', j_1, j_2) - Y(j_1 + j_2 + j' + 1) \tag{3.2}$$

となる．

4 $X(\mathbf{j})$ について：MZSV の積分表示

2-1 公式の左辺の値 $X(\mathbf{j})$ は，特殊な形のインデックスに対する MZSV であった．ここでは，一般の MZSV に対するある種の積分表示について述べ，$X(\mathbf{j})$ の値への簡単な応用を説明する．

まず，MZV に対する反復積分表示を復習しよう．$\omega_0(t) = \frac{dt}{t}$, $\omega_1(t) = \frac{dt}{1-t}$ とおく．

命題 4.1 収束インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ に対して

$$\zeta(\mathbf{k}) = \int_{1>t_1>t_2>\cdots>t_k>0} \omega_{\delta(1)}(t_1)\omega_{\delta(2)}(t_2)\cdots\omega_{\delta(k)}(t_k).$$

ただし $k = k_1 + \cdots + k_n$ は $\mathbf{k}$ の重さであり，δ は

$$\delta(i) = \begin{cases} 1 & (i \in \{k_1, k_1+k_2, \ldots, k_1+\cdots+k_{n-1}, k\}), \\ 0 & (i \notin \{k_1, k_1+k_2, \ldots, k_1+\cdots+k_{n-1}, k\}) \end{cases}$$

で定められる．

例 4.2

$$\zeta(2,1) = \int_{1>t_1>t_2>t_3>0} \underbrace{\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{1-t_2}}_{2}\underbrace{\frac{dt_3}{1-t_3}}_{1}.$$

この例において，右辺の積分の形を決めている要素は

- 変数が 3 つあり，$t_1 > t_2 > t_3$ という順序に並んでいることと，
- それぞれの変数に ω_0, ω_1, ω_1 という微分形式が対応していること

である．これを次のような，2 色の頂点を持つ Hasse 図で表すことにする：

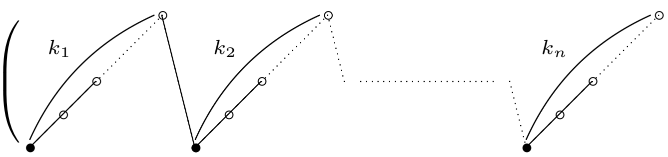
3 つの頂点が 3 つの変数（上から t_1, t_2, t_3）に対応し，それらを結ぶ線は大小関係（上の方が大きい）を表す．また $\circ$ は ω_0 に，$\bullet$ は ω_1 に対応する．X をこのような図（で表されるデータ）とするとき，対応する積分を $I(X)$ と書くことにする．例えば上の例は

$\zeta(2,1) = I\Bigg($  $\Bigg)$

と書ける．

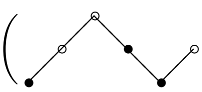
このような記法を用いると，MZSV に対する積分表示は次で与えられる．

定理 4.3 (Y. [4]) 収束インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ に対して

$\zeta^\star(\mathbf{k}) = I\Bigg($  $\Bigg)$

が成り立つ．

例 4.4

$\zeta^\star(3,1,2) = I\Bigg($  $\Bigg)$

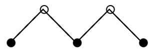
$$= \int_{t_1<t_2<t_3>t_4>t_5<t_6} \frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{dt_3}{t_3}\frac{dt_4}{1-t_4}\frac{dt_5}{1-t_5}\frac{dt_6}{t_6}.$$

ただし，右辺の積分においてすべての変数は区間 $[0,1]$ の中だけを動く．

ここで，2-1 公式の左辺の値 $X(\mathbf{j})$ は

$$X(j_1,\dots,j_n) = \zeta^\star(\{2\}^{j_1},1,\{2\}^{j_2},1,\dots,\{2\}^{j_n},1)$$

と定義されていたことを思い出そう．例えば

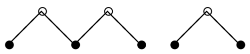
$$X(2) = \zeta^\star(2,2,1) = I\Bigg($$  $$\Bigg)$$

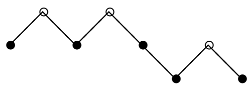
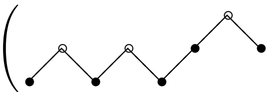
である．この表示を使うと，Y についての関係式 (3.1) に対応する次の関係式を示すことができる．

命題 4.5 $j, j' \geq 1$ に対して

$$X(j)X(j') = X(j,j') + X(j',j).$$

証明 簡単のため，$j=2$, $j'=1$ としよう（一般の場合も図が横長になるだけで，全く同様である）．このとき

$$X(2)X(1) = I\Bigg($$  $$\Bigg)$$

$$= I\Bigg($$  $$\Bigg) + I\Bigg($$  $$\Bigg)$$

と書ける．ここで第 1 の等号は，2 つの積分の積が直積上の積分に等しいことから分かる．また第 2 の等号は，左から 5 番目の頂点と 6 番目の頂点に対応する変数について，どちらが大きいかで積分領域を 2 つに分割することで得られる．さらに，右辺の第 1 項は

$$\zeta^\star(2,2,1,2,1) = X(2,1)$$

の積分表示，第 2 項は（図を右から読めば分かるように）

$$\zeta^\star(2,1,2,2,1) = X(1,2)$$

の積分表示を与えている．以上で $X(2)X(1) = X(2,1) + X(1,2)$ が言えた． ∎

5 疑問点

前 2 節の結果から浮かんでくる疑問点をいくつか挙げて，本稿のまとめに代える．

- $\mathcal{Y}$ の大きさについて
  第 3 節で定義した，2-1 公式の（右辺の）値 $Y(\mathbf{j})$ が生成する $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathcal{Y}$ は，多重ゼータ値全体が生成する $\mathbb{Q}$ 代数
  $$\mathcal{Z} = Z(\mathfrak{h}^0) = Z^{1/2}(\mathfrak{h}^0)$$
  の部分代数であるが，$\mathcal{Y}$ は $\mathcal{Z}$ の中でどの程度の大きさか，というのが一つ目の疑問である．

もう少し正確に述べよう．$k \geq 1$ について，重さ k の収束インデックスに対する MZV が生成する $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{Z}_k$ とおく：

$$\mathcal{Z}_k = \left\langle \zeta(k_1, \ldots, k_n) \;\middle|\; k_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, k_1 + \cdots + k_n = k \right\rangle_{\mathbb{Q}}.$$

また $\mathcal{Z}_0 = \mathbb{Q}$ とおく．これらについて，$\mathcal{Z} = \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{Z}_k$ という直和分解と，次元公式

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k,\ \text{ただし } d_k \text{ は } \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k = \frac{1}{1-x^2-x^3} \text{ で定まる数列}$$

が成り立つと予想されており，不等式 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k$ は証明されている．そこで $\mathcal{Y}_k = \mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}_k$ とおくとき，$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Y}_k$ はどのような数列だろうか？

- $\mathcal{Y}$ の乗法構造を $X(\mathbf{j})$ を使って記述できるか？
  $\mathcal{Y}$ における $\mathbb{Q}$ 代数の構造は，全射準同型 $Z^{1/2}\colon \mathfrak{h}^{0,\mathrm{odd}} \to \mathcal{Y}$ を通じて，$\mathfrak{h}^{0,\mathrm{odd}}$ における $\frac{1}{2}$ 調和積により記述することができる．このことから，(3.1) や (3.2) のような $Y(\mathbf{j})$ の間の具体的な関係式が得られることは第 3 節で述べたとおりである．2-1 公式により，$X(\mathbf{j})$ の間にもこれと同じ関係式が成り立つ．しかし，それらの関係式を 2-1 公式を経由せずに直接証明することはできていない．例えば (3.1) に対応するのは命題 4.5 であり，これは積分表示を用いて示すことができたが，(3.2) に対応する等式

$$X(j_1, j_2)X(j') = X(j_1, j_2, j') + X(j_1, j', j_2) + X(j', j_1, j_2) - X(j_1 + j_2 + j' + 1)$$

  を直接示すことは，筆者の知る限りまだできていない．$X(\mathbf{j})$ についての新しい視点・解釈を与えることによって，そのような証明が可能にならないだろうか？
  なお，$\mathcal{Y}$ の乗法構造については，別の道筋もあり得る．すなわち，もしなにか $X(\mathbf{j})$ について新しい解釈が得られ，それによって $X(\mathbf{j})$ が生成するベクトル空間（つまり $\mathcal{Y}$）が代数をなすことが示されたとして，そうして得られる具体的な関係式が $\mathfrak{h}^{0,\mathrm{odd}}$ の $\frac{1}{2}$ 調和積から得られるものと同じである必然性はないのではないか？　もしこれらの関係式が異なるのであれば，積 $X(\mathbf{j})X(\mathbf{j}') = Y(\mathbf{j})Y(\mathbf{j}')$ を 2 通りに展開することによって非自明な線型関係式が得られるはずである．これは多重ゼータ値の複シャッフル関係式の類似であり，道筋としてはむしろこちらの方が面白いかもしれない．
- 2-1 公式が成り立つ「根拠」は何か？
  2-1 公式そのものをどのように理解すればよいか，という疑問である．Zhao [5] による証明は初等的で，議論そのものを追うことはできるが，等式が成立する内在的な理由（そのようなものがあるとして）を明らかにしているとは言えないように思う．例えば，何らかの量を 2 通りに計算すると，それぞれ $X(\mathbf{j})$ と $Y(\mathbf{j})$ に到達する，というような証明はできないものだろうか？

参考文献

[1] 荒川恒男，金子昌信，多重ゼータ値入門，COE Lecture Note Vol. 23, Kyushu University, 2010.

[2] Y. Ohno, W. Zudilin, *Zeta stars*, Commun. Number Theory Phys. 2 (2008), 325–347.

[3] S. Yamamoto, *Interpolation of multiple zeta and zeta-star values*, J. Alg. 385 (2013), 102–114.

[4] S. Yamamoto, *Multiple zeta-star values and multiple integrals*, preprint arXiv:1405.6499, 2014 (to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu).

[5] J. Zhao, *Identity families of multiple harmonic sums and multiple zeta (star) values*, preprint arXiv:1303.2227, 2013.

[6] S. A. Zlobin, *Generating functions for the values of a multiple zeta function*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. no. 2 (2005), 55–59; English transl., Moscow Univ. Math. Bull. 60:2 (2005), 44–48.