第５９回代数学シンポジウム報告集

於　東京大学

2014 年 9 月 8 日〜9 月 11 日

２０１４年度　第５９回　代数学シンポジウム　報告集

本書は平成 26 年 9 月に東京大学で開催された第 59 回代数学シンポジウムの報告集です．このシンポジウムは科学研究費補助金基盤研究(S)（研究代表者金銅誠之，課題番号 22224001）および基盤研究(S)（研究代表者齋藤政彦，課題番号 24224001）からの援助を受けました．

記

日時：２０１４年９月８日（月）―１１日（木）
場所：東京大学大学院数理科学研究科　大講義室
会場責任者：　斎藤　毅
プログラム責任者：［環論］河田成人・橋本光靖，［代数幾何］稲場道明・松下大介，
　　　　　　　　　［数論］鈴木正俊・谷口　隆，［群論・表現論］池田岳・宮本雅彦
シンポジウム責任者：　齋藤　睦（評議員）

主催：日本数学会代数学分科会
共催：
・東京大学数理科学研究科
・同博士課程教育リーディングプログラム「数物フロンティア・リーディング大学院」

プログラム

９月８日（月）

09:45-10:45	高木俊輔（東大数理） F 特異点論の最近の進展について
11:00-12:00	佐々木洋城（信州大全学） 有限群のブロック多元環とコホモロジー環
13:30-14:30	古谷貴彦（明海大歯）・速水孝夫（北海学園大工） Hochschild cohomology and support varieties for finite-dimensional algebras
14:45-15:45	神田遼（名大多元） Atom spectra of Grothendieck categories
16:00-17:00	藏野和彦（明大理工） Boundary of Cohen-Macaulay cone and asymptotic behavior of system of ideals

９月９日（火）

09:45-10:45	吉岡康太(神戸大理) 代数曲面上のベクトル束
11:00-12:00	川口周(京大理) 代数・数論力学系について
13:30-14:30	田中公(神戸大理) Minimal model theory for surfaces over imperfect fields
14:45-15:45	山田紀美子(岡山理大理) Singularities on moduli scheme of stable sheaves on elliptic surfaces
16:00-17:00	村上雅亮（鹿児島大理工） Non-hyperelliptic deformation of a 2-connected genus 3 hyperelliptic fibration

９月１０日（水）

	09:45-10:45	池田保（京大理） 代数群と被覆群上の保型表現
	11:00-12:00	尾崎学（早大理工） 代数体の付随するガロワ群による特徴付けについて
	13:30-14:30	阿部知行（東大カブリ数物） 数論的Ｄ加群と関数体のラングランズ対応
	14:45-15:45	山本修司（慶大理工） 等号付き多重ゼータ値と 2-1 公式
	16:00-17:00	小林真一（東北大理） Heegner cycle のｐ進高さについて

９月１１日（木）

	09:45-10:45	荒川知幸　（京大数理研） 冪零軌道とＷ代数
	11:00-12:00	北詰正顕（千葉大） Radvalis 単純群の周辺
	13:30-14:30	直井克之　（東京農工大） 量子アフィン代数の有限次元既約表現とその次数付き極限
	14:45-15:45	宮本雅彦　（筑波大） 頂点作用素代数とジーゲル・テーター級数のモジュラー不変性
	16:00-17:00	桑原敏郎（Higher School of Economics） 変形量子化と非可換代数・頂点代数の局所化

目次

F 特異点論の最近の進展について

高木 俊輔（東京大学）*

1　はじめに

昨年，日本大学の渡辺敬一先生と共著で雑誌『数学』に F 特異点の解説記事 [17] を書かせて頂いたが[1]，紙面の都合上，限られた話題にしか触れることができなかった．そこでこの小文では，[17] で触れることのできなかった話題を幾つか取り上げる．説明の都合上，[17] と重複する部分もあるが，ご寛恕頂きたい．

以下，環と言えば常に単位元を持つ可換ネーター環を意味するものとする．

2　F 純・強 F 正則環

F 特異点と呼ばれる特異点のクラスは，強 F 正則環，弱 F 正則環，F 有理環，F 純環，F 単射環，F 冪零環，有限 F 表現型の環など多岐にわたるが，この小文では主に F 純環と強 F 正則環を扱う（最後の節で有限 F 表現型の環についても触れる）．

R を素数標数 p の環とし，簡単のため R は整域であると仮定する．このとき，$\overline{Q(R)}$ を R の商体 $Q(R)$ の代数閉包とし，$R^{1/p^e} := \{x \in \overline{Q(R)} \mid x^{p^e} \in R\}$ とおく．環同型 $R^{1/p^e} \cong R \;\; x \mapsto x^{p^e}$ により，R の e 回 Frobenius 写像

$$F^e : R \to R \quad r \mapsto r^{p^e}$$

を包含写像 $R \hookrightarrow R^{1/p^e}$ と同一視する．F^e は R 準同型ではないが，$R \hookrightarrow R^{1/p^e}$ は R 準同型であることに注意する．$R \hookrightarrow R^{1/p}$ によって $R^{1/p}$ を R 加群と見る．$R^{1/p}$ が有限生成 R 加群であるとき，R は F **有限** (F-finite) であると言う．例えば，標数 $p > 0$ の完全体上本質的有限生成な環，剰余体が完全体であるような素数標数の完備局所環などは F 有限である．F 有限ならば優秀環であることが知られている ([7])．

まず F 純環・強 F 正則環の定義を復習する．

定義 2.1. R を標数 $p > 0$ の F 有限な整域とする．

* *E-mail:* `stakagi@ms.u-tokyo.ac.jp`

[1] 日本語版 [17] の誤植を英語版 [18] で修正したので，そちらも合わせてご覧頂きたい．

(i) $R \hookrightarrow R^{1/p}$ が R 準同型として分裂するとき，つまり R 準同型 $\varphi : R^{1/p} \to R$ が存在して合成写像 $R \hookrightarrow R^{1/p^e} \xrightarrow{\varphi} R$ が恒等写像になるとき，R は F **純** (F-pure) 環であると言う．

(ii) 任意の非零元 $c \in R$ に対し，ある $e \in \mathbb{N}$ が存在して，合成写像

$$R \hookrightarrow R^{1/p^e} \xrightarrow{\times c^{1/p^e}} R^{1/p^e} \quad r \mapsto r \mapsto c^{1/p^e} r$$

が R 準同型として分裂するとき，R は**強** F **正則** (strongly F-regular) 環であると言う．

F 有限環について次のような関係がある．

$$\text{正則} \Longrightarrow \text{強}\, F\, \text{正則} \Longrightarrow F\, \text{純}$$

F 純環・強 F 正則環の例については，[18, Exmaples 3.3, 3.8, 3.16] を参照されたい．

定義 2.2. R を完全体上本質的有限生成な $\mathbb{Q}$-Gorenstein 整閉整域とする．Y が正規スキームであるような固有双有理射 $\pi : Y \to X := \operatorname{Spec} R$ が与えられたとき，X, Y の標準因子 K_X, K_Y を比較する．

$$K_Y = f^* K_X + \sum_i a_i E_i \quad (a_i \in \mathbb{Q},\ E_i \text{ は } \pi \text{ の例外素因子})$$

任意の π と任意の i に対し $a_i > -1$ (resp. $a_i \geq -1$, $a_i \geq 0$) が成り立つとき，X は高々**対数的端末特異点** (resp. **対数的標準特異点**, **標準特異点**) しか持たないと言う．

強 F 正則環は，次の 3 つの「証拠」から，対数的端末特異点の正標数における類似と見なせる．以下，$R = k[x_1, \ldots, x_n]_{(x_1, \ldots, x_n)}/(f_1, \ldots, f_r)$ は完全体 k 上本質的有限生成な $\mathbb{Q}$-Gorenstein 整閉整域とする．

(1) (原 [3]) k を標数 $p > 5$ の代数閉体とし，$\dim R = 2$ とする．このとき，R が強 F 正則環であることと，$\operatorname{Spec} R$ が高々対数的端末特異点しか持たないことは同値である．

(2) (原 [5], Smith [14], Mehta-Srinivas [10]) k を標数 0 の体とし，R_p を R の標数 $p > 0$ への還元とする[2]．このとき，$\operatorname{Spec} R$ が高々対数的端末特異点しか持たないことと，十分大きい p に対して R_p が強 F 正則であることは同値である[3]．

[2]正確には，$\mathbb{Z}$ 上 f_i 達の係数で生成される k の部分環を A とし，$R_A = A[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_r)$ とおいたとき，自然な射 $X_A \to \operatorname{Spec} A$ の一般の閉ファイバー（の局所化）を X の**標数** $p > 0$ **への還元**と言う．f_i が整数係数の多項式ならば，R_p として $\mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]_{(x_1, \ldots, x_n)}/(f_1, \ldots, f_r)$ を考えれば良い．より詳しくは [18, Section 3.3] を参照のこと．

[3]「十分大きい p に対して R_p が」とは，稠密な開集合 $U \subset \operatorname{Spec} A$ が存在して U の各閉点のファイバーが，という意味である．

(3) (Blickle-Schwede-Tucker [1]) 次の 2 条件は同値である．

(a) 任意の分離的かつ正則な alteration $\pi : Y \to X = \operatorname{Spec} R$ に対し[4]，$\mathrm{Tr}_\pi(\pi_*\mathcal{O}_Y(\lceil K_Y - \pi^* K_X \rceil)) = \mathcal{O}_X$ が成り立つ．ただし，Tr_π は π に付随する跡写像である[5]．

(b) $\begin{cases} \operatorname{Spec} R \text{ は高々対数的端末特異点しか持たない} & (k \text{ の標数が零の場合}) \\ R \text{ は強 } F \text{ 正則環である} & (k \text{ の標数が正の場合}). \end{cases}$

注意 2.3. (3) から (2) は従わない．なぜなら，(3) (a) では全ての分離的かつ正則な alteration を考える必要があり，標数 0 からの還元として得られる alteration を考えるだけでは不十分である．

F 純環も対数的標準特異点の類似であると見なされているが，強 F 正則環と対数的端末特異点の対応に比べると,「証拠」にやや乏しい[6]．

(2') (藤野-高木 [2]) k を標数 0 の代数閉体とし，R を 3 次元以下の孤立特異点とする．R_p を R の標数 $p > 0$ への還元とすると，$\operatorname{Spec} R$ が高々対数的標準特異点しか持たないことと，無限個の p に対して R_p が F 純であることは同値である[7]．

3 F 特異点の長所・短所

この節では，F 特異点の長所・短所を列挙する．3.1〜3.3 は長所，3.4 は短所と考えられる．

3.1 Cohen-Macaulay 性

標数 0 の対数的端末特異点は必ず Cohen-Macaulay であるが，正標数では Cohen-Macaulay ではない対数的端末特異点の例が知られている．実際，[9] で 6 次元の非特異 Fano 多様体で小平の消滅定理が成り立たない例が構成されているので，その affine 錐を考えれば，Cohen-Macaulay ではない孤立対数的端末特異点が得られる．その一方で，強 F 正則環については次が成り立つ．

命題 3.1. 強 F 正則環は Cohen-Macaulay である．

命題 3.1 は通常，密着閉包のコロン捕捉という性質を用いて示されるが，ここでは Frobenius 写像の分裂を用いた証明を与える．

---

[4] つまり $\pi : Y \to X$ は，X が正則スキームであるような，分離かつ広義有限な固有全射である．

[5] 跡写像の定義については，例えば，[18, Theorem 3.20] の直前の段落を参照されたい．

[6] F 純環は対数的標準特異点と類似の性質を満たすことが知られている (詳しくは [18, Section 4] 参照)．そのような「状況証拠」は多くある．

[7]「無限個の p に対して R_p が」とは，閉点からなる稠密な部分集合 $U \subset \operatorname{Spec} A$ が存在して U の各閉点のファイバーが，という意味である．

命題 3.1 の証明．$(R, \mathfrak{m})$ を標数 $p > 0$ の d 次元強 F 正則局所整域とし，R が Cohen-Macaulay 環であることを示す．R は優秀環なので，$\operatorname{Spec} R$ の非 Cohen-Macaulay 集合 W は Zariski 閉集合であることに注意する．W の生成点で局所化することにより，$\mathfrak{m}$ 以外の任意の素イデアル $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ に対し $R_{\mathfrak{p}}$ は Cohen-Macaulay であると仮定してよい．このとき，任意の $i < d$ に対し $H^i_{\mathfrak{m}}(R)$ は有限生成 R 加群なので，任意の $i < d$ に対し $c \cdot H^i_{\mathfrak{m}}(R) = 0$ となる非零元 $c \in R$ がとれる．R は強 F 正則なので，ある $e \in \mathbb{N}$ が存在して，R 準同型の合成写像 $R \hookrightarrow R^{1/p^e} \xrightarrow{\times c^{1/p^e}} R^{1/p^e}$ は分裂する．よって，この合成写像が誘導する局所コホモロジー加群の間の写像

$$H^i_{\mathfrak{m}}(R) \to H^i_{\mathfrak{m}}(R^{1/p^e}) \xrightarrow{\times c^{1/p^e}} H^i_{\mathfrak{m}}(R^{1/p^e})$$

は単射である．c の定義から任意の $i < d$ に対し $H^i_{\mathfrak{m}}(R^{1/p^e}) \xrightarrow{\times c^{1/p^e}} H^i_{\mathfrak{m}}(R^{1/p^e})$ は零写像なので，上の単射性から任意の $i < d$ に対し $H^i_{\mathfrak{m}}(R) = 0$ が成り立つ．すなわち，R は Cohen-Macaulay 環である．$\square$

3.2 Bertini の定理

Bertini の定理は標数 0 の特異点を調べる上で基本的かつ重要な定理の 1 つである．例えば，標数 0 の代数閉体上定義された準射影多様体 X が高々標準特異点しか持たないとき，X の一般の超平面切断 H も高々標準特異点しか持たないことが，Bertini の定理の帰結として示される．

正標数では，一般に Bertini の定理は成り立たないため，同じ命題が成り立つかどうかは分かっていない，現在のところ X が 3 次元の場合ですら未解決である[8]．それに対し，F 特異点については類似の主張が成り立つ．

定理 3.2 (Schwede-Zhang [11])．X を標数 $p > 0$ の代数閉体 k 上定義された準射影多様体とし，H を X の一般の超平面切断とする．X が高々F 純 (resp. 強 F 正則) 特異点しか持たないならば，H も高々F 純 (resp. 強 F 正則) 特異点しか持たない[9]．

3.3 taut 性

k を代数閉体とし，$(R, \mathfrak{m}, k)$ を k 上本質的有限生成な 2 次元正規局所環とする．$\pi : Y \to X = \operatorname{Spec} R$ を極小対数的特異点解消とし，$E = \bigcup_i E_i$ を π の例外集合とする．π の定義から，E は単純正規交叉因子である．このとき，次のようにして R の重み付きグラフ Γ_R を定義する．

(1) 各 E_i にグラフの頂点 v_i を対応させ，v_i には 2 つの重み E_i^2 (E_i の自己交点数) と $g(E_i)$ (曲線 E_i の種数) を付す．

(2) 頂点 v_i と v_j を $E_i \cap E_j$ 本の辺で結ぶ．

[8] 講演中に説明した 3 次元の場合の証明には gap がありました．ここでお詫び致します．

[9] 代数多様体 Z が高々F 純 (resp. 強 F 正則) 特異点しか持たないとは，Z の各局所環が F 純 (resp. 強 F 正則) 環であるという意味である．

$(R,\mathfrak{m},k)$ が **taut** であるとは，次の条件を満たすときに言う: k 上本質的有限生成な 2 次元正規局所環 $(S,\mathfrak{n},k)$ の重み付きグラフ Γ_S が重み付きグラフとして Γ_R と同型ならば，R の完備化と S の完備化は環同型である．

定理 3.3 (Laufer [8])**.** $k=\mathbb{C}$ のとき，2 次元対数的端末特異点は taut である．

一方，正標数では 2 次元対数的端末特異点は taut とは限らない．例えば k を標数 2 の代数閉体とすると，$k[x,y,z]/(x^2+y^3+z^5)$ と $k[x,y,z]/(x^2+y^3+z^5)$ は共に (E_8) 型特異点だが，完備化しても同型にはならない．実は，これらの特異点は強 F 正則環ではない．強 F 正則環に注目すると次が成り立つ．

定理 3.4 (田中 [19])**.** k を正標数の代数閉体とするとき，2 次元強 F 正則局所環は taut である．

3.4 正規化

k を標数 2 の完全体とし，$R=k[x,y,z]/(x^2z+y^2)$ とおく．$R\cong k[u,uv,v^2]\subset k[u,v]$ より，R の正規化 R^{N} は $k[u,v]$ と同一視できる．このとき，R の導手イデアル $\mathfrak{c}:=(R:_{Q(R)}R^{\mathrm{N}})$ は uR^{N} である．双有理幾何学の哲学に従うと，

$$(R^{\mathrm{N}},\mathfrak{c})\text{ の特異点}=R\text{ の特異点}$$

が成り立って欲しい．

まず F 純環の概念は，環と単項イデアルの対に対して拡張できる．A を標数 $p>0$ の F 有限な整域とし，$\mathfrak{a}=(f)\neq(0)$ を A の単項イデアルとしたとき，対 $(A,\mathfrak{a})$ が F **純**であるとは，任意の $e\in\mathbb{N}$ に対し，合成写像

$$A\hookrightarrow A^{1/p^e}\xrightarrow{\times f^{(p^e-1)/p^e}}A^{1/p^e}\quad a\mapsto a\mapsto f^{(p^e-1)/p^e}a$$

が A 準同型として分裂することと定義する．これが自然な定義であることは，[18, Section 4] を見て欲しい．この定義を上の状況に当てはめると，対 $(R^{\mathrm{N}},\mathfrak{c})$ は F 純だが，R は F 純環ではないことが分かる (証明は [18, Example 4.18] 参照)．このように，F 特異点は正規化に関して病的な振る舞いをすることがある．

4 R^{1/p^e} の分解

$(R,\mathfrak{m})$ を標数 $p>0$ の F 有限な d 次元局所整域とし，剰余体 $R/\mathfrak{m}$ は完全体であると仮定する．強 F 正則性・F 純性は，R^{1/p^e} の R 加群としての分解を用いて特徴付けることができる．任意の $e\in\mathbb{N}$ に対し，

$$R^{1/p^e}\cong R^{\oplus a_e}\oplus M_e\quad(a_e\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\ M_e\text{ は }R^{1/p^e}\text{ の非自由部分})$$

を R^{1/p^e} の R 加群としての分解とする．

定義 4.1 (Huneke-Leuschke [4]). 上の状況で，R の F **符号** (F-signature) $s(R)$ を次のように定義する:

$$s(R) = \lim_{e\to\infty} \frac{a_e}{p^{de}}.$$

この極限は常に存在するか？という問題は 10 年近く未解決であったが，最近 Kevin Tucker [20] によって肯定的に解決された．

$s(R)$ は R の特異性を測る尺度と見なせる．正則性・強 F 正則性は，F 符号 $s(R)$ を用いて特徴付けられる．

命題 4.2 ([4]). (1) 次の 3 条件は同値である．

(a) R は F 純環である．

(b) ある $e \in \mathbb{N}$ が存在して，$a_e > 0$.

(c) 任意の $e \in \mathbb{N}$ に対して，$a_e > 0$.

(2) R が強 F 正則環であることと，$s(R) > 0$ は同値である．

(3) $1 \geq s(R) \geq 0$ であり，R が正則であることと $s(R) = 1$ は同値である．

R^{1/p^e} の R 加群としての分解を用いて定義される概念としては，有限 F 表現型と呼ばれる F 特異点のクラスがある．

定義 4.3 (Smith-van den Bergh [15]). $(R, \mathfrak{m})$ は標数 $p > 0$ の完全体上定義された次数付整域か，もしくは剰余体 $R/\mathfrak{m}$ が完全体であるような標数 $p > 0$ の完備局所整域とする．R が**有限** F **表現型** (finite F-representation type) であるとは，有限個の有限生成 R 加群 $M_1, \ldots, M_s$ が存在して，次の条件を満たすときに言う: 任意の $e \in \mathbb{N}$ に対し，非負整数 $b_1^{(e)}, \ldots, b_r^{(e)}$ が存在して，R 同型

$$R^{1/p^e} \cong M_1^{\oplus b_1^{(e)}} \oplus \cdots \oplus M_r^{\oplus b_r^{(e)}}$$

が存在する．このとき各 $i = 1, \ldots, s$ に対し，$\lim_{e\to\infty} b_i^{(e)}/p^{de}$ が存在し，有理数になることが知られている ([21]).

定義より，有限 F 表現型の環は種々の有限性を満たす．R が正則局所環ならば，Kunz の定理より R^{1/p^e} は自由 R 加群なので，特に R は有限 F 表現型である．故に有限 F 表現型の環は特異点のクラスと見なせるが，$\lim_{e\to\infty} b_i^{(e)}/p^{de}$ がどのような意味を持つ不変量なのかはまだ分かっていない．

例 4.4. k を標数 $p > 0$ の代数閉体とする．

(1) ([15], [6]) $S = k[x_1, \ldots, x_d]$ を k 上の多項式環とし，S に $GL_n(k)$ の有限部分群 G が作用しているとする．G は擬鏡映を持たず，G の位数は p で割り切れないと仮

定する．このとき不変式環 $R := S^G$ は有限 F 表現型である．橋本-中嶋 [6] は，この R について定義 4.3 の不変量 $\lim_{e\to\infty} b_i^{(e)}/p^{de}$ を計算し，

$$\lim_{e\to\infty} \frac{b_i^{(e)}}{p^{de}} = \frac{\mathrm{rank}_R M_i}{|G|}$$

が成り立つことを証明した．

(2) ([13], [16]) $k[s,t,u,v,w,x,y,z]/(su^2x^2 + sv^2y^2 + tuxvy + tw^2z^2)$ は強 F 正則環（さらには UFD）であるが，有限 F 表現型ではない．

一般に，与えられた環が有限 F 表現型かどうか判定することは難しい．k を標数 $p > 0$ の完全体とし，$R = k[x,y,z]/(x^2 + y^3 + z^7)$ とする．$p = 2, 3, 7$ の場合は，渋田 [12] によって R が有限 F 表現型であることが示されている．$p \neq 2, 3, 7$ の場合は，R は有限 F 表現型ではないと予想されているが，現在のところ未解決である．

参考文献

[1] M. Blickle, K. Schwede, K. Tucker, F-singularities via alterations, to appear in Amer. J. Math.

[2] O. Fujino and S. Takagi, On the F-purity of isolated log canonical singularities, Compositio Math. **149** (2013), no.9, 1495–1510.

[3] N. Hara, Classification of two-dimensional F-regular and F-pure singularities, Adv. Math. **133** (1998), 33–53.

[4] C. Huneke and G. Leuschke, Two theorems about maximal Cohen-Macaulay modules, Math. Ann. **324** (2002), 391–404.

[5] N. Hara, A characterization of rational singularities in terms of injectivity of Frobenius map, Amer. J. Math. **120** (1998), 981–996.

[6] M. Hashimoto and Y. Nakajima, Generalized F-signature of invariant subrings, arXIv:1311.5963, preprint.

[7] E. Kunz, On Noetherian rings of characteristic p, Amer. J. Math. **98** (1976), 999–1013.

[8] H. B. Laufer, Taut two-dimensional singularities. Math. Ann. **205** (1973), 131–164.

[9] N. Lauritzen and A. P. Rao, Elementary counterexamples to Kodaira vanishing in prime characteristic, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), Vol.107, No.1, February 1997, pp. 21–25.

[10] V. B. Mehta and V. Srinivas, A characterization of rational singularities. Asian. J. Math. **1** (1997), 249–278.

[11] K. Schwede and W. Zhang, Bertini theorems for F-singularities, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **107** (2013), no. 4, 851–874.

[12] T. Shibuta, One-dimensional rings of finite F-representation type, J. Algebra **332** (2011), 434–441.

[13] A. Singh and I. Swanson, Associated primes of local cohomology modules and of Frobenius powers, Int. Math. Res. Not. **33** (2004),1703–1733.

[14] K. E. Smith, F-rational rings have rational singularities, Amer. J. Math. **119** (1997), no. 1, 159–180.

[15] K. E. Smith and M. Van den Bergh, Simplicity of rings of differential operators in prime characteristic, Proc. London Math. Soc. (3) **75** (1997), no. 1, 32–62.

[16] S. Takagi and R. Takahashi, D-modules over rings with finite F-representation type, Math. Res. Lett. **15** (2008), no.3, 563–581.

[17] 高木俊輔, 渡辺敬一, “F 特異点 –正標数の手法の特異点論への応用–”, 日本数学会『数学』, **66** (2014), no.1, 1–30.

[18] S. Takagi and K.-i. Watanabe, F-singularities: applications of characteristic p methods to singularity theory, arXiv:1409.3473, to appear in Sugaku Expositions.

[19] 田中悠樹, 修士論文, 東京大学, 準備中.

[20] K. Tucker, F-signature exists, Invent. math. **190** (2012), 743–765.

[21] Y. Yao, Modules with finite F-representation type, J. London Math. Soc. (2) **72** (2005), no. 1, 53–72.

有限群のブロック多元環とコホモロジー環

佐々木 洋城
信州大学

はじめに

筆者はこの 15 年ほど有限群のブロック多元環のコホモロジー環の基礎的な部分の勉強をして来ました．ちょうど 10 年前の仙台での第 49 回代数学シンポジウムでも Brauer 対応で対応するブロックのコホモロジー環について講演させていただきました．この度，再び機会をいただいたことは大変ありがたく，また光栄に存じます．組織委員会には心からお礼を申し上げます．10 年を振り返って，成果の少なさには身の縮む思いですが，恥を忍んで報告させていただきます．

1　有限群のコホモロジー環

G を有限群とし，R を単位元をもつ可換環とする．群環 RG は特殊な多元環である．主な特徴を挙げてみる：

- RG は G を基底とする自由 R 加群である
- RG は対称多元環である
- R は添加写像 $\varepsilon : RG \to R; \sum_{g\in G} a_g\, g \mapsto \sum_{g\in G} a_g$ により，RG-加群である
- 部分群 $H \leqslant G$ に対して RG は自由 RH-加群である
- RG は $\varDelta : RG \to RG \otimes RG; g \mapsto g \otimes g$ を余積として Hopf 代数である

RG-加群 U を係数加群とする G のコホモロジー群を

$$H^*(G,U) = \mathrm{Ext}^*_{RG}(R,U) = \bigoplus_{n\geqq 0} \mathrm{Ext}^n_{RG}(R,U)$$

と定義する．有限群のコホモロジー群の主な特徴を挙げよう：

- $H^*(G,R)$ は cup 積により可換次数付多元環である．
- U, V が RG-加群ならば $\mathrm{Ext}^*_{RG}(U,V)$ は Yoneda 積により $H^*(G,R)$-加群である．
- 部分群 $H \leqslant G$，元 $g \in G$ に対して次の写像が定義される：

$$\mathrm{res}_H : H^*(G,U) \to H^*(H,U),\ \mathrm{tr}^G : H^*(H,U) \to H^*(G,U),$$
$$\mathrm{con}^g : H^*(H,U) \to H^*({}^gH,U).$$

- これらの写像は次の性質をもつ：
  - 部分群 $H \leqslant G$ に対して合成 $\mathrm{tr}^G \circ \mathrm{res}_H : H^*(G,R) \to H^*(G,R)$ は $|\,G\!:\!H\,|$ 倍である．

– 部分群 $H, K \leqslant G$ について次のいわゆる Mackey 分解公式が成り立つ.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & H^*(G,U) \arrow[dr, "\mathrm{res}_K"] & \\
H^*(H,U) \arrow[ur, "\mathrm{tr}^G"] \arrow[dr, "\bigoplus\limits_{HgK\in H\backslash G/K} \mathrm{res}_{{}^gH\cap K}\circ \mathrm{con}^g"'] & \circlearrowright & H^*(K,U) \\
 & \bigoplus\limits_{HgK\in H\backslash G/K} H^*({}^gH\cap K, U) \arrow[ur, "\sum\limits_{HgK\in H\backslash G/K} \mathrm{tr}^K"'] &
\end{tikzcd}$$

他に重要な写像として norm 写像，inflation 写像などがある．このような写像とその性質により有限群のコホモロジー論は豊かな世界を形作っている．基本定理は何といっても次の定理である．

定理 (Evens [2] , Venkov [22]). R が Noether 的ならばコホモロジー環 $H^*(G,R)$ も Noether 的である．

$S \leqslant G$ を Sylow p-部分群とする．指数 $|\,G\!:\!S\,|$ が R で可逆ならば可換図式

$$\begin{tikzcd}
H^*(G,R) \arrow[rr, "|\,G:S\,|\cdot", "\simeq"'] \arrow[dr, "\mathrm{res}_S"'] & \circlearrowright & H^*(G,R) \\
 & H^*(S,R) \arrow[ur, "\mathrm{tr}^G"'] &
\end{tikzcd}$$

が得られるから，直和分解 $H^*(S,R) = \mathrm{Im}\,\mathrm{res}_S \oplus \mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}^G$ が得られる．さらに，いわゆる stable elements theorem により

$$H^*(G,R) \simeq \mathrm{Im}\,\mathrm{res}_S = \{\,\zeta \in H^*(S,R) \mid \mathrm{res}_{P\cap {}^gP}\,\zeta = \mathrm{res}_{S\cap {}^gS}\,{}^g\zeta \ \forall g \in G\,\}$$

が成り立ち，さらに，これを言い換えて

$$\begin{aligned}
&= \{\,\zeta \in H^*(S,R) \mid \mathrm{res}_Q\,\zeta = \mathrm{res}_Q\,{}^g\zeta \ \forall Q \leqslant S, \forall\, g \in N_G(Q)\,\} \\
&= \{\,\zeta \in H^*(S,R) \mid \zeta \text{ は } \mathcal{F}_S(G)\text{-安定}\,\}.
\end{aligned}$$

ここで，$\mathcal{F}_S(G)$ は S の部分群を対象とする圏で Frobenius 圏とよばれている．

2 対称多元環の Hochschild コホモロジー環

有限群の群環は対称多元環であり，その Hochschild コホモロジー環は通常のコホモロジー環を含む．そこで，ここでは，一般に対称多元環の Hochschild コホモロジー環について，必要な範囲で若干の事項を述べる．

A, B を対称 R-多元環とする．

(A,B)-両側加群 X は左 A-加群としても，右 B-加群としても有限生成，射影的であると仮定する．

- 対 $(\zeta, \tau) \in HH^*(A) \times HH^*(B)$ は条件

$$\zeta \otimes 1_X = 1_X \otimes \tau \in \mathrm{Ext}^*{}_{A\otimes_R B^{\mathrm{op}}}(X,X).$$

を満たすとき X-stable であるという．

- transfer 写像とよばれ写像が定義される：

$$t_X : HH^*(B) \to HH^*(A), \quad t_{X^*} : HH^*(A) \to HH^*(B).$$

ここで，$X^* = \mathrm{Hom}_R(X, R)$ である．この写像は，A, B が対称多元環であることと X が左 A-加群としても，右 B-加群としても有限生成射影的であるということに基づいて定義される．

一般に，有限群 G のコホモロジー環 $H^*(G, R)$ は Hochschild コホモロジー環 $HH^*(RG)$ に diagonal embedding $\delta_G : H^*(G, R) \to HH^*(RG)$ により埋め込まれる．これは多元環の単射準同型である．

$H \leqslant G$ を部分群とする．(RH, RG)-両側加群としての RG を X とおくと，$X^* \simeq {}_{RG}RG_{RH}$ である．コホモロジー環における写像 $\mathrm{tr}^G, \mathrm{res}_H$ は ${}_{RH}RG_{RG}, {}_{RG}RG_{RH}$ が導く Hochschild コホモロジー環の transfer 写像と compatible である：

$$\begin{tikzcd} H^*(G,R) \arrow[r, "\delta_G"] \arrow[d, "\mathrm{res}_H"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & HH^*(RG) \arrow[d, "t_{({}_{RH}RG_{RG})}"] \\ H^*(H,R) \arrow[r, "\delta_H"'] & HH^*(RH) \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} H^*(G,R) \arrow[r, "\delta_G"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & HH^*(RG), \\ H^*(H,R) \arrow[r, "\delta_H"'] \arrow[u, "\mathrm{tr}^G"] & HH^*(RH) \arrow[u, "t_{({}_{RG}RG_{RH})}"'] \end{tikzcd}$$

さらに

$$\mathrm{Im}(\delta_H \circ \mathrm{res}_H) \subset HH^*(RH) \text{ の } {}_{RH}RG_{RH}\text{-stable 部分環}.$$

G の Sylow p-部分群 S の指数 $|\,G\!:\!S\,|$ が R で可逆ならば，$\zeta \in H^*(S, R)$ について

$$\zeta \text{ が } \mathcal{F}_S(G)\text{-stable} \Longleftrightarrow \delta_S\zeta \in HH^*(RS) \text{ は } {}_{RS}RG_{RS}\text{-stable}.$$

さらに，上の二つの可換図式を合成して

$$\begin{tikzcd} H^*(S,R) \arrow[r, "\delta_S"] \arrow[d, "\mathrm{res}_S \circ \mathrm{tr}^G"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & HH^*(RS) \arrow[d, "t_{({}_{RS}RG_{RS})}"] \\ H^*(S,R) \arrow[r, "\delta_H"'] & HH^*(RS) \end{tikzcd}$$

が得られ，かつ

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{res}_S \circ \mathrm{tr}^G \simeq H^*(G, k)$$

である．

3　ブロック多元環

本節以降，係数環としては標数 $p > 0$ の代数的閉体 k を採用する．標数 p は G の位数の素因数であるとする．

群環 kG は直既約な両側イデアルの直和に分解される：

$$kG = B_0 \oplus B_1 \oplus \cdots \oplus B_m.$$

この直和因子を G のブロック・イデアルまたはブロック多元環とよぶ．ただ一つのブロック多元環のみが添加写像 $\varepsilon : kG \to k$ によって零化されない．そのブロック多元環を主ブロックとよぶ．B_0 を主ブロックとする．k の射影分解に現れる射影加群はすべて主ブロックに属するから，$H^*(G,k) = \mathrm{Ext}^*_{kG}(k,k) = \mathrm{Ext}^*_{B_0}(k,k)$ が成り立つ．従って，G のコホモロジー環は主ブロックのコホモロジー環である．主客を転倒させると

$$\boxed{B_0 \text{ のコホモロジー環} = \mathrm{Ext}^*_{B_0}(k,k) = \mathrm{Ext}^*_{kG}(k,k) = H^*(G,k).}$$

それでは，ブロック多元環一般についてはどうなのだろうか？

ブロック多元環には defect 群とよばれる p-部分群が定められる．主ブロックの defect 群は Sylow p-部分群である．Sylow p-部分群が G で共役であるように，defect 群も G で共役である．

B を kG のブロック多元環とし，D をその defect 群とする．

主ブロックには自明な加群 k が属しているが，一般のブロック多元環にはそのような「標準的な加群」は存在しない．それゆえ，主ブロックのように Ext 群を用いてホモロジー代数的に定義することはできない．

「ブロック多元環 B のコホモロジー環」を定義するためには適切にカテゴリーを選ぶ必要がある．

以上を次の表にまとめてみる：

ブロック多元環		主ブロック B_0	B
defect 群 P		Sylow p-部分群 S	D
コホモロジー環を定義するために	Ext	$\mathrm{Ext}^*_{B_0}(k,k)$	なし
	$H^*(P,k)$ において	$H^*(S,k)$ の $\mathcal{F}_S(G)$-安定部分環	$H^*(D,k)$ の $\boxed{?1}$ -安定部分環
		$\updownarrow \delta_S$	$\updownarrow \delta_D$
	$HH(kP)$ において	$\mathrm{Im}\,\delta_S \cap ({}_{kS}kG_{kS}$-安定部分環)	$\mathrm{Im}\,\delta_D \cap ({}_{kD}\boxed{?2}_{kD}$-安定部分環)
コホモロジー環をとらえるために		$\mathrm{res}_S \circ \mathrm{tr}^G$	?3

$\boxed{?1}$, $\boxed{?2}$ には何が入るか，入るべきか？ それが問題である．

ブロック多元環 B には source 加群とよばれる直既約 $k[G\times D^{\mathrm{op}}]$ が定められる．それは B の $k[G\times D^{\mathrm{op}}]$-加群としての直和因子で $\Delta(D)$ を vertex とするものである．二つの source 加群は同型であるとは限らないが，$N_G(D)$ の元により共役である．source 加群は defect 群を指定して考えるものであるから，(B,kD)-source 加群とよぶことにする．

X を (B,kD)-source 加群とする．

$A = X^* \otimes_B X$ とおく．A は B の source 多元環とよばれていて，モデュラー表現論において大変重要な役割を果たしている．それは次の定理が成り立つからである．

定理 (Puig [14])． A と B は Morita 同値である．

p-部分群 $Q \leqslant G$ と $k[QC_G(Q)]$ のブロック多元環 b_Q との対 (Q, b_Q) を subpair または Brauer pair とよぶ．（日本語ではそれぞれ部分対，Brauer 対となるが，ここでは英語のまま使わせてもらう）

subpairs には順序が定義され，集合 $\{ (Q, b_Q) \mid Q \leqslant G$ は p-部分群，b_Q は $k[QC_G(Q)]$ のブロック多元環$\}$ は順序集合である．subpair は有限群の構造論における p-部分群と同様の役割をモデュラー表現論において果たす．

定義． 部分群 $H \leqslant G$ と kH のブロック多元環 C について

C が (kH, kH)-両側加群として B の重複度が 1 の直和因子に同型である

とき，B と C は Brauer 対応で対応しているといい，$B = C^G$ と書く．このとき，C のどの defect 群も B のある defect 群に含まれる．

subpair (Q, b_Q) については b_Q の Brauer 対応は常に定義される．$B = {b_Q}^G$ のとき (Q, b_Q) を B-subpair とよぶ．

$P, Q \leqslant G$ を p-部分群とする．subpair (P, b_P) 対して $k[QC_G(Q)]$ のブロック多元環 b_Q で $(Q, b_Q) \leqslant (P, b_P)$ となるものが一意的に存在する．(P, b_P) が B-subpair ならば，この (Q, b_Q) も B-subpair である．

さて，D は B の defect 群であった．B-subpair (D, b) を Sylow B-subpair とよぶ．Sylow B-subpair やそれに含まれる subpair について構造論における Sylow の定理と同様のことが成り立つ．さて，(B, kD)-source 加群 X に付随して，ある条件を満たすように，$k[DC_G(D)]$ のブロック多元環 b_D が定められる．この b_D は D を defect 群としてもち，$B = {b_D}^G$ が成り立つ．すなわち，(D, b_D) は B-subpair である．b_D は X によって定められるから，Sylow (B, X)-subpair とよびたい．

定義． B を kG のブロック多元環とし，defect 群（のひとつ）を D とする．B の (B, kD)-source 加群（のひとつ）を X とし，(D, b_D) を Sylow (B, X)-subpair とする．Brauer 圏 $\mathcal{F}_{(D,b_D)}(B, X)$ を次のように定義する．

- 対象は部分群 $Q \leqslant D$ である．
- $Q, R \leqslant D$ に対して $(Q, b_Q), (R, b_R) \leqslant (D, b_D)$ とする．射 $\varphi : Q \to R$ は ${}^g(Q, b_Q) = (R, b_R)$ をみたす $g \in G$ がひきおこす共役写像である．

定義 (Linckelmann [8])． ブロック多元環 B の D，X に関するコホモロジー環 $H^*(G, B; X)$ を $H^*(D, k)$ の $\mathcal{F}_{(D,b_D)}(B, X)$-stable 部分環と定義する．すなわち

$$\boxed{H^*(G, B; X) = \{ \zeta \in H^*(D, k) \mid \ \mathrm{res}_Q \zeta = {}^g\mathrm{res}_Q \zeta \ \forall Q \leqslant D \ \forall g \in N_G(Q, b_Q) \}.}$$

S が Sylow p-部分群で X_0 を (B_0, kS)-source 加群とすると

$$H^*(G, B_0; X_0) = \{ \zeta \in H^*(S, k) \mid \zeta \text{ は } \mathcal{F}_S(G)\text{-stable} \} \simeq H^*(G, k)$$

が成り立つ．従って，前項の $\boxed{?1}$ の中には $\mathcal{F}_{(D,b_D)}(B, X)$ が入る．

定理 1 (Linckelmann [8]). 今までと同じ記号で，次の可換図式が得られる：

$$\begin{tikzcd}
H^*(D,k) \arrow[r, "\delta_D"] & HH^*(kD) \arrow[r, "T_X"] & HH^*(B) \\
H^*(G,B;X) \arrow[r] \arrow[u, hook] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \boxed{{}_{kD}A_{kD}\text{-stable 部分環}} \arrow[r, tail, two heads] \arrow[u, hook] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \boxed{X\text{-stable 部分環}} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

ここで T_X は X によって引き起こされる正規化された transfer 写像である．

そこで，$\boxed{?2}$ の中には A が入るべきであると思われていたが，実際

定理 2 (Sasaki [18]). $\zeta \in H^*(D,k)$ について

$$\delta_D\zeta \in HH^*(kD) \text{ が } {}_{kD}A_{kD}\text{-stable} \Longrightarrow \zeta \in H^*(G,B;X).$$

が成り立ち，これによってブロック多元環のコホモロジー環の定義が合理的であることが確認されたといってよい．

次の課題は自然である．

課題 1. $A = X^* \otimes_B X$ の (kD,kD)-両側加群としての構造を知りたい．

この課題はモデュラー表現論においても重要な，しかも困難な課題としてとらえられている．

ブロック多元環は Ext を用いて表現することはできない．つまり，ホモロジー代数をおいそれとは展開できないのである．しかし，主ブロックのコホモロジー環での事実を考えれば

課題 2. 写像 $t : H^*(D,k) \to H^*(D,k)$ を適切に定義し，その像として $H^*(G,B;X)$ を把握したい．

次に，ブロック多元環のコホモロジー環の間に写像を定義したい．何の関係もないブロック多元環の間では，さすがに，無理である．しかし，せめて，Brauer 対応で対応しているブロック多元環に対してはどうだろうか？

課題 3. $H \leqslant G$ を部分群とする．kH のブロック多元環 C の Brauer 対応が定義され，それは B に一致し，さらに，D は C の defect 群でもあるとする．このとき次のような写像を定義したい．

$$\mathrm{res}_C : H^*(G,B;X) \to H^*(H,C;Y), \quad \mathrm{tr}^B : H^*(H,C;Y) \to H^*(G,B;X)$$

もちろん，Frobenius の相互律など，当然期待される性質を備えた写像でなければならない．また，(B,kD)-source 加群 X と (C,kD)-source 加群 Y は「よい」関係になければならない．

4 ブロック多元環の source 多元環の加群構造

(B,kD)-source 加群 X は B の，従って，kG の (kG,kD)-両側加群としての直和因子に同型であるから，$A = X^* \otimes_B X$ は $kG \otimes_{kG} kG = kG$ の (kD,kD)-両側加群としての直和因子に同型である．従って，G における (D,D)-両側剰余類 DgD が定める (kG,kD)-両側加群 $k[DgD]$ の直和に同型である．

$${}_{kD}A_{kD} = {}_{kD}X^* \otimes_B X_{kD} \simeq \bigoplus \text{いくつかの } k[DgD].$$

どの $k[DgD]$ がいくつの重複度で現れるか？これが問題である．

Puig による次の結果と Linckelman [7]，Külshammer–Okuyama–Watanabe [6] 以外には知られていないというのが実情である（と思う）．

定理 (Puig [15])．今までの記号の下で

(1) (kD, kD)-両側加群として

$$A \simeq \left(\bigoplus_{gDC_G(D) \in N_G(D,b_D)/DC_G(D)} k[Dg] \right) \oplus N. \tag{*}$$

ここで，N は $x \in G \setminus N_G(D)$ の $k[DxD]$ の直和である．

(2) $k[Dg]$（$gDC_G(D) \in N_G(D, b_D)/DC_G(D)$)）の形の加群のどの二つも同型でない．

この N については，J. Thévenaz は教科書 [21] 392p で次のように述べている：

> "..., the summands of $(\mathcal{O}Gb)_\gamma$ isomorphic to $\mathcal{O}PgP$ for some $g \notin N_G(P)$ seem much more difficult to handle."

最近，コホモロジー論（といっても簡単な事実のみ）を用いて次がわかった．

定理 3 (Sasaki [19])．G, B, D, X, A は今までと同様とする．$(P, b_P), (Q, b_Q) \subseteq (D, b_D)$ は $g \in G$ で共役である（${}^g(P, b_P) = (Q, b_Q)$）とする．$PC_D(P)$ は b_P の defect 群であるか，$QC_D(Q)$ は b_Q の defect 群であると仮定する．写像

$$t_g : H^*(D, k) \to H^*(D, k); \zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_Q {}^g\zeta$$

が 0 写像でなければ

(1) $Q = D \cap {}^gD$ であり

(2) (kD, kD)-両側加群 $k[DgD]$ は source 多元環 A の直和因子に同型である．

この定理の写像 t_g の由来は次の節で述べるように，A が導く transfer 写像にある．

さらに，最近，次が得られた．

定理 4 (Okuyama and Sasaki [13])．$(Q, b_Q) \leqslant (D, b_D)$ とする．(Q, b_Q) は essential B-subpair とする．$N_G(Q, b_Q)$ には真部分群 $M \geqslant N_D(Q)C_G(Q)$ で $M/QC_G(Q)$ は $N_G(Q, b_Q)/QC_G(Q)$ の strongly p-embedded 部分群となるものが存在する．

$x \in N_G(Q, b_Q) \setminus M$ について

(1) ${}^xD \cap D = Q$,

(2) (kD, kD)-両側加群 $k[DxD]$ は (kD, kD)-両側加群として A の直和因子に同型であり，その重複度は p を法として 1 に合同である．

5 ブロック多元環のコホモロジー環に対する trace 写像

G, B, D, X, A は今までと同様とする．

source 多元環 A を (kD, kD)-両側加群とみなして定義される Hochschild コホモロジー環 $HH^*(kD)$ の transfer 写像 t_A は $H^*(D,k)$ の transfer 写像 t を引き起こす：

$$\begin{tikzcd} H^*(D,k) \arrow[r, "\delta_D"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & HH^*(kD) \arrow[d, "t_A"] \\ H^*(D,k) \arrow[r, "\delta_D"'] & HH^*(kD) \end{tikzcd} .$$

唐突ではあるが，次が成り立つと信じている！

予想.

$$H^*(G,B;X) = t(H^*(D,k)).$$

例 1. $N_G(D,b_D) = \{\, g \in N_G(D) \mid {}^g(D,b_D) = (D,b_D) \,\}$ が (D,b_D) における subpair の融合を統制するならば上の「予想」は正しい．例えば

- D が可換
- D が G で正規である

場合などがある．

transfer 写像 t は A の (kD,kD)-両側加群としての直和分解 (*) により次のように記述される：

$$t : H^*(D,k) \to H^*(D,k); \zeta \mapsto \sum_{gDC_G(D) \in N_G(D,b_D)/DC_G(D)} {}^g\zeta + \sum_{N \simeq \bigoplus_{DgD} k[DgD]} \mathrm{tr}^D \operatorname{res}_{D \cap {}^gD} {}^g\zeta. \qquad (*2)$$

しかしながら，前節で述べたように，(kD,kD)-両側加群として N の様子はわからないので具体的に解析することは困難である．

例 2. B をテイム表現型（つまり直既約加群がひとつのパラメータを用いて記述できる）のブロック多元環とする． このとき，$p = 2$ であり，defect 群は 4 元群，二面体群，準二面体群，（一般）四元数群である．Kawai–Sasaki [3] と定理 4 とにより

(1) transfer 写像 $t : H^*(D,k) \to H^*(D,k)$ を記述し，
(2) $\operatorname{Im} t = H^*(B,D;X)$ が成り立つ（つまり，このブロックについては予想が正しい）

ことが確認できた．この例は予想が成り立つ「自明でない」最初の例である．

例 3. $p = 2$ とし，ブロック B の defect 群 D は wreathed 2-群 $(\mathbf{Z}/2^n \times \mathbf{Z}/2^n) \rtimes \mathbf{Z}/2$ に同型であるとする：

$$D = \langle a, b, t \mid a^{2^n} = b^{2^n} = 1, ab = ba, t^2 = 1, tat = b \rangle.$$

Kawai–Sasaki [3] ではこのブロック多元環のコホモロジー環についても計算し，写像 $\mathrm{Tr}_D^B : H^*(D,k) \to H^*(D,k)$ で $\operatorname{Im} \mathrm{Tr}_D^B = H^*(G,B;X)$ であるものを構成した．

$U = \langle a, b \rangle$, $V = \langle a^{2^{n-1}}, ab, t \rangle \leqslant D$ とおき，$(U,b_U) \leqslant (D,b_D)$，$(V,b_V) \leqslant (D,b_D)$ とする．集合 $\{\,(D,b_D),(U,b_U),(V,b_V)\,\}$ は共役族とよばれるものであり，(D,b_D) に含まれる B-subpair の融合は

$N_G(D,b_D), N_G(U,b_U), N_G(V,b_V)$ に属する元による共役の合成として記述される．wreathed 2-群の自己同型群は 2-群であることから，$N_G(D,b_D)/DC_G(D)$ は単位群である．従って，$N_G(U,b_U), N_G(V,b_V)$ のありようによって subpair の融合のありかたが決まる．

$N_G(U,b_U)/C_G(U) \leqslant \mathrm{Aut}\ U \simeq \mathrm{GL}(2,2)$，$N_G(V,b_V)/VC_G(V) \leqslant \mathrm{Aut}\ V \simeq \mathrm{GL}(2,2)$ であるが，ここでは，ともに $\mathrm{GL}(2,2)$ に同型であると仮定しよう．

このとき，$(U,b_U),(V,b_V)$ は essential な subpair であり，元 $g_0 \in N_G(U,b_U)$，$g_1 \in N_G(V,b_V)$ でそれぞれ (U,b_U)，(V,b_V) の位数 3 の自己同型を引き起こすものをとる．

写像 $\mathrm{Tr}_D^B : H^*(D,k) \to H^*(D,k)$ を次のようにつくる：

$$\mathrm{Tr}_D^B : \zeta \mapsto \zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_U{}^{g_0}\zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_V{}^{g_1}\zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_T{}^{g_1 g_0}\zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_W{}^{g_0 g_1}\zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_F{}^{g_1 g_0 g_1}\zeta.$$

ここで，$T = \langle a, b^{2^{n-1}} \rangle$，$W = \langle ab, a^{2^{n-1}}t \rangle$，$F = \langle t, (ab)^{2^{n-1}} \rangle$ である．この写像は B のコホモロジー環をつくる：

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}_D^B = H^*(G,B;X).$$

この写像の意味づけをしたい．

(1) Tr_D^B の第 1 項の写像 $\zeta \mapsto \zeta$ は $N_G(D,b_D)/DC_G(D)$ から引き起こされる．

$(U,b_U),(V,b_V)$ は essential な subpair であるから，写像 Tr_D^B の第 2 項，第 3 項については定理 4 により，Puig の定理における N の直和因子から得られるものであることがわかる．

(2) 直既約 (kD,kD)-両側加群 $k[Dg_0D]$，$k[Dg_1D]$ は $A = X^* \otimes_B X$ の直和因子に同型である．その重複度はそれぞれ奇数である．
(3) (kD,kD)-両側加群 $k[Dg_0D]$，$k[Dg_1D]$ が引き起こす $HH^*(kD)$ の transfer 写像の $H^*(D,k)$ への制限 $\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_{D \cap {}^{g_0}D}{}^{g_0}\zeta$，$\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_{D \cap {}^{g_1}D}{}^{g_1}\zeta$ はそれぞれ，$\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_U{}^{g_0}\zeta$，$\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_V{}^{g_1}\zeta$ となる．

第 4，第 5 項の写像については定理 3 が適用できて，次がわかる．

(4) 直既約 (kD,kD)-両側加群 $k[Dg_1g_0D]$，$k[Dg_0g_1D]$ は $A = X^* \otimes_B X$ の直和因子に同型である．しかしながら $k[Dg_1g_0D]$，$k[Dg_0g_1D]$ の重複度は不明である．
(5) (kD,kD)-両側加群 $k[Dg_1g_0D]$，$k[Dg_0g_1D]$ が引き起こす $HH^*(kD)$ の transfer 写像の $H^*(D,k)$ への制限 $\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_{D \cap {}^{g_1g_0}D}{}^{g_1g_0}\zeta$，$\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_{D \cap {}^{g_0g_1}D}{}^{g_0g_1}\zeta$ はそれぞれ，$\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_T{}^{g_1g_0}\zeta$，$\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_W{}^{g_0g_1}\zeta$ となる．

第 6 項については

(6) 最後の項の写像 $\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_F{}^{g_1g_0g_1}\zeta$ と A の直和因子との関わりについては全く不明である．

一方，A が導く transfer 写像 $t : H^*(D,k) \to H^*(D.k)$ は $(D.b_D)$ における subpair の融合をつぶさに調べることにより，ある整数 $m_1, m_2, m_3 \geqq 0$ により

$$t : \zeta \mapsto \zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_U{}^{g_0}\zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_V{}^{g_1}\zeta + m_1\,\mathrm{tr}^D \mathrm{res}_T{}^{g_1g_0}\zeta + m_2\,\mathrm{tr}^D \mathrm{res}_W{}^{g_0g_1}\zeta + m_3\,\mathrm{tr}^D \mathrm{res}_F{}^{g_1g_0g_1}\zeta$$

と記述されることがわかる．係数の m_1, m_2 は上で述べた (4)，(5) により 1 以上であるが，偶数か奇数かはまだ不明である．係数 m_3 については全く不明である．

6 Brauer 対応

ここでは，次の状況で考察する．

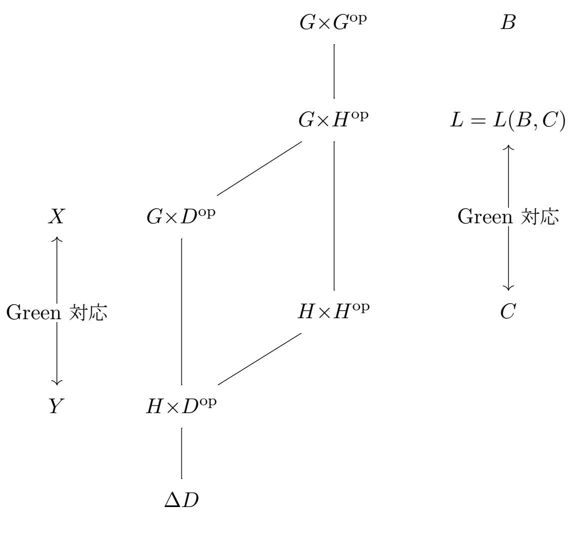
- $DC_G(D) \leqslant H \leqslant G$
- C は kH のブロック多元環で C の G への Brauer 対応は B である : $C^G = B$
- D は C の defect 群である．

$H^*(G, B; X)$ と $H^*(H, C; Y)$ との関係を調べたい！

もちろん，B の source 加群 X と C の source 加群 Y は注意深く設定しなければならない．さらに，ブロック B，C を結びつける加群が必要である．

次のように X，Y と (B, C)-両側加群 L をとる．

(1) B の source 加群は直既約 $k[G \times D^{\mathrm{op}}]$-加群であり，$C$ の source 加群は直既約 $k[H \times D^{\mathrm{op}}]$-加群である．$X$ と Y は Green 対応で対応しているように指定する．
(2) C を $k[H \times H^{\mathrm{op}}]$-加群とみて，$C$ の $G \times H^{\mathrm{op}}$ への Green 対応を $L = L(B, C)$ とおく．L は直既約 (B, C)-両側加群である．



(B, C)-両側加群 L は B-加群と C-加群を結びつける．Green 対応の精密化を与えるといえる．

B と C についてある条件の下では $H^*(G, B; X)$ は $H^*(H, C; Y)$ に含まれる．このようなとき，包含写像を $\mathrm{res}_C : H^*(G, B; X) \to H^*(H, C; Y)$ と考えてよいであろう．この包含写像は上で定義した L の k 双対 L^* が引き起こす Hochschild コホモロジー環の transfer 写像 $HH^*(kB) \to HH^*(C)$ から引き起こされる (Sasaki [17])．

さらに

定理 5 ([18]).

$$H^*(G,B;X) \subseteq H^*(H,C;Y) \iff \delta_D H^*(G,B;X) \subseteq HH^*_{Y^*\otimes_C L^*\otimes_B X}(kD).$$

この条件が成り立つとき，次は可換である．

$$\begin{tikzcd}
H^*(G,B;X) \arrow[r, tail, "\delta_D"] \arrow[d, hook, "\mathrm{res}_C"'] & HH^*_{X^*\otimes_B L\otimes_C Y}(kD) \arrow[r, tail, two heads, "T_X"] \arrow[d, hook] & HH^*_{L\otimes_C Y}(B) \arrow[d, tail, "T_{L^*}"] \\
H^*(H,C;Y) \arrow[r, tail, "\delta_D"'] & HH^*_{Y^*}(kD) \arrow[r, tail, two heads, "T_Y"'] & HH^*_Y(C)
\end{tikzcd}$$

写像 $\mathrm{res}_C : H^*(G,B;X) \to H^*(H,C;Y)$ については，B と C が共通の defect 群をもつ場合は目処がついたといってよいと思う．

しかし，$\mathrm{tr}^B : H^*(H,C;Y) \to H^*(G,B;X)$ については，Kawai–Sasaki [3] に計算例はあるものの，なお不明である．

7 Varieties

前節まではブロック多元環のコホモロジー理論の基礎にかかわる課題について述べた．なお不十分なのではあるが，創始者の M. Linckelmann はそんなことにはおかまいなく，よい結果を与えている．特に，ブロックのコホモロジー環における support variety に関する仕事 [7]，[9]，[11] は特筆に値する．近年の Hochschild コホモロジー環における support variety の研究の端緒になっていると思う．この節では，その一部（もちろん結論のみ）を紹介して，本報告を閉じることにする．

群環の Hochschild コホモロジー環の特徴はなんといっても，群のコホモロジー環からの diagonal embedding があるということである．S. Siegel と S. Witherspoon は [20] において

(1) $\delta_G : H^*(G,k) \to HH^*(kG)$ はべき零根基を法として同型をひきおこすか？
(2) 合成 $\delta_G : H^*(G,k) \to HH^*(kG) \to HH^*(B_0)$ はべき零根基を法として同型をひきおこすか？（B_0 は主ブロック）

という課題を提起した．

次の自然な写像

$$\tau : H^*(G,B;X) \xrightarrow{\delta_D} HH^*_{X^*\otimes_B X}(kD) \xrightarrow{T_X} HH^*_X(B)$$

を考える．Linckelmann は次の定理を示し，上の課題を解決した．

定理 6 (Linckelmann [11]). 上の写像は同型

$$H^*(G,B;X)/\{\text{べき零元}\} \simeq HH^*(B)/\{\text{べき零元}\}$$

を引き起こす．特に

$$H^*(G,B;X) \text{ の極大イデアル・スペクトラム} \simeq HH^*(B) \text{ の極大イデアル・スペクトラム}.$$

参考文献

[1] J. L. Alperin, M. Linckelmann, and R. Rouquier, Source algebras and source modules, J. Algebra **239** (2001), no. 1, 262–271.

[2] L. Evens, The cohomology ring of a finite group, Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), 224–239.

[3] H. Kawai and H. Sasaki, Cohomology algebras of 2-blocks of finite groups with defect groups of rank two, J. Algebra **306** (2006), no. 2, 301–321.

[4] ______, Cohomology algebras of blocks of finite groups and Brauer correspondence, Algebr. Represent. Theory **9** (2006), no. 5, 497–511.

[5] R. Kessar, M. Linckelmann, and G. R. Robinson, Local control in fusion systems of p-blocks of finite groups, J. Algebra **257** (2002), no. 2, 393–413.

[6] B. Külshammer, T. Okuyama, and A. Watanabe, A lifting theorem with applications to blocks and source algebras, J. Algebra **232** (2000), 299–309.

[7] M. Linckelmann, On derived equivalences and local structure of blocks of finite groups, Turkish J. Math. **22** (1988), 93–107.

[8] ______, Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups, Algebr. Represent. Theory **2** (1999), 107–135.

[9] ______, Varieties in block theory, J. Algebra **215** (1999), 460–480.

[10] ______, Quillen stratification for block varieties, J. Pure and Appl. Algebra **172** (2002), 257–270.

[11] ______, Hochschild and block cohomology varieties are isomorphic, J. London Math. Soc. (2) **81** (2010), 389–411.

[12] 奥山哲郎, 佐々木洋城, 飛田明彦, 有限群のコホモロジー論, 数学 **62** (2010), 240–266.

[13] T. Okuyama and H.Sasaki, A note on source algebras of blocks, unpublished note.

[14] L. Puig, Pointed groups and construction of characters, Math. Z. **176** (1981), 265–292.

[15] ______, Pointed groups and construction of modules, J. Algebra **116** (1988), 7–129.

[16] 佐々木 洋城, 有限群のブロック・イデアルのコホモロジー環と Brauer 対応, 第 49 回代数学シンポジウム報告集, 2005, pp. 203–217.

[17] H. Sasaki, Cohomology algebras of blocks of finite groups and Brauer correspondence II, Algebr. Represent. Theory **13** (2010), 445–465.

[18] ______, Cohomology of block ideals of finite group algebras and stable elements, Algebr. Represent. Theory **16** (2013), 1039–1049.

[19] ______, Source algebras and cohomology of block ideals of fintie group algebras, Proc. 46 Symp. Ring Theory and Representation Theory (I. Kikumasa, ed.), 2014, pp. 209–215.

[20] S. Siegel and S. Witherspoon, The Hochschild cohomology ring of a group algebra, Proc. London Math. Soc. (3) **79** (1999), no. 1, 131–157.

[21] J. Thévenaz, G-algebras and modular representation theory, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 1995.

[22] B. B. Venkov, Cohomology algebras for some classifying spaces (russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR **127** (1959), 943–944.

Hochschild cohomology and support varieties for finite-dimensional algebras

古谷貴彦 (明海大学歯学部)
速水孝夫 (北海学園大学工学部)

1　序

多元環のホッホシルトコホモロジーは，与えられた多元環が “分離的” という性質からどのぐらい隔たりがあるかを記述する指標と言えます。これまでに有限群の表現論，多元環の表現論，ホモとピー論，非可換代数幾何等の様々な分野で応用されており，重要な研究対象となっています。しかしながら，与えられた多元環が具体的なものであっても，その計算は容易ではなく，今後，その計算方法や理論の発展が望まれています。

多元環の表現論においては，スナーシャル・ソルベルグ (2004 年) によって（有限次元）多元環上の加群のサポート多様体が，ホッホシルトコホモロジー環を用いて定義されました。これは，その性質からカールソンによって導入された有限群の群環上の加群の多様体の類似と言えます。以後，有限次元多元環上の加群のサポート多様体の研究が盛んになり始めました。（有限群の表現論，多元環の表現論における “加群の多様体” は様々な形研究されています。今回のシンポジウムの佐々木氏の報告集，また，2009 年度代数学シンポジウムの飛田氏，長瀬氏の報告集も合わせてご覧ください。）

本稿では，これまでに計算されてきたホッホシルトコホモロジー環に関する計算結果，および，それらに端を発するいくつかの問題や予想を述べます。また，ある種の有限次元単項多元環 (stacked monomial algebra) 上の単純加群のサポート多様体関するいくつかの結果を紹介します。

本稿を通して，断りのない限り K は代数的閉体，B は K 上の直既約な有限次元多元環とし，加群はすべて有限生成な右加群とします。また，$B^{\rm e}$ で B の包絡多元環 $B^{\rm op} \otimes B$ を表します。

今回の講演の機会を与えて頂きました河田成人先生ならびに関係者の方々に深く感謝いたします。

2　ホッホシルトコホモロジーの定義

本節では，ホッホシルトコホモロジーの定義および多元環の表現論における基本性質を紹介する。本節では K を可換環とする。このとき，B のホッホシルトコホモロジー群 $\mathrm{HH}^i(B)$ $(i \geq 0)$ とは

$$\mathrm{HH}^i(B) := \mathrm{Ext}^i_{B^{\rm e}}(B, B)$$

によって定義される K-加群である ([3])。また，これらの直和を考えた空間

$$\mathrm{HH}^*(B) := \mathrm{Ext}^*(B, B) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathrm{Ext}^i(B, B)$$

は米田積 $\times$ を考えることで，次数付き可換 (graded commutative)，すなわち

$$\theta \times \eta = (-1)^{mn} \eta \times \theta \in \mathrm{HH}^{m+n}(B) \quad (\theta \in \mathrm{HH}^m(B),\ \eta \in \mathrm{HH}^n(B))$$

をみたす次数付き多元環になることが知られている ([19])。$\mathrm{HH}^*(B)$ を B のホッホシルトコホモロジー環とよぶ。

次に，$\mathcal{N}$ を $\mathrm{HH}^*(B)$ における同次冪零元から生成されるイデアルとする。このとき，$\mathcal{N}$ も同次イデアルとなり，その剰余環 $\mathrm{HH}^*(B)/\mathcal{N}$ は可換な次数付き多元環となる ([23])。$\mathrm{HH}^*(B)/\mathcal{N}$ を B の冪零元を法とするホッホシルトコホモロジー環とよぶ。

さて，0 次および 1 次のホッホシルトコホモロジー群に関しては次のことが知られている。

- $\mathrm{HH}^0(B) = Z(B)$ B の中心に環として一致。
- $\mathrm{HH}^1(B)$ は，(B の) 導分の空間の (B の) 内部導分による剰余空間に一致。

また，$\mathrm{HH}^2(B)$ は，B の無限小変形 (infinitesimal deformation) がどのぐらい存在するのかを表す指標と考えることができる。さらに，ホッホシルトコホモロジー環は，多元環の森田同値，導来同値，森田型の安定同値 (0 次は除く) で不変であることが分かっている。このことから，近年ホッホシルトコホモロジー群の多元環の導来同値分類への応用も見られる。(例えば [26] 参照)

3 ホッホシルトコホモロジー環の計算例 $(K[x]/(x^n))$

多元環の表現論に限定した場合，ホッホシルトコホモロジー環を中心とする研究はごく最近始まったと言える。それらは，有限表現型の自己入射多元環 ([5], [6]) や有限次元前射影多元環 ([9]) など，両側加群としての射影分解が周期的なもの対するものであった。

ホッホシルトコホモロジーの定義から，両側射影分解が構成できればホッホシルトコホモロジー環の計算は (理論的に) 可能である。したがって，多元環の両側射影分解をいかに構成するかが 1 つのポイントである。本節では，ホルムの多元環 $K[x]/(x^n)$ に対するホッホシルトコホモロジー環の計算結果 ([17]) について紹介する。これはホッホシルトコホモロジー群および環を具体計算する際の手本となる例と言えよう。

本節を通し，K は可換環とする。$n \geq 2$ を整数とし，剰余環 $\Lambda := K[x]/(x^n)$ を考える。このとき，Λ の両側射影分解は次のように与えられる。

定理 1. ([17]) Λ の次の周期 2 の両側射影分解が存在する。

$$\cdots \xrightarrow{d^3} \Lambda \otimes \Lambda \xrightarrow{d^2} \Lambda \otimes \Lambda \xrightarrow{d^1} \Lambda \otimes \Lambda \xrightarrow{d^0} \Lambda \longrightarrow 0$$

ただし，d^i $(i \geq 0)$ は次の式で決まる両側加群の準同型である: $d^0(1 \otimes 1) = 1$,

$$d^i(1 \otimes 1) = 1 \otimes x - x \otimes 1 \quad (i \text{ が奇数}),$$

$$d^i(1 \otimes 1) = \sum_{j=0}^{n-1} x^j \otimes x^{n-j-1} \quad (i \text{ が偶数}).$$

注意. 論文 [17] では，より一般的な形の多元環 $K[x]/(f(x))$ の両側射影分解およびホッホシルトコホモロジー環が計算されている。本節は特に $f(x) = x^n$ の場合を扱っている。

これらの射影分解を用いてホッホシルトコホモロジー環を計算すると次のようになる。

定理 2. ([17]) 次の可換な次数付き多元環の同型が存在する:

(a) $\mathrm{char}\, K \mid n$ のとき，

$$\mathrm{HH}^*(\Lambda) \simeq \begin{cases} K[x,y,z]/(x^n, y^2) \\ \quad \text{if } \mathrm{char}\, K \neq 2, \text{ or if } \mathrm{char}\, K = 2 \text{ and } n \equiv 0 \pmod 4, \\ K[x,y,z]/(x^n, y^2 - x^{n-2}z) \\ \quad \text{if } \mathrm{char}\, K = 2 \text{ and } n \equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

ただし $\deg x = 1$, $\deg y = 2$ and $\deg z = 3$ とする。

(b) $\mathrm{char}\, K \nmid n$ のとき，

$$\mathrm{HH}^*(\Lambda) \simeq K[x,y,z]/(x^n, nx^{n-1}z, yx^{n-1}, y^2).$$

ただし $\deg x = 1$, $\deg y = 2$ and $\deg z = 3$ とする。

上記のように，より扱いやすい多元環であっても，その構造は煩雑になる。しかしながら，冪零元を法とするホッホシルトコホモロジー環は比較的明快な構造をしている場合が多い。実際，周期的な両側射影分解をもつ多元環に対しては，次の同型が存在する。

定理 3. ([14]) B が周期的な両側射影分解をもつとき，$\mathrm{HH}^*(B)/\mathcal{N}$ は次数付き多元環として K または $K[x]$ に同型である。

4 単項多元環上の加群のサポート多様体

有限次元多元環上の加群の多様体を，有限群の表現論における定義 ([2]) と同様に定めようと考えても，自明な加群の概念が存在しないため，同様の方法では行えない。そこでスナーシャル，ソルベルグはホッホシルトコホモロジー環を用いて，サポート多様体を導入した。

M を B-加群とする。そうすると，次数付き多元環

$$\mathrm{Ext}_B^*(M,M) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathrm{Ext}_B^i(M,M)$$

を得る。ただし積は米田積とする。このとき，テンソル積 $M \otimes_B -$ は次数付き多元環の準同型

$$H \xrightarrow{\text{inc.}} \mathrm{HH}^*(B) \xrightarrow{M \otimes_B -} \mathrm{Ext}_B^*(M,M)$$

を引き起こす。この準同型を通して $\mathrm{Ext}_B^*(M,M)$ を H-加群とみなす。$\mathcal{N}'$ で H における同次冪零元から生成されるイデアルを表す。

定義. ([23]) M の $H/\mathcal{N}'$ におけるサポート多様体とは

$$V_H(M) = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}\, H/\mathcal{N}' \mid \mathrm{Ann}_H \mathrm{Ext}_B^*(M,M) \subseteq \mathfrak{m}'\}$$

を言う。ただし，$\mathfrak{m}'$ は $\mathfrak{m}$ の H における逆像である。特に $H = \mathrm{HH}^*(B)$ のときは $V_H(M)$ を $V(M)$ で表し，単に M のサポート多様体とよぶ。

4.1 有限性条件 (Fg)

[8] においてエルトマン，ホロウェイ，スナシャル，ソルベルグテイラファーは，以下に述べるの有限性条件 (Fg1)，(Fg2) を導入した。そして，(Fg1)，(Fg2) が成り立つとき，有限生成加群が有限群の表現論おける多様体に関連する幾何学的性質 ([2] 参照) をもつことを示した。

(Fg1) $\mathrm{HH}^*(B)$ の可換な次数付きネーター部分多元環 H で，$H^0 = \mathrm{HH}^0(B)\,(= Z(B))$ となるものが存在する。

(Fg2) 拡大多元環 (Ext algebra) $\mathrm{Ext}_B^*(B/\mathrm{rad}\,B, B/\mathrm{rad}\,B)$ は有限生成 H-加群である。

[23] において，一意的に H の極大イデアル $\mathfrak{m}_{\mathrm{gr}}$ が存在して，任意の B-加群 M に対して $\mathfrak{m}_{\mathrm{gr}} \in V_H(M)$ となることが示されている。このとき，サポート多様体が自明であることを次にように定義する。

定義. ([23]) M の $H/\mathcal{N}'$ におけるサポート多様体が自明であるとは，$V_H(M) = \{\mathfrak{m}_{\mathrm{gr}}\}$ であるときを言う。

さて，有限次元多元環上の加群のサポート多様体の基本的な性質が論文 [23] において述べられている。本稿ではその中の次の性質に注目する。

命題. ([23]) B-加群 M の射影次元または入射次元が有限のとき，サポート多様体は自明である。

上記に述べたように，有限性条件 (Fg1)，(Fg2) がみたされるとき，多元環 B のサポート多様体の理論は有限群の表現論の場合と類似した性質をもつことが示されているが，特に，上記の命題に関して逆の主張が成立することが示されている。このことから，一般的な有限次元多元環 B について次の問題が考えられる。

問題 1. ([23]) B-加群 M のサポート多様体が自明になるのはどのようなときか？

また，どのような場合に (Fg1)，(Fg2) をみたすか？という問題も研究されている。

問題 2. 多元環 B が (Fg1)，(Fg2) をみたすのはどのようなときか？

エルトマン，ソルベルグ ([9]) によって，根基の 3 乗が零であるが，冪零ではないような対称多元環について (Fg1)，(Fg2) が成り立つための必要十分条件が与えられている。

4.2 積み上げ単項多元環上の加群のサポート多様体

この節では積み上げ単項多元環上の単純加群について**問題 1** を考える。すなわち，単純加群のサポート多様体が自明になるための必要十分条件を与える。はじめに積み上げ単項多元環について復習する。以降 Q は有限クイバーを表し，I は常に道多元環 KQ の許容イデアル，すなわち $J^t \subseteq I \subseteq J^2$（$t \geq 2$，$J$ は全ての矢から生成される KQ のイデアル）となる両側イデアルとする。

定義. ([13])

(i) 有限次元多元環 KQ/I が単項多元環 (monomial algebra) であるとは，I がいくつかの道から生成されるときを言う。

(ii) 単項多元環 $\Lambda := KQ/I$ が (D, A)-積み上げ単項多元環 ((D, A)-stacked monomial algebra) であるとは，$A/\mathrm{rad}\,A$ の極小射影分解の各項が同じ次数から成る生成元をもつときを言う。（ここで，$D \geq 2$, A は I の生成元から一意的に決まる整数である。）

注. (a) 積み上げ単項多元環のオリジナルの定義は道のオーバーラップ (overlap) の概念および整数 $D \geq 2$，$A \geq 1$ を用いて定義されている（詳しくは [13] をご覧頂きたい)。

(b) 積み上げ単項多元環の類は，コシュール単項多元環および D-コシュール単項多元環の類を含む。実際，コシュール単項多元環は $(2, 1)$-積み上げ単項多元環に一致し，D-コシュール単項多元環は $(D, 1)$-積み上げ単項多元環に一致する ([13] 参照)。

本節の主結果を述べるために [11] から記号を準備する。

記号. Q の任意の道 p に対して $\mathfrak{o}(p)$ で p の始点を表し，$\mathfrak{t}(p)$ で p の終点を表す。Q の頂点 v での閉道 (closed path) とは，自明でない道 C で $C = vCv \in KQ$ をみたすものを言う。また，整数 $A \geq 1$ に対して Q の閉道 T が A-閉小径であるとは，自明でない道 $T = \alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_{m-1}$ $(\in KQ)$ を言う。ここで $\alpha_0, \dots \alpha_{m-1}$ は相異なる長さ m の道である。$T_0 = T$，$T_i = \alpha_i \cdots \alpha_{m-1}\alpha_0 \cdots \alpha_{i-1}$ $(i = 1, \dots, m-1)$ とおく。

次に，整数 $d \geq 2$ に対して $d = Nm + l$ と置く。ここで $0 \leq N$, $0 \leq l \leq m-1$ とする。自然数 t について，t を N で割った余りを $[t]$ と書く。A-閉小径 T に対して，$W = T_0^N\alpha_0 \cdots \alpha_{l-1}$ とおく。ただし，$N = 0$ のとき $T_0^N = \mathfrak{o}(\alpha_0)$ とし，$l = 0$ のとき $W = T_0^N$ とする。さらに，W に対して $\sigma^k(W) = T_k^N\alpha_k\alpha_{k+1} \cdots \alpha_{k+l-1}$ $(k = 0, 1, \dots, m-1)$ と定義する。ここで

(a) $t \geq m$ のとき，$\alpha_t = \alpha_{[t]}$,

(b) $N = 0$ のとき，$T_k^N = \mathfrak{o}(\alpha_k)$,

(c) $l = 0$ のとき，$\sigma^k(W) = T_k^N$

する。$\rho_T := \{W, \sigma(W), \dots, \sigma^{m-1}(W)\}$ と定める。

$\Lambda = KQ/I$ を無限大局次元をもつ (D, A)-積み上げ単項多元環とし，ρ を I の道から成る生成元の極小集合とする。ここで $D = dA$ であることに注意する ([11] 参照)。

C_i $(i = 1, \dots, u)$ を Q の頂点 v_i における閉道で次をみたすものとする: (i) Q の任意の道 p_i に対して $C_i \neq p_i^{r_i}$ $(r_i \geq 2)$. (ii) $C_i^d \in \rho$. (iii) 差集合 $\rho\backslash\{C_i^d\}$ の任意の元と C_i^d のオーバーラップ (ovarlap) は存在しない。また v_i に対応する Λ の単純加群を C_i に付随する単純加群とよぶ。

続いて，T_j $(j = u+1, \dots, r)$ を Q の相異なるすべての A-閉小径で次をみたすものとする。(i) $\rho_{T_j} \subset \rho$. (ii) 長さ A の道 α_{ij} を用いて，$T_j = \alpha_{j0}\alpha_{j1} \cdots \alpha_{jm_j-1}$ と表したとき，各 $i = u+1, \dots, r$ について $\rho\backslash\rho_{T_i}$ の任意の元と α_{jk} のオーバーラップは存在しない。また，$k = 0, \dots, m_j - 1$ $(j = j+1, \dots, r)$ に対して，$\mathfrak{o}(T_{jk})$ に対応する Λ の単純加群を T_j に付随する単純加群とよぶ。

このとき，次の同型が存在することが示されている。

定理 4. ([13]) $\Lambda = KQ/I$ を (D, A)-積み上げ単項多元環とする。Λ の冪零元を法とするホッホシルトコホモロジー環について次の可換次数付き多元環の同型が存在する:

$$\mathrm{HH}^*(\Lambda)/\mathcal{N} \simeq K[x_1, \dots, x_r]/(x_ax_b \mid 1 \leq a, b \leq r;\ a \neq b)$$

ただし，$r = 0$ のときは $\mathrm{HH}^*(\Lambda)/\mathcal{N} \simeq K$ とする。

上記の定理を用いて次を得る:

定理 5. ([11]) $\Lambda = KQ/I$ を (D, A)-積み上げ単項多元環とする。Λ の単純加群 S のサポート多様体 $V(S)$ が自明となるための必要十分条件は，S が $C_1, \ldots, C_r$ または $T_{u+1}, \ldots, T_r$ のいづれかに付随することである。

注. (a) 上記の定理に関して，単純でない加群のサポート多様体が自明になるための条件は分かっていない。

(b) (D, A)-積み上げ単項多元環のなす類は (Fg1), (Fg2) をみたさないものも多く含む。

5 ある自己入射多元環のホッホシルトコホモロジーの計算例

Γ を次のような 4 個の頂点 e_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ と 8 個の矢 $a_{l,m}$ $(l = 0, 1;\ m = 0, 1, 2, 3)$ をもつクイバーとする:

$$\begin{tikzcd}
e_0 \arrow[r, shift left, "a_{1,0}"] \arrow[r, shift right, "a_{0,0}"'] & e_1 \arrow[d, shift right, "a_{0,1}"'] \arrow[d, shift left, "a_{1,1}"] \\
e_3 \arrow[u, shift left, "a_{1,3}"] \arrow[u, shift right, "a_{0,3}"'] & e_2 \arrow[l, shift right, "a_{0,2}"'] \arrow[l, shift left, "a_{1,2}"]
\end{tikzcd}$$

また，$l = 0, 1$ に対して $x_l = \sum_{i=0}^{3} a_{l,i} \in K\Gamma$ と置き，$q_i \in K^{\times}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ とする。さらに $T\,(\geq 2)$ を整数とする。$I = I_T(q_0, q_1, q_2, q_3)$ を 4 種類の元 $e_i x_0 x_1$, $e_i x_1 x_0$, $e_j(q_j x_0^{4T+2} + x_1^{4T+2})$, $e_k(q_k x_1^{4T+2} + x_0^{4T+2})$ $(i = 0, 1, 2, 3;\ j = 0, 2;\ k = 1, 3)$ から生成される $K\Gamma$ の両側イデアルとする。多元環 $A = A_T(q_0, q_1, q_2, q_3)$ を剰余多元環 $K\Gamma/I_T(q_0, q_1, q_2, q_3)$ で定義する。このとき，A は弱対称多元環ではない自己入射多元環であり，また，特殊双列多元環であることが分かる。特に $T = 2$ の場合はコシュール多元環になる。本講演の目的はいくつかの A のホッホシルトコホモロジー群および冪零元を法とするホッホシルトコホモロジー環を調べることである。

さて，ホッホシルトコホモロジー群に関する次の問題は長年未解決であった:

問題 3. (ハッペルの問題 [16]) 任意の $i \gg 0$ に対して，$\mathrm{HH}^i(B) = 0$ のとき B の大局次元は有限であるか？

2005 年に [1] においてこの問題に対する否定的な答えが与えられた。この予想の逆はハッペル自身によって示されている。実際 B の大局次元と B^{e} 加群としての B の射影次元は一致することが示されている。

一方，[23] において冪零元を法とするホッホシルトコホモロジー環について次のことが予想された:

予想 4. 任意の多元環 B に対して，$\mathrm{HH}^*(B)/\mathcal{N}$ は環として有限生成である。

次の有限次元多元環の類に対して，上記の予想が正しいことが分かっている:

- 有限群の群環のブロック ([4])
- 大局次元が有限な多元環 ([16])

- 周期的な多元環 ([14]) (特に有限表現型の自己入射多元環)
- 単項多元環 ([15])

また，最近，数種類の具体的な特殊双列自己入射多元環に対して上記の予想正しいことが示されている ([24, 25, 18, 20])。しかし，2005 年にシュウ ([27])，スナシャル ([21]) によってこの予想の反例が見つかった ([28] も参照)。現在は上記の予想にかわる次の問題と予想が研究されている。

問題 5. ([21]) 多元環 B に対して，$\mathrm{HH}^*(B)/\mathcal{N}$ が環として有限生成のはどのようなときか？

予想 6. B が自己入射多元環のとき，$\mathrm{HH}^*(B)/\mathcal{N}$ は環として有限生成である。

さて，この節で定めた多元環 A のホッホシルトコホモロジーについてのいくつかの結果を述べる。

定理 6. ([10]) $q_i = 1_K$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, $T = 0$ とする。このとき，次の可換な次数付き多元環の同型が存在する:

$$\begin{aligned}\mathrm{HH}^*(A)/\mathcal{N}_A \simeq{}& K[z_0, z_1, z_2, z_3, z_4]\\ &/\langle z_0z_2 - z_1^2,\ z_0z_3 - z_1z_2,\ z_0z_4 - z_2^2,\ z_0z_4 - z_1z_3,\ z_1z_4 - z_2z_3,\ z_2z_4 - z_3^2\rangle.\end{aligned}$$

ここで，$\deg z_j = 4$ $(j = 0, \dots, 4)$ である。したがって $\mathrm{HH}^*(A)/\mathcal{N}_A$ は環として有限生成である (**予想 6** は正しい)。

定理 7. ([12]) 積 $q_0q_1q_2q_3$ は 1_K の冪乗根ではないとする。このとき次を得る。

(a) 整数 $m \geq 0$, $r = 0, 1, 2, 3$ に対して

$$\dim_K \mathrm{HH}^{4m+r}(A_{4,4T+2}) = \begin{cases} 2T+1 & \text{if } m = r = 0 \\ 2T+3 & \text{if } m = 0,\ r = 1 \text{ and } \mathrm{char}\, K \mid 2T+1 \\ 2T+2 & \text{if } m = 0,\ r = 1 \text{ and } \mathrm{char}\, K \nmid 2T+1 \\ 2T+2 & \text{if } m = 0,\ r = 2 \text{ and } \mathrm{char}\, K \mid 2T+1 \\ 2T+1 & \text{if } m = 0,\ r = 2 \text{ and } \mathrm{char}\, K \nmid 2T+1 \\ 2T & \text{if } m \geq 0 \text{ and } r = 3, \\ & \quad \text{or if } m \geq 1 \text{ and } r = 0 \\ 2T+2 & \text{if } m \geq 1,\ r = 1 \text{ and } \mathrm{char}\, K \mid 2T+1, \\ & \quad \text{or if } m \geq 1,\ r = 2 \text{ and } \mathrm{char}\, K \mid 2T+1 \\ 2T & \text{if } m \geq 1,\ r = 1 \text{ and } \mathrm{char}\, K \nmid 2T+1, \\ & \quad \text{or if } m \geq 1,\ r = 2 \text{ and } \mathrm{char}\, K \nmid 2T+1. \end{cases}$$

(b) 全ての $n \geq 3$ に対して，$\mathrm{HH}^n(A) = 0$ となる必要十分条件は $T = 0$ である。

注. 上記の定理において，A の大局次元は無限であるので**問題 3** に否定的な答えを与えている。

系. 積 $q_0q_1q_2q_3$ は 1_K の冪乗根ではないとする。このとき $HH^*(A)$ は 4 次元の局所環である。また $\mathrm{HH}^*(A)/\mathcal{N} \simeq K$ となる。

参考文献

[1] R.-O. Buchweitz, E. L. Green, D. Madesen and Ø. Solberg, Finite Hochschild cohomology without finite global dimension, Math. Res. Lett. **12** (2005), 805–816.

[2] J. F. Carlson, Varieties and the cohomology ring of a module, J. Algebra **85** (1983), 104–143.

[3] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological algebra (Princeton University Press, 1956).

[4] L. Evens, The cohomology ring of a finite group, Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), 224–239.

[5] K. Erdmann and T. Holm, Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of type A_n, Forum Math. **11** (1999), 177–201.

[6] K. Erdmann, T. Holm and N. Snashall, Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of type A_n II, Algebr. Represent. Theory. **5** (2002), 457–482.

[7] K. Erdmann and Ø. Solberg, Radical cube zero weakly symmetric algebras and support varieties, J. Pure and Appl. **215** (2011), 185–200.

[8] K. Erdmann, M. Holloway, N. Snashall, Ø. Solberg, and R. Taillefer, Support varieties for self-injective algebras, K-Theory **33** (2004), 67–87.

[9] K. Erdmann and S. Snashall, Preprojective algebras of Dynkin type: periodicity and the second Hochschild cohomology, Algebras and modules II (ed I. Reiten, S. O. Smalø and Ø. Solberg), Canadian Mathematical Society Conference Proceedings **24** (American Mathematical Society, Providence, RI, 1998), 183–193.

[10] T. Furuya, Hochschild cohomology for a class of some self-injective special biserial algebras of rank four, to appear in J. Pure and Applied Algebra.

[11] T. Furuya and N. Snashall, Support varieties for modules over stacked monomial algebras, Comm. Algebra **39** (2011), 2926–2942.

[12] T. Furuya and T. Hayami, Hochschild cohomology for a socle deformation of some self-injective special biserial algebra of rank four, preprint.

[13] E. L. Green and N. Snashall, The Hochschild cohomology ring modulo nilpotence of a stacked monomial algebra, Colloq. Math. **105** (2006), 233–258.

[14] E. L. Green, N. Snashall and Ø. Solberg, The Hochschild cohomology ring of a self-injective algebra of finite representation type, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 3387–3393.

[15] E. L. Green, N. Snashall and Ø. Solberg, *The Hochschild cohomology ring modulo nilpotence of a monomial algebra*, J. Algebra Appl. **5** (2006), 153–192.

[16] D. Happel, The Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras, Springer Lecture Notes in Mathematics **1404** (1989), 108–126.

[17] T. Holm, Hochschild cohomoogy rings of algebras $K[X]/(f)$, Beiträge Algebra Geom. **41** (2000), 291–301.

[18] A. Itaba, On Hochschild cohomology of a self-injective special biserial algebra obtained by a circular quiver with double arrows, to appear in Comm. in Algenra.

[19] S. MacLane, Homology, Classics in Mathematics (Springer, New York, 1995).

[20] A. Parker and N. Snashall, A family of Koszul self-injective algebras with finite Hochschild cohomology, J. Pure and Applied Algebra **216** (2012), 1245–1252.

[21] N. Snashall, Support varieties and the Hochschild cohomology ring modulo nilpotence, Proceedings of the 41st Symposium on Ring Theory and Representation Theory, 68–82, Ed. H. Fujita, Tsukuba, Japan, 2009.

[22] S. Schroll and N. Snashall, Hochschild cohomology and support varieties for tame Hecke algebras, Quart. J. Math. **62** (2011), 1017–1029.

[23] N. Snashall and Ø. Solberg, Support varieties and Hochschild cohomology rings, Proc. London Math. Soc. **88** (2004), 705–732.

[24] N. Snashall and R. Taillefer, The Hochschild cohomology ring of a class of special biserial algebras, J. Algebra Appl. **9** (2010), 73–122.

[25] N. Snashall and R. Taillefer, Hochschild cohomology of socle deformations of a class of Koszul self-injective algebras, Colloq. Math. **119** (2010), 79–93.

[26] N. Snashall and R. Taillefer, Classification of symmetric special biserial algebras with at most one non-uniserial indecomposabule projective, to appear in Proc. EMS.

[27] F. Xu, Hochschild and ordinary cohomology rings of small categories, Adv. Math. **219** (2008), 1872–1893.

[28] Y. Xu and C. Zhang, More counterexamples to Happel's question and Snashall-Solberg's conjecture, arXiv:1109.3956.

ATOM SPECTRA OF GROTHENDIECK CATEGORIES

RYO KANDA

ABSTRACT. This paper explains recent progress on the study of Grothendieck categories using the atom spectrum, which is a generalization of the prime spectrum of a commutative ring. As a part, we give a classification of localizing subcategories which can be applied to both locally noetherian schemes and noncommutative noetherian rings. It is shown that the atom spectrum of a Grothendieck category can have a rich poset structure compared with the prime spectrum of a commutative ring. We also show some properties on minimal elements of the atom spectrum for noncommutative noetherian rings.

1. INTRODUCTION

The aim of this paper is to explain recent progress on the study of Grothendieck categories. We investigate a Grothendieck category by using a kind of spectrum, which we call the *atom spectrum*. A typical example of a Grothendieck category is the category of modules over a ring. In the case where the ring is commutative, the atom spectrum of the module category coincides with the prime spectrum of the commutative ring. Therefore this theory can be regarded as an attempt to generalize the notion of the prime spectrum to noncommutative rings. It seems possible to understand and reformulate some classical noncommutative ring theory from the categorical viewpoint.

The theory of atom spectrum is not only for the study of noncommutative rings. Another example of a Grothendieck category is the category of quasi-coherent sheaves of a scheme. We can show that the atom spectrum of the category of quasi-coherent sheaves of a locally noetherian scheme coincides with the set of points of the scheme, and as a consequence, we can show a classification of localizing subcategories in a general setting including both the case of locally noetherian schemes and the case of noncommutative noetherian rings.

The reader may find the details of this paper in [Kan12a], [Kan12b], [Kan13], and [Kan14]. The reader who is unfamiliar with terms of abelian categories may be referred to [Pop73] or [Ste75].

We start with the definition of a Grothendieck category.

Definition 1.1. An abelian category $\mathcal{A}$ is called a *Grothendieck category* if it satisfies the following conditions.

(1) $\mathcal{A}$ admits arbitrary direct sums (and hence arbitrary direct limits), and for every direct system of short exact sequences in $\mathcal{A}$, its direct limit is also a short exact sequence.
(2) $\mathcal{A}$ has a generator G, that is, every object in $\mathcal{A}$ is isomorphic to a quotient object of the direct sum of some copies of G.

As we mentioned, the category $\operatorname{Mod} \Lambda$ of right modules over a ring Λ and the category $\operatorname{QCoh} X$ of quasi-coherent sheaves on a scheme X (see [Con00, Lemma 2.1.7]) are Grothendieck categories.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 18E15 (Primary), 16D90, 14A22, 13C60 (Secondary).
Key words and phrases. Grothendieck category; atom spectrum; localizing subcategory.
This paper contains an announcement of our results. The detailed version concerning the results will be submitted for publication elsewhere.
The author is a Research Fellow of Japan Society for the Promotion of Science. This work is supported by Grant-in-Aid for JSPS Fellows 25·249.

One might think the notion of Grothendieck categories is quite an abstract setting given in order to include module categories. However, it is shown that every Grothendieck category is a part of some module category.

Theorem 1.2 (Gabriel and Popescu [PG64, Proposition])**.** *Let $\mathcal{A}$ be a Grothendieck category. Then there exist a ring Λ and a localizing subcategory $\mathcal{X}$ of $\operatorname{Mod}\Lambda$ such that $\mathcal{A}$ is equivalent to $(\operatorname{Mod}\Lambda)/\mathcal{X}$.*

In this paper, we adopt Grothendieck categories as main objects to study. Recall that for a commutative ring R, the prime spectrum $\operatorname{Spec} R$ plays an fundamental role. For a Grothendieck category $\mathcal{A}$, we will consider the *atom spectrum* $\operatorname{ASpec}\mathcal{A}$.

2. Atom spectrum

From now on, let $\mathcal{A}$ be a Grothendieck category. The atom spectrum of a Grothendieck category is defined by using the notion of monoform objects.

Definition 2.1. A nonzero object H in $\mathcal{A}$ is called *monoform* if for each nonzero subobject L of H, no nonzero subobject of H is isomorphic to a subobject of H/L.

In the case of a commutative ring, the following result shows how monoform objects are related to prime ideals.

Proposition 2.2 ([Sto72, Lemma 1.5])**.** *Let R be a commutative ring and $\mathfrak{a}$ an ideal of R. Then $R/\mathfrak{a}$ is a monoform object in $\operatorname{Mod} R$ if and only if $\mathfrak{a}$ is a prime ideal of R.*

We state basic properties of monoform objects.

Proposition 2.3. *Let H be a monoform object in $\mathcal{A}$.*

(1) ([Kan12a, Proposition 2.2]) *Every nonzero subobject of H is again monoform.*
(2) ([Kan12a, Proposition 2.6]) *H is uniform, that is, for every nonzero subobjects L_1 and L_2 of H, we have $L_1 \cap L_2 \neq 0$.*

Even in the case of a commutative ring R, the collection of monoform objects is quite different from the set of prime ideals. Indeed, it is known that the residue field $k(\mathfrak{p}) = R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ is a monoform object in $\operatorname{Mod} R$ for each prime ideal $\mathfrak{p}$ of R ([Sto72, p. 626]). Hence all its submodules are monoform. See [Kan12a, Example 8.3] for an example of a noncommutative ring. In order to obtain a generalization of the prime spectrum of a commutative ring, we introduce an equivalence relation between monoform objects.

Definition 2.4. We say that monoform objects H_1 and H_2 in $\mathcal{A}$ are *atom-equivalent* (denoted by $H_1 \sim H_2$) if there exists a nonzero subobject of H_1 isomorphic to a subobject of H_2.

Definition 2.5. The *atom spectrum* $\operatorname{ASpec}\mathcal{A}$ of $\mathcal{A}$ is defined by

$$\operatorname{ASpec}\mathcal{A} = \frac{\{\text{monoform objects in } \mathcal{A}\}}{\sim}.$$

Each element of $\operatorname{ASpec}\mathcal{A}$ is called an *atom* in $\mathcal{A}$. For each monoform object H in $\mathcal{A}$, the equivalence class of H is denoted by $\overline{H}$.

The notion of atoms was originally introduced by Storrer [Sto72], and the generalization to abelian categories was stated in [Kan12a].

The following result shows that the atom spectrum is a generalization of the prime spectrum of a commutative ring.

Theorem 2.6 (Storrer [Sto72, p. 631])**.** *Let R be a commutative ring. Then the map*

$$\operatorname{Spec} R \to \operatorname{ASpec}(\operatorname{Mod} R)$$

given by

$$\mathfrak{p} \mapsto \overline{R/\mathfrak{p}}$$

is bijective.

For a locally noetherian scheme X, the atom spectrum of $\operatorname{QCoh} X$ coincides with the set of points of X.

Theorem 2.7 ([Kan14, Theorem 7.6]). *Let X be a locally noetherian scheme. Then the map*

$$|X| \to \operatorname{ASpec}(\operatorname{QCoh} X)$$

given by

$$x \mapsto j_{x*}k(x)$$

is bijective, where $k(x)$ is the residue field of x, and $j_x \colon \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$ is the canonical morphism.

Matlis' correspondence between the prime ideals and the indecomposable injective modules can be generalized to a wide class of Grothendieck categories including the category $\operatorname{Mod} \Lambda$ for a right noetherian ring Λ.

For an object M in a Grothendieck category $\mathcal{A}$, the injective envelope $E(M)$ of M always exists and it is unique up to isomorphism (see [Pop73, Theorem 10.10]).

We recall the statement of Matlis' correspondence.

Theorem 2.8 (Matlis [Mat58, Proposition 3.1]). *Let R be a commutative noetherian ring. Then the map*

$$\operatorname{Spec} R \to \frac{\{\text{ indecomposable injective } R\text{-modules }\}}{\cong}$$

given by

$$\mathfrak{p} \mapsto E(R/\mathfrak{p})$$

is bijective.

In order to generalize Matlis' correspondence, we need to consider some noetherianness of a Grothendieck category. The notion of the locally noetherianness is well-investigated one.

Definition 2.9. A Grothendieck category $\mathcal{A}$ is called *locally noetherian* if there exists a generating set $\mathcal{G}$ of $\mathcal{A}$ consisting of noetherian objects, that is, $\mathcal{A}$ admits a set $\mathcal{G}$ of noetherian objects such that $\bigoplus_{G \in \mathcal{G}} G$ is a generator of $\mathcal{A}$.

For a ring Λ, the Grothendieck category $\operatorname{Mod} \Lambda$ is locally noetherian if and only if Λ is right noetherian. Therefore the following generalization can be applied to right noetherian rings.

Theorem 2.10 ([Kan12a, Theorem 5.9]; see also [Sto72, Corollary 2.5]). *Let $\mathcal{A}$ be a locally noetherian Grothendieck category. Then the map*

$$\operatorname{ASpec} \mathcal{A} \to \frac{\{\text{ indecomposable injective objects in } \mathcal{A}\ \}}{\cong}$$

given by

$$\overline{H} \mapsto E(H)$$

is bijective.

3. Classification of localizing subcategories

In this section, we state a classification of localizing subcategories.

Definition 3.1. A full subcategory $\mathcal{X}$ of $\mathcal{A}$ is called a *localizing subcategory* if the following conditions are satisfied.

(1) $\mathcal{X}$ is closed under subobjects, quotient objects, and extensions. In other words, for every exact sequence

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

in $\mathcal{A}$, we have $M \in \mathcal{X}$ if and only if $L, N \in \mathcal{X}$.

(2) $\mathcal{X}$ is closed under arbitrary direct sums, that is, for every set $\mathcal{S}$ of objects in $\mathcal{X}$, we have $\bigoplus_{M \in \mathcal{S}} M \in \mathcal{X}$.

We recall a classification of localizing subcategories for a commutative noetherian ring. This classification given by [Gab62] is regarded as an origin of many kinds of classification of subcategories.

For a commutative ring R, we say that a subset Φ of $\operatorname{Spec} R$ is *closed under specialization* if for every $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ in $\operatorname{Spec} R$, the assertion $\mathfrak{p} \in \Phi$ implies $\mathfrak{q} \in \Phi$.

Theorem 3.2 (Gabriel [Gab62, Proposition VI.4]). *Let R be a commutative noetherian ring. Then the map*

$$\{\, \textit{localizing subcategories of } \operatorname{Mod} R \,\} \to \{\, \textit{specialization-closed subsets of } \operatorname{Spec} R \,\}$$

given by

$$\mathcal{X} \mapsto \bigcup_{M \in \mathcal{X}} \operatorname{Supp} M$$

is bijective. The inverse map is given by

$$\Phi \mapsto \{\, M \in \operatorname{Mod} R \mid \operatorname{Supp} M \subset \Phi \,\}.$$

The key notion to generalize Gabriel's classification is the "support" of an object in a Grothendieck category. It is defined in terms of atoms as follows.

Definition 3.3. For each object M in $\mathcal{A}$, define the subset $\operatorname{ASupp} M$ of $\operatorname{ASpec} \mathcal{A}$ by

$$\operatorname{ASupp} M = \{\, \overline{H} \in \operatorname{ASpec} \mathcal{A} \mid H \cong L'/L \text{ for some } L \subset L' \subset M \,\}.$$

This is called the *atom support* of M.

Proposition 3.4 ([Kan13, Proposition 3.2]). *The set*

$$\{\, \operatorname{ASupp} M \mid M \in \mathcal{A} \,\}$$

satisfies the axioms of open subsets of $\operatorname{ASpec} \mathcal{A}$.

This simple proposition is quite impressive from the viewpoint of ring theory. For a commutative ring R, the set of subsets of the form $\operatorname{Supp} M$ is exactly the set of specialization-closed subsets, and hence it is also closed under infinite intersection. However, this is not necessarily true for a Grothendieck category. Indeed, Example 4.3 gives a counter-example.

We call the topology on $\operatorname{ASpec} \mathcal{A}$ defined by Proposition 3.4 the *localizing topology*.

We define maps which will be used in the generalized classification of localizing subcategories.

Definition 3.5.

(1) For a full subcategory $\mathcal{X}$ of $\mathcal{A}$, define the subset $\operatorname{ASupp} \mathcal{X}$ of $\operatorname{ASpec} \mathcal{A}$ by

$$\operatorname{ASupp} \mathcal{X} = \bigcup_{M \in \mathcal{X}} \operatorname{ASupp} M.$$

(2) For a subset Φ of $\operatorname{ASpec} \mathcal{A}$, define the full subcategory $\operatorname{ASupp}^{-1} \Phi$ of $\mathcal{A}$ by

$$\operatorname{ASupp}^{-1} \Phi = \{\, M \in \mathcal{A} \mid \operatorname{ASupp} M \subset \Phi \,\}.$$

We introduce a class of Grothendieck categories, which includes all locally noetherian Grothendieck categories, in particular $\operatorname{Mod} \Lambda$ for a right noetherian ring Λ, and $\operatorname{QCoh} X$ for a locally noetherian scheme X (which is not necessarily a locally noetherian Grothendieck category. See [Har66, p. 135, Example]).

Definition 3.6. We say that a Grothendieck category $\mathcal{A}$ has *enough atoms* if $\mathcal{A}$ satisfies the following conditions.

(1) Every injective object in $\mathcal{A}$ has an indecomposable decomposition.
(2) Each indecomposable injective object in $\mathcal{A}$ is isomorphic to $E(H)$ for some monoform object H in $\mathcal{A}$.

See [Kan14] for more details on Grothendieck categories with enough atoms. It is shown in [Kan14, Theorem 7.6] that the Grothendieck category $\operatorname{QCoh} X$ has enough atoms for every locally noetherian scheme X.

Theorem 3.7 ([Kan14, Theorem 6.8]; see also [Her97, Theorem 3.8], [Kra97, Corollary 4.3], and [Kan12a, Theorem 5.5])**.** *Let $\mathcal{A}$ be a Grothendieck category with enough atoms. Then the map*

$$\{\, \textit{localizing subcategories of } \mathcal{A} \,\} \to \{\, \textit{specialization-closed subsets of } \operatorname{ASpec} \mathcal{A} \,\}$$

given by

$$\mathcal{X} \mapsto \bigcup_{M \in \mathcal{X}} \operatorname{ASupp} M$$

is bijective. The inverse map is given by

$$\Phi \mapsto \{\, M \in \mathcal{A} \mid \operatorname{ASupp} M \subset \Phi \,\}.$$

For a localizing subcategory $\mathcal{X}$ of $\mathcal{A}$, it is known that the categories $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}/\mathcal{X}$ are Grothendieck categories (see [Pop73, Corollary 4.6.2]). It is natural to ask how their atom spectra are related to each other.

Proposition 3.8 ([Kan13, Proposition 5.12 and Theorem 5.17]; see also [Kra97, Corollary 4.4] and [Her97, Proposition 3.6])**.** *Let $\mathcal{X}$ be a localizing subcategory.*

(1) $\operatorname{ASpec} \mathcal{X}$ *is homeomorphic to the open subset* $\operatorname{ASupp} \mathcal{X}$ *of* $\operatorname{ASpec} \mathcal{A}$.

(2) $\operatorname{ASpec}(\mathcal{A}/\mathcal{X})$ *is homeomorphic to the closed subset* $\operatorname{ASpec} \mathcal{A} \setminus \operatorname{ASupp} \mathcal{X}$ *of* $\operatorname{ASpec} \mathcal{A}$.

In particular, under the identifications by these homeomorphisms, we have

$$\operatorname{ASpec} \mathcal{A} = \operatorname{ASpec} \mathcal{X} \amalg \operatorname{ASpec} \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{X}}$$

as a set.

4. Partial order

In this section, we introduce a partial order on the atom spectrum and investigate its structure.

Definition 4.1. Let $\alpha, \beta \in \operatorname{ASpec} \mathcal{A}$. We write $\alpha \leq \beta$ if α belongs to the topological closure $\overline{\{\beta\}}$ of β with respect to the localizing topology.

In fact, the relation $\leq$ is a partial order on $\operatorname{ASpec} \mathcal{A}$ (see [Kan13, Proposition 3.5]). The following result shows that this is a generalization of the inclusion relation between prime ideals of a commutative ring.

Proposition 4.2 ([Kan13, Proposition 4.3])**.** *For a commutative ring R, the bijection in Theorem 2.6 gives an isomorphism*

$$(\operatorname{Spec} R, \subset) \cong (\operatorname{ASpec}(\operatorname{Mod} R), \leq)$$

of posets.

For a commutative ring R, the open subsets of $\operatorname{Spec} R$ with respect to the localizing topology is exactly the specialization-closed subsets. Therefore the localizing topology on $\operatorname{Spec} R$ and the poset (partially ordered set) structure of $\operatorname{Spec} R$ can be recovered from each other. However, as the next example shows, the localizing topology cannot necessarily be recovered from the poset structure for a Grothendieck category.

Example 4.3 ([Pap02, Example 4.7])**.** Let k be a field. We consider the graded ring $k[x]$ with $\deg x = 1$. The category $\operatorname{GrMod} k[x]$ of $\mathbb{Z}$-graded $k[x]$-modules with degree-preserving homomorphisms is a locally noetherian Grothendieck category. For each object M in $\operatorname{GrMod} k[x]$ and $i \in \mathbb{Z}$, the object $M(i)$ in $\operatorname{GrMod} k[x]$ is defined by $M(i)_j = M_{i+j}$. Let $S := k[x]/(x)$. Then we have

$$\operatorname{ASpec}(\operatorname{GrMod} k[x]) = \{\overline{k[x]}\} \cup \{\, \overline{S(i)} \mid i \in \mathbb{Z} \,\}.$$

Note that $\overline{k[x]} = \overline{k[x](i)}$ for each $i \in \mathbb{Z}$ and that $\overline{S(i)} = \overline{S(j)}$ if and only if $i = j$.

A subset Φ of $\operatorname{ASpec}(\operatorname{GrMod} k[x])$ is open if and only if $\overline{k[x]} \notin \Phi$ or there exists $n \in \mathbb{Z}$ such that $\Phi_n \subset \Phi$, where

$$\Phi_n := \{\overline{k[x]}\} \cup \{\, \overline{S(i)} \mid i \leq n \,\}.$$

Although all Φ_n are open, their intersection

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \Phi_n = \{\overline{k[x]}\}$$

is not open. Since every element of $\operatorname{ASpec}(\operatorname{GrMod} k[x])$ is a closed point, we have $\alpha \leq \beta$ in $\operatorname{ASpec}(\operatorname{GrMod} k[x])$ if only if $\alpha = \beta$.

Since we have the naturally defined partial order on $\operatorname{ASpec}\mathcal{A}$, it is expected to investigate its general property. Let us recall the case of commutative rings. For every commutative ring R, the poset $\operatorname{Spec} R$ has a maximal element and a minimal element. Some other properties of $\operatorname{Spec} R$ were also known (see for example, [Kap74, Theorem 11]). The next theorem, essentially shown by Hochster [Hoc69], states all general properties of the poset $\operatorname{Spec} R$. The precise statement was given by Speed [Spe72].

Theorem 4.4 (Hochster [Hoc69, Proposition 10] and Speed [Spe72, Corollary 1])**.** *Let P be a poset. Then the following assertions are equivalent.*

1. *There exists a commutative ring R such that $P \cong \operatorname{Spec} R$ as a poset.*
2. *P is an inverse limit of finite posets.*

We establish the same type of result for Grothendieck categories, but the conclusion is quite different from the case of commutative rings.

Theorem 4.5 ([Kan13, Theorem 7.27])**.** *For every poset P, there exists a Grothendieck category $\mathcal{A}$ such that $P \cong \operatorname{ASpec}\mathcal{A}$ as a poset.*

The construction uses colored quivers. See [Kan13] for the details.

Theorem 4.5 shows that there are quite various kinds of Grothendieck categories compared with commutative rings. By combining this theorem with Theorem 1.2 and Proposition 3.8, we also realize a diversity of noncommutative rings.

Corollary 4.6 ([Kan13, Corollary 5.19])**.** *For every poset P, there exists a ring Λ such that P is homeomorphic to a closed subset of $\operatorname{ASpec}(\operatorname{Mod}\Lambda)$.*

From now on, we state some results on the poset structure of the atom spectrum of a Grothendieck category with some noetherian property.

Proposition 4.7 ([Kan13, Proposition 4.6])**.** *Let $\mathcal{A}$ be a locally noetherian Grothendieck category. Then $\operatorname{ASpec}\mathcal{A}$ satisfies the ascending chain condition.*

The previous proposition is expected from the analogous result on commutative noetherian rings. On the other hand, we will see a different phenomenon about minimal elements. Denote by $\operatorname{AMin}\mathcal{A}$ the set of minimal elements of $\operatorname{ASpec}\mathcal{A}$.

Proposition 4.8 ([Kan13, Proposition 8.2])**.** *There exists a locally noetherian Grothendieck category $\mathcal{A}$ such that $\operatorname{AMin}\mathcal{A} = \emptyset$.*

We regard this proposition as a consequence of the weakness of the condition of the locally noetherianness. Instead of this condition, we consider a Grothendieck category having a noetherian generator. Note that for every right noetherian ring Λ, the Grothendieck category $\operatorname{Mod}\Lambda$ has the noetherian generator Λ. We obtain the following result with an impressive proof.

Theorem 4.9. *Let $\mathcal{A}$ be a Grothendieck category with a noetherian generator.*

1. ([Kan13, Proposition 4.7]) *For each $\beta \in \operatorname{ASpec}\mathcal{A}$, there exists $\alpha \in \operatorname{AMin}\mathcal{A}$ such that $\alpha \leq \beta$.*
2. ([K]) *$\operatorname{AMin}\mathcal{A}$ is a finite set.*

Sketch of proof. (2) It can be shown that $\Phi := \operatorname{ASpec}\mathcal{A} \setminus \operatorname{AMin}\mathcal{A}$ is an open subset of $\operatorname{ASpec}\mathcal{A}$. Let $\mathcal{X} := \operatorname{ASupp}^{-1}\Phi$. Then we have $\operatorname{ASpec}(\mathcal{A}/\mathcal{X}) = \operatorname{AMin}\mathcal{A}$. Let G be a noetherian generator of $\mathcal{A}$ and G' its image in $\mathcal{A}/\mathcal{X}$. Then G' is a generator of $\mathcal{A}/\mathcal{X}$ which is of finite length. Therefore $\operatorname{ASpec}(\mathcal{A}/\mathcal{X}) = \operatorname{ASupp} G'$ is a finite set. $\square$

Note the following result on Grothendieck categories.

Theorem 4.10 (Năstăsescu [Nas81, Theorem 3.3])**.** *Let $\mathcal{A}$ be a Grothendieck category with an artinian generator. Then there exists a right artinian ring Λ such that $\mathcal{A} \cong \operatorname{Mod} \Lambda$.*

For a given right noetherian ring Λ, the category $\operatorname{Mod} \Lambda$ is a Grothendieck category with the noetherian generator Λ. By the above argument, there exists a right artinian ring Λ' such that $\mathcal{A}/\mathcal{X} \cong \operatorname{Mod} \Lambda'$, where $\mathcal{X} = \operatorname{ASupp}^{-1}(\operatorname{ASpec} \mathcal{A} \setminus \operatorname{AMin} \mathcal{A})$. In particular, $\operatorname{AMin}(\operatorname{Mod} \Lambda) = \operatorname{ASpec}(\operatorname{Mod} \Lambda')$. Consequently, we obtain a right artinian ring (unique up to Morita equivalence) from a right noetherian ring in a categorical way.

5. Acknowledgement

The author would like to express his deep gratitude to Osamu Iyama for his elaborated guidance. The author thanks Shiro Goto, Mitsuyasu Hashimoto, S. Paul Smith, Ryo Takahashi, and Yuji Yoshino for their valuable comments.

References

[Con00] B. Conrad, Grothendieck duality and base change, Lecture Notes in Mathematics, 1750, *Springer-Verlag, Berlin*, 2000, vi+296 pp.

[Gab62] P. Gabriel, Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), 323–448.

[Har66] R. Hartshorne, Residues and duality, Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64, With an appendix by P. Deligne, Lecture Notes in Mathematics, No. 20, *Springer-Verlag, Berlin-New York*, 1966, vii+423 pp.

[Her97] I. Herzog, The Ziegler spectrum of a locally coherent Grothendieck category, *Proc. London Math. Soc. (3)* **74** (1997), no. 3, 503–558.

[Hoc69] M. Hochster, Prime ideal structure in commutative rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **142** (1969), 43–60.

[Kan12a] R. Kanda, Classifying Serre subcategories via atom spectrum, *Adv. Math.* **231** (2012), no. 3–4, 1572–1588.

[Kan12b] R. Kanda, Extension groups between atoms and objects in locally noetherian Grothendieck category, *J. Algebra*, to appear; arXiv:1205.3007v2, 17 pp.

[Kan13] R. Kanda, Specialization orders on atom spectra of Grothendieck categories, arXiv:1308.3928v2, 39 pp.

[Kan14] R. Kanda, Classification of categorical subspaces of locally noetherian schemes, arXiv:1405.4473v1, 47 pp.

[K] R. Kanda, Unpublished results.

[Kap74] I. Kaplansky, Commutative rings, revised ed., *The University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London*, 1974, ix+182 pp.

[Kra97] H. Krause, The spectrum of a locally coherent category, *J. Pure Appl. Algebra* **114** (1997), no. 3, 259–271.

[Mat58] E. Matlis, Injective modules over Noetherian rings, *Pacific J. Math.* **8** (1958), 511–528.

[Nas81] C. Năstăsescu, Δ-anneaux et modules Δ-injectifs. Applications aux catégories localement artiniennes, *Comm. Algebra* **9** (1981), no. 19, 1981–1996.

[Pap02] C. J. Pappacena, The injective spectrum of a noncommutative space, *J. Algebra* **250** (2002), no. 2, 559–602.

[PG64] N. Popesco and P. Gabriel, Caractérisation des catégories abéliennes avec générateurs et limites inductives exactes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **258** (1964), 4188–4190.

[Pop73] N. Popescu, Abelian categories with applications to rings and modules, London Mathematical Society Monographs, No. 3, *Academic Press, London-New York*, 1973, xii+467 pp.

[Spe72] T. P. Speed, On the order of prime ideals, *Algebra Universalis* **2** (1972), 85–87.

[Ste75] B. Stenström, Rings of quotients: An introduction to methods of ring theory, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 217, *Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York*, 1975, viii+309 pp.

[Sto72] H. H. Storrer, On Goldman's primary decomposition, *Lectures on rings and modules (Tulane Univ. Ring and Operator Theory Year, 1970–1971, Vol. I)*, pp. 617–661, Lecture Notes in Math., Vol. 246, *Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York*, 1972.

Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi-ken, 464-8602, Japan

E-mail address: kanda.ryo@a.mbox.nagoya-u.ac.jp

Boundary of Cohen-Macaulay cone and asymptotic behavior of system of ideals

Kazuhiko Kurano

Meiji University

1 Introduction

On a smooth projective variety, we can define the intersection number for a given divisor and a given curve. By this pairing, we can define the numerical equivalence on divisors and curves. We get a (finitely generated) lattice if we divide the set of Weil divisors or curves by the numerical equivalence. In order to study the intersection pairing, we have some concepts of "positive" elements, e.g., ample, base point-free, nef, etc.. Consider the cone spanned by positive elements in the lattice tensored with the field of real numbers. This cone gives us many informations on the given algebraic variety.

In this note, we are interested in the intersection pairing around a fixed singular point of a scheme, or the vertex of the affine cone of a smooth projective variety. Let R be a Noetherian (Cohen-Macaulay) local ring corresponding to the given point. We first define a pairing between a finitely generated module, and a module of finite length and finite projective dimension. Consider the Grothendieck group of finitely generated R-modules, and divide it by the numerical equivalence. Then, we get a finitely generated lattice. It is natural to think that Cohen-Macaulay modules are positive elements under the pairing. So, we study the cone spanned by Cohen-Macaulay modules in the numerical Grothendieck group tensored with $\mathbb{R}$.

We always assume that R is a d-dimensional Noetherian Cohen-Macaulay local domain such that one of the following conditions are satisfied[1]:

[1]If either (a) or (b) is satisfied, there exists a regular alteration of Spec R by de Jong's

(a) R is a homomorphic image of an excellent regular local ring containing $\mathbb{Q}$.

(b) R is essentially of finite type over a field, $\mathbb{Z}$ or a complete DVR.

In this note, modules are always assumed to be finitely generated.

2 Intersection pairing on $\operatorname{Spec} R$ and the Cohen-Macaulay cone

Let $G_0(R)$ be the Grothendieck group of finitely generated R-modules. The symbol $[M]$ means the element in $G_0(R)$ corresponding to an R-module M. Let C_R be the category of modules of finite length and finite projective dimension. Here, note that $R/(x_1, \ldots, x_d) \in C_R$ for a system of parameters $x_1, \ldots, x_d$. In particular, C_R is not empty.[2] For $L \in C_R$, we define

$$\chi_L : G_0(R) \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{by} \quad \chi_L([M]) = \textstyle\sum_i (-1)^i \ell_R(\operatorname{Tor}_i^R(L, M)).$$

Consider the map

$$C_R \times G_0(R) \to \mathbb{Z} \quad \text{defined by} \quad (L, [M]) \mapsto \chi_L([M]). \tag{1}$$

Here, we define *numerical equivalence* as follows. For $\alpha, \beta \in G_0(R)$,

$$\alpha \equiv \beta \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \chi_L(\alpha) = \chi_L(\beta) \ \text{ for any } \ L \in C_R.$$

Here, we put

$$\overline{G_0(R)} = G_0(R)/\{\alpha \in G_0(R) \mid \alpha \equiv 0\}.$$

By Theorem 3.1 and Remark 3.5 in [9], we have the following result.

Theorem 1 *$\overline{G_0(R)}$ is a finitely generated torsion-free abelian group.*

theorem [6].

[2] By the new intersection theorem due to Roberts, we know that, for a Noetherian local ring R, C_R is not empty if and only if R is Cohen-Macaulay.

Remark 2 MCM (Maximal Cohen-Macaulay) modules behave as "positive elements" under the pairing (1) by the following reason.

Let L be an object in C_R. Then, by Auslander-Buchsbaum formula, we have

$$\operatorname{depth} L + \operatorname{pd}_R L = \operatorname{depth} R = d.$$

Then, we have $\operatorname{pd}_R L = d$. Let $\mathbb{F}.$ be the minimal free resolution of L. Then, it is very easy to check that the complex $\mathbb{F}.$ has a depth sensitive property, i.e., for any module N, we have

$$\operatorname{depth} N = d - \max\{i \mid H_i(\mathbb{F}. \otimes_R N) \neq 0\}.$$

We say that M is a MCM module if $\operatorname{depth} M = d$. By the depth sensitivity, if M is MCM, then $\operatorname{Tor}_i^R(L, M) = 0$ for any $i > 0$. Therefore, we have

$$\chi_L([M]) = \ell_R(L \otimes_R M) > 0.$$

By Auslander-Buchsbaum formula, any MCM module over a regular local ring is free. We say that a ring R is of finite (Cohen-Macaulay) representation type if there are only finitely many isomorphism classes of indecomposable MCM's. If R is of finite representation type, then R has only isolated singularity. It was proved that a Gorenstein local ring of finite representation type has a simple singularity. Simple singularities are of finite representation type. We refere the reader to Yoshino [17] for the representation theory of MCM's.

Bad Cohen-Macaulay rings have many MCM's in general. But, if we do not assume that R is Cohen-Macaulay, it is not known whether there exists an MCM module. This open problem is called the small Mac conjecture [5].

Example 3

1. If $L = R/(x_1, \ldots, x_d)$ for a system of parameters $x_1, \ldots, x_d$, then $\chi_L([R]) \neq 0$. Hence, $\overline{G_0(R)} \neq 0$.

2. If $d \leq 2$, then $\operatorname{rank} \overline{G_0(R)} = 1$. See Proposition 3.7 in [9].

3. Let X be a smooth projective variety with embedding $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. Let R (resp. D) be the affine cone (resp. the very ample divisor) of this

embedding. Then, we have the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccc} G_0(R)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\sim} & A_*(R)_{\mathbb{Q}} & \xleftarrow{\sim} & CH^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}}/D\cdot CH^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \overline{G_0(R)}_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\sim} & \overline{A_*(R)}_{\mathbb{Q}} & \xleftarrow{\phi} & CH^{\cdot}_{num}(X)_{\mathbb{Q}}/D\cdot CH^{\cdot}_{num}(X)_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

(a) By the commutativity of this diagram, ϕ is a surjection. Therefore, we have

$$\operatorname{rank}\overline{G_0(R)} \le \dim_{\mathbb{Q}} CH^{\cdot}_{num}(X)_{\mathbb{Q}}/D\cdot CH^{\cdot}_{num}(X)_{\mathbb{Q}}. \qquad (2)$$

(b) If $CH^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}} \simeq CH^{\cdot}_{num}(X)_{\mathbb{Q}}$, then ϕ is an isomorphism ([9], [15]). In this case, the equality holds in (2).

(c) There exists an example such that ϕ is not an isomorphism [15].

Further, Roberts and Srinivas [15] proved the following: Assume that the standard conjecture and Bloch-Beilinson conjecture are true. Then ϕ is an isomorphism if the defining ideal of R is generated by polynomials with coefficients in the algebraic closure of the prime field.

4. It is conjectured that $\overline{G_0(R)}_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}$ if R is complete intersection isolated singularity with d even.

It is true if R is the affine cone of a smooth projective variety X over $\mathbb{C}$ ([2]). In fact, since we have an injection

$$CH^i_{hom}(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow H^{2i}(X,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

and the natural surjection

$$CH^i_{hom}(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow CH^i_{num}(X)_{\mathbb{Q}} \neq 0,$$

we know $CH^i_{num}(X)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ for each $i = 0, 1, \ldots, \dim X$. Here, remark that $H^{2i}(X,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ since the dimension of X is odd. Then, we have

$$CH^{\cdot}_{num}(X)_{\mathbb{Q}}/D\cdot CH^{\cdot}_{num}(X)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}.$$

Therefore, the rank of $\overline{G_0(R)}$ is one by 3 (a) as above.

Definition 4 *We define the Cohen-Macaulay cone as follows:*

$$C_{CM}(R) = \sum_{M:MCM} \mathbb{R}_{\geq 0}[M] \subset \overline{G_0(R)}_{\mathbb{R}}.$$

Here $\overline{G_0(R)}_{\mathbb{R}} = \overline{G_0(R)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

We refer the reader to [1] for basic properties on Cohen-Macaulay cones. It is easy to see that the dimension of the cone is equal to the rank of $\overline{G_0(R)}$. Further, we have

$$\overline{G_0(R)}_{\mathbb{R}} \supset C_{CM}(R)^- \supset C_{CM}(R) \supset Int(C_{CM}(R)^-) = Int(C_{CM}(R)) \ni [R],$$

where $C_{CM}(R)^-$ is the closure of $C_{CM}(R)$ with respect to the classical topology on $\overline{G_0(R)}_{\mathbb{R}}$, and $Int(-)$ is the interior.

If R is of finite representation type, then $C_{CM}(R)$ is a strongly convex polyhedral cone, in particular $C_{CM}(R)^- = C_{CM}(R)$.

We have no example that $C_{CM}(R)^-$ is not equal to $C_{CM}(R)$, or $C_{CM}(R)$ is not a polyhedral cone.

Remark that, for any $L \in C_R$, χ_L induces $\overline{\chi_L}$ which makes the following diagram commutative:

$$\begin{array}{ccc} G_0(R) & \xrightarrow{\chi_L} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & \nearrow \overline{\chi_L} & \\ \overline{G_0(R)} & & \end{array}$$

The map $\overline{\chi_L}$ induces

$$(\overline{\chi_L})_{\mathbb{R}} : \overline{G_0(R)}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Let $x_1, \ldots, x_d$ be a system of parameters. Consider the map

$$\overline{\chi_{R/(\underline{x})}} : \overline{G_0(R)} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Let $\mathbb{K}.$ be the Koszul complex with respect to $\underline{x}$. This map satisfies

$$\overline{\chi_{R/(\underline{x})}}([M]) = \operatorname{rank} M \cdot \overline{\chi_{R/(\underline{x})}}([R]),$$

since $\mathbb{K}.$ is the minimal free resolution of $R/(\underline{x})$ and $\mathbb{K}.$ admits this property. Therefore, we have a map

$$\operatorname{rk} : \overline{G_0(R)} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

and

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{R}} : \overline{G_0(R)}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

defined by $\mathrm{rk}([M]) = \mathrm{rank}\, M$. (Here, $\mathrm{rk} = \frac{1}{\overline{\chi_{R/(\underline{x})}}([R])}\overline{\chi_{R/(\underline{x})}}$.)

Let F be the kernel of the map rk. Then, F is generated by cycles $[M]$ with $\dim M < d$. Thus, we have

$$\overline{G_0(R)} = \mathbb{Z}[R] \oplus F \quad \text{and} \quad \overline{G_0(R)}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}[R] \oplus F_{\mathbb{R}}.$$

Example 5 1. Put $R = k[x, y, z, w]_{(x,y,z,w)}/(xy - zw)$, where k is a field. Then, $F = \mathbb{Z}[R/(x, z)] \simeq \mathbb{Z}$. This ring has only three indecomposable MCM modules, R, (x, z) and (x, w).

Then, the Cohen-Macaulay cone is spanned by

$$[(x, z)] = ([R], -[R/(x, z)]) \quad \text{and} \quad [(x, w)] = ([R], [R/(x, z)])$$

in $\overline{G_0(R)}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}[R] \oplus F_{\mathbb{R}}$.

2. Put $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_6]_{(x_1,x_2,\ldots,x_6)}/(x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6)$, where k is a field. Then, $F = \mathbb{Z}[R/(x_1, x_3, x_5)] \simeq \mathbb{Z}$. This ring has only three indecomposable MCM modules, R, M_1 and M_2, where M_1 and M_2 are MCM modules of rank 2.

Then, the Cohen-Macaulay cone is spanned by

$$[M_1] = (2[R], [R/(x_1, x_3, x_5)]) \quad \text{and} \quad [M_2] = (2[R], -[R/(x_1, x_3, x_5)])$$

in $\overline{G_0(R)}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}[R] \oplus F_{\mathbb{R}}$.

The Cohen-Macaulay cone of this ring is not spanned by classes of MCM modules of rank one.

3. Put $R = k[x, y, z, w]_{(x,y,z,w)}/(xy - f_1 f_2 \cdots f_t)$, where k is an algebraically closed field of characteristic zero. Here, we assume that $f_1, f_2, \ldots, f_t$ are pairwise coprime linear forms in $k[z, w]$. In this case, we have

$$F = (\oplus_i \mathbb{Z}[R/(x, f_i)]) \,/\mathbb{Z}([R/(x, f_1)] + \cdots + [R/(x, f_t)]) \simeq \mathbb{Z}^{t-1}.$$

We can prove that the Cohen-Macaulay cone is minimally spanned by the following $2^t - 2$ MCM's of rank one.

$$\{\{(x, f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_s}) \mid 1 \le s < t, \ \ 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_s \le t\}$$

This ring is of finite representation type if and only if $t \le 3$.

3 Maximal Cohen-Macaulay modules of rank one

Let R be a Noetherian standard graded normal domain such that R_0 is a field of characteristic zero. Assume that R has at most isolated singularity, and $[H^2_{R_+}(R)]_0 = 0$. Then, it is known that R has at most finitely many MCM modules of rank one. (Prof. Flenner kindly taught me this result.)

If R is a Noetherian local ring with at most isolated singularity. Assume that R is a complete intersection and $\dim R \geq 4$. Then, R is factorial. In particular, R is only one MCM modules of rank one.

Assume that R is a Noetherian local ring of dimension 2. Even if R is a hypersurface with at most isolated singularity, R may have infinitely many MCM modules of rank one. (For example, the affine cone of an elliptic curve actually has infinitely many MCM modules of rank one.)

So, it is important to consider the case of $\dim R = 3$. In this section (Theorem 9), we show that R has only finitely many MCM's of rank one if R is a 3-dimensional isolated hypersurface singularity with desingularization.

By the following result, we know that $C_{CM}(R)^-$ is a strongly convex cone, that is, $C_{CM}(R)^-$ does not contain a line through the origin.

Lemma 6 *Let R be a d-dimensional Cohen-Macaulay local domain which satisfies (a) or (b) in the introduction. Then, $(\mathrm{rk}_{\mathbb{R}})^{-1} \cap C_{CM}(R)^-$ is a compact set.*

Corollary 7 *Assume that R is a Cohen-Macaulay local domain. Then, for any positive integer r,*

$$\{[M] \in \overline{G_0(R)} \mid M \text{ is a MCM module of rank } r\ \}$$

is a finite subset of $\overline{G_0(R)}$.

Further, assume that R is a normal domain. Then, we have the *determinant map* (or the *first Chern class map*) $c_1 : G_0(R) \to A_{d-1}(R)$.

We can also define numerical equivalence on $A_{d-1}(R)$. Then, we define the class group modulo numerical equivalence to be

$$\overline{A_{d-1}(R)} = A_{d-1}(R)/\equiv .$$

By Proposition 3.7 and Example 4.1 in [9], we know that it is also a finitely generated torsion-free abelian group.

Here we can prove that there exists the map $\overline{c_1}$ which makes the following diagram commutative:

$$\begin{array}{ccc} G_0(R) & \xrightarrow{c_1} & A_{d-1}(R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{G_0(R)} & \xrightarrow{\overline{c_1}} & \overline{A_{d-1}(R)} \end{array}$$

By the commutativity of the above diagram, we have the following:

Corollary 8 *Let R be a d-dimensional Cohen-Macaulay local normal domain. Assume that*

(*) the kernel of the natural map $A_{d-1}(R) \longrightarrow \overline{A_{d-1}(R)}$ is a finite group.

Then, for any positive integer r,

$$\{c_1([M]) \in A_{d-1}(R) \mid M \text{ is a MCM module of rank } r\ \}$$

is a finite subset of $A_{d-1}(R)$.

In particular, R has only finitely many MCM modules of rank one up to isomorphism.

Theorem 9 (Dao-Kurano, [2]) *Let R be a 3-dimensional isolated hypersurface singularity with desingularization. Then, the natural map*

$$A_2(R) \longrightarrow \overline{A_2(R)}$$

is an isomorphism. In particular (*) in Corollary 8 is satisfied. Therefore R has only finitely many MCM's of rank one.

Remark 10 *Put $B = \oplus_{n\geq 0} B_n = \mathbb{C}[B_1] = \mathbb{C}[y_0, y_1, \ldots, y_n]/I$, $R = B_{B_+}$, and $X = \mathrm{Proj}(B)$. Assume that X is smooth over $\mathbb{C}$. (Since $\dim R = d$, $\dim X = d-1$.)*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{CH}^1(X) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^1(X)/c_1(\mathcal{O}_X(1))\mathrm{CH}^0(X) & = & A_{d-1}(R) \\ \downarrow & & \downarrow f & & \\ \mathrm{CH}^1_{\mathrm{num}}(X) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^1_{\mathrm{num}}(X)/c_1(\mathcal{O}_X(1))\mathrm{CH}^0_{\mathrm{num}}(X) & \xrightarrow{g} & \overline{A_{d-1}(R)} \end{array}$$

1. *Assume that R is a Cohen-Macaulay local normal ring with $d \geq 3$. Then,* $\mathrm{CH}^1(X)$ *is finitely generated and $f \otimes \mathbb{Q}$ is an isomorphism.*

2. *Assume that the ideal I is generated by some elements in $\overline{\mathbb{Q}}[y_0, y_1, \ldots, y_n]$. If some famous conjectures (the standard conjecture and Bloch-Beilinson conjecture) are true, then $g \otimes \mathbb{Q}$ is an isomorphism. (Roberts-Srinivas [15])*

Therefore, if R is a Cohen-Macaulay local normal ring with $d \geq 3$ such that X is defined over $\overline{\mathbb{Q}}$, and if some conjectures are true, then (*) is satisfied.

It is also proved in the case of positive characteristic.

If we remove the assumption that X is defined over $\overline{\mathbb{Q}}$, then there exists an example that $g \otimes \mathbb{Q}$ is not an isomorphism (Roberts-Srinivas [15]).

However, remark that if R is a standard graded Cohen-Macaulay normal graded domain over $\mathbb{C}$ with $\dim R \geq 3$. *Then, there exist only finitely many MCM modules of rank one.*

4 The fundamental class of a Noetherian local ring

We define the strictly nef cone $SN(R)$, and the fundamental class $\overline{\mu_R}$ for a Noetherian local domain R. They satisfy the following:

$$\begin{array}{ccccc} \overline{G_0(R)_{\mathbb{R}}} & \supset & SN(R) & \supset & C_{CM}(R) - \{0\} \\ \cup & & & & \\ \overline{G_0(R)_{\mathbb{Q}}} & \ni & \overline{\mu_R} & & \end{array}$$

The fundamental class is deeply related to the homological conjectures as in Fact 15.

We are mainly interested in the problem whether $\overline{\mu_R}$ is in such cones or not. Theorem 18 is the main result in this section, which states that if R is FFRT or F-rational, then $\overline{\mu_R}$ is in $C_{CM}(R)$. We shall give a corollary (Corollary 21).

Definition 11 We define the *strictly nef cone* by

$$SN(R) = \{\alpha \mid \ \chi_L(\alpha) > 0 \text{ for any } L \in C_R\}.$$

By the depth sensitivity, $\chi_L([M]) = \ell_R(H_0(L \otimes M)) > 0$ for any MCM module M $(\neq 0)$ and $L \in C_R$. Therefore,

$$SN(R) \supset C_{CM}(R) - \{0\}.$$

We can also define $SN(R)$ for non-Cohen-Macaulay local ring R using some perfect complexes instead of C_R.

Definition 12 We put

$$\mu_R = {\tau_R}^{-1}([\operatorname{Spec} R]) \in G_0(R)_{\mathbb{Q}},$$

where $\tau_R : G_0(R)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} A_*(R)_{\mathbb{Q}}$ is the singular Riemann-Roch map.

$$\begin{array}{ccc} G_0(R)_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & \overline{G_0(R)}_{\mathbb{Q}} \\ \mu_R & \mapsto & \overline{\mu_R} \end{array}$$

We call the image $\overline{\mu_R}$ in $\overline{G_0(R)}_{\mathbb{Q}}$ the *fundamental class* of R.

Remark that $\overline{\mu_R} \neq 0$ since $\operatorname{rank}_R \mu_R = 1$.

Put $R = T/I$, where T is a regular local ring. The map τ_R is defined using not only R but also T. Therefore, $\mu_R \in G_0(R)_{\mathbb{Q}}$ may depend on the choice of T.[3] However, we can prove that $\overline{\mu_R} \in \overline{G_0(R)}_{\mathbb{Q}}$ is independent of T (Theorem 5.1 in [9]).

We shall explain why we call $\overline{\mu_R}$ the fundamental class of R.

Remark 13 1. If $X = \operatorname{Spec} R$ is a d-dimensional affine variety over $\mathbb{C}$, we have the cycle map cl

$$\begin{array}{ccccc} G_0(R)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\tau_R} & A_*(R)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{cl} & H_*(X, \mathbb{Q}) \\ \mu_R & \mapsto & [\operatorname{Spec} R] & \mapsto & \mu_X \end{array}$$

such that $cl([\operatorname{Spec} R])$ is the fundamental class μ_X in $H_{2d}(X, \mathbb{Q})$ in the usual sense, where $H_*(X, \mathbb{Q})$ is the Borel-Moore homology. Here μ_X is the generator of $H_{2d}(X, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}$.

Hence, we call $\overline{\mu_R}$ the fundamental class of R.

[3] There is no example that the map τ_R actually depend on the choice of T. For some excellent rings, it had been proved that τ_R is independent of the choice of T (Proposition 1.2 in [8]).

2. Let R have a subring S such that S is a regular local ring and R is a localization of a finite extension of S. Let L be a finite-dimensional normal extension of $Q(S)$ containing $Q(R)$. Let B be the integral closure of R in L. Then, we have

$$\mu_R = \tfrac{1}{\operatorname{rank}_R B}[B] \text{ in } G_0(R)_{\mathbb{Q}}.$$

In particular, $\overline{\mu_R} = \frac{[B]}{\operatorname{rank}_R B}$ in $\overline{G_0(R)}_{\mathbb{Q}}$.

3. Assume that R is of characteristic $p > 0$ and F-finite. Assume that the residue class field is algebraically closed. By the singular Riemann-Roch theorem, we have

$$\overline{\mu_R} = \lim_{e \to \infty} \frac{[{}^e R]}{p^{de}} \text{ in } \overline{G_0(R)}_{\mathbb{R}},$$

where ${}^e R$ is the eth Frobenius direct image.

Example 14 1. If R is a complete intersection, then μ_R is equal to $[R]$ in $G_0(R)_{\mathbb{Q}}$, therefore $\overline{\mu_R} = [R]$ in $\overline{G_0(R)}_{\mathbb{Q}}$. There exists a Gorenstein ring such that $\overline{\mu_R} \neq [R]$. However there exist many examples of rings satisfying $\overline{\mu_R} = [R]$. Roberts ([12], [13]) proved the vanishing property of intersection multiplicity for rings satisfying $\overline{\mu_R} = [R]$.

2. Let R be a normal domain. Then, we have

$$\begin{array}{ccl} G_0(R)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\tau_R} & A_*(R)_{\mathbb{Q}} = A_d(R)_{\mathbb{Q}} \oplus A_{d-1}(R)_{\mathbb{Q}} \oplus \cdots \\ [R] & \mapsto & [\operatorname{Spec} R] - \frac{K_R}{2} + \cdots \\ [\omega_R] & \mapsto & [\operatorname{Spec} R] + \frac{K_R}{2} + \cdots \end{array}$$

If $\tau_R^{-1}(K_R) \neq 0$ in $\overline{G_0(R)}_{\mathbb{Q}}$, then $[R] \neq \overline{\mu_R}$.

Sometimes $\overline{\mu_R} = \frac{1}{2}([R] + [\omega_R])$ is satisfied. But it is not true in general.

3. Let $R = k[x_{ij}]/I_2(x_{ij})$, where (x_{ij}) is the generic $(m+1) \times (n+1)$-matrix, and k is a field. Suppose $0 < m \leq n$.

Then, we have

$$\begin{array}{rcl} G_0(R)_{\mathbb{Q}} \simeq \overline{G_0(R)_{\mathbb{Q}}} & \simeq & \mathbb{Q}[a]/(a^{m+1}) \\ {[R]} & \mapsto & \left(\frac{a}{1-e^{-a}}\right)^m \left(\frac{-a}{1-e^{a}}\right)^n \\ & & = 1 + \frac{1}{2}(m-n)a + \frac{1}{24}(\cdots)a^2 + \cdots \\ {[\omega_R]} & \mapsto & \left(\frac{-a}{1-e^{a}}\right)^m \left(\frac{a}{1-e^{-a}}\right)^n \\ \overline{\mu_R} & \mapsto & 1 \\ \tau_R^{-1}(K_R) & \mapsto & (n-m)a \end{array}$$

Here, we shall explain the relationship between the fundamental class $\overline{\mu_R}$ and homological conjectures.

Fact 15 1. The small Mac conjecture is true if and only if $\overline{\mu_R} \in C_{CM}(R)$ for any R.

Even if R is an equi-characteristic Gorenstein ring, it is not known whether $\overline{\mu_R}$ is in $C_{CM}(R)$ or not. If R is a complete intersection, then $\overline{\mu_R} = [R] \in C_{CM}(R)$ as in 1) in Example 14.

2. If $\overline{\mu_R} = [R]$ in $\overline{G_0(R)_{\mathbb{Q}}}$, then the vanishing property of intersection multiplicity holds (Roberts [12], [13]).

3. Roberts [14] proved $\overline{\mu_R} \in SN(R)$ if $ch(R) = p > 0$. Using it, he proved the new intersection theorem in the mixed characteristic case.

4. $\overline{\mu_R} \in SN(R)$ if R contains a field (Kurano-Roberts [11]). *Even if R is a Gorenstein ring (of mixed characteristic), we do not know whether $\overline{\mu_R} \in SN(R)$ or not.*

5. If $\overline{\mu_R} \in SN(R)$ for any R, then Serre's positivity conjecture is true in the case where one of two modules is (not necessary maximal) Cohen-Macaulay.

If $\overline{\mu_R} \in C_{CM}(R)$ for any R, then small Mac conjecture is true, and so Serre conjecture is true in the case.

Remark 16 1. If R is Cohen-Macaulay of characteristic $p > 0$, then ${}^eR$ is a MCM module. Since $\overline{\mu_R}$ is the limit of $[{}^eR]/p^{de}$ in $\overline{G_0(R)_{\mathbb{R}}}$, $\overline{\mu_R}$ is contained in $C_{CM}(R)^-$. *In the case where R is not of characteristic*

$p > 0$, we do not know whether $\overline{\mu_R}$ is contained in $C_{CM}(R)^-$ even if R is Gorenstein.

2. As we have already seen, if R is Cohen-Macaulay, then $[R] \in Int(C_{CM}(R)) \subset C_{CM}(R)$.

   There is an example of non-Cohen-Macaulay ring R such that $[R] \notin SN(R)$.[4] On the other hand, it is expected that $\overline{\mu_R} \in SN(R)$ for any R. Therefore, for the non-Cohen-Macaulay local ring R, $\overline{\mu_R}$ behaves better than $[R]$ in a sence.

The fundamental class $\overline{\mu_R}$ is deeply related to homological conjectures. Therefore, we propose the following question.

Question 17 Assume that R is a "good" Cohen-Macaulay local domain (for example, equi-characteristic, Gorenstein, etc). Is $\overline{\mu_R}$ in $C_{CM}(R)$?

We can prove the following:

Theorem 18 (Kurano-Ohta [10]) *Assume that R is an F-finite Cohen-Macaulay local domain of characteristic $p > 0$ with residue class field algebraically closed.*

1. *If R is FFRT, then $\overline{\mu_R}$ is contained in $C_{CM}(R)$.*
2. *If R is F-rational, then $\overline{\mu_R}$ is contained in $Int(C_{CM}(R))$.*

The most important point in this proof is to use the dual F-signature defined by Sannai [16].

Remark 19 If the rank of $\overline{G_0(R)}$ is one for a Cohen-Macaulay local domain R, then $\overline{\mu_R} \in C_{CM}(R)$.

If R is a toric ring (a normal semi-group ring over a field k), then we can prove $\overline{\mu_R} \in C_{CM}(R)$ as in the case of FFRT without assuming that $ch(k)$ is positive.

[4] It was conjectured that $[R] \in SN(R)$.

Problem 20 1. As in the above proof, if there exists a MCM module in $Int(C_{CM}(R))$ such that its generalized F-signature or its dual F-signature is positive, then $\overline{\mu_R}$ is in $Int(C_{CM}(R)^-)$.

Without assuming that R is F-rational, do there exist such a MCM module?

2. How do we make mod p reduction? (the case of rational singularity)

3. If R is Cohen-Macaulay, is $\overline{\mu_R}$ in $C_{CM}(R)^-$? If R is a Cohen-Macaulay ring containing a field of positive characteristic, then $\overline{\mu_R}$ in $C_{CM}(R)^-$ as in 1) in Remark 16.

4. If R is of finite representation type, is $\overline{\mu_R}$ in $C_{CM}(R)$?

5. Find more examples of $C_{CM}(R)$ and $SN(R)$.

In order to prove the following corollary, we use the fact $\overline{\mu_R} \in Int(C_{CM}(R))$ for some F-rational ring R.

Corollary 21 (Chan-Kurano [1]) *Let d be a positive integer and p a prime number. Let ϵ_0, ϵ_1, ..., ϵ_d be integers such that*

$$\epsilon_i = \begin{cases} 1 & i = d, \\ -1,\ 0 \ \mathit{or}\ 1 & d/2 < i < d, \\ 0 & i \le d/2. \end{cases}$$

Then, there exists a d-dimensional Cohen-Macaulay local ring R of characteristic p, a maximal primary ideal I of R of finite projective dimension, and positive rational numbers α, β_{d-1}, β_{d-2}, ..., β_0 such that

$$\ell_R(R/I^{[p^n]}) = \epsilon_d \alpha p^{dn} + \sum_{i=0}^{d-1} \epsilon_i \beta_i p^{in}$$

for any $n > 0$.

References

[1] C-Y. J. Chan and K. Kurano, *The cone spanned by maximal Cohen-Macaulay modules and an application*, arXiv 12114016.

[2] H. Dao and K. Kurano, *The Hochster's theta pairing and numerical equivalence*, arXiv 12086083.

[3] H. Dao and K. Kurano, *Boundary of a Cohen-Macaulay cone*, in preparation.

[4] W. Fulton, *Intersection Theory,* second edition, Springer, Berlin (1998).

[5] M. Hochster, *Topics in the homological theory of modules over local rings*, C. B. M. S. Regional Conference Series in Math., **24**. Amer. Math. Soc. Providence, R. I., 1975.

[6] A. J. de Jong, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Publ. Math. IHES **83** (1996), 51–93.

[7] N. Karroum, MCM-einfache Moduln, unpublished.

[8] K. Kurano, *On Roberts rings*, J. Math. Soc. Japan **53** (2001), 333–355.

[9] K. Kurano, *Numerical equivalence defined on Chow groups of Noetherian local rings*, Invent. Math., **157** (2004), 575–619.

[10] K. Kurano and K. Ohta, *On the limit of Frobenius in the Grothendieck group*, to appear in Acta Math. Vietnam.

[11] K. Kurano and P. C. Roberts, *Adams operations, localized Chern characters, and the positivity of Dutta multiplicity in characteristic 0*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 3103–3116.

[12] P. Roberts, *The vanishing of intersection multiplicities and perfect complexes*, Bull. Amer. Math. Soc. **13** (1985), 127–130.

[13] P. Roberts, *Local Chern characters and intersection multiplicities*, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985, 389–400, Proc. Sympos. Math. **46**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[14] P. Roberts, *Intersection theorems*, Commutative algebra, 417–436, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **15**, Springer, New York, Berlin, 1989.

[15] P. C. Roberts and V. Srinivas, *Modules of finite length and finite projective dimension*, Invent. Math., **151** (2003), 1–27

[16] A. Sannai, *Dual F-signature*, to appear in International Mathematical Research Notices.

[17] Y. Yoshino, "Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings", Lon. Math. Soc. Lect. Note 146, Cambridge University Press 1992.

Kazuhiko Kurano
Department of Mathematics, School of Science and Technology,
Meiji University,
Higashimita 1-1-1, Tama-ku, Kawasaki 214-8571, Japan,
`kurano@isc.meiji.ac.jp`
`http://www.isc.meiji.ac.jp/~kurano`

VECTOR BUNDLES ON ALGEBRAIC SURFACES

KŌTA YOSHIOKA

Contents

0. Introduction

In this survey, we shall explain some properties of moduli spaces of stable sheaves on smooth projective surfaces. We first explain classical results on the moduli spaces briefly. Then we explain recent development in detail. Thus we shall explain geometry associated to the derived category of coherent sheaves, which was started by Mukai and developed by Orlov, Bridgeland and other people. For other aspects of derived category of coherent sheaves, we recommend excellent articles [20], [38].

Due to lack of the author's ability and also enough time to write, this article is not written well. Moreover there will be many misunderstanding on the results in particular references. So if you are interested in these topic, it is better to check the detail as students do before seminar.

0.1. **Stability.** Let X be a smooth projective surface over $\mathbb{C}$. For a coherent sheaf E on X, $v(E)$ denotes a topological invariant of E. Typical topological invariants are

(i) the Chern character $v(E) = \mathrm{ch}(E) \in H^{2*}(X, \mathbb{Q})$,

2010 *Mathematics Subject Classification.* 14D20.
The author is supported by the Grant-in-aid for Scientific Research (No. 26287007), JSPS.

(ii) Mukai vector $v(E) = \mathrm{ch}(E)\sqrt{\mathrm{td}_X} \in H^{2*}(X, \mathbb{Q})$, if K_X is numerically trivial.
(iii) the class in the numerical Grothendieck group

$$K(X)_{\mathrm{num}} = K(X)/\ker(\mathrm{ch}),$$

where $\mathrm{ch} : K(X) \to H^{2*}(X, \mathbb{Q})$ is the Chern character map or
(iv) $v(E) = (\mathrm{rk}\, E, c_1(E), \chi(E)) \in \mathbb{Z} \oplus \mathrm{NS}(X) \oplus \mathbb{Z}$.

Definition 0.1. Let H be an ample divisor on X and $\beta \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{Q}}$. A coherent sheaf E is *β-twisted semi-stable* if E is torsion free and

$$\frac{\chi(F(-\beta + nH))}{\mathrm{rk}\, F} \leq \frac{\chi(E(-\beta + nH))}{\mathrm{rk}\, E} \ (n \gg 0) \tag{0.1}$$

for all non-trivial subsheaf F of E. If $\beta = 0$, then β-semi-stability is nothing but the semi-stability of Gieseker.

Remark 0.2. Roughly speaking, torsion freeness means locally free except finitely many points of X, since X is smooth of dimension 2. Although we are mainly interested in locally free sheaves, in order to get a compact moduli space, we need to add torsion free sheaves in the boundary.

Theorem 0.3 (Gieseker [16], Matsuki-Wentworth [27])**.** *There is a coarse moduli scheme $M_H^\beta(v)$ of β-twisted semi-stable sheaves with topological invariant v. It is a projective scheme.*

If $\beta = 0$, then we denote the moduli space by $M_H(v)$. If H is general in $\mathrm{Amp}(X)$, then $M_H^\beta(v)$ is independent of the choice of β, and hence $M_H^\beta(v) = M_H(v)$. β-twisted semi-stability is a generalization of a more restrictive notion *slope stability*, which is defined by looking the coefficient of n in (0.1). The famous Kobayashi-Hitchin correspondence connects the algebro-geometric notion with the differential geometric notion:

(0.2) slope stable vector bundles $\Leftrightarrow$ irreducible Hermite-Einstein connections.

For smooth 4-manifolds, Donaldson constructed a very powerful invariant called *Donaldson invariant* by using the moduli of Hermite-Einstein connections. Then the Kobayashi-Hitchin correspondence says that the computations of Donaldson invariants of Kähler surfaces can be reduced to study $M_H(v)$. By this reason, the structure of $M_H(v)$ was extensively studied until a more useful invariant called *Seiberg-Witten invariant* appeared in 1995.

0.2. **Classical results.** We first pick up some general results on the structure of $M_H(v)$ which were obtained until 1995. There are many examples of smooth and irreducible moduli spaces if X is not of general type. However $M_H(v)$ is singular in general, and may be non-reduced and reducible. On the other hand, if $c_2 \gg 0$, then the singular locus of $M_H(v)$ is higher codimension, $M_H(v)$ is irreducible and locally complete intersection [34], [17]. In particular, $M_H(v)$ is a normal variety. If the geometric genus p_g is positive, then Jun Li [Li] and O'Grady proved that $M_H(v)$ is of general type under mild conditions. In order to prove the claim, a section of $H^0(X, K_X)$ is used to construct many canonical sections on a resolution of $M_H(v)$. Hence the proof does not work if $p_g = 0$. Indeed there is no general results of the moduli spaces for the case $p_g = 0$, as far as I know.

Problem 0.4. *Study $M_H(v)$ for a surface of general type with $p_g = 0$.*

For special surfaces such as $\mathbb{P}^2$, $K3$ surfaces, abelian surfaces, or elliptic surfaces, there are many works on the structure of $M_H(v)$. They were started in early 80's and continued after 1995. For these cases, there are many examples of smooth or normal moduli spaces, and we can expect beautiful properties of the moduli spaces. As examples, we pick (1) Drezet and Le Potier's result for $\mathbb{P}^2$ [15] and (2) Mukai's fundamental results for abelian and $K3$ surfaces [31],[32]. (1) In [15], they described the condition for the existence of stable sheaves. Although they only treated the case of a projective plane, their method[1] are powerful enough to be applied to other surfaces. We mention in section 2.6 recent developement on their work. For Mukai's works and related results, we shall explain them in next paragraph. For other results, I would like to recommend to see Huybrechts and Lehn's book and its references [21].

Assume that X is an abelian surface or a $K3$ surface. Then we usually use Mukai vector $v(E) \in H^{2*}(X, \mathbb{Z})_{\text{alg}} = \mathbb{Z} \oplus \operatorname{NS}(X) \oplus \mathbb{Z}\varrho_X$, where ϱ_X is the fundamental class of X. We have an integral bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ on $H^{2*}(X, \mathbb{Z})_{\text{alg}}$:

$$\langle (x_0, x_1, x_2), (x_0', x_1', x_2') \rangle = (x_1, x_1') - x_0 x_2 - x_2 x_0' \in \mathbb{Z}. \tag{0.3}$$

If $v = (r, \xi, a)$ is primitive, i.e., $\gcd(r, \xi, a) = 1$ and H is a general ample divisor, then Mukai showed $M_H(v)$ is a holomorphic symplectic manifold of dimension $\langle v^2 \rangle + 2$. Moreover the deformation class of $M_H(v)$ is determined by $\langle v^2 \rangle$ [42]. The main idea to determine the deformation class is to use the symmetry of X. For abelian surfaces and $K3$ surfaces, we have big symmetries to determine the deformation classes. More concretely, we use the following symmetry:

- (i) Deformation of the pair (X, H): For a polarized deformation of X, we have a monodromy representation on $H^2(X, \mathbb{Z})$. By this action, we can change ξ.
- (ii) Equivalences of the derived category (Fourier-Mukai transforms): By these actions, we can change r.

Let us explain (ii) more. A non-trivial example of equivalences $\Phi : \mathbf{D}(X) \to \mathbf{D}(X')$ of derived categories was first constructed by Mukai for abelian varieties [30]. Later similar equivalences were constructed for other varieties, e.g., a $K3$ surface [36], [10]. Here non-trivial implies the category of coherent sheaves are not preserved under Φ and the rank of objects change. Although these kind of equivalences are quite useful, technically it is not so easy to deal with: Indeed we need to find deformations (X', H') of (X, H) and Fourier-Mukai transforms $\Phi : \mathbf{D}(X') \to \mathbf{D}(X'')$ which induce isomorphisms $M_{H'}(v') \cong M_{H''}(v'')$. This can be achieved by solving some indeterminate equations on Mukai vectors. It was elementary but not interesting, since there was no systematic treatment, and which may make the topic of stable sheaves on surfaces unattractive.

0.3. **Recent development.** A method to improve the situation is to appreciate the symmetries of the derived category and apply them to classical problems. For this purpose, we may need to consider complexes and their moduli spaces.

[1] The author imagines that they were influenced by the work of Atiyah and Bott [3], and Harder and Narasimhan to compute the Betti numbers of the moduli spaces on curves.

However derived categories of coherent sheaves themselves are too big to control, it is desirable to introduce good subcategories which is easier to control and capture rich geometric and algebraic structures. Bridgeland's theory of stability conditions is very suitable for this purpose. Before explaining Bridgeland's stability conditions and their applications, let us start with related results before Bridgeland's theory of stability conditions appeared.

First of all, we note that Beilinson constructed a derived equivalence

$$\mathbf{D}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbf{D}(A), \tag{0.4}$$

where A is a non-commutative algebra and $\mathbf{D}(A)$ is the derived category of A-modules. In the theory of vector bundles, it is famous as Beilinson's spectral sequence, which was a very useful tool to study vector bundles on projective spaces. As we mention in section 2.6, instead of Beilinson's spectral sequence, the equivalence (0.4) itself plays important roles recently.

Similar equivalences are also found for some rational varieties by Russian mathematicians. Moreover many interesting results on the derived categories were proved. For the relation with this survey, Bondal and Orlov's contributions ([8],[9]) are noteworthy. They proved that the underlying manifold X can be recovered from $\mathbf{D}(X)$ if K_X or $-K_X$ is ample. They also studied the relation of 3-fold flops with the derived categories, and conjectured that 3 fold flops preserves the derived categories. Bridgeland [11] solved this conjecture by using the geometry of derived categories. Thus he constructed 3 fold flops as moduli spaces of some objects in $\mathbf{D}(X)$ and used the technique of Fourier-Mukai transforms which was developped mainly by Bridgeland. Since this work is the first well-known application of moduli problem of objects in $\mathbf{D}(X)$, we shall explain the construction in detail. Derived category of coherent sheaves also appears in Homological mirror symmetry, which also influenced recent development.

1. Construction of 3 fold flops

1.1. **Idea of the construcion.** Let us explain the idea of Bridgeland construction of 3 fold flops. Let $\varphi : X \to Z$ be a flopping contraction of a smooth 3-fold. Let X' be a moduli space of stable 0-dimensional sheaves E with $v(E) = v(\mathbb{C}_x)$ $(x \in X)$. Then $E \cong \mathbb{C}_x$ for some $x \in X$, and we get $X' \cong X$. By perturbing the stability condition, we would like to get a different moduli space giving the flop of X. For simplicity, we first assume that φ is a contraction of $(-1,-1)$-curve, that is, a contraction of a smooth rational curve C with the normal bundle $\mathcal{O}_C(-1)^{\oplus 2}$. Since $\mathbb{C}_x$ is an irreducible object of $\mathrm{Coh}(X)$, there is no choice to modify the stability. For $x \in C$, we have an exact sequence in $\mathrm{Coh}(X)$.

$$0 \to \mathcal{O}_C(-1) \to \mathcal{O}_C \to \mathbb{C}_x \to 0 \tag{1.1}$$

In the derived category, it can be understand as an exact triangle

$$0 \to \mathcal{O}_C \to \mathbb{C}_x \to \mathcal{O}_C(-1)[1] \to \mathcal{O}_C[1] \tag{1.2}$$

If there is an abelian category $\mathcal{C}$ such that $\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C(-1)[1] \in \mathcal{C}$, then we may have a stability condition such that $\mathbb{C}_x$ is not stable. Bridgeland introduced a modification of $\mathrm{Coh}(X)$ called a *category of perverse coherent sheaves*, and constructed the flop as a moduli space of stable perverse coherent sheaves. As the name indicates, this notion is influenced by Beilinson, Bernstein and Deligne's article [7]. In their paper, they introduced the notion of *t-structure*, which has been useful in representation theory and the theory of non-commutative algebra. By this work of Bridgeland, the importance of t-structure may be noticed by general algebraic geometer.

In the remaining of this section, let us explain a more detail of the construction of the flop. So it is possible to skip to the next section.

1.2. **Perverse coherent sheaves.** Let $\varphi : X \to Z$ be a flopping contraction of a smooth 3-fold X. Then we have

$$\mathbf{R}\varphi_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Z, \quad \dim \varphi^{-1}(z) \le 1 \text{ for any } z \in Z.$$

For simplicity, we assume that there is one singular point p of Z. Let $C_1, ..., C_n$ be the irreducible components of the exceptional locus $\varphi^{-1}(p)$. C_i are smooth rational curves. We set

$$\begin{aligned} T :=& \{E \in \mathrm{Coh}(X) \mid \mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_{C_i}(-1)) = 0\}, \\ F :=& \{E \in \mathrm{Coh}(X) \mid \ E \text{ is generated by } \mathcal{O}_{C_i}(a_i),\ a_i \le -1\}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Then (T, F) is a torsion pair of $\mathrm{Coh}(X)$, that is, there is a unique exact sequence

$$0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0 \tag{1.4}$$

such that $E_1 \in T$ and $E_2 \in F$ for any $E \in \mathrm{Coh}(X)$. Let ${}^{-1}\mathrm{Per}(X/Z)$ be the tilting: For $E \in {}^{-1}\mathrm{Per}(X/Z)$,

$${}^{-1}\mathrm{Per}(X/Z) = \langle T, F[1] \rangle = \left\{ E \in \mathbf{D}(X) \,\middle|\, \begin{array}{c} H^i(E) = 0, i \ne -1, 0, \\ H^{-1}(E) \in F, H^0(E) \in T \end{array} \right\}. \tag{1.5}$$

Thus we have an exact sequence in ${}^{-1}\mathrm{Per}(X/Z)$:

$$0 \to H^{-1}(E)[1] \to E \to H^0(E) \to 0. \tag{1.6}$$

There is a locally free sheaf G such that $\mathbf{R}\varphi_*(G^\vee \otimes E) \in \mathrm{Coh}(Z)$ for $E \in {}^{-1}\mathrm{Per}(X/Z)$ and $\mathbf{R}\varphi_*(G^\vee \otimes E) = 0$ if and only if $E = 0$. G is called a *local projective generator* of ${}^{-1}\mathrm{Per}(X/Z)$ and $\mathbf{R}\varphi_*(G^\vee \otimes \bullet)$ induces a Morita equivalence [39]

$${}^{-1}\mathrm{Per}(X/Z) \to \mathrm{Coh}_{\mathcal{A}}(Z), \tag{1.7}$$

where $\mathcal{A} = \varphi_*(G^\vee \otimes G)$ is a sheaf of $\mathcal{O}_Z$-algebras. Then we define the dimension of $E \in {}^{-1}\mathrm{Per}(X/Z)$ by the dimension of $\mathbf{R}\varphi_*(G^\vee \otimes E)$. X' is constructed as a moduli space of $\mathcal{A}$-modules on Z.

We choose a divisor D on X. For 0-dimensional objects of ${}^{-1}\mathrm{Per}(X/Z)$, we have a notion of stability.

Definition 1.1. A 0-dimensional object E is D-semi-stable, if

$$\frac{\chi(G, E_1(-D))}{\chi(G, E_1)} \le \frac{\chi(G, E(-D))}{\chi(G, E)} \tag{1.8}$$

for all subobject E_1 of E.

Then there is a moduli space $M^D(v)$ of D-twisted semi-stable objects E of ${}^{-1}\mathrm{Per}(X/Z)$, where v is the Chern character of E [43, Prop. 1.5.4] (the assumption of $\dim X$ in [43, Prop. 1.5.4] is not needed).

We note that $\chi(G, E(-D)) = \chi(G,E) - (\mathrm{ch}_2(E), D)$. Hence (1.8) is equivalent to

$$\frac{-(\mathrm{ch}_2, D)}{\chi(G, E_1)} \le \frac{-(\mathrm{ch}_2(E), D)}{\chi(G,E)}. \tag{1.9}$$

Let $\varrho_X \in H^3(X)$ be the fundamental class of X. Then $\varrho_X = v(\mathbb{C}_x)$. For $v(E) = \varrho_X$, (1.9) implies E is D-semi-stable iff $(\mathrm{ch}_2(F), D) \ge 0$ for all subobject F of E.

From now on, we assume that $-D$ is φ-ample. Then

Lemma 1.2. *$\mathbb{C}_x$ is not D-twisted semi-stable for $x \in \varphi^{-1}(p)$.*

Proof. We have an exact sequence in $\mathrm{Coh}(X)$

$$0 \to c \to \varphi^*(\varphi_*(\mathbb{C}_x)) \to \mathbb{C}_x \to 0, \tag{1.10}$$

where $\mathbf{R}\varphi_*(c) = 0$. We note that $\varphi^*(\varphi_*(\mathbb{C}_x)) = \mathcal{O}_{\varphi^{-1}(p)}$ and c is generated by $\mathcal{O}_{C_i}(-1)$. Since $\mathrm{ch}_2(\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(p)}) = -\varphi^{-1}(p)$ and $\mathrm{ch}_2(\mathcal{O}_{C_i}) = -C_i$,

$$(\mathrm{ch}_2(\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(p)}), D) > 0, \ \ (\mathrm{ch}_2(\mathcal{O}_{C_i}[1]), D) < 0 \tag{1.11}$$

for all i. Hence the claim holds. □

In the paper [11], Bridgeland constructed the moduli space of perverse coherent subsheaves I of $\mathcal{O}_X$ with $v(\mathcal{O}_X/I) = v(\mathbb{C}_x)$. As we shall see below, these two moduli spaces are the same.

Lemma 1.3. *Let E be a perverse coherent sheaf with $v(E) = v(\mathbb{C}_x)$. E is D-semi-stable if and only if there is a surjective morphism $f : \mathcal{O}_X \to E$.*

Proof. Assume that E is a quotient of $\mathcal{O}_X$. Let I be the kernel. Since

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{C_i}(-1)[1]) = \mathrm{Hom}(I, \mathcal{O}_{C_i}(-1)) = 0,$$

E satisfies $\mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_{C_i}(-1)[1]) = 0$. Hence if $v(E) = v(\mathbb{C}_x)$, then it is D-twisted stable.

Conversely for a D-stable object E with $v(E) = v(\mathbb{C}_x)$, $\chi(E) = 1$ implies there is a morphism $f : \mathcal{O}_X \to E$. Since $\mathcal{O}_{C_i}[1]$ and $\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(p)}$ are the irreducible objects supported on $\varphi^{-1}(p)$, we have

$$\begin{aligned} \operatorname{im} f &= \sum_i n_i \mathcal{O}_{C_i}[1] + n\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(p)}, \ (n_i, n \ge 0) \\ \operatorname{coker} f &= \sum_i m_i \mathcal{O}_{C_i}[1] + m\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(p)}, \ (m_i, m \ge 0). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Since $1 = \chi(E) = \chi(\operatorname{im} f) + \chi(\operatorname{coker} f)$, we get $(n,m) = (1,0)$ or $(0,1)$. Since $\mathrm{Hom}(\operatorname{im} f, \mathcal{O}_{C_i}(-1)[1]) = 0$ for all i, $(n,m) = (1,0)$. By the D-stability of E, $\operatorname{coker} f$ must be zero. Thus f is surjective. □

We set $X' := M^D(\varrho_X)$.

Remark 1.4. There is a universal family $\mathcal{E}$ on $X' \times X$. Since $L := p_{X'*}(\mathcal{E})$ is a line bundle on X', replacing $\mathcal{E}$ by $\mathcal{E} \otimes p_{X'}^*(L^\vee)$, we have a surjective morphism $\mathcal{O}_{X' \times X} \to \mathcal{E}$ in ${}^{-1}\mathrm{Per}(X' \times X/X' \times Z)$. Thus $\mathcal{E}$ is a quotient of $\mathcal{O}_{X' \times X}$.

Since $\pi_*(E)$ ($E \in X'$) is a structure sheaf of a point of Z, we have the following diagram:

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\
& Z &
\end{tikzcd}
\tag{1.13}
$$

Then Bridgeland proved that the universal family $\mathcal{E}$ induces an equivalence $\mathbf{D}(X) \cong \mathbf{D}(X')$ and also proved that $X' \to Z$ is the flop of $X \to Z$.

2. Bridgeland's stability condition

2.1. **Definition of stability condition.** Bridgeland introduced a notion of stability for objects of $\mathbf{D}(X)$. Moreover he showed that the space $\mathrm{Stab}(X)$ of stability conditions has a structure of a complex manifold. In this section, we shall briefly explain stability condition ([12], [13]). We start with the definition.

Definition 2.1. A *stability condition* $\sigma = (Z_\sigma, \mathcal{P}_\sigma)$ on $\mathbf{D}(X)$ consists of a group homomorphism $Z_\sigma : K(X) \to \mathbb{C}$ and full additive subcategories $\mathcal{P}_\sigma(\phi) \subset \mathbf{D}(X)$ for all $\phi \in \mathbb{R}$ satisfying the following conditions:

(i) For $E \in \mathcal{P}_\sigma(\phi) \setminus \{0\}$, we have

$$Z_\sigma(E) = m(E)e^{\pi\sqrt{-1}\phi} \tag{2.1}$$

with some $m(E) \in \mathbb{R}_{>0}$.

(ii) $\mathcal{P}_\sigma(\phi + 1) = \mathcal{P}_\sigma(\phi)[1]$ for all $\phi \in \mathbb{R}$.

(iii) If $\phi_1 > \phi_2$ and $E_i \in \mathcal{P}_\sigma(\phi_i)$ $(i = 1, 2)$, then $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(X)}(E_1, E_2) = 0$.

(iv) For any $E \in \mathbf{D}(X) \setminus \{0\}$. we have the following collection of triangles

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[rr] \arrow[dl] & & E_2 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots E_{n-1} \arrow[rr] & & E_n = E \arrow[dl] \\
& A_1 \arrow[ul, "{[1]}"] & & A_2 \arrow[ul, "{[1]}"] & & & A_n \arrow[ul, "{[1]}"] &
\end{tikzcd}
$$

such that $A_i \in \mathcal{P}_\sigma(\phi_i)$ with $\phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_n$.

A non-zero object $E \in \mathcal{P}_\sigma(\phi)$ is called *σ-semi-stable* of phase ϕ.

Definition 2.2. $\tilde{M}_\sigma(v)$ denotes the moduli space of σ-semi-stable objects E with $v(E) = v$ in a suitable sense (e.g. a scheme, an algebraic space or a stack). Since the phase is not determined by v, shift functor [2] acts on $\tilde{M}_\sigma(v)$. We denote the quotient by $M_\sigma(v)$.

We explain another formulation of the stability condition, which resemble Gieseker semi-stability: For a stability condition σ, let $\mathcal{A}_\sigma := \mathcal{P}_\sigma(0, 1]$ denotes the extension closed full subcategory of $\mathbf{D}(X)$ generated by $E \in \mathcal{P}_\sigma(\phi)$ with $\phi \in (0, 1]$. Then $\mathcal{A}_\sigma$ is an abelian category and the phase $\phi(E) \in (0, 1]$ is defined for a non-zero object $E \in \mathcal{A}_\sigma$ by (2.1). Moreover $E \in \mathcal{A}_\sigma$ is σ-semi-stable iff $\phi(F) \le \phi(E)$ for any subobject F of E in $\mathcal{A}_\sigma$. Conversely for an abelian subcategory $\mathcal{A}$ (which is the heart of a t-structure) and a group homomorphism $Z : K(X) \to \mathbb{C}$ such that

$$Z(\mathcal{A} \setminus \{0\}) \subset \{\mathbb{R}_{>0}e^{\pi\sqrt{-1}\phi} \mid \phi \in (0, 1]\} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R}_{<0}$$

and satisfying some conditions like the Harder-Narasimhan property, we have a stability condition $\sigma = (Z_\sigma, \mathcal{P}_\sigma)$ with $Z_\sigma = Z$ and $\mathcal{A} = \mathcal{P}_\sigma(0,1]$. Therefore we have one to one correspondence:

$$\sigma = (Z_\sigma, \mathcal{P}_\sigma) \longleftrightarrow (Z_\sigma, \mathcal{A}_\sigma). \tag{2.2}$$

As in the β-twisted stability in Definition 0.1, the phase ϕ plays the role of a slope function on the abelian category $\mathcal{A}_\sigma$. Thus we have the correspondence

$$(\mathcal{A}_\sigma, \phi(\bullet)) \longleftrightarrow (\mathrm{Coh}(X), \tfrac{\chi(\bullet(-\beta+nH))}{\mathrm{rk}(\bullet)}).$$

Remark 2.3. Gieseker semi-stability is not a stability condition in the sense of Definition 0.1 if $\dim X \geq 2$.

The space $\mathrm{Stab}(X)$ of stability conditions has a structure of complex manifold. For a stability condition σ, we have $\Pi(\sigma) \in H^*(X,\mathbb{C})_{\mathrm{alg}}$ such that $Z_\sigma(\bullet) = \langle \Pi(\sigma), \bullet \rangle$. Then $\Pi : \mathrm{Stab}(X) \to H^*(X,\mathbb{C})_{\mathrm{alg}}$ is a covering map over the image. We require that $\mathrm{im}\,\Pi$ is an open subset from now on.[2]

Proposition 2.4. *We fix a Mukai vector v. There is wall/chamber structure on* $\mathrm{Stab}(X)$ *and $M_\sigma(v)$ is constant on each chamber.*

2.2. **Group actions on** $\mathrm{Stab}(X)$**.** On the space of stability conditions, there is a natural right action of the universal cover $\widetilde{\mathrm{GL}}^+(2,\mathbb{R})$ of $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$. By an identification $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}\sqrt{-1}$, $g \in \mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ acts on $Z_\sigma : K(X) \to \mathbb{C}$ by the composition $g^{-1} \circ Z_\sigma$. In order to get an action on the phase function ϕ, we need to take the universal cover of $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$. Here we only explain the action of a subgroup $\mathbb{C} \subset \widetilde{\mathrm{GL}}^+(2,\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \subset & \widetilde{\mathrm{GL}}^+(2,\mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^* & \subset & \mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R}). \end{array} \tag{2.3}$$

For $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\lambda(\sigma) = (e^{-\pi\sqrt{-1}\lambda} Z_\sigma, \mathcal{P}'), \quad \mathcal{P}'(\phi) = \mathcal{P}_\sigma(\phi + \mathrm{Re}(\lambda)). \tag{2.4}$$

Remark 2.5. The second formulation of the stability condition may be familiar to whom working on vector bundles. However the description of $\widetilde{\mathrm{GL}}^+(2,\mathbb{R})$ is not easier for this formulation. Indeed it seems there is no simple relation of abelian categories $\mathcal{P}'(0,1]$ and $\mathcal{P}_\sigma(0,1]$ unless $\mathrm{Re}(\lambda) \in \mathbb{Z}$, where $\lambda \in \mathbb{C}$.

There is also an action of $\mathrm{Aut}(\mathbf{D}(X))$. For an equivalence $\Phi : \mathbf{D}(X) \to \mathbf{D}(X')$ and a stability condition $\sigma = (Z_\sigma, \mathcal{P}_\sigma)$ on X, we define a stability condition $\Phi(\sigma)$ on X' by

$$\Phi(\sigma) := (Z_\sigma \circ \Phi^{-1}, \mathcal{P}_{\Phi(\sigma)}), \quad \mathcal{P}_{\Phi(\sigma)}(\phi) = \Phi(\mathcal{P}_\sigma(\phi)). \tag{2.5}$$

By this property (and the first formulation of stability condition), Φ induces an isomorphism

$$\Phi : M_\sigma(v) \to M_{\Phi(\sigma)}(\Phi(v)). \tag{2.6}$$

[2]Thus we require the support property.

Assume that X is a $K3$ surface or an abelian surface, so that there are enough Fourier-Mukai transforms. The stability conditions of Matsuki-Wentworth (classical stability) are parameterized by

$$(\beta, H) \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{Q}} \times \mathrm{Amp}(X)_{\mathbb{Q}}. \tag{2.7}$$

We would like to extend the notion of stability which behaves well in the derived category. However we don't want to generalize the notion of stability blindly, since it makes hard to analyse. In order to minimize our consideration, we would like to impose the following conditions for our parameter space $\mathcal{S}$ of stability conditions:

(a) For each Mukai vector v, there is a wall/chamber structure on $\mathcal{S}$ and the stability is constant on each chamber.
(b) For a general (β, H), there is $\sigma \in \mathrm{Stab}(X)$ such that $M_H^\beta(v) = M_\sigma(v)$.
(c) Stability is preserved under any Fourier-Mukai transform
$$\Phi : \mathbf{D}(X) \to \mathbf{D}(X').$$
Thus for $\sigma \in \mathcal{S}$, there is $\Phi(\sigma) \in \mathcal{S}$ such that $E \in \mathbf{D}(X)$ is σ-semi-stable if and only if $\Phi(E)$ is $\Phi(\sigma)$-semi-stable.
(d) For each chamber $\mathcal{C}$, there is a Fourier-Mukai transform Φ which induces an isomorphism $M_\sigma(v) \to M_{H'}^{\beta'}(w)$, where $\sigma \in \mathcal{C}$ and $M_{H'}^{\beta'}(w)$ is a moduli space of β'-twisted semi-stable sheaves.

Theorem 2.6. *Bridgeland stability conditions satisfy (a)–(d).*

For (a), (b), see [13]. (c) is (2.6). (d) is in [5] and [26].

Remark 2.7. For other surfaces, we cannot expect property (d) in general.

2.3. **Examples of stability conditions.** Let us explain examples of stability conditions in [13]. Let X be a $K3$ surface or an abelian surface. Assume that $(\beta, \omega) \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}} \times \mathrm{Amp}(X)_{\mathbb{R}}$. For $E \in K(X)$, we set

$$Z_{(\beta,\omega)}(E) := \langle e^{\beta+\sqrt{-1}\omega}, v(E)\rangle.$$

Let $\mathcal{A}_{(\beta,\omega)}$ be the tilt of $\mathrm{Coh}(X)$ with respect to the torsion pair $(\mathcal{T}_{(\beta,\omega)}, \mathcal{F}_{(\beta,\omega)})$ defined by

(i) $\mathcal{T}_{(\beta,\omega)}$ is generated by β-twisted stable sheaves with $Z_{(\beta,\omega)}(E) \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R}_{<0}$.
(ii) $\mathcal{F}_{(\beta,\omega)}$ is generated by β-twisted stable sheaves with $-Z_{(\beta,\omega)}(E) \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R}_{<0}$.

$\mathcal{A}_{(\beta,\omega)}$ is the abelian category in [13] and it depends only on β and the ray $\mathbb{Q}_{>0}\omega$.

Then the pair $\sigma_{(\beta,\omega)} = (Z_{(\beta,\omega)}, \mathcal{A}_{(\beta,\omega)})$ satisfies the requirement of stability conditions on $\mathbf{D}(X)$[3] [13]. By the action of $\widetilde{\mathrm{GL}}^+(2, \mathbb{R})$ and $\mathrm{Aut}(\mathbf{D}(X))$, a general stability condition is represented by $\sigma_{(\beta,\omega)}$. Moreover if X is an abelian surface, then

$$\mathrm{Stab}(X)/\widetilde{\mathrm{GL}}^+(2, \mathbb{R}) \cong \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}} \times \mathrm{Amp}(X)_{\mathbb{R}}. \tag{2.8}$$

Every object $E \in \mathcal{A}_{(\beta,\omega)}$ fits in an exact sequence in $\mathcal{A}_{(\beta,\omega)}$:

$$0 \to H^{-1}(E)[1] \to E \to H^0(E) \to 0 \tag{2.9}$$

[3] We need one more condition if X is a $K3$ surface.

where $H^{-1}(E) \in \mathcal{F}_{(\beta,\omega)}$ and $H^0(E) \in \mathcal{T}_{(\beta,\omega)}$. Thus E is a two-term complex. If X is a $K3$ surface, more complicated complexes appear by applying autoequivalences. On the other hand for an abelian surface, (2.8) implies only 2-terms complexes appear.

Definition 2.8. For a Mukai vector v, $\mathcal{M}_{(\beta,\omega)}(v)$ denotes the moduli stack of $\sigma_{(\beta,\omega)}$-semi-stable objects E of $\mathcal{A}_{(\beta,\omega)}$ with $v(E) = v$. $M_{(\beta,\omega)}(v)$ denotes the moduli scheme of the S-equivalence classes of $\sigma_{(\beta,\omega)}$-semi-stable objects E of $\mathcal{A}_{(\beta,\omega)}$ with $v(E) = v$, if it exists.

As we claimed, there is a region called large volume limit, where Bridgeland stability coincides with the classical stability.

Proposition 2.9 (Large volume limit). *For a Mukai vector $v = (r, \xi, a)$ with $r \geq 0$, assume that $(\omega^2) \gg 0$ (depending on v). If $(\xi - r\beta, \omega) > 0$, then $M_{(\beta,\omega)}(v) = M_\omega^\beta(v)$.*

2.4. **Birational geometry of $M_H(v)$.** In this subsection, we shall explain the birational geometry of $M_H(v)$ in [6], [26], [44]. These results are the significant application of Bridgeland stability conditions to the structure of the moduli spaces. We start with some definitions.

Definition 2.10. Let $f : M \to S$ be a projective morphism.

(1) $D \in \mathrm{Pic}(M)$ is f-movable, if

$$\operatorname{codim}\operatorname{coker}(f^* f_*(\mathcal{O}_M(D)) \to \mathcal{O}_M(D)) \geq 2.$$

(2) A relative movable cone $\mathrm{Mov}(M/S)$ is a cone generated by f-movable divisors.

We shall consider relative cones over the albanese map.

Definition 2.11. (1) Two albanese maps $a' : M' \to \mathrm{Alb}(M')$ and $a : M \to \mathrm{Alb}(M)$ are equivalent if there is a birational map $f : M' \cdots \to M$ and an isomorphism $g : \mathrm{Alb}(M') \to \mathrm{Alb}(M)$ with a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{f} & M \\ {\scriptstyle a'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ \mathrm{Alb}(M') & \xrightarrow{g} & \mathrm{Alb}(M) \end{array} \tag{2.10}$$

(2) For a normal variety M, $\mathrm{Amp}_{\mathrm{rel}}(M)$ denotes the relative ample cone of the albanese map $a : M \to \mathrm{Alb}(M)$. We set $\mathrm{Mov}_{\mathrm{rel}}(M) := \mathrm{Mov}(M/\mathrm{Alb}(M))$. $\mathrm{Mov}_{\mathrm{rel}}(M)_0$ denotes the interior of $\mathrm{Mov}_{\mathrm{rel}}(M)$.

For the moduli space $M_H(v)$, all the (relative) minimal models are the moduli spaces of Bridgeland's stable objects. Thus by extending our consideration from sheaves to complexes, we get a desirable description of birational properties.

We take $\sigma \in \mathcal{C}$. Then we have a map $\xi_\sigma : \mathrm{Stab}(X) \to P^+(M_\sigma(v))$. Up to the action of $\mathbb{R}_{>0}$, ξ_σ is surjective. Then $\xi_\sigma(\mathcal{C}) = \mathrm{Amp}_{\mathrm{rel}}(M_\sigma(v))$. So we set $\mathcal{C}_{\mathrm{Amp}} := \mathcal{C}$. There is another chamber decomposition of $\mathrm{Stab}(X)$ such that each chamber $\mathcal{C}_{\mathrm{Mov}}$ containing σ corresponds to the movable cone via ξ_σ.

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Stab}(X) & \xrightarrow{\xi_\sigma} & P^+(M_\sigma(v)) \\
\cup & & \cup \\
\mathcal{C}_{\mathrm{Mov}} & \longrightarrow & \mathrm{Mov}_{\mathrm{rel}}(M_\sigma(v))_0 \\
\cup & & \cup \\
\mathcal{C}_{\mathrm{Amp}} & \longrightarrow & \mathrm{Amp}_{\mathrm{rel}}(M_\sigma(v))
\end{array}
\tag{2.11}
$$

We also have a decomposition.

$$
\mathrm{Mov}_{\mathrm{rel}}(M_\sigma(v)) = \bigcup_{M' \cdots \to M_\sigma(v)} \overline{\mathrm{Amp}_{\mathrm{rel}}(M')}. \tag{2.12}
$$

By the characterization of walls for nef cones of each birational models, we get the following result.

Corollary 2.12 ([24])**.** *Kawamata and Morrison's Nef cone conjecture holds: There is a rational finite polyhedral fundamental domain for the action of* $\mathrm{Aut}(K_\sigma(v))$ *on* $\mathrm{Nef}(K_\sigma(v))$*, where* $K_\sigma(v)$ *is a fiber of the albanese map.*

2.5. **Abelian surface with** $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ **and** $(H^2) = 2$**.**

2.5.1. *Stability condition.* In order to give an easy example of $\mathrm{Stab}(X)$, we assume that X is a principally polarized abelian surface with $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$, i.e., $(H^2) = 2$. In this case, we have an identification

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}} \times \mathrm{Amp}(X)_{\mathbb{R}} & \cong & \mathbb{H} \\
(s,t) & \leftrightarrow & s + t\sqrt{-1}
\end{array}
$$

Then the action of the autoequivalence group $\mathrm{Aut}(\mathbf{D}(X))$ on $\mathbb{H}$ factors through the natural action of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Aut}(\mathbf{D}(X)) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \\
& \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

So we have

$$
\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash \mathrm{Stab}(X)/\widetilde{\mathrm{GL}}^+(2,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \cong \mathbb{C}.
$$

By adding a cusp[4] ∞, we get a compactification.

$$
\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash(\mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}) \cong \mathbb{P}^1.
$$

Remark 2.13. If $n = (H^2)/2 > 1$, we still have $\mathrm{Stab}(X)^*/\widetilde{\mathrm{GL}}^+(2,\mathbb{R}) \cong \mathbb{H}$, and $\mathrm{Aut}(\mathbf{D}(X))$ acts as the action of $\Gamma_0(n) \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

The large volume limit (Proposition 2.9) corresponds to a neighborhood of $\infty \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. $M_z(r,dH,a) = M_H(r,dH,a)$ for $|z| \gg 0$ and $z < d/r$ ($M_z(r,dH,a) = \{E^\vee \mid E \in M_H(r,-dH,a)\}$ for $|z| \gg 0$ and $z > d/r$). Each wall is a semi-circle C in $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$. If $\infty \in C$, then C is a half line ($rz - d = 0$). Walls do not intersect each other.

[4] Cusps are related to Foourier-Mukai transforms [23]

We illustrate walls for $v = (1, 0, -3)$ (see Figure 1). C_0 is a wall passing ∞. By the action of linear fractional transformation[5]

$$f(z) = \frac{2z - 3}{-z + 2},$$

C_0 is transformed to C_1 and C_1 is transformed a semi-circle C_2 which is inside of C_1. Applying $f^n(z)$, we have infinitely many walls $C_n = f^n(C_0)$ ($n \in \mathbb{Z}$). We also have infinitely many walls $W_n = f^n(W_0)$. C_n ($n > 0$) and W_n ($n \geq 0$) are semi-circles in the left hand side of C_0. Let $\mathcal{C}_0^-$ be the chamber bounded by C_0 and C_1, and $\mathcal{C}_0^+$ the chamber bounded by C_0 and C_{-1}. We set $\mathcal{C}_n^\pm := f^n(\mathcal{C}_0^\pm)$. These are the walls and chambers for $v = (1, 0, -3)$. The walls and chambers are symmetric with respect to t-axis. Each bounded chamber $\mathcal{C}_n^\pm$ ($n \neq 0$) is annulus. There are two unbounded chambers $\mathcal{C}_0^\pm$. The chamber $\mathcal{C}_0^-$ parameterizes $M_H(1, 0, -3)$ and the chamber $\mathcal{C}_0^+$ parameterizes the dual. For $\frac{q}{p} \in \overline{\mathcal{C}_n^\pm}$, by a Fourier-Mukai transform Φ inducing an isomorphism $f(z)$ of $\mathbb{P}^1$ with $f(q/p) = \infty$, $\mathcal{C}_n^\pm$ is transformed to an unbounded chamber, which gives the claim (d). In this example, the movable chamber is a single chamber. In particular, $\mathrm{Mov}_{\mathrm{rel}}(M_\sigma(v))_0 = \mathrm{Amp}_{\mathrm{rel}}(M_\sigma(v)) = \xi_\sigma(\mathcal{C}_n^\pm)$, where $\sigma \in \mathcal{C}_n^\pm$.

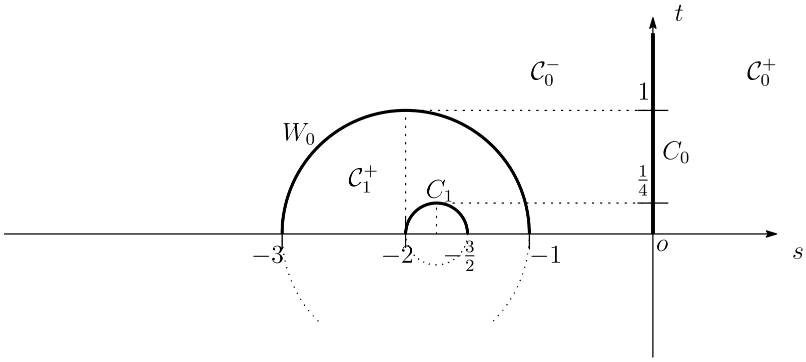


FIGURE 1. Walls for $v = (1, 0, -3)$ between C_0 and C_1.

2.5.2. *Relation with binary quadratic form.* Let Q be the space of binary quadratic forms:

$$Q := \{rx^2 + 2dxy + ay^2 \mid r, d, a \in \mathbb{Z}\}. \tag{2.13}$$

If X is a principally polarized abelian surface with $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$, then the Mukai lattice $H^*(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ is isomorphic to Q via

$$\begin{array}{ccc} H^*(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}} & \to & Q \\ (r, dH, a) & \mapsto & rx^2 + 2dxy + ay^2. \end{array} \tag{2.14}$$

Then for $v = (r, dH, a)$, $\langle v^2 \rangle / 2 = d^2 - ra$ is the discriminant of $rx^2 + 2dxy + ay^2$. Under this identification, the cohomological action of the Fourier-Mukai transforms factors through the natural action of $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ on Q.

[5] $f(z)$ is the generator of the action of $\mathbf{D}(X)$ on $\mathbb{H}$ preserving $\pm(1, 0, -3)$. It is related to the fundamental unit of $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Theorem 2.14 ([40],[25],[44]). *Let (X, H) be a principally polarized abelian surface with $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$.*

(1) *The birational equivalence class of $M_H(v)$ depends on the equivalence class of the associated quadratic form. In particular,*

$$\#\{M_H(v) \mid \gcd(r, d, a) = 1,\ \langle v^2 \rangle/2 = D\}/(\textit{birational equiv.}) \leq h_D, \tag{2.15}$$

where h_D is the class number of quadratic forms of discriminant D.

(2) *There is a birational map*

$$M_H(v) \cdots \to X \times \mathrm{Hilb}_X^{\langle v^2 \rangle/2}$$

if and only if

$$rx^2 + 2dxy + ay^2 = \pm 1$$

has a solution.

Remark 2.15. Finally we would like to remark that almost all results on $M_H(v)$ in this subsection are found or conjectured by Mukai around 1980 ([28],[29]). It is really surprizing to the author that these discoveries were done without Bridgeland stability condition.

2.6. **Related results and some problems.** The example of stability condition $\sigma_{(\beta,\omega)}$ in section 2.3 is generalized to arbitrary surface by Arcara and Bertram [1]. If $X = \mathbb{P}^2$, then Arcara, Bertram, Coskun and Huizenga [2] studied moduli spaces $M_{(\beta,\omega)}(v)$ of stable objects. By the equivalence (0.4), we can use the theory of quiver in order to study Bridgeland stability condition. In particular, we can use King's result to construct the moduli space $M_{(\beta,\omega)}(v)$ as a projective scheme. Moreover they showed that $M_{(\beta,\omega)}(v)$ is a log Fano variety, which implies $M_{(\beta,\omega)}(v)$ is a Mori dream space. In particular, the movable cone is rational finite polyhedral cone. Moreover for a non-commutative $\mathbb{P}^2$, Li and Zhao [22] studied moduli spaces of stable objects, and showed that they are Fano varieties. See also [14] for recent development.

For the stability condition on Enriques surface, Nuer [33] studied moduli of stable objects.

Finally we list the following problems.

Problem 2.16. (1) *Construction of moduli space.*

(2) *Smoothness of the moduli spaces. In birational geometry, smooth varieties do not form a good category. So it may not be so important.*

As we explained, Bridgeland stability condition is related to birational geometry of moduli spaces. So it is desirable to have projective moduli spaces. Note that Inaba [18] constructed moduli of simple complexes $\mathcal{M}(v)^{\mathrm{spl}}$. Let $\mathcal{M}_\sigma(v)$ be the subset consisting of σ-stable objects. On the other hand, Bayer and Macri [5] constructed nef line bundle $\mathcal{L}_\sigma$ on $\mathcal{M}_\sigma(v)$. For all known cases, $\mathcal{L}_\sigma$ is ample. For example, if X is a $K3$ surface or an abelian surface, $\mathcal{L}_\sigma$ is nothing but ξ_σ in (2.11). It is interesting to show the ampleness of $\mathcal{L}_\sigma$ for general cases.

References

[1] Arcara, D., Bertram, A., *Bridgeland-stable moduli spaces for K-trivial surfaces*, J. Eur. Math. Soc. **15** (2013), 1–38.

[2] Arcara, D., Bertram, A., Coskun, I., Huizenga, J., *The Minimal Model Program for the Hilbert Scheme of Points on P^2 and Bridgeland Stability,* arXiv:1203.0316.

[3] Atiyah, M. F., Bott, R., *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces,* Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **308** (1982), pp. 523–615

[4] Bayer, A., Hassett, B., Tschinkel, Y., *Mori cones of holomorphic symplectic varieties of K3 type,* arXiv:1307.2291

[5] Bayer, A., Macri, E., *Projectivity and Birational Geometry of Bridgeland moduli spaces,* arXiv:1203.4613

[6] Bayer, A., Macri, E., *MMP for moduli of sheaves on K3s via wall-crossing: nef and movable cones, Lagrangian fibrations,* arXiv:1301.6968

[7] Beilinson, A. A., Bernstein, J., Deligne, P., *Faisceaux pervers,* Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), 5–171, Astérisque, **100**, Soc. Math. France, Paris, 1982

[8] Bondal, A., Orlov, D., *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties,* arXiv:alg-geom/9506012

[9] Bondal, A., Orlov, D., *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences,* Compositio Math. **125** (2001), no. 3, 327–344.

[10] Bridgeland, T., *Equivalences of triangulated categories and Fourier-Mukai transforms,* Bull. London Math. Soc. **31** (1999), 25–34, math.AG/9809114

[11] Bridgeland, T., *Flops and derived categories,* Invent. Math. **147** (2002), 613-632.

[12] Bridgeland, T., *Stability conditions on triangulated categories*, Ann. of Math. (2) **166** (2007), no. 2, 317–345.

[13] Bridgeland, T., *Stability conditions on K3 surfaces,* math.AG/0307164, Duke Math. J. **141** (2008), 241–291

[14] Coskun, I., Huizenga, J., Woolf M., *The effective cone of the moduli space of sheaves on the plane*, arXiv:1401.1613.

[15] Drezet, J.-M., Le-Potier, J., *Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur $\mathbb{P}^2$,* Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. **18** (1985), pp. 193–244

[16] Gieseker, D. *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface,* Ann. of Math. **106** (1977), 45–60

[17] Gieseker, D., Li, J., *Moduli of high rank vector bundles over surfaces,* J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 107–151

[18] Inaba, M., *Toward a definition of moduli of complexes of coherent sheaves on a projective scheme*, J. Math. Kyoto Univ. **42** (2002), no. 2, 317–329.

[19] Inaba, M., *Moduli of stable objects in a triangulated category,* arXiv:math/0612078,J. Math. Soc. Japan **62** (2010), 395–429

[20] Inaba, M., *Sankakukenn jyou niokeru stability condition to moduli,* Sugaku **65** (2013), 160–

[21] Huybrechts, D., Lehn, M., *The geometry of moduli spaces of sheaves,* Aspects of Mathematics, E31. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997

[Li] Li, J., *Kodaira dimension of moduli space of vector bundles on surfaces,* Invent. Math. **115** (1994), 1–40

[22] Li, C., Zhao, X., *The MMP for deformations of Hilbert schemes of points on the projective plane*, arXiv:1312.1748.

[23] Ma, S., *Fourier-Mukai partners of a K3 surface and the cusps of its Kahler moduli,* arXiv:0804.4047

[24] Markman, E., Yoshioka, K., *A proof of the Kawamata-Morrison Cone Conjecture for holomorphic symplectic varieties of $K3^{[n]}$ or generalized Kummer deformation type*, arXiv:1402.2049.

[25] Minamide, H., Yanagida, S., Yoshioka, K., *Fourier-Mukai transforms and the wall-crossing behavior for Bridgeland's stability conditions*, arXiv:1106.5217.

[26] Minamide, H., Yanagida, S., Yoshioka, K., *Some moduli spaces of Bridgeland's stability conditions*, arXiv:1111.6187, Int. Math. Res. Not. IMRN 2014, No.19, 5264–5327, doi:10.1093/imrn/rnt126.

[27] Matsuki, K. and Wentworth, R. *Mumford-Thaddeus principle on the moduli space of vector bundles on an algebraic surface,* Internat. J. Math. **8** (1997), 97–148

[28] Mukai, S., *On Fourier functors and their applications to vector bundles on abelian surfaces* (in Japanese), in the proceeding of *Daisū-kikagaku Symposium* (Tohoku University, June 1979), 76–93.
[29] Mukai, S., *On classification of vector bundles on abelian surfaces* (in Japanese), RIMS Kôkyûroku **409** (1980), 103–127.
[30] Mukai, S., *Duality between* $D(X)$ *and* $D(\hat{X})$ *with its application to Picard sheaves,* Nagoya Math. J., **81** (1981), 153–175
[31] Mukai, S., *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surface,* Invent. math. **77** (1984), 101–116
[32] Mukai, S., *On the moduli space of bundles on K3 surfaces I,* Vector bundles on Algebraic Varieties, Oxford, 1987, 341–413
[33] Nuer, H., *Projectivity and Birational Geometry of Bridgeland Moduli spaces on an Enriques Surface,* arXiv:1406.0908
[34] O'Grady, K., *Moduli of vector bundles on projective surfaces: some basic results,* Invent. Math. **123** (1996), 141–207
[35] O'Grady, K., *Moduli of vector-bundles on surfaces,* Algebraic geometry—Santa Cruz 1995, 101–126, Proc. Sympos. Pure Math., 62, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997
[36] Orlov, D., *Equivalences of derived categories and* $K3$ *surfaces,* alg-geom/9606006, Algebraic geometry, 7. J. Math. Sci. (New York) **84** (1997), no. 5, 1361–1381.
[37] Simpson, C., *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety I,* Publ. Math. I.H.E.S. **79** (1994), 47–129
[38] Toda, Y., *3jigen Calabi-Yau tayoutai jyou no kyokusenn no kazoeageriron.* Sugaku **66** (2014) 337–365
[39] Van den Bergh, M., *Three-dimensional flops and noncommutative rings*, Duke Math. J. 122 (2004), no. 3, 423–455.
[40] Yanagida, S., Yoshioka, K., *Semi-homogeneous sheaves, Fourier-Mukai transforms and moduli of stable sheaves on abelian surfaces*, J. Reine Angew. Math. **684** (2013), 31–86.
[41] Yanagida, S., Yoshioka, K., *Bridgeland's stabilities on abelian surfaces,* Math. Z. **276** (2014), 571–610. DOI:10.1007/s00209-013-1214-1.
[42] Yoshioka, K., *Moduli spaces of stable sheaves on abelian surfaces,* Math. Ann. **321** (2001), 817–884, math.AG/0009001
[43] Yoshioka, K., *Perverse coherent sheaves and Fourier-Mukai transforms on surfaces I*, Kyoto J. Math. **53** (2013), 261–344.
[44] Yoshioka, K., *Bridgeland's stability and the positive cone of the moduli spaces of stable objects on an abelian surface,* arXiv:1206.4838 v2, Adv. Stud. Pure Math. to appear.

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kobe University, Kobe, 657, Japan
E-mail address: yoshioka@math.kobe-u.ac.jp

代数・数論力学系について

川口　周

本稿では，代数・数論力学系の話題から，筆者が興味深いと思う力学系次数と等分布定理の 2 つの話題を取り上げています．筆者自身の結果（J. H. Silverman の共同研究に基づく）は，力学系次数では 2.3 節に関するものです．等分布定理では注意 3.13(5) と注意 3.16 に挙げたものぐらいです．

代数学シンポジウムでは，午前の一般向け講演ということもあり，背景となる事柄や関連する多くの数学者の結果を紹介し，力学系次数と等分布定理の大まかなところを捉えて頂けるように努めました．本稿は講演時のスライドをもとに作成しており，講演と同様に細部はかなり省略されています．末尾に参考文献を多く挙げましたので，詳細についてはそちらをご覧下さい．

代数学シンポジウムで講演の機会をあたえてくださった組織委員の皆様，特に，プログラム責任者（代数幾何）の松下大介氏と稲場道明氏に感謝します．1 節以下では，「だ・である」調に変えます．

目次

1 はじめに

k を体とし，X を k 上で定義された滑らかな射影代数多様体，$f : X \to X$ を X からそれ自身への射（または，X からそれ自身への支配的な有理写像 $f : X \dashrightarrow X$）とする．

例えば，X が $\mathbb{C}$ 上の射影平面 $\mathbb{P}^2$ で f が双有理写像のときは f は Cremona 変換であり，Noether の

2014 年 10 月 31 日
〒606-8502 京都市左京区北白川追分町　京都大学大学院理学研究科数学教室
kawaguch(())math.kyoto-u.ac.jp

定理など古くから深い研究がされている．また，例えば，X が $K3$ 曲面で f が同型射のときも自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ の性質など深い研究がされている．

(A) 一方で，力学系というときは，f の反復合成に関する性質を調べる．例えば，$P \in X(k)$ に対して，P が f に関する周期点になるか，P が f に関する固定点のときは P の近傍で f はどのように振る舞うかなどを考える．あるいは，P の前軌道 $O_f(P) = \{P, f(P), f(f(P)), \ldots\}$ が無限集合のとき，$O_f(P)$ は X の中でどう分布しているか（例えば，$k = \mathbb{C}$ のときは Euclid 位相に関して稠密かなど）などを考える．

(B) また，代数力学系，数論力学系というときには，基礎体 k は $\mathbb{C}$ に限らず，非アルキメデス付値体や代数体を考えることも多い．

(A) に関して，一般にコンパクト位相空間 X からそれ自身への連続写像 $f : X \to X$ に対して，位相的エントロピー $h_{top}(f)$ という 0 以上の量が定まる（定義 2.5 参照）．Cantat は，コンパクト複素曲面の同型射に対して，力学系の量である位相的エントロピーという観点から次の結果を示した．

定理 1.1 (Cantat [16], [17])**.** X をコンパクト複素曲面とする．このとき，正の位相的エントロピーをもつ同型射 $f : X \to X$ が存在することと，X が次のいずれかであることは同値である．（特に，X は Kähler になる．）

- X は $K3$ 曲面かそれの blow-up,
- X は Enriques 曲面かそれの blow-up,
- X は Abel 曲面かそれの blow-up,
- X は有理曲面.

同じく，(A) に関して，$f : X \to X$ をコンパクト Kähler 曲面の同型射とする．McMullen は固定点 P の回りで無理数回転をしているような円板（Siegel 円板）が存在するかという観点から，次の定理を証明した．定理を述べるために，まず，Siegel 円板の定義を述べる．

定義 1.2 (無理数回転，Siegel 円板)**.** (1) $\mathbb{C}^2$ の線形変換 $F(z_1, z_2) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2)$ が**無理数回転**（irrational rotation）とは，$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ で，任意の $(i, j) \neq (0, 0) \in \mathbb{Z}^2$ に対して $\lambda_1^i \lambda_2^j \neq 1$ のときにいう．

(2) $f : X \to X$ を，コンパクト Kähler 曲面の同型射とする．領域 $U \subset X$ が *Siegel* **円板**（Siegel disk）であるとは，U と単位開円板 $\Delta^2 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ の間の双正則写像が存在して，この双正則写像を通じて，$f|_U$ が 無理数回転の $F|_{\Delta^2}$ と共役になるときにいう．

定理 1.3 (McMullen [51], [52])**.** (1) $K3$ 曲面の自己同型射で，Siegel 円板をもつものが存在する．

(2) 有理曲面の自己同型射で，Siegel 円板をもつものが存在する．

定理 1.1, 定理 1.3 はいずれもコンパクト複素曲面の同型射に関する定理である．これらの定理を代数力学系の定理といっていいのかどうか分からないが，いずれにしても，f の反復合成に関する性質を調べている点で力学系と代数幾何の双方に関連している．

(B) に関しては，例えば，X が代数体 K 上で定義されていて，P が X の代数的点で f に関する周期点のとき，P の K 上での共役全体からなる集合 $G(P)$（Galois 軌跡）がどう分布しているかなどが調べられてい

る（等分布定理）．等分布定理は数論力学系の深い定理であり，3 節で紹介したい．

2 力学系次数

この節では，代数・数論力学系の話題から力学系次数について紹介する．非常におおざっぱにいうと，力学系次数は写像 f を反復合成した写像の「次数」の増大度を測る量である．力学系次数は複素力学系と可積分系の研究者によって調べられてきた．

2.1 節で力学系次数の定義とその基本的な性質を紹介し，2.2 節で位相的エントロピーの定義をして，位相的エントロピーと力学系次数の関係を与える Gromov [29], Yomdin [61] と Dinh–Sibony [21] の定理を紹介する．2.3 節では，f が代数体上に定義されているときに，力学系次数と算術的次数との関係を述べる．筆者自身の結果は 2.3 節に関するものである．

2.1 力学系次数の定義と性質

力学系次数（dynamical degree）は，複素力学系と可積分系の 2 つの視点から導入された．力学系次数の定義を述べる前に文献をいくつか挙げよう．

(1) 複素力学系の視点から
- 1989 年に出版された [27] で，Friedland–Milnor はアフィン平面の多項式自己同型写像について，1 次力学系次数を調べた．
- 1997 年に出版された [53] で，Russakovskii–Shiffman は N 次元射影空間からそれ自身への支配的な有理写像について，p 次力学系次数を導入した（$0 \leq p \leq N$）．
- 力学系次数に関する論文は非常に多く出版されている．そのごく一部を挙げると，例えば，Bedford–Kim [5], [6], [7], [8], Boucksom–Favre–Jonsson [14], Diller–Favre [20], Dinh–Sibony [21], Favre–Jonsson [24], Guedj [28], Takenawa [57], [58] などがある．注意 2.4 にあげる文献も参照されたい．また，Hasselblatt–Propp による monomial map の力学系次数に関するサーベイ [30] はまとまっていて読みやすい．

(2) 可積分系の視点から
1999 年に出版された [10] で，Bellon–Viallet は Russakovskii–Shiffman とは独立に，1 次力学系次数の対数をとった量を考え，この量を**代数的エントロピー** (algebraic entropy) とよんだ．可積分系の代数的エントロピーについての論文には，例えば，Bellon [9], Hientarinat–Viallet [31], [32], Lafortune–Ramani–Grammaticos–Ohta–Tamizhamani [43] などがある．

以下で，力学的次数を定義しよう．本稿では，$\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体 X を考える．なお，Dinh–Nguyên [22], Dinh–Nguyên–Truong [23] により，力学的次数は双有理不変量（注意 2.8 参照）であることが知られているので，X が滑らかでない場合にも力学的次数は定義される．

定義 2.1 (p 次力学系次数)**.** X は $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体とし，ω を X 上の Kähler 形式とする．$f : X \dashrightarrow X$ は X からそれ自身への支配的な有理写像とする．f の不定集合を I_f で表す．また，f^n で f の n 回合成写像を表す．$p \in \mathbb{Z}$, $0 \leq p \leq \dim X$ とする．

(1) $f|_{(X \setminus I_f)} : (X \setminus I_f) \to X$ のグラフの $X \times X$ における閉包を Γ_f で表し，$\widetilde{\Gamma}_f$ を Γ_f の特異点

解消とする．$\pi_1 : \widetilde{\Gamma}_f \to X$ を第 1 成分への射影，$\pi_2 : \widetilde{\Gamma}_f \to X$ を第 2 成分への射影とする．$f^*(\omega^p) := (\pi_1)_*(\pi_2^*(\omega^p))$ とおく．ここで，$f^*(\omega^p)$ は C^∞ 形式 $\pi_2^*(\omega^p)$ をカレントとみて，π_1 で押し出した X 上の (p,p)-カレントである．そして，

$$d_p(f) := \int_X f^*(\omega^p) \wedge \omega^{\dim X - p}$$

と定める．

(2) X, f は上の通りとする．

$$\lambda_p(f) := \lim_{n\to\infty} d_p(f^n)^{1/n} \tag{2.1}$$

と定める．$\lambda_p(f)$ を f の p **次力学系次数**（p-th dynamical degree）という．

注意 2.2. 容易にわかるように，p 次力学系次数 $\lambda_p(f)$ は Kähler form ω の取り方によらない．したがって，p 次力学系次数は (X,f) から定まる量である．[21] により，$\lambda_p(f)$ の定義 (2.1) の右辺の極限は存在する．

上と同様に，X は $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体，$f : X \dashrightarrow X$ は X からそれ自身への支配的な有理写像とする．ω を X の Kähler form とする．以下で，0 次力学系次数，d 次力学系次数（$d = \dim X$），1 次力学系次数についてもう少し詳しく見よう．

0 次力学系次数

$d_0(f^n) = \int_X \omega^{\dim X} > 0$ （n に無関係）だから

$$\lambda_0(f) := \lim_{n\to\infty} d_0(f^n)^{1/n} = 1$$

となる．したがって，0 次力学系次数は常に 1 である．

d 次力学系次数（$d = \dim X$）

X の一般の点の f による逆像の個数を**位相的次数**（topological degree）といい，$e(f)$ で表す．このとき，$e(f^n) = e(f)^n$ である．

$$d_{\dim X}(f^n) = \int_X (f^n)^*(\omega^{\dim X}) = e(f^n) \cdot \int_X \omega^{\dim X} = e(f)^n \cdot \int_X \omega^{\dim X}$$

だから，

$$\lambda_{\dim X}(f) := \lim_{n\to\infty} d_{\dim X}(f^n)^{1/n} = e(f)$$

となる．したがって，d 次力学系次数（$d = \dim X$）は f の位相的次数に他ならない．

1 次力学系次数

$X = \mathbb{P}^N$ として，1 次力学系次数の例をあげよう．

$\mathbb{P}^N$ を $\mathbb{C}$ 上の N 次元射影空間，$f : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ は $\mathbb{P}^N$ からそれ自身への支配的な有理写像とする．ω_{FS} は $\mathbb{P}^N$ の Fubini-Study 計量とする．

このとき，斉次多項式 $F_0, \ldots, F_N \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]$ で，$\mathrm{GCD}(F_0, \ldots, F_N) = 1$ であるものを用いて $f = (F_0 : F_1 : \cdots : F_N)$ と表せる．$\mathrm{algdeg}(f) := \deg(F_i)$ とおけば，

$$d_1(f) := \int_{\mathbb{P}^N} f^*(\omega_{FS}) \wedge (\omega_{FS}^{N-1}) = \mathrm{algdeg}(f)$$

となる．よって，第 1 次力学系次数は $\lambda_1(f) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{algdeg}(f^n)^{1/n}$ で与えられる．

例 2.3. (1) $N = 2$ とする．$f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$（$\operatorname{algdeg}(f) = 2$）を

$$f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2)$$

で定める．このとき，$f^n(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0^{2^n} : x_1^{2^n} : x_2^{2^n})$ であるから，$\operatorname{algdeg}(f^n) = 2^n$ である．
よって， f の第 1 次力学系次数は，$\lambda_1(f) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{algdeg}(f^n)^{1/n} = 2$ になる．

(2) $N = 2$ とする．$g : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$（$\operatorname{algdeg}(g) = 2$）を

$$g : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1 x_2 : x_0 x_1 : x_2^2)$$

で定める．このとき，$g^2(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 x_1 x_2^2 : x_0 x_1^2 x_2 : x_2^4) = (x_0 x_1 x_2 : x_0 x_1^2 : x_2^3)$ であるから，$\operatorname{algdeg}(g^2) = 3$ となる． $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を Fibonacci 数列，すなわち，漸化式 $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ で定まる数列とおく．すると，

$$g^n(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0^{a_{n-1}} x_1^{a_n} x_2^{a_{n-1}} : x_0^{a_n} x_1^{a_{n+1}} : x_2^{a_{n+2}})$$

であるから，$\operatorname{algdeg}(g^n) = a_{n+2}$ である．
よって，g の第 1 次力学系次数は $\lambda_1(g) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{algdeg}(g^n)^{1/n} = (1 + \sqrt{5})/2$（黄金比） になる．

力学系次数について，いくつか補足したい．

注意 2.4. (1) Bellon–Viallet [10] は，1 次力学系次数 $\lambda_1(f)$ は常に**代数的整数**であると予想している．この予想は，いくつかの場合に正しいことが示されているが，一般には未解決である（と思う）．さらに，任意の $1 \le p \le \dim X$ について，p 次力学系次数も，知られている場合はすべて代数的整数になっている（と思う）．

(2) X を有理曲面とし，$f : X \dashrightarrow X$ を双有理な射（つまり不定集合 I_f が空集合）で位相的エントロピーが正とする． [52] において McMullen は，$\lambda_1(f)$ が Lehmer 数以上であることを示している．また，上原 [59] は，Weyl 群から定まる任意の Salem 数 λ について，適当な有理曲面と双有理な射 $f : X \dashrightarrow X$ が存在して，$\lambda_1(f) = \lambda$ となることを示している．

(3) $\dim X \ge 3$ とする．このとき，$p \ne 0, 1, \dim X$ について，$\lambda_p(f)$ の値（例えば $\lambda_2(f)$ など）は，あまり知られていない（と思う）．もちろん，$X = \mathbb{P}^N$ で f が射（つまり，f の不定集合 I_f が空集合）のときは，$d = \operatorname{algdeg}(f)$ とおくと，定義から $\lambda_p(f) = d^p$ （$0 \le p \le N$）が成り立つ．そこで，f は射でないか，X は射影空間でないと仮定する．このとき，以下は知られている．

- $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体 X と支配的な有理写像 $f : X \dashrightarrow X$ に対して，$\lambda_{p-1}(f)\lambda_{p+1}(f) \le \lambda_p(f)^2$（ $1 \le p \le \dim X - 1$ ）が成立する（Guedj [28]）．
- f が $\mathbb{P}^N$ の monomial map の場合は $\lambda_p(f)$ は具体的に求まる（Favre–Wulcan [26], Lin [45], [46]）．
- ハイパーケーラー多様体 X の自己同型射 $f : X \to X$ について，p 次力学系次数 $\lambda_p(f)$ は Salem 数か 1（特に代数的整数） である（Oguiso [47]）．

2.2 力学系次数と位相的エントロピーの関係

X は $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体，$f : X \dashrightarrow X$ は X からそれ自身への支配的な有理写像とする．I_f で f の不定集合を表し，$\Omega_f := X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(I_f)$ とおく．

位相的エントロピー（topological entropy）の定義をしよう．ω を X の Kähler 計量とし，ω から X に距離 $\mathrm{dist} : X \times X \to \mathbb{R}$ を入れる．

$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $\varepsilon > 0$ について，Ω_f の部分集合 F が (n,ε)-**分離的**（ (n,ε)-separated） というのを，

$$\text{任意の } x, y \in F\,(x \neq y) \text{ について } \max_{0\leq i\leq n-1} \mathrm{dist}(f^i(x), f^i(y)) \geq \varepsilon$$

によって定める．

定義 2.5 (位相的エントロピー)**.** X, f は上の通りとする．このとき，f の位相的エントロピーは，

$$h_{top}(f) := \sup_{\varepsilon>0}\left(\limsup_{n\to\infty} \log \frac{1}{n} \log \max\left\{\#F \mid F \text{ は } \Omega_f \text{ の } (n,\varepsilon)\text{-分離的な部分集合 }\right\}\right) \tag{2.2}$$

で定義される．

位相的エントロピーと力学系次数の間には次のような等式がある．

定理 2.6 (Gromov [29], Yomdin [61])**.** $f : X \to X$ を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体 X からそれ自身への全射な**射**（つまり，f の不定集合 I_f は空集合）とする．このとき

$$h_{top}(f) = \max_{0\leq p\leq \dim X} \log \lambda_p(f)$$

が成り立つ．

Gromov, Yomdin の定理は，f が射のとき，位相的エントロピーが力学系次数によって捉えられることを示している．p 次力学系次数は，f の (p,p) コホモロジー $H^{p,p}(X)$ への作用として捉えることができる．実際，一般に $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間 V の線形変換 $\varphi : V \to V$ について，φ の**スペクトル半径**（spectral radius）を $\rho(\varphi) = \max\{|\alpha| \mid \alpha \text{ は } \varphi \text{ の固有値 }\}$ で定める．このとき，$\lambda_p(f) = \rho\left(f^*|_{H^{p,p}(X)}\right)$ となるから，$h_{top}(f) = \max_{0\leq p\leq \dim X} \log \rho\left(f^*|_{H^{p,p}(X)}\right)$ となる．

f が射と限らない支配的な有理写像のときは，位相的エントロピーと力学系次数の間には不等式が存在する．

定理 2.7 (Dinh–Sibony [21])**.** $f : X \dashrightarrow X$ を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体 X からそれ自身への支配的な**有理写像**とする．このとき

$$h_{top}(f) \leq \max_{0\leq p\leq \dim X} \log \lambda_p(f) \tag{2.3}$$

が成り立つ．

注意 2.8. 一般には，有理写像のときは (2.3) において等号は成り立たない．実際，力学系次数は双有理不変量である（つまり，X と Y が双有理で，f を Y から Y への有理写像とみなしたときの写像を g とすれば，$\lambda_p(f) = \lambda_p(g)$ が成り立つ）ことが，Dinh–Nguyên [22], Dinh–Nguyên–Truong [23] の結果から従う．一方，$h_{top}(f)$ は双有理不変量ではないことが知られている．筆者は小木曽啓示氏からこのことを教えていただいた．

2.3　1 次力学系次数と算術的次数

2.1 節では力学系次数を，2.2 節では力学系次数と位相的エントロピーの関係を紹介した．この小節では，1 次力学系次数への数論的なアプローチについて紹介したい．

K を代数体（つまり，$\mathbb{Q}$ 上の有限次拡大体），$\overline{K}$ を K の代数閉包，X を K 上の滑らかな射影代数多様体，L を X 上の直線束とする．このとき，L に付随する**高さ関数**（height function）

$$h_L : X(\overline{K}) \to \mathbb{R} \tag{2.4}$$

を定めることができる．

h_L は L から一意には決まらないが, h'_L を L に付随する別の高さ関数とすれば, $\sup_{P \in X(\overline{K})} |h_L(P) - h'_L(P)| < +\infty$ が成り立つ．すなわち，$X(\overline{K})$ 上の有界関数を法とすれば，h_L は L から一意に定まる．

h_L の定義など高さ関数の一般論については，[44], [33] や [13] などを参照してほしい．（数論力学系の教科書には [55] がある．）

本稿では，naive 高さ h_{naive} とよばれる射影空間 $\mathbb{P}^N$ 上の高さを定義しよう．以下の例 2.13，例 2.14 で 1 次力学系次数と算術的次数の関係をみるが，その例では有理点の h_{naive} 高さ（定義 2.9）しか使わない．

定義 2.9 (有理点の naive 高さ)**.** $\mathbb{P}^N$ を $\mathbb{Q}$ 上の N 次元射影空間とする．$P \in \mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ とし，$P = (x_0 : x_1 : \cdots : x_N)$ を $x_i \in \mathbb{Z}$ かつ $\mathrm{GCD}(x_0, \ldots, x_N) = 1$ と書く．このとき，

$$h_{naive}(P) := \log \max\{|x_0|, \ldots, |x_N|\}$$

で定める．

例えば，$\mathbb{P}^2$ の有理点 $(1/2 : 1/3 : 1)$ の naive 高さは $h_{naive}((1/2 : 1/3 : 1)) = h_{naive}((3 : 2 : 6)) = \log 6$ である．

注意 2.10. (1) 一般に，K を代数体とするとき，代数的点 $P \in \mathbb{P}^N(K)$ に対して，その naive 高さ $h_{naive}(P)$ が定まる．3.1 節でもう少し詳しく述べるが，M_K を K の素点からなる集合，$|\cdot|_v$ を v に付随する（正規化された） v-進ノルムとするとき，

$$h_{naive}(P) := \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_K} \log \max\{|x_0|_v, \ldots, |x_N|_v\}$$

で与えられる．

(2) $h_{naive} : \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ は，$\mathbb{P}^N(1)$ の豊富な直線束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ に付随する高さ関数である．

(3) 一般に，L を代数体 K 上の滑らかな射影代数多様体 X 上の**豊富な**直線束とし，$h_L : X(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ を L に付随する高さ関数とする．$h_L(P)$ は代数的点 $P \in X(\overline{K})$ の「**算術的な大きさ**（arithmetic size）」，「**算術的な複雑さ**（arithmetic complexity）」を測る量と考えられる．

X は代数体 K 上の滑らかな射影代数多様体，$f : X \dashrightarrow X$ は X からそれ自身への支配的な有理写像，I_f を f の不定集合とする．

$$X_f(\overline{K}) := \{P \in X(\overline{K}) \mid f^n(P) \notin I_f \text{ (for all } n \geq 0)\}$$

とおく．$X_f(\overline{K})$ は無限集合である（[1]）

力学系次数では，写像の反復合成に関する「次数」の増大度を測っていた．以下では，写像の反復合成に関する代数的点の「高さ」の増大度を測ろう．

定義 2.11 (算術的次数)**.** L を X 上の**豊富な**因子とする．このとき，$X(\overline{K})$ 上で $h_L \geq 1$ となるように h_L をとることができる．$P \in X_f(\overline{K})$ に対して

$$\overline{\alpha}_f(P) := \limsup_{n\to\infty} h_L\left(f^n(P)\right)^{1/n}$$

と定め，f の P での**算術的次数**（arithmetic degree）という．

注意 2.12. $\overline{\alpha}_f(P)$ は，P の f による反復合成に関する高さの増大度を測る量である．$\overline{\alpha}_f(P)$ は L と h_L の取り方によらないことが容易にわかる．したがって，$\overline{\alpha}_f(P)$ は，(X, f) と $P \in X_f(\overline{K})$ から決まる量である．

1 次力学系次数のときに使った例 2.3 を用いて，1 次力学系次数と算術的次数を比較しよう．

例 2.13. 例 2.3(1) のように，$f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ を 2 乗射

$$f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2)$$

とする．$L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2(1)}$ とし，h_L として $h_{naive} + 1$ をとる（$\mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{Q}})$ 上で $h_L \geq 1$ としたいため）．

(1) $P = (1 : 1 : 1)$ ととる．$f^n(P) = (1 : 1 : 1)$ であり，$h_L(f^n(P)) = h_{naive}(f^n(P)) + 1 = 1$ である．よって，$\overline{\alpha}_f(P) := \limsup_{n\to\infty} h_L\left(f^n(P)\right)^{1/n} = 1$ となる．
(2) $Q = (1 : 3 : 1)$ ととる．$f^n(Q) = (1 : 3^{2^n} : 1)$ であり，$h_L(f^n(Q)) = h_{naive}(f^n(Q)) + 1 = \log(3^{2^n}) + 1 = 2^n \log 3 + 1$ である．よって，$\overline{\alpha}_f(Q) := \limsup_{n\to\infty} h_L\left(f^n(Q)\right)^{1/n} = 2$ となる．

例 2.3(1) でみたように，f の 1 次力学系次数は $\lambda_1(f) = 2$ であった．したがって，$\overline{\alpha}_f(P) \leq \lambda_1(f)$, $\overline{\alpha}_f(Q) \leq \lambda_1(f)$ が成り立っている．

例 2.14. 例 2.3(2) のように，$g : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ を

$$f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1 x_2 : x_0 x_1 : x_2^2)$$

で定める．$L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2(1)}$ とし，h_L として $h_{naive} + 1$ をとる．

(1) $P = (1 : 1 : 1)$ ととる．$g^n(P) = (1 : 1 : 1)$ であり，$h_L(g^n(P)) = h_{naive}(g^n(P)) + 1 = 1$ である．よって，$\overline{\alpha}_g(P) := \limsup_{n\to\infty} h_L\left(g^n(P)\right)^{1/n} = 1$ となる．
(2) $Q = (1 : 3 : 1)$ ととる．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を例 2.3(2) のように Fibonacci 数列とする．$g^n(Q) = (3^{a_{n-1}} : 3^{a_n} : 1)$ であり，$h_L(g^n(Q)) = h_{naive}(g^n(Q)) + 1 = a_n \log(3) + 1$ である．よって，$\overline{\alpha}_g(Q) := \limsup_{n\to\infty} h_L\left(g^n(Q)\right)^{1/n} = (1+\sqrt{5})/2$（黄金比）となる．

例 2.3(2) でみたように，g の 1 次力学系次数は $\lambda_1(g) = (1+\sqrt{5})/2$ であった．したがって，$\overline{\alpha}_g(P) \leq \lambda_1(g)$, $\overline{\alpha}_g(Q) \leq \lambda_1(g)$ が成り立っている．

例 2.13, 例 2.14 では，いずれも算術的次数は第 1 力学系次数を超えなかった．これは一般に成り立つ．

定理 2.15 ([40])**.** $f : X \dashrightarrow X$ を，代数体 K 上の滑らかな射影代数多様体 X からそれ自身への支配的な有理写像とする．このとき，任意の $P \in X_f(\overline{K})$ に対して，

$$\overline{\alpha}_f(P) \leq \lambda_1(f)$$

が成り立つ．

算術的次数の性質をより詳しく調べよう．X を代数体 K 上の滑らかな射影代数多様体，$f : X \dashrightarrow X$ を X からそれ自身への支配的な有理写像とする．補助的に，X 上の豊富な直線束 L と，高さ関数 $h_L \geq 1$ をとる．

予想 2.16 ([54], [40])**.** (1) 任意の $P \in X_f(\overline{K})$ に対し，$\alpha_f(P) := \lim_{n\to\infty} h_L(f^n(P))$ が存在する．（つまり，$\limsup$ でなく $\lim$ が存在する．）

(2) 任意の $P \in X_f(\overline{K})$ に対し，$\alpha_f(P)$ は 代数的整数である．

(3) 与えられた (X, f) に対し，$\{\alpha_f(P) \mid P \in X_f(\overline{K})\}$ は有限集合である．

(4) $P \in X_f(\overline{K})$ は，前軌道 $O_f(P) := \{P, f(P), f^2(P), \ldots\}$ が X で Zariski 稠密であるような点とする．このとき，$\alpha_f(P) = \lambda_1(f)$ が成り立つ．

注意 2.17. 予想 2.16(1) の $\limsup$ が $\lim$ に置き換えられるということには意味がある．実際，予想 2.16(1) が成り立てば，算術的次数 $\alpha_f(x)$ は x の前軌道 $O_f(x)$ の**算術的な大きさ**を測っていることが分かる．正確に述べると，

$$\lim_{B\to\infty} \frac{\#\{y \in O_f(x) \mid h_L(y) \leq B\}}{\log B} = \frac{1}{\log \alpha_f(x)}$$

が成り立つことが分かる（$\alpha_f(x) = 1$ のときは右辺は ∞ として正しい）．予想 2.16(2) は，第 1 力学系次数における Bellon–Viallet の予想（注意 2.4(2) 参照）の算術的次数版と思える．

予想 2.16 はいくつかの場合に正しい．

定理 2.18 (Silverman [54])**.** $f : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ を，代数体 K 上の射影空間からそれ自身への monomial map とする．このとき，予想の (1)(2)(3)(4) は正しい．

定理 2.19 (K.–Silverman [41], [42])**.** $f : X \to X$ を，代数体 K 上の滑らかな射影代数多様体 X からそれ自身への全射な**射**（つまり，不定集合 I_f が空集合）とする．

(1) このとき，予想の (1)(2)(3) は正しい．

(2) 次のときは，予想 (4) も正しい．

  (a) ある豊富な直線束 L が存在して，ある正の整数 $d \geq 2$ について $f^*(L) \cong L^{\otimes d}$ となる．（**偏極付き力学系**という．定義 3.6 参照．）

  (b) $\dim X = 2$ で f は同型射である．

  (c) X はアーベル多様体，f は群の準同型写像である．

注意 2.20. (1) 定理 2.19 で (a) の場合は Call–Silverman [15] の結果から従う．定理 2.19 で (b) の場合は [37] の結果から従う．

(2) 定理 2.19(1) では，Call–Silverman [15] の標準的高さ関数の理論を，ジョルダンブロックに対する標準的高さ関数に拡張して示す．また，定理 2.19(c) の証明は，ネフな $\mathbb{R}$-因子に対する アーベル多様体の Néron–Tate の高さ関数の性質を調べることによって得られる．

(3) “**正則な**” 多項式同型 $f : \mathbb{A}^N \to \mathbb{A}^N$ を，射影空間に拡張した双有理写像 $f : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ についても，[35], [38] の結果を使うと予想の (1)(2)(3)(4) が正しいことが分かる（[41] 参照）．

3 等分布定理

数論力学系の深い結果は，**等分布定理**（equidistribution theorem）を使って得られるものが多い．等分布定理は，Yuan [62] によって，非常に一般的な設定で証明された（関連する結果については，注意 3.13 を参照されたい）．

3.1 節で Yuan [62] の結果を紹介し，3.2 節以下で等分布定理の数論力学系への応用を紹介する．具体的には，3.2 節で Yuan [62] による偏極付き力学系への応用を，3.3 節で Yuan-Zhang [63] による 2 つの偏極付き力学系への応用を，3.4 節で DeMarco–Wang–Ye [19] による楕円曲線の数論の定理への応用を紹介する．なお，筆者自身の等分布定理に関連する結果はあまりなく，注意 3.13(5) と注意 3.16 に書いたものぐらいである．

3.1 等分布定理

Yuan [62] による等分布定理を紹介するために，記号の設定をしよう．

K は代数体（すなわち, $\mathbb{Q}$ 上の有限次拡大体）とする．O_K で K の整数環を表す．$M_K^{fin} = \mathrm{Spec}(O_K)\setminus\{0\}$, $M_K^{\infty} = \{v : K \hookrightarrow \mathbb{C} \mid$ 体の埋込み $\}$ とおき，$M_K = M_K^{fin} \cup M_K^{\infty}$ とおく．M_K の元 v を K の素点とよぶことにする（$v \in M_K^{\infty}$ が実のときは，通常の呼び方と少し違うことに注意されたい）．$v \in M_K^{fin}$ のとき v を**非アルキメデス的**，$v \in M_K^{\infty}$ のとき v を**アルキメデス的**とよぶ．$v \in M_K$ に対し，K_v を K の v-進ノルム $|\cdot|_v$ による完備化を表し，$\mathbb{C}_v$ で K_v の代数閉包の完備化を表す．

X を代数体 K 上に定義された滑らかな射影代数多様体とし，L を X 上の直線束とする．K の素点 v に対して，$X_{\mathbb{C}_v} := X \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(\mathbb{C}_v)$，$L_{\mathbb{C}_v} := L \otimes_K \mathbb{C}_v$ とおく．

$X_{\mathbb{C}_v}^{\mathrm{an}}$ で $X_{\mathbb{C}_v}$ に付随する**解析空間**（analytic space）を表す．v がアルキメデス的のときは，$X_{\mathbb{C}_v}^{\mathrm{an}}$ は通常の複素解析空間 $X_v(\mathbb{C})$ である．v が非アルキメデス的のときは，$X_{\mathbb{C}_v}^{\mathrm{an}}$ は集合としては

$$X_{\mathbb{C}_v}^{\mathrm{an}} := \{(x, |\cdot|) \mid x \in X_{\mathbb{C}_v},\ |\cdot| \text{ は剰余体 } \kappa(x) \text{ のノルムで，} \mathbb{C}_v \text{ のノルムを拡張}\}$$

で与えられる $X_{\mathbb{C}_v}$ に付随する *Berkovich* 空間である（[11] 参照）．v がアルキメデス的のときも，非アルキメデス的のときも，$X_{\mathbb{C}_v}^{\mathrm{an}}$ はコンパクトハウスドルフ空間になる．

$x \in X(\mathbb{C}_v)$ に対して，$\|\cdot\|_v(x)$ は $L_{\mathbb{C}_v}(x)$ の $\mathbb{C}_v$-ノルムとする．このとき，$\|\cdot\|_v := \{\|\cdot\|_v(x)\}_{x\in X(\mathbb{C}_v)}$ とおく．

X 上の直線束 L と各素点 $v \in M_K$ 上の計量 $\|\cdot\|_v$ の組 $\overline{L} := (L, \{\|\cdot\|_v\}_{v\in M_K})$ を，**アデール計量付き直線束**という．（正確には，計量は連続であるなどの仮定を入れる．詳しくは，Zhang [66] などを参照されたい．）

さらに，L が**豊富**なときには，アデール計量付き直線束 $\overline{L}$ が**半正である**（semipositive）ということが定義できる．詳しくは，Zhang [66] などを参照されたい．おおざっぱにいえば，$\overline{L}$ が半正であるとは，$v \in M_K$ がアルキメデス的なときには，$\|\cdot\|_v$ は $L_{\mathbb{C}_v}$ の C^{∞} な正の計量の一様収束極限として表されることを要請する．$v \in M_K$ が非アルキメデス的なときには，$\|\cdot\|_v$ は (X, L) の K_v の整数環上のモデルから決まる計量の一様収束極限として表されることを仮定し，さらに，$\mathrm{Spec}(O_K)$ の Zariski 開集合 $U \neq \emptyset$ が存在して，任意の $v \in U$ 上では $\|\cdot\|_v$ は (X, L) の U 上のモデルから決まる計量であることを要請する．

以下では，X は代数体 K 上に定義された滑らかな射影代数多様体とし，L は X 上の**豊富な**直線束とする．$\overline{L} := (L, \{\|\cdot\|_v\}_{v\in M_K})$ は X 上のアデール計量付き直線束で**半正**であると仮定する．

定義 3.1 (Galois 軌跡)**.** $x \in X(\overline{K})$ に対して，x の *Galois* **軌跡**（Galois orbit）を，

$$G(x) := \{\sigma(x) \in X(\overline{K}) \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\}$$

で定める．

定義 3.2 (高さ関数)**.** アデール計量付き直線束 $\overline{L}$ に付随する高さ関数

$$h_{\overline{L}} : X(\overline{K}) \to \mathbb{R}$$

を，$x \in X(\overline{K})$ に対して，

$$h_{\overline{L}}(x) = \frac{1}{\#G(x)} \sum_{v:\text{素点}} \sum_{z \in G(x)} (-\log \|s\|_v(z)) \tag{3.5}$$

で定める．ただし，s は $G(x)$ 上で 0 にならない L の任意の有理切断であり，積公式から $h_{\overline{L}}(x)$ は s の取り方によらずに決まる．

注意 3.3. $h_{\overline{L}}$ は 2.3 節 で述べた L に付随する高さ関数である．すなわち，h_L を L に付随する高さ関数（の 1 つ）とすれば，$\sup_{x \in X(\overline{K})} |h_L(x) - h_{\overline{L}}(x)| < +\infty$ が成り立つ．$\overline{L}$ は計量が入っているので，有界関数を法にすることなく，$h_{\overline{L}}$ は $\overline{L}$ から一意的に決まっている．

さらに，次も定義される．

$\overline{L}$ をアデール計量付き直線束とするとき，各素点 v に対して，$X^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}_v}$ 上の確率測度

$$d\mu_v = \frac{c_1(\overline{L}, \|\cdot\|_v)^{\dim X}}{\deg_L(X)}$$

が定まる．これを，*Monge–Ampère* **測度**（Chambert-Loir 測度）という．$d\mu_v$ の構成については，Chambert-Loir [18] を参照されたい．

Y を $X_{\overline{K}}$ の部分多様体とする．s を L の有理切断で，Y と $\operatorname{div} s$ が固有に交わるものとする．このとき，Y に関する次元に関する帰納法で，

$$h_{\overline{L}}(Y) = h_{\overline{L}}(Y \cdot \mathrm{div}) - \sum_{v \in M_K} \int_{X_v^{\mathrm{an}}} \log \|s\|_v \, c_1\left(\overline{L}, \|\cdot\|_v\right)^{\dim Y} \wedge \delta_Y$$

によって，Y の高さ $h_{\overline{L}}(Y) \in \mathbb{R}$ を定めることができる（例えば，[64] を参照されたい）．

定義 3.4 (高さの小さい点からなる生成的な点列)**.** $X, \overline{L}$ は上の通りとする．$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset X(\overline{K})$ が**高さの小さい点からなる生成的な**点列（generic sequence of small height）であるとは，次の 2 条件を満たすときにいう．

(i) $\lim_{m\to\infty} h_{\overline{L}}(x_m) = h_{\overline{L}}(X)$ が成り立つ．

(ii) 任意の $X_{\overline{K}}$ の真の部分多様体 Y に対して，ある m_0 が存在して，任意の $m \geq m_0$ に対して $x_m \notin Y$ となる．

$x \in X(\overline{K})$ とする．K の各素点 v に対して，$G(x) = \{\sigma(x) \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\}$ は $X^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}_v}$ の有限集合とみなすことができる．そこで，

$$\mu_{v,x} := \frac{1}{\#G(x)} \sum_{z \in G(x)} \delta_z \quad (\delta_z \text{ は Dirac 測度})$$

とおく．$\mu_{v,x}$ は $X_{\mathbb{C}_v}^{\mathrm{an}}$ 上の確率測度を定める．

以上の準備のもとに，（ようやく）Yuan [62] による等分布定理を述べることができる．

定理 3.5 (Yuan [62], 等分布定理)**.** K を代数体, X を K 上に定義された滑らかな射影代数多様体，L を X 上の豊富な直線束とする．$\overline{L} := (L, \{\|\cdot\|_v\}_{v \in M_K})$ は，X 上の半正なアデール計量計量付き直線束とする．$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset X(\overline{K})$ を高さの小さい点からなる生成的な点列とする．このとき，K の各素点 v に対して，$X_{\mathbb{C}_v}^{\mathrm{an}}$ 上で，$\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ の Galois 軌道に付随する確率測度 μ_{v,x_m} は Monge–Ampère 測度 $d\mu_v = \frac{c_1(\overline{L}, \|\cdot\|_v)^{\dim X}}{\deg_L(X)}$ に弱収束する．

3.2 偏極付き力学系への応用

Yuan [62] によって与えられた，等分布定理の偏極付き力学系への応用を紹介しよう．

定義 3.6 ([64] 参照)**.** X を滑らかな射影代数多様体, $f : X \to X$ を X からそれ自身への射とする．X 上の**豊富な**直線束 L が存在して，ある整数 $d \geq 2$ に対して $f^*L \cong L^{\otimes d}$ となるとき，(X, f, L) を **偏極付き力学系**（polarized dynamical system）という．

例 3.7. (1) A をアーベル多様体，$[2] : A \to A$ を $[2]$-倍射とする．L を豊富で対称な（すなわち，$[-1]^*L \cong L$ である）直線束とすれば，$[2]^*L \cong L^{\otimes 4}$ となるから，$(A, [2], L)$ は偏極付き力学系である．

(2) $f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ を次数が 2 以上の射とするとき，$(\mathbb{P}^N, f, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$ は偏極付き力学系である．

さて，K は代数体とし，K 上の**偏極付き力学系** (X, f, L) を考える．すなわち，X は K 上に定義された滑らかな射影代数多様体で，$f; X \to X$ は X からそれ自身への射であり，L は X 上の豊富な直線束で，ある整数 $d \geq 2$ が存在して，同型 $\varphi : f^*L \cong L^{\otimes d}$ が存在するとする．

点 $x \in X(\overline{K})$ は，$f^n(x) = f^m(x)$ となる $0 \leq m < n$ が存在するとき，f に関する**前周期点**（preperiodic point）であるという．また，$f^m(x) = x$ となる $0 < m$ が存在するとき，f に関する**周期点**（periodic point）であるという．ここでは，前周期点を主に考え，

$$\mathrm{Prep}(f) := \{x \in X(\overline{K}) \mid x \text{ は } f \text{ に関する前周期点 }\} \tag{3.6}$$

とおく．このとき，次が成立する．

命題 3.8 (Zhang [66])**.** (1) 各素点 $v \in M_K$ に対して，$\varphi_{\mathbb{C}_v} : f^*L_{\mathbb{C}_v} \cong L_{\mathbb{C}_v}^{\otimes d}$ 計量同型になる $L_{\mathbb{C}_v}$ の計量 $\|\cdot\|_{v,can}$ が唯一存在する．

(2) (1) の計量で，$\overline{L}^{can} := (L, \{\|\cdot\|_{v,can}\}_{v \in M_K})$ は **半正な**アーデル計量付き直線束になる．

(3) $\widehat{h}_f := h_{\overline{L}^{can}}$ とおくと（式 (3.5) 参照），$\widehat{h}_f$ に関する高さが 0 である点全体のなす集合は，f に関する前周期点全体のなす集合に一致する．すなわち，

$$\{x \in X(\overline{K}) \mid \widehat{h}_f(x) = 0\} = \mathrm{Prep}(f)$$

が成り立つ．

(4) X 自身の $\widehat{h}_f$ に関する高さは 0 である．すなわち，$\widehat{h}_f(X) = 0$ が成り立つ．

定義 3.9. $\widehat{h}_f := h_{\overline{L}^{can}}$ を 偏極付き力学系 (X, f, L) から定まる **標準的高さ関数**（canonical height function）とよぶ．

命題 3.8 を用いて，偏極付き力学系 (X, f, L) に Yuan の定理 3.5 を適用すると，次の系が得られる．

定理 3.10 (Yuan [62], 偏極付き力学系の等分布定理)**.** (X, f, L) を 代数体 K 上の偏極付き力学系とする．$\overline{L}^{can} := (L, \{\|\cdot\|_{v,can}\}_{v \in M_K})$ を偏極付き力学系から定まるアーデル計量付き直線束とし，$\widehat{h}_f := h_{\overline{L}^{can}} : X(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ を標準的高さ関数とする．$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset X(\overline{K})$ は生成的な点列で，$\lim_{m\to\infty} \widehat{h}_f(x_m) = 0$ を満たすとする．このとき，K の各素点 $v \in M_K$ に対して，$X_{\mathbb{C}_v}^{\mathrm{an}}$ 上で，$\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ の Galois 軌道に付随する確率測度 μ_{v,x_m} は Monge–Ampère 測度 $d\mu_{v,can} = \frac{c_1(L, \|\cdot\|_v^{can})^{\dim X}}{\deg_L(X)}$ に弱収束する．

この定理を，例 3.7 の偏極付き力学系に適用してみよう．

例 3.11 (cf. Szpiro–Ullmo–Zhang [56])**.** A を代数体 K 上に定義されたアーベル多様体，L を豊富で対称な直線束とする．例 3.7 で述べたように，このとき，$(A, [2], L)$ は偏極付き力学系になる．$(A, [2], L)$ に関する標準的高さは，（L に付随する）Néron–Tate の高さ $\widehat{h}_{NT}$ に等しい．また，[2]-倍射に関する $\overline{K}$-前周期点は，A の**捻れ点**（torsion point）に他ならない．

v を K のアルキメデス的な付値とする．$\mathbb{C}_v$ を複素数体 $\mathbb{C}$ で表し，v によって K は $\mathbb{C}$ に埋め込まれているとみなす．このとき，Monge–Ampère 測度 $d\mu_{v,can}$ はアーベル多様体 $A(\mathbb{C})$ の正規化された Haar 測度に他ならない．$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset A(\overline{K})$ は生成的な点列で，$\lim_{m\to\infty} \widehat{h}_{NT}(x_m) = 0$ を満たすとする．このとき，定理 3.10 は，$\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ の Galois 軌道に付随する確率測度 μ_{v,x_m} が，$A(\mathbb{C})$ の正規化された Haar 測度に弱収束することを示している．

例えば，A の捻れ点 $x \in A(\overline{K})$ は $\widehat{h}_{NT}(x) = 0$ を満たすので，非常におおざっぱにいえば，十分に一般の捻れ点 x を考えると，x の K 上の共役点全体は $A(\mathbb{C})$ 上でほぼ等分布していることが分かる．

例 3.12 (cf. Bilu [12])**.** K は代数体とする．$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ を 2 乗射 $(x_0 : x_1) \mapsto (x_0^2 : x_1^2)$ とする．このとき，$f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ となるから，$(\mathbb{P}^1, f, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ は偏極付き力学系である．このとき，$(\mathbb{P}^1, f, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ に関する標準的高さは，naive 高さ h_{naive} に他ならない（定義 2.9 参照）．また，$\mathbb{P}^1(\overline{K}) = \overline{K} \cup \{\infty\}$ とみるとき，Kronecker の定理より $\mathrm{Prep}(f) = \{x \in \overline{K} \mid x \text{ は } 1 \text{ のべき根 }\} \cup \{0, \infty\}$ である．

$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{P}^1(\overline{K})$ は生成的な点列で，$\lim_{m\to\infty} \widehat{h}_{naive}(x_m) = 0$ を満たすとする．例えば，相異なる 1 のベキ根からなる点列 $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ はこのような点列である．

(1) v を K のアルキメデス的な付値とする．$\mathbb{C}_v$ を複素数体 $\mathbb{C}$ で表し，v によって K は $\mathbb{C}$ に埋め込まれているとみなす．このとき，Monge–Ampère 測度 $d\mu_{v,can}$ は単位円周 $\{z = e^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le 2\pi\}$ 上の正規化された Haar 測度 $\frac{d\theta}{2\pi}$ に他ならない．したがって，定理 3.10 は，$\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ の Galois 軌道に付随する確率測度 μ_{v,x_m} が，単位円周上の正規化された Haar 測度 $\frac{d\theta}{2\pi}$ に弱収束することを示している．

例えば，$K = \mathbb{Q}$ とし，x_m を 1 の原始 m 乗根としよう．このとき，x_m の $\mathbb{Q}$ 上の共役点は
$$G(x_m) = \left\{ \exp\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \in \mathbb{C} \;\middle|\; 1 \le k \le m,\ \mathrm{GCD}(k, m) = 1 \right\}$$
で与えられる．そして $m \to \infty$ のとき，$G(x_m)$ は，単位円周 $\{|z| = 1\}$ 上に（Haar 測度に関して，弱収束の意味で）等分布している．

(2) v が非アルキメデス的な付値とする．このとき，Monge–Ampère 測度 $d\mu_{v,can}$ は単位円板 $\{|z|_v \le 1\}$ に対応する Berkovich 空間 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_v}^{1\mathrm{an}}$ の 1 点（Gauss 点）に台をもつ Dirac 測度になる．したがって，定理 3.10 は，$\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ の Galois 軌道に付随する確率測度 μ_{v,x_m} が，$\mathbb{P}_{\mathbb{C}_v}^{1\mathrm{an}}$ の Gauss 点に台をもつ Dirac 測度に弱収束することを示している．

注意 3.13. (1) v がアルキメデス的のとき，アーベル多様体上の等分布定理は Szpiro–Ullmo–Zhang [56] によって Arakelov 幾何を使ってはじめて証明された（例 3.11 参照）. Ullmo [60] と Zhang [65] は，このアーベル多様体上の等分布定理を使って，Bogomolov 予想の証明を与えた.

(2) 例 3.12 は，アーベル多様体上の等分布定理の $\mathbb{G}_m$ 版とみなせる．v がアルキメデス的のとき，$\mathbb{G}_m^N$ 上の等分布定理は Bilu [12] によって証明された.

(3) 次元が 1 のときの，定理 3.5 にあたる等分布定理は，Baker–Rumely [4], Chambert-Loir [18], Favre–Rivera-Letilier [25] によって証明された．それ以前に，Autissier [2], Baker–Hsia [3] も関連する結果を証明している．奥山 [48] も参照されたい.

(4) Yuan の定理 3.5 は，Arakelov 幾何を使って等分布定理を非常に一般的な設定で証明している．ただし，次元が 1 のときは，定式化が異なり証明も違うので，[4] や [25] の結果を完全には含んでいない.

(5) 筆者自身の等分布定理に関連する結果はあまりないが, $N \geq 2$ のとき, 偏極付き力学系 $(\mathbb{P}^N, f, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$ について等分布定理が成り立つか分かっていなかった時期に，[34] で，v がアルキメデス的のとき，高次元の Lattè 写像という $\mathbb{P}^N$ の特別な射 f については等分布定理が成り立つことを指摘した（[56] の結果から従う）．また，[36] では Yuan の定理 3.10 を利用した.

3.3 2 つの偏極付き力学系への応用

この小節では，Yuan–Zhang [63] による 2 つの偏極付き力学系への等分布定理の応用を紹介したい.

定理 3.14 (Yuan–Zhang's unlikely intersection [63])**.** X は代数体 K 上の滑らかな射影多様体で，L は X 上の**豊富な**直線束とする．$f : X \to X$ と $g : X \to X$ はともに，(X, L) に関して偏極付き力学系になっているとする（すなわち，ある整数 $d_f \geq 2$ と $d_g \geq 2$ が存在して，$f^*L \cong L^{\otimes d_f}$, $g^*L \cong L^{\otimes d_g}$ が成り立つとする）．このとき，次は同値になる.

(i) $\mathrm{Prep}(f) \cap \mathrm{Prep}(g)$ は X でザリスキー稠密である．（ここで，$\mathrm{Prep}(f)$ は f に関する前周期点全体のなす集合である．(3.6) 参照．）

(ii) $\mathrm{Prep}(f) = \mathrm{Prep}(g)$ が成り立つ.

(iii) 標準的高さ関数 $\widehat{h}_f$ と $\widehat{h}_g$ は $X(\overline{K})$ 上で一致する．（$\widehat{h}_f$ の定義は定義 3.9 参照.）

定理 3.14 を，$\mathbb{P}^1$ の 2 乗射を用いて例示してみよう.

例 3.15. K は代数体で，$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ は 2 乗射 $(x_0 : x_1) \mapsto (x_0^2 : x_1^2)$ とする．例 3.12 で説明したように，このとき，$\widehat{h}_f$ は naive 高さ h_{naive} と一致し，$\mathrm{Prep}(f) = \{x \in \overline{K} \mid x \text{ は } 1 \text{ のべき根 }\} \cup \{0, \infty\}$ である.

$g : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ を次数が $d \geq 2$ 以上の射とする．このとき，定理 3.14 は次の 3 つの条件が同値であることを示している.

(i) $\mathrm{Prep}(g)$ は 1 のべき根を無数に含む.

(ii) $\mathrm{Prep}(g) = \{x \in \overline{K} \mid x \text{ は } 1 \text{ のべき根 }\} \cup \{0, \infty\}$ である.

(iii) $\widehat{h}_g$ は naive 高さ h_{naive} と一致する.

さらに，このときは，(i)(ii)(iii) は以下の条件とも同値になる（[39] 参照）.

(iv) 1 のべき根 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in K$ が存在して, g は $g(x_0 : x_1) = (\varepsilon_1 x_0^d : \varepsilon_1 x_1^d)$ または $g(x_0 : x_1) = (\varepsilon_1 x_1^d : \varepsilon_1 x_0^d)$

と表される．

Yuan–Zhang による定理 3.14 の証明の概略を見てみよう．まず，$x \in X(\overline{K})$ について，命題 3.8(3) より $\widehat{h}_f(x) = 0$ であることと $x \in \mathrm{Prep}(f)$ であることが同値であるから，

$$\text{(iii)} \Longrightarrow \text{(ii)} \Longrightarrow \text{(i)}$$

は明らかである．そこで，「(i) $\Longrightarrow$ (iii)」を示せばよい．(i) が成り立つとき，生成的な点列で $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset X(\overline{K})$ で，$\lim_{m\to\infty} \widehat{h}_f(x_m) = 0$ かつ $\lim_{m\to\infty} \widehat{h}_g(x_m) = 0$ を満たすものがとれる．よって，等分布定理 3.10 を使うと，K の各素点 v に対して，f と g の Monge–Ampère 測度 $\frac{c_1(L,\|\cdot\|_{f,v}^{can})^{\dim X}}{\deg_L(X)}$ と $\frac{c_1(L,\|\cdot\|_{f,v}^{can})^{\dim X}}{\deg_L(X)}$ が一致することが分かる．ここで，算術的 Hodge 指数定理を用いると，$c_1(L, \|\cdot\|_{f,v}^{can})$ と $c_1(L, \|\cdot\|_{g,v}^{can})$ が一致することが分かる．これから，各素点 v に対して，$\|\cdot\|_{f,v}^{can}$ と $\|\cdot\|_{g,v}^{can}$ が定数倍の違いしかないことが分かる．すると，素点 v をわたった和を考えることで，標準的高さ $\widehat{h}_f$ と $\widehat{h}_g$ が一致して（式 (3.5) 参照），(iii) が成り立つ．

注意 3.16. [39] において，筆者は Silverman と標準的高さ関数 $\widehat{h}_f$ と $\widehat{h}_g$ が一致するときにどういうことがいえるかを調べた．特に，定理 3.14 の非常に特別な場合にあたる f が 射影空間 $\mathbb{P}^N$ の d 乗射 $(x_0 : \cdots : x_N) \mapsto (x_0^d : \cdots : x_N^d)$ のときと，f が楕円曲線からくる 1 変数 4 次有理式（Lattès 写像，以下の定義 3.18 参照）のときに，(i)(ii)(iii) が同値であることを示した（1 のべき根に関する Laurent の定理と，アーベル多様体の捩れ点に関する Raunaud の定理を使う）．また，この場合には，$\widehat{h}_f = \widehat{h}_g$ となる g の具体的な形（上の例の (iv) にあたるもの）も求められる．

3.4 楕円曲線への応用

DeMarco–Wang–Ye [19] は，$\mathbb{P}^1$ の Lattès 写像（以下の定義 3.18 参照）の族のなすパラメーター空間上で等分布定理を使って，Masser–Zannier による楕円曲線についての数論の定理の別証明を与えた（さらに，Masser–Zannier の結果よりも強い主張を示した）．力学系の手法を使って，楕円曲線についての数論の定理を示すというのは非常に興味深いと思うので，この最後の小節で簡単に紹介したい．

まず，Masser–Zannier による定理を述べよう．

定理 3.17 (Masser–Zannier's unlikely intersection [49], [50])**.** $t \in \mathbb{C}, t \neq 0, 1$ に対して，E_t を，射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内で，

$$E_t : \quad y^2 z = x(x-z)(x-tz)$$

(Legendre form) で与えられる楕円曲線とする．$a \neq b \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1\}$ に対して，$P_t := (a : \sqrt{a(a-1)(a-t)} : 1)$, $\quad Q_t := (b : \sqrt{b(b-1)(b-t)} : 1)$ とおく．このとき，

$$\{t \in \mathbb{C} \mid P_t, Q_t \text{ がともに } E_t \text{ の捩れ点}\}$$

は有限集合となる．

$\sqrt{a(a-1)(a-t)}$ の取り方は二通りあるが，$(a : \sqrt{a(a-1)(a-t)} : 1)$ が E_t の捩れ点のときは，$(a : -\sqrt{a(a-1)(a-t)} : 1)$ も捩れ点になるので，定理の主張には影響しないことに注意しよう．

DeMarco–Wang–Ye [19] の結果を述べる前に，Lattès 写像の定義をする．

定義 3.18. E を楕円曲線とし，$\varphi : E \to E$ を isogeny（つまり群の全射準同形写像）とする．さらに，f は同型射ではないとしておく．φ は $[-1]$-倍射と可換であるから，φ は商空間 $E/[-1]$ 上の全射な射 $f : E/[-1] \to E/[-1]$ を導く．ここで，$E/[-1]$ は $\mathbb{P}^1$ と同型であるから，この同型を通じて f は $\mathbb{P}^1$ からそれ自身への射とみなせる．この $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ を *Lattès* **写像** とよぶ．

さて，楕円曲線 が Legendre form $E_t \subset \mathbb{P}^2$ で与えられているときには，E_t の $[-1]$-倍射は，$E_t \ni (x : y : z) \mapsto (x : -y : z) \in E_t$ で与えられる．従って，射影 $\pi : E_t \to \mathbb{P}^1$, $E_t \ni (x : y : z) \mapsto (x : z) \in \mathbb{P}^1$ を商写像 $E_t \to E_t/[-1] \cong \mathbb{P}^1$ とみなすことができる．E_t の isogeny として [2]-倍射を考えると，[2]-倍射の次数は 4 なので，これから導かれる Lattès 写像 $f_t : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ は次数 4 の射となる．具体的に計算すると，

$$f_t : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1, (x : z) \mapsto ((x^2 - tz^2)^2 : 4xz(x - z)(x - tz)) \tag{3.7}$$

である．

Lattès 族を用いると，上の Masser–Zannier の定理は次のように言い換えられる．

定理 3.19 (定理 3.17 の言い換え)**.** $t \in \mathbb{C}, t \neq 0, 1$ に対して，$f_t : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ を (3.7) で与えられる Lattès 写像とする．このとき，任意の $a \neq b \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1\}$ に対して，

$$\{t \in \mathbb{C} \mid a, b \text{ がともに } f_t \text{ の前周期点 }\}$$

は有限集合である．

$t \in \overline{\mathbb{Q}}$, $t \neq 0, 1$ に対して，$\widehat{h}_{f_t} : \mathbb{P}^1(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ を f_t に関する標準的高さとし，$\varphi(t) := \widehat{h}_{f_t}(a)$, $\psi(t) := \widehat{h}_{f_t}(b)$ とおく．このとき，φ, ψ はパラメーター空間 $(\mathbb{A}^1 \setminus \{0, 1\})(\overline{\mathbb{Q}})$ 上の関数である．DeMarco–Wang–Ye [19] は，φ, ψ について，等分布定理を用いて，Lattès 写像の族に対する上の定理 3.19（従って，定理 3.17）の別証明を与えた．

参考文献

[1] E. Amerik, *Existence of non-preperiodic algebraic points for a rational self-map of infinite order*, Math. Res. Lett. **18** (2011), no. 2, 251–256.

[2] P. Autissier, *Points entiers sur les surfaces arithmétiques*, J. Reine Angew. Math. **531** (2001), 201–235.

[3] M. Baker and L-C. Hsia, *Canonical heights, transfinite diameters, and polynomial dynamics* J. Reine Angew. Math. **585** (2005), 61–92.

[4] M. Baker and R. Rumely, *Equidistribution of small points, rational dynamics, and potential theory*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), no. 3, 625–688.

[5] E. Bedford and K. Kim, *On the degree growth of birational mappings in higher dimension*, J. Geom. Anal. **14** (2004), no. 4, 567–596.

[6] E. Bedford and K. Kim, *Periodicities in linear fractional recurrences: degree growth of birational surface maps*, Michigan Math. J. 54 (2006), no. 3, 647–670.

[7] *Degree growth of matrix inversion: birational maps of symmetric, cyclic matrices*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **21** (2008), no. 4, 977–1013.

[8] E. Bedford and K. Kim, *Dynamics of rational surface automorphisms: linear fractional recurrences* J. Geom. Anal. **19** (2009), no. 3, 553–583.

[9] M. P. Bellon, *Algebraic entropy of birational maps with invariant curves*, Lett. Math. Phys. **50** (1999), no. 1, 79–90.

[10] M. P. Bellon and C.-M. Viallet, *Algebraic entropy*, Comm. Math. Phys. **204** (1999), no. 2, 425–437.

[11] V. G. Berkovich, Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields. Mathematical Surveys and Monographs, **33**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990. x+169 pp.

[12] Y. Bilu, *Limit distribution of small points on algebraic tori*, Duke Math. J. **89** (1997), no. 3, 465–476.

[13] E. Bombieri and W. Gubler, Heights in Diophantine geometry, New Mathematical Monographs 4. Cambridge University Press, 2006.

[14] S. Boucksom, C. Favre, Charles and M. Jonsson, *Degree growth of meromorphic surface maps*, Duke Math. J. **141** (2008), no. 3, 519–538.

[15] G. Call and J. H. Silverman, *Canonical heights on varieties with morphisms*, Compositio Math. **89** (1993), no. 2, 163–205.

[16] S. Cantat, *Dynamique des automorphismes des surfaces projectives complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328** (1999), 901–906.

[17] S. Cantat, *Dynamique des automorphismes des surfaces K3*, Acta Math. **187** (2001), no. 1, 1–57.

[18] A. Chambert-Loir, *Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich*, J. Reine Angew. Math. **595** (2006), 215–235.

[19] L. DeMarco, X. Wang and H. Ye, *Torsion points and the Lattes family*, preprint, available at arXiv:1311.1792.

[20] J. Diller and C. Favre, *Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces*, Amer. J. Math. **123** (2001), no. 6, 1135–1169.

[21] T-C. Dinh and N. Sibony, *Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle*, Ann. of Math. (2) **161** (2005), no. 3, 1637–1644.

[22] T-C. Dinh and V-A. Nguyên, *Comparison of dynamical degrees for semi-conjugate meromorphic maps*, Comment. Math. Helv. **86** (2011), no. 4, 817–840.

[23] T-C. Dinh, V-A. Nguyên and T. T. Truong, *On the dynamical degrees of meromorphic maps preserving a fibration*, Commun. Contemp. Math. **14** (2012), no. 6, 1250042, 18 pp.

[24] C. Favre and M. Jonsson, *Dynamical compactifications of* $\mathbb{C}^2$, Ann. of Math. (2) **173** (2011), no. 1, 211–248.

[25] C. Favre and J. Rivera-Letelier, *Équidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective*, Math. Ann. **335** (2006), 311–361. Corrigendum: **339** (2007), 799–801.

[26] C. Favre and E. Wulcan, *Degree growth of monomial maps and McMullen's polytope algebra*, Indiana Univ. Math. J. **61** (2012), no. 2, 493–524.

[27] S. Friedland and J. Milnor, *Dynamical properties of plane polynomial automorphisms*, Ergodic Theory Dynam. Systems **9** (1989), no. 1, 67–99.

[28] V. Guedj, *Ergodic properties of rational mappings with large topological degree*, Ann. of Math. (2) **161** (2005), no. 3, 1589–1607.

[29] M. Gromov, *On the entropy of holomorphic maps*, Enseign. Math. (2) **49** (2003), no. 3-4, 217–235.

(Manuscript, 1977).

[30] B. Hasselblatt and J. Propp, *Degree-growth of monomial maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems **27** (2007), no. 5, 1375–1397. Corrigendum: **27** (2007), no. 6, 1999.

[31] J. Hietarinta and C.Viallet, *Singularity confinement and chaos in discrete systems*, Phy. Rev. Lett. **81** (1998), 325–328.

[32] J. Hietarinta and C. Viallet, *Singularity confinement and degree growth.* SIDE III—symmetries and integrability of difference equations (Sabaudia, 1998), 209–216, CRM Proc.Lecture Notes, **25**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[33] M. Hindry and J. H. Silverman, Diophantine geometry, Springer-Verlag, 2000.

[34] S. Kawaguchi, *Canonical heights, invariant currents, and dynamical eigensystems of morphisms for line bundles*, J. Reine Angew. Math. **597** (2006), 135–173.

[35] S. Kawaguchi, *Canonical height functions for affine plane automorphisms*, Math. Ann. **335** (2006), 285–310.

[36] S. Kawaguchi, *Canonical heights for random iterations in certain varieties*, Int. Math. Res. Not. **2007** (2007), Art. ID rnm023, 33 pages.

[37] S. Kawaguchi, *Projective surface automorphisms of positive topological entropy from an arithmetic viewpoint*, Amer. J. Math. **130** (2008), 159–186.

[38] S. Kawaguchi *Local and global canonical height functions for affine space regular automorphisms*, Algebra Number Theory **7** (2013), no. 5, 1225–1252.

[39] S. Kawaguchi and J. H. Silverman, *Dynamics of projective morphisms having identical canonical heights*, Proc. London Math. Soc. (3) **95** (2007), 519–544. Addendum: **97** (2008), 272.

[40] S. Kawaguchi and J. H. Silverman, *On the dynamical and arithmetic degrees of rational self-maps of algebraic varieties*, preprint, available at arXiv:1208.0815. To appear, J. Reine Angew. Math.

[41] S. Kawaguchi and J. H. Silverman, *Examples of dynamical degree equals arithmetic degree*, Michigan Math. J. **63** (2014), no. 1, 41–63.

[42] S. Kawaguchi and J. H. Silverman, *Dynamical canonical heights for Jordan blocks, arithmetic degrees of orbits, and nef canonical heights on abelian varieties*, preprint, available at arXiv:1301.4964. To appear, Trans. Amer. Math. Soc.

[43] S. Lafortune, A. Ramani, B. Grammaticos, Y. Ohta, and K. M. Tamizhmani, *Blending two discrete integrability criteria: singularity confinement and algebraic entropy.* Bäcklund and Darboux transformations. The geometry of solitons (Halifax, NS, 1999), 299–311, CRM Proc. Lecture Notes, 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[44] S. Lang, Fundamentals of Diophantine geometry, Springer, 1983.

[45] J-L. Lin, *Algebraic stability and degree growth of monomial maps*, Math. Z. **271** (2012), no. 1-2, 293–311.

[46] J-L. Lin, *Pulling back cohomology classes and dynamical degrees of monomial maps*, Bull. Soc. Math. France **140** (2012), no. 4, 533–549 (2013).

[47] K. Oguiso, *A remark on dynamical degrees of automorphisms of hyperkähler manifolds*, Manuscripta Math. **130** (2009), no. 1, 101–111.

[48] Y. Okuyama, *Adelic equidistribution, characterization of equidistribution, and a general equidistri-*

bution theorem in non-Archimedean dynamics, Acta Arith. **161** (2013), no. 2, 101–125.

[49] D. Masser and U. Zannier, *Torsion anomalous points and families of elliptic curves*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **346** (2008), no. 9-10, 491–494.

[50] D. Masser and U. Zannier, *Torsion anomalous points and families of elliptic curves*, Amer. J. Math. **132** (2010), no. 6, 1677–1691.

[51] C. T. McMullen, *Dynamics on K3 surfaces: Salem numbers and Siegel disks*, J. Reine Angew. Math. **545** (2002), 201–233.

[52] C. T. McMullen, *Dynamics on blowups of the projective plane*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. **105** (2007), 49–89.

[53] A. Russakovskii and B. Shiffman, *Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics*, Indiana Univ. Math. J. **46** (1997), no. 3, 897–932.

[54] J. H. Silverman, *Dynamical degree, arithmetic entropy, and canonical heights for dominant rational self-maps of projective space*, Ergodic Theory Dynam. Systems **34** (2014), no. 2, 647–678.

[55] J. H. Silverman, The Arithemtic of Dynamical Systems, GTM **241**, Springer, 2007.

[56] L. Szpiro, E. Ullmo and S. Zhang, *Équirépartition des petits points*, Invent. Math. **127** (1997), no. 2, 337–347.

[57] T. Takenawa, *Algebraic entropy and the space of initial values for discrete dynamical systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001), 10533–10545.

[58] T. Takenawa, *Discrete dynamical systems associated with root systems of indefinite type*, Commun. Math. Phys. **224** (2001), 657–681.

[59] T. Uehara, *Rational surface automorphisms with positive entropy*, preprint, available at arXiv:1009.2143v2

[60] E. Ullmo, *Positivité et discrétion des points algébriques des courbes*, Ann. of Math. (2) **147** (1998), no. 1, 167–179.

[61] Y. Yomdin, *Volume growth and entropy*, Israel J. Math. **57** (1987), no. 3, 285–300.

[62] X. Yuan, *Big line bundles over arithmetic varieties*, Invent. Math. **173** (2008), 603–649.

[63] X. Yuan and S. Zhang, *The arithmetic Hodge index theorem for adelic line bundles I*, preprint, available at arXiv:1304.3538.

[64] S. Zhang, *Small points and adelic metrics*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), no. 2, 281–300.

[65] S. Zhang, *Equidistribution of small points on abelian varieties*, Ann. of Math. (2) **147** (1998), no. 1, 159–165.

[66] S. Zhang, *Distributions in Algebraic Dynamics, A tribute to Professor S.–S. Chern*, Survey in Differential Geometry, vol **10**, 381-430, International Press 2006.

Minimal model theory for surfaces over an imperfect field

田中公*

0 はじめに

本稿は未発表のプレプリント [T2] について、代数学シンポジウムで講演した内容をまとめたものである。

1 主定理

定理 1.1 (主定理)**.** k を正標数の体とする。(X,Δ) を k 上の log canonical な射影曲面とする。

1. (X,Δ) に対して、MMP が成立する。つまり、因子収縮射の列があり、最後には極小モデルまたは森ファイバー空間になる。

2. もし $K_X+\Delta$ がネフなら半豊富となる。

上記 1 が極小モデルプログラムと呼ばれるもので、2 がアバンダンスと呼ばれるものである。本定理は閉体上および標数ゼロでは既に知られていた結果である。上記の定理を証明しようと思った際、まず思いつくのは次の 2 つの方法である。

a. 閉体の時の証明を適用する。

b. 閉体の場合に帰着する。

例えば、上記 1(MMP) は a の方法で証明される。実際、証明は [T1] とほとんど同じであるので割愛する。上記 2(アバンダンス) は a の方法は適用できない。例えば、閉体の場合はアルバネーゼ射やネーターの公式などを用いるが、これらは regular な曲面には適用できない（と思われる）からである。実際には、アバンダンスは b の方法によって証明される。この為の鍵は以下の定理である。

定理 1.2. k を標数 $p>0$ の体とし、X を k 上の regular な多様体とする。Y を $X\times_k k^{1/p^\infty}$ の被約構造の正規化とし、$f:Y\to X$ を誘導された射とする。すると、Y 上の有効因子 C が存在し、

$$K_Y+C=f^*K_X$$

が成立する。

上記の設定において、Y は $\mathbb{Q}$-分解的である。また f^*K_X はカルティエ因子なので、上記の等号は因子としての等号である。ただ、K_Y 自身が因子として定まっている訳ではなく、線形同値の分の不定性があるので、上記等号は因子を線形同値で割ったレベルでの等号であるというべきかも知れない。いずれにせよ、主張は Y の標準因子の方が X の標準因子より小さい、というものである。系として例えば次を得る。

系 1.3. k を標数 $p>0$ の体とし、X を k 上の regular な射影多様体とする。Y を $X\times_k k^{1/p^\infty}$ の被約構造の正規化とする。すると、不等式

$$\kappa(X,K_X)\geq\kappa(Y,K_Y)$$

が成立する。

*tanakahi@math.kobe-u.ac.jp

2 主定理の証明の概略

主定理の内、MMPは証明が閉体の時と同じなので、アバンダンスについて説明する。大ざっぱに言うと、アバンダンスの証明はマンフォードの既知の結果と定理 1.2 によって示せる。なので、定理 1.2 の証明について概観する。まず、X が幾何学的に被約なら既知の結果から従う。実際、この場合は正規化射について双対化層の挙動を追うだけで良い。なので、問題は幾何学的に被約でない場合である。被約でないゴレンシュタインなスキームが与えられて、それの被約構造を取った際、両者の双対化層を比べるのは難しい。なので、被約でないスキームが現れないようにすればよい。この為に次の補題が重要である。

補題 2.1. k を標数 $p > 0$ の体とし、k' と L を k を含む体とする。次の２つを仮定する。

- $[k' : k] = p$.
- L/k は純非分離的に閉じている。つまり、$x \in L$ かつ $x^p \in k$ ならば $x \in k$ が成立する。

すると、$L \otimes_k k'$ は体。

見ての通り、可換体に関する主張である。正直に条件を使っていけば証明できる。k を正標数の体として、X を k 上の正規な多様体とする。$L := K(X)$ として上の補題を適用する事を考える。２つ目の「L/k は純非分離的に閉じている。」という条件は $\alpha : X \to \operatorname{Spec} k$ という構造射が $\alpha_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k}$ という条件を満たせばＯＫである。なので、k を Stein 分解 $X \to \operatorname{Spec} k_1 \to \operatorname{Spec} k$ に現れる k_1 で取り換えれば、上記の条件は満たされる。すると、上記の補題は、「次数 p の純非分離拡大 k'/k によって base change したスキーム $X \times_k k'$ は integral になる」という事を主張している。よって、更に $X \times_k k'$ の正規化 X' をとる。すると、組 (X, k) から少し拡大した体上の組 (X', k') が得られた事になる。これをどんどん繰り返して、かつ適切に体拡大と取っていくと、有限回操作を行った後の組 (X'', k'') が良い性質（正確には X'' が k'' 上幾何学的に被約という性質）を満たし、あとは k'' から k^{1/p^∞} まで base change してやると結論が得られる。

3 その他の定理

定理 1.2 は綺麗な主張なので、他にも応用があるべきではないか？と考えるのは自然な事だと思う。実際に、例えば次の２つの定理が得られた。

定理 3.1. k を正標数の代数閉体とする。$f : X \to Y$ を正規な多様体の間の射影な全射で $f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ を満たすとする。K_X が $\mathbb{Q}$-カルティエとし、$K_X \equiv_f 0$ とする。もし一般ファイバーが正規でなければ、X は uniruled である。

定理 3.2. k を正標数の代数閉体とする。$f : X \to Y$ を正規な多様体の間の射影な全射で $f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ を満たすとする。X が $\mathbb{Q}$-分解的とし、$-K_X$ が f-豊富で $\rho(X/Y) = 1$ とする。すると、f の一般ファイバーは rationally chain connected である。

上記２つのファイバー空間はどちらも極小モデル理論で重要である。どちらも generic fiber を取ってから定理 1.2 や、定理 1.2 と同じ議論を適用する事によって主張が得られる。

謝辞

代数学シンポジウムで講演の機会を下さったオーガナイザーの皆様に感謝しています。

参考文献

[T1] H. Tanaka, Minimal models and abundance for positive characteristic log surfaces, to appear in Nagoya Math. J.

[T2] H. Tanaka, Minimal model theory for surfaces over an imperfect field, preprint.

SINGULARITIES OF MODULI OF STABLE SHEAVES ON SOME ELLIPTIC SURFACES

KIMIKO YAMADA

Abstract. Let X be some type of elliptic surface X over $\mathbb{C}$ with $\kappa(X) = 1$, and $M(c)$ the coarse moduli scheme of rank-two stable sheaves with Chern classes $(c_1, c_2) = (0, c)$ on X. Then $M(c)$ allows only canonical singularities. By using it, we hope eventually to calculate the Kodaira dimension of $M(c)$.

1. Introduction

Let be $\mathcal{O}(1)$ an ample line bundle on a non-singular projective surface X over $\mathbb{C}$. A torsion-free sheaf E on X is $\mathcal{O}(1)$-*stable (resp. semistable)* if for any proper subsheaf F of E one has $\chi(F(n))/\mathrm{rk}(F) < \chi(E(n))/\mathrm{rk}(E)$ (resp. $\leq$) when $n \gg 0$. There exists the coarse moduli scheme $M(c)$ of $\mathcal{O}(1)$-stable rank-two sheaves with Chern classes $(c_1, c_2) = (0, c) \in \mathrm{Pic}(X) \times \mathbb{Z}$ by Gieseker-Maruyama. If c is odd, then $M(c)$ is projective over $\mathbb{C}$. By Donaldson and Zuo, if c is sufficiently large w.r.t. X and $\mathcal{O}(1)$, then $M(c)$ is normal, l.c.i., and of dimension $\mathrm{ext}^1(E,E)^0 - \mathrm{ext}^2(E,E)^0$ with $E \in M(c)$.

In this article, we shall consider the following question, and report the following theorem.

Question 1.1. (1) How is the birational property of $M(c)$, e.g. its Kodaira dimension $\kappa(M(c))$? (2) Does $M(c)$ allow only canonical singularities?
(See Definition 2.1 for definition of terms)

Theorem 1.2. *Let X be a minimal elliptic surface over $\mathbf{P}^1$ s.t. (i) $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$, (ii) its singular fibers are either rational integral curve with one node (I_1) or multiple fiber with smooth reduction (nI_0), and (iii) X has just two multiple fibers with multiplicities $(2, m)$, where m is odd and $m \geq 3$. In particular, $\kappa(X)$ is 1. Let $\mathcal{O}(1)$ be c-suitable, that is, $\mathcal{O}(1)$ is so close to the fiber class $\mathfrak{f}$ of the elliptic fibration $X \to \mathbf{P}^1$, that $\mathcal{O}(1)$ and $\mathfrak{f}$ is not divided by any c-wall (*[1, Def. 2.1]*).*

Then $M(c)$ admits only canonical singularities.

For some history of Question 1.1, see Section 3. As explained there, this question is settled mainly in the one case where $p_g(X) \neq 0$ and one can use generically non-degenerate two-forms, or in the another case where moduli of sheaves is related to

This work was supported by the Grants-in-Aid for Young Scientists (B), JSPS, No. 23740037.

some more-clarified scheme, e.g. Hilbert scheme of points, but neither case fits the situation of Theorem 1.2. Expecting to calculate Kodaira dimension of $M(c)$ by using its original definition and Theorem 1.2, the author is now trying to estimate the dimension of pluricanonical maps of $M(c)$, and hopes to report it somewhere else. We end with notifying that such a plan worked well in the following.

Fact 1.3. [6, Y] *Let M be a moduli scheme of stable sheaves with fixed Chern classes on an Enriques surface or a hyper-elliptic surface. If its expected dimension is not less than 7, then M admits only canonical singularities. Moreover, if M is compact, then its Kodaira dimension is zero. Also the characteristic of singular points of M is obtained at* [6, Lem. 13(a)].

Notation. For a line bundle L, $\mathrm{Ext}^i(E, E \otimes L)^\circ$ denotes the kernel of trace map $\mathrm{Ext}^i(E, E \otimes L) \to H^i(L)$. Denote $\dim \mathrm{Ext}^i(E, F)$ and $\dim \mathrm{Ext}^i(E, E\otimes)^\circ$ by $\mathrm{ext}^i(E, F)$ and $\mathrm{ext}^i(E, E \otimes L)^\circ$ respectively.

2. Ideas in the proof of Theorem 1.2

Let us begin with recalling the definition of some terms.

Definition 2.1. (1) Given any variety V_0, define its *Kodaira dimension* $\kappa(V_0)$ to be $\max\{\dim \Phi_{mK_{\tilde{V}}} \mid m \in \mathbb{N}\}$, where $\tilde{V}$ is a desingularization of a completion of V_0. Kodaira dimension is birational invariant.
(2) A normal variety V is said to admit only *canonical singularities* when (i) K_V is $\mathbb{Q}$-Cartier, and (ii) if $\phi : \tilde{V} \to V$ is a desingularization with except divisors E_i, then

$$K_{\tilde{V}} = \phi^* K_V + \textstyle\sum_i a_i E_i \qquad (a_i \geq 0).$$

When V does so and V is complete, $\kappa(V)$ equals $\max\{\dim \Phi_{mK_{\tilde{V}}} \mid m \in \mathbb{N}\}$, so we need not consider its desingularization $\tilde{V}$ in calculating $\kappa(V)$.

Lemma 2.2. *Under assumptions in Theorem 1.2, any sheaf $E \in M$ satisfies that* $\mathrm{ext}^2(E, E)^\circ = \hom(E, E(K_X))^\circ \leq 1$.

The next fact results from deformation theory of sheaves and singularities theory.

Fact 2.3 ([6] Lem. 2.5.)**.** *Let E be a stable sheaf on a projective surface.*
(1) If $\hom(E, E(K_X))^\circ = 0$, then moduli M is non-singular at E.
(2) Suppose $\hom(E, E(K_X))^\circ = 1$ so $\mathrm{Hom}(E, E(K_X))^\circ = \mathbb{C} \cdot f$. Then $f : E \to E(K_X)$ define a map $H^1(f_-) : \mathrm{Ext}^1(E, E) \to \mathrm{Ext}^1(E, E(K_X))$ by $H^1(f_-)(\alpha) = f \circ \alpha - \alpha \circ f$. If $\mathrm{rk} H^1(f_-) \geq 3$, then M admits only canonical singularity at E.

Thus it's important to estimate $\mathrm{rk} H^1(f_-)$. Let $k(\mathbf{P}^1)$ denote the function field of $\mathbf{P}^1$ and $\overline{k(\mathbf{P}^1)}$ its algebraic closure. We set $\eta = \eta(\mathbf{P}^1) = \mathrm{Spec}(k(\mathbf{P}^1)), \bar{\eta} = \mathrm{Spec}((\overline{k(\mathbf{P}^1)}))$, $X_\eta = X \times_{\mathbf{P}^1} \eta$, and $X_{\bar{\eta}} = X \times_{\mathbf{P}^1} \bar{\eta}$. $X_{\bar{\eta}}$ is a nonsingular elliptic curve over $\bar{\eta}$. Any sheaf F on X induces F_η on X_η, and $F_{\bar{\eta}}$ on $X_{\bar{\eta}}$. For $E \in M(c)$, $E_{\bar{\eta}}$ is degree-zero semi-stable vector bundle on $X_{\bar{\eta}}$ since $\mathcal{O}(1)$ is c-suitable, and so Atiyah's classification of vector bundles on an elliptic curve deduces the following.

Lemma 2.4. *For $E \in M(c)$, one of the following holds:*

(A) $E_{\bar{\eta}}$ is decomposable, that is, $E_{\bar{\eta}} \simeq \mathcal{O}_{X_{\bar{\eta}}}(F) \oplus \mathcal{O}_{X_{\bar{\eta}}}(-F)$ on $X_{\bar{\eta}}$. Moreover,

(A-1) $\mathcal{O}_{X_{\bar{\eta}}}(F)$ is not rational over $k(\mathbf{P}^1)$. Let $C \to \mathbf{P}^1$ be the double cover consisting of nonsingular curves which corresponds to the stabilizer subgroup of $\mathcal{O}_{X_{\bar{\eta}}}(F)$ in $\mathrm{Gal}(\overline{k(\mathbf{P}^1)}/k(\mathbf{P}^1))$. Then $\mathcal{O}_{X_{\bar{\eta}}}(F)$ is rational over $\eta' = \mathrm{Spec}(k(C))$.

(A-2) $\mathcal{O}_{X_{\bar{\eta}}}(F)$ is rational over $k(\mathbf{P}^1)$.

(B) $E_{\bar{\eta}}$ is indecomposable on $X_{\bar{\eta}}$.

Let E be a singular point of $M(c)$, and then there exists a traceless homomorphism $f : E \to E(K_X)$ by Fact 2.3 (1). We study E and f with Lemma 2.4 in mind, and get the following.

Proposition 2.5. *Under assumptions in Theorem 1.2, any singular point $E \in M(c)$ satisfies the following: In Lemma 2.4, only Case (A-1) occurs; any traceless homomorphism $f : E \to E(K_X)$ satisfies $\det f \neq 0$; the determinant $\det f \in \Gamma(2K_X)$ induces double covers $C \to \mathbf{P}^1$ and $\gamma : Y = X \times_{\mathbf{P}^1} C \to \mathbf{P}^1$, and decompositions of $\gamma^* E$ on Y*

$$0 \longrightarrow F_\pm \longrightarrow \gamma^* E \longrightarrow G_\pm \longrightarrow 0, \tag{1}$$

that extend decompositions of $E_{\bar{\eta}}$ on $X_{\bar{\eta}}$

$$0 \longrightarrow Ker(f \pm s) \longrightarrow E_{\bar{\eta}} \longrightarrow Im(f \pm s) \longrightarrow 0,$$

where $\pm s$ are eigenvalues of $f_{\bar{\eta}} : E_{\bar{\eta}} \to E(K_X)_{\bar{\eta}} \simeq E_{\bar{\eta}}$.

To estimate the rank of $H^1(f_-) : \mathrm{Ext}^1(E,E) \to \mathrm{Ext}^1(E, E(K_X))$, we look into $RHom(F_\pm, G_\pm)$, and so on. Since only Case (A-1) occurs by Proposition 2.5, subsheaves $F_\pm \subset \gamma^* E$ do not descend to subsheaves of E. Consequently several cohomology groups coming from $RHom(F_\pm, G_\pm)$ etc. vanish, and thus we can obtain good estimation of $\mathrm{rk} H^1(f_-)$ from below. In such a way, we can prove Theorem 1.2.

3. Appendix: History of Question 1.1

Here we note some historical background of Question 1.1; refer to [4, Section 11] for more. When X is a minimal surface with $K_X = 0$, i.e. a $K3$ surface or a torus, moduli scheme M of rank-two stable sheaves is of Kodaira dimension zero by [4, Thm. 11.1.7.]. If X is a minimal surface of general type, the expected dimension of moduli scheme $\mathrm{ext}^1(E,E)^0 - \mathrm{ext}^2(E,E)^0$ is even, and $|K_X|$ contains a reduced curve, then M is of general type for $c_2 \gg 0$ by [5]. In these works, they utilize generically non-degenerate two-forms, a generalization of symplectic forms introduced by Mukai. When X is an Enriques surface or hyper-elliptic, see Fact 2.3.

Let X be an elliptic surface. When $c_1(E) \cdot \mathfrak{f}$ is odd, M is non-singular. If in addition X has just two multiple fibers, then moduli M is birationally equivalent to $\mathrm{Sym}^t(J^{e+1}(X))$ by [2, Thm. 3.14], where $c_1(E) \cdot \mathfrak{f} = 2e + 1$. This work uses the fact that $E \in M$ is obtained by a sequence of elementary transforms of a special sheaf V_0 s.t. $V_0|_f$ is stable for *every* fiber f.

When $c_1 \cdot \mathfrak{f}$ is even and X is an elliptic surface over $\mathbf{P}^1$ with just two multiple fibers (plus some conditions), then M birationally fibers over some projective space whose fibers are isomorphic to finite union of Jacobian of some hyperelliptic curves by [1, Section 7]. They construct this fibration using the spectral cover induced by a stable sheaf (cf. [3, p. 229]). Some upper bound of $\kappa(M)$ is obtained there, but $\kappa(M)$ itself is still unknown.

Question 1.1 is unsolved yet in the following cases: (a) X is an Enriques surface, but moduli of stable sheaves is not compact. (b) X is of Kodaira dimension one, but $c_1(E) \cdot \mathfrak{f}$ is even. (c) X is of general type, but conditions in [5] do not hold; for example, the expected dimension of moduli is odd, or $p_g(X) = 0$. (d) Most of results above holds when $c_2 \gg 0$. How is the case where c_2 is not sufficiently large?

References

1. R. Friedman, *Rank two vector bundles over regular elliptic surfaces*, Invent. Math. **96** (1989), no. 2, 283–332.
2. ———, *Vector bundles and* so(3)*-invariants for elliptic surfaces*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 1, 29–139.
3. ———, *Algebraic surfaces and holomorphic vector bundles*, Springer-Verlag, New York, 1998.
4. D. Huybrechts and M. Lehn, *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Friedr. Vieweg & Sohn, 1997.
5. J. Li, *Kodaira dimension of moduli space of vector bundles on surfaces*, Invent. Math. **115** (1994), no. 1, 1–40.
6. K. Yamada, *Singularities and Kodaira dimension of moduli scheme of stable sheaves on Enriques surfaces*, Kyoto J. Math. **53** (2013), no. 1, 145–153.

E-mail address: `yamada@xmath.ous.ac.jp`

Department of applied mathematics, Faculty of Science, Okayama University of Science, Okayama, Japan

2–連結な種数 3 の超楕円的代数曲線束の非超楕円的変形

村上雅亮[1]
鹿児島大学大学院理工学研究科

1，背景等

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の非特異射影代数曲面 S を考え，その上の相対極小な代数曲線束構造 $f: S \to B$ を考えよう．ここに B は複素数体 $\mathbb{C}$ 上の非特異射影代数曲線である．代数曲線束 $f: S \to B$ は一般ファイバーの種数が g のとき種数 g の代数曲線束であると言い，全ての一般ファイバーが超楕円曲線となるとき超楕円的であると言う．本講演では種数 3 の超楕円的代数曲線束を考え，全てのファイバーが 2–連結である場合[2]にこの代数曲線束が非超楕円的代数曲線束に変形するための判定法 (十分条件) を与える．

主定理を述べるには幾らか記号を用意せねばならないので，まず背景から述べよう．周知の様に代数曲線束の構造は代数曲面の研究において，古くから中心的な役割を果たしてきた．その研究においては様々なアプローチがあるが，相対標準環を通した研究は近年最も重要で活発なものの内の一つである (例えば [1], [7])．しかし相対標準環の大域構造については，局所構造に比べずっと少ない理解しかなされて来なかった．F. Catanese と R. Pignatelli は [5] において，相対標準環の大域構造を用いることにより，種数 2 の代数曲線束と種数 3 の非超楕円的代数曲線束について新しいタイプの構造定理を与えた．この結果は当該論文を含むいくつかの論文で応用されるなど有用であることが判明したので，このアプローチをより発展させるのは面白い問題である．実際，[8] において我々は種数 3 の超楕円的代数曲線束の構造定理を得た．

本講演の主定理はこの [8] の研究の続きである．そもそも超楕円曲線束は本質的には線織曲面の曲線束構造の二重被覆である．この二重被覆としての記述に頼らず相対標準環を用いることの利点の一つは，それが非超楕円的代数曲線束と比較的容易に関連づけられること[3]である．本講演の主定理は，[8] において得た超楕円曲線束を非超楕円的曲線束に関連づける試みを実行したものとなっている．

2，主定理

[1]講演の機会を頂き有り難うございました．オーガナイザーの皆様に感謝申し上げます．

[2]ファイバー F は $F = D + D'$ なる部分曲線 $D > 0$, $D' > 0$ への任意の分解について $DD' \geq 2$ となるとき「2–連結である」と言われる．

[3]これはあくまでも利点の一つに過ぎず，勿論利点はこれだけではない．実際，Catanese と Pignatelli は [5] において，種数 2 の代数曲線束についての彼らの構造定理を用いることにより，長らく不明であった第 1 Chern 数 $c_1^2 = 3$, 幾何種数 $p_g = 1$, 不正則数 $q = 1$ の一般型曲面のモジュライ空間の連結成分の個数 (= 4) を決定することに成功している．種数 2 であれば常に超楕円的となるのだから，このことからも上に述べたものがあくまで利点の一つに過ぎないことは分かるであろう．

それでは主定理を述べよう．以下 $f:S\to B$ は相対極小な種数 3 の超楕円的代数曲線束であるとし，全てのファイバーは 2-連結であるとする．

まず幾つか記号を準備する．$\omega_{S|B}$ を $f:S\to B$ の相対標準層であるとする．すなわち ω_S，ω_B をそれぞれ S, B の標準層とするとき $\omega_{S|B}=\omega_S\otimes f^*(\omega_B)^{\otimes(-1)}$ である．このとき各自然数 n に対して f による $\omega_{S|B}^{\otimes n}$ の順像 $V_n=f_*(\omega_{S|B}^{\otimes n})$ は B 上の局所自由層となる．これらを直和して得られる準連接 $\mathcal{O}_B$-可換代数の層 $\mathcal{R}(f)=\bigoplus_{m=0}^{\infty}V_n$ が f の相対標準環と呼ばれるものであった．

本稿の仮定のもとでは f が超楕円的としていたので，f の各一般ファイバーは超楕円対合を持つ．これらの超楕円対合が張り合って，S の対合 ι を定める．この ι を f の超楕円対合と呼ぶ．この ι が S の自己同型群の中で生成する部分群 $\langle\iota\rangle\simeq\mathbb{Z}/2\subset\mathrm{Aut}(S)$ は曲面 S に作用する．この作用が V_n への作用を誘導し，これが相対標準環への作用を定める．各斉次部分が ι^* に関して固有空間に直和分解するので，V_n^+, V_n^- で，それぞれ固有値 $+1$ 部分，-1 部分を表わすこととする．各 V_n^+, V_n^- の階数は Riemann–Roch の定理により簡単に計算できるが，ここでは

$$\mathrm{rk}\,V_1=\mathrm{rk}\,V_1^-=3,\quad \mathrm{rk}\,V_2^+=5,\quad \mathrm{rk}\,V_2^-=1$$

であること，そして特に V_2^- が可逆層であることのみ注意しておく．

さて $S^2(V_1)$ を V_1 の 2 次対象積とするとき，相対標準環の積構造より定まる射 $\sigma_2:S^2(V_1)\to V_2$ を考える．両辺は共に階数 6 の局所自由層である．また $\bigwedge^2 V_1$ を V_1 の 2 次交代積とするとき，層の射 $\mathfrak{c}:S^2(\bigwedge^2 V_1)\to S^2(S^2(V_1))$

$$(a\wedge b)(c\wedge d)\mapsto(ac)(bd)-(ad)(bc)$$

を考え，$S^2(\sigma_2)\circ\mathfrak{c}:S^2(\bigwedge^2 V_1)\to S^2(V_2)$ を $\mathfrak{c}:S^2(\bigwedge^2 V_1)\to S^2(S^2(V_1))$ と $S^2(\sigma_2):S^2(S^2(V_1))\to S^2(V_2)$ の合成射とする．$S^2(\sigma_2)\circ\mathfrak{c}$ は階数 6 の局所自由層から階数 21 の局所自由層への射である．このとき $S^2(\sigma_2)\circ\mathfrak{c}:S^2(\bigwedge^2 V_1)\to S^2(V_2)$ の余格 $\tilde{V}_4=\mathrm{Cok}(S^2(\sigma_2)\circ\mathfrak{c})$ が階数 15 の局所自由層であることが証明できる．

以上の準備のもと，次が本講演の主定理である．

定理 1. $f:S\to B$ を相対極小な種数 3 の超楕円的代数曲線束であるとし，全てのファイバーは 2–連結であるとする．可逆層 L_4' を $L_4'=(V_2^-)^{\otimes 2}$ で定める．今，次の 3 条件が満たされているとしよう；

1) $\dim\mathrm{Hom}(S^2(V_1), V_2^-)>\dim\mathrm{Hom}(V_2^+, V_2^-)$,
2) $h^1(\tilde{V}_4\otimes(L_4')^{\otimes(-1)})=0$,
3) S の相対極小モデル X は非特異.

このとき $f:S\to B$ の非特異な底空間 T 上の変形族 $\mathfrak{f}:\mathcal{S}\to\mathcal{B}$ であり，一般の $t\in T$ に対して t 上のファイバー $f_t:S_t\to B_t$ が種数 3 の非超楕円的代数曲線束となるものが存在する．

3，証明について

以下定理 1 の証明について少しだけ述べておく．

第一段階.
定理 1 の証明の第一段階は，全てのファイバーが 2–連結であるような種数 3 の超楕円的相対極小代数曲線束 $f : S \to B$ が与えられたとき，Catanese–Pignatelli の種数 3 超楕円束についての結果のアナログとして，$f : S \to B$ の非超楕円的変形族の構造定理をあたえることである．

目的の上で支障がないので，変形族は今回はパラメータ空間が非特異のもののみを考える．また変形族の方もスムースな変形族のみを考える．すなわち代数曲線束 $f : S \to B$ が与えられたとき，非特異代数多様体 T, 参照点 $t_0 \in T$, 曲面 S のスムースな変形族 $\pi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to T$, 曲線 B のスムースな変形族 $\pi_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to T$, 平坦固有射 $\mathfrak{f} : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ の組であり，$\pi_{\mathcal{S}} = \pi_{\mathcal{B}} \circ \mathfrak{f}$ かつ $f_0 = f : S_0 = S \to B_0 = B$ を満たすものをここでは "$f : S \to B$ の変形族" と呼ぶことにする．勿論ここに各閉点 $t \in T$ に対し $S_t = \pi_{\mathcal{S}}^{-1}(t)$, $B_t = \pi_{\mathcal{B}}^{-1}(t)$ であり，$f_t : S_t \to B_t$ は $\mathfrak{f} : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ の t 上への制限である．さらに，変形族という言葉には「全ての $t \in T$ に対して代数曲線束 $f_t : S_t \to B_t$ は相対極小でかつ全てのファイバーが 2–連結である」という条件も込めておくことにする．これは，もし全てのファイバーが 2–連結な種数 3 の超楕円的相対極小代数曲線束 $f : S \to B$ に対してその変形族が与えられれば，パラメータ空間 T を小さなものに置き換えることによりこの条件を満たす様できるので，無害な条件である．また一般の $t \in T$ に対して，$f_t : S_t \to B_t$ が非超楕円的となるとき，この変形族を "非超楕円的変形族" と呼ぶことにする．

まだ説明していない 5-tuple なる言葉を用いて，我々の構造定理は以下のものである:

定理 2. $f : S \to B$ は全てのファイバーが 2–連結である種数 3 の超楕円的相対極小代数曲線束であるとする．T を非特異代数多様体，t_0 をその一点とする．このとき，$f : S \to B$ の (T, t_0) 上の非超楕円的変形族の同型類全体の集合と「許容的な」5-*tuple* の同型類全体の集合の間に自然な全単射が存在する．

この文言の意味を明らかにする為には 5-tuple なる言葉を説明しなければならない．我々の定理における 5-tuple とは，概ね以下のようなものからなる五つ組

$$(\pi_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to T,\, \mathcal{V}_1, \tau,\, \xi,\, \delta)$$

のことである: $\pi_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to T$ は曲線 B のスムースな変形族，$\mathcal{V}_1$ は $\mathcal{B}$ の階数 3 の局所自由層，τ は $\mathcal{B}$ の正因子，ξ, δ はまだ説明しない何か．

この ξ, δ が何であるかを説明するには，超楕円的変形族が与えられたときにどの様に 5–tuple を得るかを見るのが良い．超楕円束 $f : S \to B$ の $(T,\, t_0)$ 上の非超楕円的変形族 $\mathfrak{f} : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ が与えられたとする．このとき $\mathfrak{f}$ の

相対標準層 $\omega_{\mathcal{S}|\mathcal{B}}$ を $\omega_{\mathcal{S}|\mathcal{B}} = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(K_{\mathcal{S}} - \mathfrak{f}^* K_{\mathcal{B}})$ で定める．ここに $K_{\mathcal{S}}$, $K_{\mathcal{B}}$ はそれぞれ $\mathcal{S}$, $\mathcal{B}$ の標準因子である．また各自然数 n に対して $\mathcal{V}_n = f_*(\omega_{\mathcal{S}|\mathcal{B}}^{\otimes n})$ とおくと $\mathcal{V}_n$ は B 上の局所自由層になることが分かる．普通の代数曲線束の相対標準環の場合と同様，直和 $\mathcal{R}(\mathfrak{f}) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{V}_n$ は次数付き $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$–可換代数の層となるので，これを $\mathfrak{f}$ の相対標準環と呼ぶことにする．

$$\bar{\sigma}_2 : S^2(\mathcal{V}_1) \to \mathcal{V}_2$$

を $\mathcal{R}(\mathfrak{f})$ の積構造から定まる自然な射とするとき，次を示すことが出来る．

補題 1. $\mathcal{B}$ 上に次の 2 条件を満たす正因子 τ が存在する :

1) 余核 $\operatorname{Cok}\bar{\sigma}_2$ は可逆 $\mathcal{O}_\tau$–加群,

2) $f_t : S_t \to B_t$ が超楕円的である為の必要十分条件は $B_t \subset \sup \tau$.

以上を見れば非超楕円的変形族が与えられたとき，それに付随する 5-tuple の最初の三つの成分がどうきまるかは明らかであろう．一つ目の成分は非超楕円的変形族にあらわれる $\pi_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to T$ であり，二つ目の成分は相対標準環 $\mathcal{R}(\mathfrak{f})$ の 1 次部分，そして三つ目の成分は補題 1 に現れる正因子 τ である．

だからあとは四つ目の成分 ζ と五つ目の成分 ξ だけ分かれば良い．四つ目の成分 ζ は簡単で，これは $\bar{\sigma}_2 : S^2(\mathcal{V}_1) \to \mathcal{V}_2$ から定まる拡大類

$$0 \to S^2(\mathcal{V}_1) \to \mathcal{V}_2 \to \mathcal{T}_2 \to 0$$

である．より正確には $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{T}_2, S^2(\mathcal{V}_1))$ を $\mathcal{T}_2$ の自己同型群の作用で割った空間の中で上の拡大が定める類のことである．

あとは五つ目の成分 ξ のみ見れば良い．これを見る為に，$\mathcal{T}_2 = \operatorname{Cok}\bar{\sigma}_2$ が可逆 $\mathcal{O}(\tau)$–加群であったので $\operatorname{supp}\tau$ の外では $\bar{\sigma}_2$ は同型であることに注意する．従って $\bar{\sigma}_2$ より誘導される有理写像 $\bar{\sigma}_2^* : \mathbb{P}(\mathcal{V}_2) - - \to \mathbb{P}(S^2(\mathcal{V}_1))$ は双有利写像である．そこで Veronese embedding $\mathbb{P}(\mathcal{V}_1) \to \mathbb{P}(S^2(\mathcal{V}_1))$ と $\bar{\sigma}_2^*$ の逆有理写像 $(\bar{\sigma}_2^*)^{-1} : \mathbb{P}(S^2(\mathcal{V}_1)) - - \to \mathbb{P}(\mathcal{V}_2)$ の合成 $\mathbb{P}(\mathcal{V}_1) - - \to \mathbb{P}(\mathcal{V}_2)$ を rational Veronese map と呼ぶことにする．この rational Veronese map の像を $\mathcal{W}$ とするとき，次が成立する．

補題 2. $\mathcal{S}$ の標準モデル $\mathcal{X} = \mathcal{P}roj\mathcal{R}(\mathfrak{f})$ は $\mathcal{W}$ の超曲面である．

この補題のもとに ξ が何であるかが説明出来る．ここではきっちりしたことは書かないが，ξ は $\mathcal{W}$ 内での定義方程式にあたる「何か」である．

以上で我々の場合に 5-tuple が何であるかが分かった．しかし以上で見たのは非超楕円的変形族が与えられた時にそれに対し 5-tuple をどう付随させるかという部分である．実際にはまずこの「付随する 5-tuple」の受け皿となる様に抽象的に 5-tuple の概念を定める．そしてその抽象的に定義された 5-tuple に「許容性 (admissibility)」なる概念を導入し,「非超楕円的変形族に付随する 5-tuple が許容的であること」，逆に「許容的な 5-tuple に対し，必

ずある非超楕円的変形族が存在して，この 5-tuple はその非超楕円的変形族に付随するものとして実現されること」，そして「許容的な 5-tuple に対して対応する非超楕円的変形族の同型類が唯一つに定まること」を示したのが定理 2 である．

第二段階.

証明の第二段階は定理 1 の三つの条件を満たす $f : S \to B$ が与えられたときこの三つの条件を用いてパラメータ空間 (T, t_0) とその上の許容的 5-tuple を構成することである．この部分は本稿では説明しないが，以下の注意だけしておく．

定理 1 に於いて条件 1) は拡大

$$0 \to S^2(\mathcal{V}_1) \to \mathcal{V}_2 \to \mathcal{T}_2 \to 0$$

を構成できる様するための，すなわち 5-tuple の四つ目の成分 ζ を得る為の，条件である．一方条件 2) は曲面 S の標準モデル X のある空間の中での方程式が変形族 $\mathcal{S}$ の標準モデル $\mathcal{X}$ の $\mathcal{W}$ の中での方程式に伸びる様する為の，すなわち 5-tuple の五つ目の成分 ξ を得る為の，条件である．最後の条件 3) は本質的な条件ではなく，定理の形をもう少し精密な形に書き換えれば実質的に不要なものである．

4，応用

最後に応用について述べて本稿を終える．定理 1 を用いて次の様なことが出来た: 第 1 Chern 数 $c_1^2 = 8$, 幾何種数 $p_g = 4$, 不正則数 $q = 0$ の一般型曲面の 32 次元の族を構成し，この族がモジュライ空間の中でなす stratum を $M_0^\sharp$ と置く時，Bauer-Pignatelli [4] に出てくる 28 次元の stratum M_0 がモジュライ空間のなかで $M_0^\sharp$ の境界上にあることを示すことができた．特に我々の構成した第 1 Chern 数 $c_1^2 = 8$, 幾何種数 $p_g = 4$, 不正則数 $q = 0$ の一般型曲面は Bauer-Pignatelli の stratum M_0 のものと可微分同相である．

方法は，我々の $M_0^\sharp$ の一般の点に対応する曲面は種数 3 の非超楕円曲線束構造を持ち，一方 Bauer–Pignatelli の M_0 の一般の点に対応する曲面は種数 3 の超楕円曲線束構造を持つので，この Bauer–Pignatelli の一般の点に対応する曲面の超楕円曲線束を我々の定理 1 を用いて非超楕円曲線束に変形し，この変形で得られた曲面が stratum $M_0^\sharp$ の点に対応することを証明する，というものである．

この様に我々の主定理はモジュライ空間の strata を張り合わせることに用いることが出来る．実際，本稿の最初では我々の主定理の背景を Catanese–Pigantelli のアプローチの一般化の仕事の続きであると述べたが，実は我々の主定理は元々モジュライ空間の strata を張り合わせてモジュライ空間の連結成分の個数を調べる為の道具を得ることを企図して研究したものでもある．

幾何種数 $p_g = 4$ は標準像が曲面になりうる最小の幾何種数の場合であり，そのため標準写像の双有理性に関連して Enriquess の頃から研究されて

来た．現在では $c_1^2 \leq 7$ まで曲面の完全な分類があり，曲面の分類という意味では $c_1^2 = 8$ が次の目標である．しかし実は $c_1^2 = 6, 7$ の場合もモジュライ空間の連結性分の個数は解決されておらず，これらを解決するのは興味深い問題である．$c_1^2 = 6$ の問題については Horikawa [6] がモジュライ空間の連結成分の個数が高々 3 であることを示して以来，漸く [3] において高々 2 であることが示された．一方 $c_1^2 = 7$ の場合については I. Bauer が [2] において曲面を完全に分類すると同時にモジュライ空間の連結成分が高々 2 であることを証明している．この $c_1^2 = 7$ の場合一方の stratum の点に対応する曲面に種数 3 の超楕円曲線束が入り，もう片方の stratum に対応する曲面に種数 3 の非超楕円曲線束構造が入る．そこで定理 1 より精密な判定法を作って，$c_1^2 = 7$ の場合にモジュライ空間の連結性を示すということが考えられる．実は本当はこれやりたいことなのであるが，今回の講演では現時点で出来ているところまでの結果で講演した．すなわちまず第一段階として試みに荒い定理を作ってみたのが定理 1 であり，この定理を用いて $c_1^2 = 7$ の場合より簡単な $c_1^2 = 8$ の場合で試してみたのが上に述べた応用である．

References

[1] Ashikaga, T., Konno, K. Global and local properties of pencils of algebraic curves, Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka), *Adv. Stud. Pure Math.,36, Math. Soc. Japan, Tokyo*, (2002), 1–49.

[2] Bauer, I. Surfaces with $K^2 = 7$ and $p_g = 4$, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **152** (2001), no. 721.

[3] Bauer, I., Catanese, F., Pignatelli, R. The moduli space of surfaces with $K^2 = 6$ and $p_g = 4$, *Math. Ann.*, **336** (2006), no. 2, 421–438.

[4] Bauer, I., Pignatelli, R. Surfaces with $K^2 = 8$, $p_g = 4$ and canonical involution, *Osaka J. Math.*, **46** (2009), no. 3, 799–820.

[5] Catanese, F., Pignatelli, R. Fibrations of low genus, I, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **39** (2006), 1011–1049.

[6] Horikawa, E. Algebraic surfaces of general type with small c_1^2. III, *Invent. Math.*, **47** (1978), no. 3, 209–248.

[7] Konno, K. 1-2-3 theorem for curves on algebraic surfaces, *J. Reine. Angew. Math.*, **533** (2001), 171–205.

[8] Murakami, M. Notes on hyperelliptic fibrations of genus 3, I, preprint.

代数群と被覆群上の保型表現

池田保 （京都大学大学院理学研究科）

1 半整数の重さの保型形式の志村対応

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は一次分数変換

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad z \in \mathfrak{h}, \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

により上半平面 $\mathfrak{h}$ に作用しているものとする．4 の倍数 N に対して合同部分群 $\Gamma_0(N)$ を

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \middle| c \equiv 0 \bmod N \right\}$$

により定義する．テータ函数 $\theta(z)$ を

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} \qquad q = e^{2\pi\sqrt{-1}z},\ z \in \mathfrak{h}$$

により定義する．このとき，$\Gamma_0(4)$ の保型因子 $j(\gamma, z)$ で

$$\theta(\gamma(z)) = j(\gamma, z)\theta(z) \qquad z \in \mathfrak{h}, \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$$

を満たすものが存在する．この保型因子は

$$j(\gamma, z)^2 = \left(\frac{-1}{d}\right)(cz+d) \qquad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$$

を満たす．

整数 $k > 0$ に対して，上半平面上の正則函数 $f(z)$ が $\Gamma_0(N)$ に関する重さ $k + (1/2)$ の保型形式であるとは

$$f(\gamma(z)) = j(\gamma, z)^{2k+1} f(z) \qquad \forall \gamma \in \Gamma_0(N)$$

なる式を満たし，さらにすべてのカスプで正則であることをいう．さらに，すべてのカスプで零点をもつようなものを重さ $k+(1/2)$ のカスプ形式といい，その全体を $S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(N))$ で表す．

N を割らない素数 p に対して Hecke 作用素 $T_{k+(1/2)}(p^2)$ が $S_{k+1/2}(\Gamma_0(N))$ に作用する．

一方，整数 $M>0$ に対して重さ $2k$, レベル M のカスプ形式の空間 $S_{2k}(\Gamma_0(M))$ には通常の Hecke 作用素 $T_{2k}(p)$ $(p\nmid M)$ が作用する．

定理 1.1 (志村)**.** $k\geq 2$ とする．M を N によって定まるある整数とする．（M は N の適当なベキの約数であるようにとれる。）$f\in S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(N))$ をすべての素数 $p\nmid N$ に関する Hecke 作用素の同時固有関数とする．

$$T_{k+(1/2)}(p^2)f=\lambda_p f \qquad p\nmid N.$$

このとき，Hecke 作用素 $T_{2k}(p)$ の同時固有関数 $g\in S_{2k}(\Gamma_0(M))$ で

$$T_{2k)}(p)g=\lambda_p g \qquad p\nmid N.$$

を満たすものが存在する．

この対応を志村対応という．

2 メタプレクティック群

整数の重さを持つ保型形式はアデール群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 上の保型形式とみなすことができるが，半整数の重さを持つ保型形式は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 上の関数とみなすことはできない．半整数の重さを持つ保型形式を扱うには $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}$ を考える必要がある．（一般に半整数の重さを持つ Siegel 保型形式を考えるには $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の被覆群 $\widetilde{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}$ を考える必要がある．）

F を局所体とするとき，$\mathrm{SL}_2(F)$ には唯一の自明でない 2 重被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ が存在する．これは次のようにして構成される．$g\in\mathrm{SL}_2(F)$ に対して

$$\mathbf{x}(g)=\begin{cases} c & c\neq 0 \text{ のとき} \\ d & c=0 \text{ のとき}\end{cases}$$

とおき

$$\mathbf{c}(g_1,g_2)=\langle\frac{\mathbf{x}(g_1)}{\mathbf{x}(g_1g_2)},\frac{\mathbf{x}(g_2)}{\mathbf{x}(g_1g_2)}\rangle \qquad g_1,g_2\in\mathrm{SL}_2(F)$$

と定義する．ここで $\langle\ ,\ \rangle$ は F における Hilbert 記号である．このように定義すると $\mathbf{c}(g_1, g_2)$ は $\mathrm{SL}_2(F)$ 上の 2 コサイクルとなることが知られている．これを久保田 2 コサイクルという．久保田 2 コサイクルによって定まる $\mathrm{SL}_2(F)$ の 2 重被覆群をメタプレクティック群といい $\widetilde{\mathrm{SL}_2}(F)$ で表す．$F \not\equiv \mathbb{C}$ ならこの被覆は自明でない．

F の剰余標数が奇数ならばこの被覆群は $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}_F)$ 上で分裂する．ここで $\mathfrak{o}_F$ は F の整数環である．一方，F の剰余標数が 2 ならば被覆 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)} \to \mathrm{SL}_2(F)$ は $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}_F)$ 状では分裂しないが

$$\Gamma_0(4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}) \,\middle|\, c \in 4\mathfrak{o}_F \right\}$$

上では分裂することが知られている．半整数の重さを持つ保型形式を考えるとき，レベルが 4 の倍数のものを考えなければならないのはこのことが背景にある．

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の 2 重被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ で，すべての素点 v に対して $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_v) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の逆像が $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_v)}$ と同型になるようなものが（同型を除いて）ただ一つ存在する．すなわち，次の図式を可換にするような被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}$ が同型を除いてただ一つ存在する．

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_v)} & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})} \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_v) & \longrightarrow & \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})
\end{array}$$

これを $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ のメタプレクティック被覆群という．この被覆群は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ 上で分裂する．

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})} \\
\big\downarrow \| & & \big\downarrow \\
\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})
\end{array}$$

これにより $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ は $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}$ の部分群と考えられる．半整数の重さを持つ保型形式は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})\backslash\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}$ 上の関数と考えることができる．

3 Waldspurger-Shimura 対応

F を局所体，$\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ を自明でない加法指標とする．$\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ の許容表現 $\tilde{\pi}$ は $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)} \to \mathrm{SL}_2(F)$ の核 $\{\pm 1\}$ が非自明な指標により作用するとき genuine であるという．$\tilde{\pi}$ を $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ の genuine な既約許容表現とする．$\tilde{\pi}$ からテータ対応によって得られる

$\mathrm{PGL}_2(F)$ の許容表現を $\tau = \theta(\tilde{\pi}, \theta)$ とする．$\theta(\tilde{\pi}, \psi) \neq (0)$ となるための必要十分条件は $\tilde{\pi}$ が ψ-Whittaker model を持つことである．また $\xi \in F^\times$ に対して

$$\psi_\xi(x) = \psi(\xi x), \qquad \chi_\xi(t) = \langle \xi, t \rangle, \qquad x \in F, t \in F^\times$$

とおく．このとき $\theta(\tilde{\pi}, \psi_\xi) \otimes \chi_\xi \neq (0)$ となる $\xi \in F^\times$ が存在し，$\theta(\tilde{\pi}, \psi_\xi) \otimes \chi_\xi$ の同型類はそのような ξ の取り方によらずに定まる．この表現 $\theta(\tilde{\pi}, \psi_\xi) \otimes \chi_\xi \neq (0)$ を $\mathrm{Wald}(\tilde{\pi}, \psi)$ で表す．これについて次のようなことが知られている．

(1) $\tilde{\pi}$ が主系列表現ならば $\tau = \mathrm{Wald}(\tilde{\pi}, \psi)$ も主系列表現である．このとき $\mathrm{Wald}(\tilde{\pi}', \psi) = \tau$ となる $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ の genuine な既約許容表現 $\tilde{\pi}$ は $\tilde{\pi}$ しかない．

(2) $\tilde{\pi}$ が離散系列表現ならば $\tau = \mathrm{Wald}(\tilde{\pi}, \psi)$ も離散系列表現である．このとき $\mathrm{Wald}(\tilde{\pi}', \psi) = \tau$ となる $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ の genuine な既約許容表現 $\tilde{\pi}$ は 2 つある．それらを $\tilde{\pi}^+, \tilde{\pi}^-$ とする．ただし $\tilde{\pi}^+ = \tilde{\pi}$ とする．

F を代数体，$\mathbb{A}$ を F のアデール環とする．$\psi : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times$ を自明でない加法指標とする．$\tilde{\pi} = \otimes_v \tilde{\pi}_v$ を $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$ の既約尖点保型表現とする．$\tilde{\pi}$ の表現空間に属する保型形式は 1 変数のテータ関数と直交すると仮定する．このとき $\tau = \mathrm{Wald}(\tilde{\pi}, \psi) := \otimes_v \mathrm{Wald}(\tilde{\pi}_v, \psi_v)$ は PGL2($\mathbb{A}$) の既約許容表現である．

S を $\tilde{\pi}_v$ が離散系列表現となるような F の素点の集合とする．$\tilde{\pi}'$ を別の既約尖点保型表現で $\mathrm{Wald}(\tilde{\pi}', \psi) = \mathrm{Wald}(\tilde{\pi}, \psi)$ とするとき次が成り立つ．

(1) $v \notin S$ ならば $\tilde{\pi}' = \tilde{\pi}$ である．

(2) $v \notin S$ ならば $\tilde{\tau}' = \tilde{\pi}^+, \tilde{\pi}^-$ である．$\tilde{\pi}' = \tilde{\pi}^{\varepsilon_v}$, $\varepsilon_v \in \{\pm 1\}$ とすると

$$\prod_{v \in S} \varepsilon_v = 1$$

が成り立つ．

逆にこの条件 (1), (2) を満たす $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$ の既約許容表現 $\tilde{\pi} = \otimes_v \tilde{\pi}_v$ は $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$ の既約尖点保型表現である．

4　被覆群の構成

前節でみたように，メタプレクティック 2 重被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ 上には自然な保型形式が存在し，美しい理論を展開することができる．同様の理論をより一般的な被覆群で構成できないかと考えるのは自然なことである．ところが志村五郎先生が注意している

ように分母が 3 以上の分数の重さを持つ保型形式を考えたのでは同様の理論を作ることはできない．実際 $n > 2$ ならば $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ 上分裂するような $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の n 重被覆群で n より低い次数の被覆群から誘導されないようなものは存在しない．また，$p \not\equiv 1 \bmod n$ ならば $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の n 重被覆群で n より低い次数の被覆群から誘導されないようなものは存在しない．志村先生の注意の背景にはこのような事情がある．

一般に被覆群上の保型形式で意味のあるものを得るためには，代数体 F 上に定義された代数群 G のアデール群 $G(\mathbb{A}_F)$ の被覆群 $\widetilde{G(\mathbb{A}_F)}$ で $G(F)$ 上分裂するようなものを探す必要があると考えられる．G が分裂型の単連結な単純代数群の場合にはこの問題は古くから考察されていた．

体 F 上の K 群 $K_2(F)$ を

$$K_2(F) = F^\times \otimes F^\times / \langle x \otimes (1-x) \,|\, x \in F,\, x \neq 0, 1\rangle$$

により定義する．ここで $\langle x \otimes (1-x) \,|\, x \in F,\, x \neq 0, 1\rangle$ は $\{x \otimes (1-x) \,|\, x \in F,\, x \neq 0, 1\}$ で生成される $F^\times \otimes F^\times$ の部分群である．自然な双線型写像

$$F^\times \times F^\times \to K_2(F)$$

を普遍記号写像という．この写像による (x, y) の像を $\langle x, y\rangle$ で表す．定義により $\langle x, 1 - x\rangle = 1 \ \ (x \neq 0, 1)$ である．これを記号関係式という．

G を F 上定義された分裂型の単連結な単純代数群とするとき，松本英也は自然な群拡大

$$1 \to K_2(F) \to E \to G(F) \to 1$$

を構成した．しかも $G \not\simeq \mathrm{Sp}_n(F)$ のときにはこの拡大は普遍中心拡大である．

F を標数 0 の大局体でとする．F に含まれる 1 のベキ根全体のなす群を $\mu(F)$, 1 の n ベキ根全体のなす群を μ_n で表す．$\mu_n \subset \mu(F)$ であると仮定する．

F の素点 v に対して次数 n の Hilbert 記号 $F_v^\times \times F_v^\times \to \mu_n$ は記号関係式を満たすので，自然な写像 $K_2(F_v) \to \mu_n$ が存在する．拡大

$$1 \to K_2(F_v) \to E_v \to G(F_v) \to 1$$

の $K_2(F_v) \to \mu_n$ による push out を

$$1 \to \mu_n \to \widetilde{G(F_v)} \to G(F_v) \to 1$$

とする．$v \nmid n$ なる有限素点 v に対しては拡大 $\widetilde{G(F_v)} \to G(F_v)$ は $G(\mathfrak{o}_v)$ 上で分裂する．このことからすべての素点 v に対して図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & \widetilde{G(F_v)} & \longrightarrow & G(F_v) & \longrightarrow & 1 \\ & & \Big\downarrow \wr\wr & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & \widetilde{G(\mathbb{A}_F)} & \longrightarrow & G(\mathbb{A}_F) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

を可換にするようなアデール群上の拡大 $\widetilde{G(\mathbb{A}_F)} \to G(\mathbb{A}_F)$ が存在する．ここで

$$1 \to K_2(F) \to \bigoplus_v \mu(F_v) \to \mu_n \to 1$$

なる完全列が存在することが知られているのでこの拡大 $\widetilde{G(\mathbb{A}_F)} \to G(\mathbb{A}_F)$ は $G(F)$ 上で分裂する．すなわち次の図式．

$$\begin{array}{ccc} G(F) & \longrightarrow & \widetilde{G(\mathbb{A}_F)} \\ \Big\downarrow \wr\wr & & \Big\downarrow \\ G(F) & \longrightarrow & G(\mathbb{A}_F) \end{array}$$

を可換にする準同型 $G(F) \to \widetilde{G(\mathbb{A}_F)}$ が存在する．

Brylinski-Deligne は圏論的な手法により一般の簡約可能な代数群 G に対して同様の性質を持つ拡大を構成した．

F を標数 0 の体，$\bar{F}$ を F の代数閉包とする．G を F 上に定義された簡約可能な代数群とする．簡単のため G の derived group G_{der} は単連結であるとする．ここで G_{der} は $G_{\mathrm{der}}(\bar{F}) = [G(\bar{F}), G(\bar{F})]$ なる半単純代数群である．T を F 上定義された一つの極大トーラス，$Y = \mathrm{Hom}_{\bar{F}}(\mathbb{G}_m, T)$ を T の cocharacter group とする．Y には Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ が自然に作用する．

S_{Zar} を体 F 上の Zariski site とする．K 群 K_2, 代数群 G は S_{Zar} 上の層 $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{G}$ とみなすことができる．このとき Brylinsky-Deligne [1] は S_{Zar} 上の層の拡大

$$1 \to \mathbf{K}_2 \to E \to \mathbf{G} \to 1$$

のなす圏を記述した．とくにこのような拡大に対して，$\mathbb{Z}$ に値を持つ Y 上の 2 次形式 Q で Weyl 群と Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の作用で不変なものを対応させることができる．

5　被覆群の跡公式の安定化

このような被覆群上の保型表現と代数群の保型表現の間の対応を与えるには跡公式の比較を行うことによって可能になると考えられる．ここでは $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ の n 重被覆群の跡公式に安定化（京都大学の平賀氏との共同研究）について簡単に紹介する．

F を局所体，n は $\mu(F)$ の約数で偶数であるとする．$\langle\ ,\ \rangle$ を μ_n に値を持つ Hilbert 記号とする．$\mathrm{SL}_n(F)$ の n 重被覆群も 2 重被覆群と同様の方法で構成される．2 節と同様に

$$\boldsymbol{x}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} c & \text{if } c \neq 0, \\ d & \text{if } c = 0. \end{cases}$$

とおき，久保田 2 コサイクル $\mathbf{c}(g_1, g_2)$ を

$$\mathbf{c}(g_1, g_2) = \langle \frac{\boldsymbol{x}(g_1)}{\boldsymbol{x}(g_1 g_2)}, \frac{\boldsymbol{x}(g_2)}{\boldsymbol{x}(g_1 g_2)} \rangle$$

により定義すれば，これが $\mathrm{SL}_2(F)$ の n 重被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ を与える．すなわち $[g_1, \zeta_1], [g_2, \zeta_2] \in \mathrm{SL}_2(F) \times \mu_n$ の積を

$$[g_1, \zeta_1] \cdot [g_2, \zeta_2] = [g_1 g_2, \zeta_1 \zeta_2 \mathbf{c}(g_1, g_2)].$$

与えたものが $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ である．$g \in \mathrm{SL}_2(F)$ に対して $[g, 1]$ を単に $[g]$ で表すことにする．$\mathrm{SL}_2(F)$ の部分集合 H に対して H の $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ における逆像を $\tilde{H}$ で表す．

F が非アルキメデス的で $n \in \mathfrak{o}^\times$ ならば $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})} \to \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$ には標準的な分裂写像 $\mathbf{s} : \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}) \to \widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})}$ が存在する．この分裂写像の像 $\mathbf{s}(\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}))$ を $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$ と同一視する．

写像

$$\boldsymbol{\tau}^+ : \mathrm{GL}_2(F) \to \mathrm{SL}_2(F) \qquad \boldsymbol{\tau}^- : \mathrm{GL}_2(F) \to \mathrm{SL}_2(F)$$

を

$$\boldsymbol{\tau}^+(g) = (\det g)^{-n/2} g^n \qquad \boldsymbol{\tau}^-(g) = -(\det g)^{-n/2} g^n$$

により定義する．これらの写像はスカラー倍写像で不変なので $\mathrm{PGL}_2(F)$ を経由するので $\mathrm{PGL}_2(F)$ から $\mathrm{SL}_2(F)$ への写像 $\boldsymbol{\tau}^+ : \mathrm{PGL}_2(F) \to \mathrm{SL}_2(F)$, $\boldsymbol{\tau}^- : \mathrm{PGL}_2(F) \to \mathrm{SL}_2(F)$ と考えることができる．

正則半単純な元 $h \in \mathrm{SL}_2(F)$ が good であるとは $\widetilde{Z_{\mathrm{SL}_2(F)}(h)} = Z_{\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}}([h])$ が成り立つことと定義する．ここで $Z_{\mathrm{SL}_2(F)}(h)$ は h の $\mathrm{SL}_2(F)$ における中心化群であり，$Z_{\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}}([h])$ は $[h] \in \widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ の $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ における中心化群である．このとき，$h \in \mathrm{SL}_2(F)$

が good であるためには $h = \boldsymbol{\tau}^+(g)$ または $h = \boldsymbol{\tau}^-(g)$ を満たす $g \in \mathrm{PGL}_2(F)$ が存在することが必要十分である．

$h \in \mathrm{SL}_2(F)$ が $\boldsymbol{\tau}^+$ に関して $g \in \mathrm{PGL}_2(F)$ と対応するとは $\boldsymbol{\tau}^+(g)$ が h に安定共役，（すなわち $\mathrm{SL}_2(\bar{F})$ において共役）であることとする．同様に $h \in \mathrm{SL}_2(F)$ が $\boldsymbol{\tau}^-$ に関して $g \in \mathrm{PGL}_2(F)$ と対応するとは $\boldsymbol{\tau}^-(g)$ が h に安定共役であることとする．

F の加法指標 $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ を一つとって固定する．$x \in F^\times$ とする．このとき任意の Schwartz 関数 $\phi \in \mathcal{S}(F)$ に対して

$$\int_F \phi(t)\psi(xt^2)\,dt = \alpha_\psi(x)|2x|^{-1/2}\int_F \hat{\phi}(t)\psi(-x^{-1}t^2/4)\,dt,$$

が成り立つような定数 $\alpha_\psi(x) \in \mathbb{C}^\times$ が存在する．ここで $\hat{\phi}(t)$ は ϕ の Fourier 変換で

$$\hat{\phi}(t) = \int_F \phi(u)\psi(tu)\,du$$

により定義される．この定数 $\alpha_\psi(x)$ を x の Weil 定数という．

$h \in \mathrm{SL}_2(F)$ が $g \in \mathrm{GL}_2(F)$ と $\boldsymbol{\tau}^+$ によって対応しているとき，転移因子 $\delta_\psi^+([h,\zeta],g)$ を

$$\delta_\psi^+([h,\zeta],g) = \begin{cases} \zeta\dfrac{\alpha_\psi(1)}{\alpha_\psi(\det g)}\langle(\det g)^{n/2}, -\boldsymbol{x}(h)\rangle & \text{if } n \equiv 2 \bmod 4, \\ \zeta\langle(\det g)^{n/2}, -\boldsymbol{x}(h)\rangle & \text{if } n \equiv 0 \bmod 4. \end{cases}$$

により定義する．h が g に τ^+ によって対応していないときは $\delta_\psi^+([h,\zeta],g) = 0$ とおく．この定義は g にスカラー行列をかけても変わらないので $g \in \mathrm{PGL}_2(F)$ に対しても $\delta_\psi^+([h,\zeta],g)$ が定義できる．また $g \in \mathrm{PGL}_2(F)$, $h = \boldsymbol{\tau}^-(g) \in \mathrm{SL}_2(F)$ に対して

$$\delta_\psi^-(\tilde{h},g) := \alpha_\psi(1)^{-2}\delta_\psi^+([-\mathbf{1}_2]\tilde{h},g).$$

とおく．これらの転移因子 $\delta_\psi^+([h,\zeta],g)$, $\delta_\psi^-([h,\zeta],g)$ は $[h,\zeta]$ の $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ における共役類上で不変であることを示すことができる．

$C_0(\mathrm{PGL}_2(F))$ を $\mathrm{PGL}_2(F)$ 上の台がコンパクトな局所定数関数のなす空間とする．$\varphi \in C_0(\mathrm{PGL}_2(F))$ の正則半単純な元 $g \in \mathrm{PGL}_2(F)$ 上の正規化された軌道積分を

$$I(g,\varphi) = \Delta(g)\int_{\mathrm{PGL}_2(F)/Z_{\mathrm{PGL}_2(F)}(g)} \varphi(xgx^{-1})\,dx,$$

により定義する．ここで $Z_{\mathrm{PGL}_2(F)}(g)$ は g の $\mathrm{PGL}_2(F)$ における中心化群で $\Delta(g)$ は Weyl の分母因子である．

$\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ 上の関数 $\tilde{\varphi}$ が anti-genuine であるとは

$$\tilde{\varphi}(\zeta\tilde{h}) = \zeta^{-1}\tilde{\varphi}(\tilde{h}), \qquad \forall\zeta \in \mu_n$$

が成り立つことをいう．$\widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)})$ を $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ 上の台がコンパクトで anti-genuine な局所定数関数全体のなす空間とする．$\widetilde{\varphi} \in C_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)})$ の $\tilde{h} = [h, \zeta] \in \widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ 上の正規化された軌道積分を

$$I(\tilde{h}, \varphi) = \Delta(h) \int_{\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}/Z_{\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}}(\tilde{h})} \varphi(\tilde{x}\tilde{h}\tilde{x}^{-1})\, d\tilde{x}$$

により定義する．$\tilde{h} \in \widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ が good でなければ $I(\tilde{h}, \tilde{\varphi}) = 0$ となる．

$\varphi^+ \in C_0(\mathrm{PGL}_2)$ が $\tilde{\varphi} \in \widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)})$ の転移因子 δ_ψ^+ に関する転移であるとは

$$\sum_h \delta_\psi^+([h], g) I([h], \tilde{\varphi}) = I(g, \varphi^+), \qquad \forall g \in \mathrm{PGL}_2(F)$$

が成り立つことをいう．ここで $h \in \mathrm{SL}_2(F)$ は g と $\boldsymbol{\tau}^+$ に関して対応する共役類の代表元を走る．同様にして $\tilde{\varphi} \in \widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)})$ の転移因子 δ_ψ^+ に関する転移 $\varphi^- \in C_0(\mathrm{PGL}_2(F))$ を

$$\sum_h \delta_\psi^-([h], g) I([h], \tilde{\varphi}) = I(g, \varphi^-), \qquad \forall g \in \mathrm{PGL}_2(F)$$

が成り立つものとして定義する．このような転移 φ^+, φ^- が実際に存在することを示すことができる．また $n \in \mathfrak{o}^\times$ ならば Hecke 環 $\mathrm{PGL}_2(\mathfrak{o})$ の単位元は Hecke 環 $\widetilde{\mathcal{H}}(\widetilde{\mathrm{SL}_2}//\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}))$ の単位元の転移であることを示すことができる．

アルキメデス的局所体上でも同様に転移因子を定義でき、転移 φ^+, φ^- の存在を示すことができる．

F を代数体で $\mu_n \subset \mu(F)$ とする．また n は偶数と仮定する．アデール群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ の n 重被覆群を $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$ で表す．$\mathbb{A}/F$ の加法指標 $\psi : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times$ を一つとって固定する．

$C_0(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}))$ を $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ 上の台がコンパクトで滑らかな関数のなす空間とする．$g = (g_v) \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ と $\varphi = \prod_v \varphi_v \in C_0(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}))$ に対して大局的な軌道積分を

$$I(g, \varphi) = \prod_v I(g_v, \varphi_v).$$

により定義する．

また $\widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})})$ を $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$ 上の anti-genuine で台がコンパクトかつ滑らかな関数のなす空間とする．ただし $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$ 上の関数 $\tilde{\varphi}$ が anti-genuine であるとは

$$\tilde{\varphi}(\zeta\tilde{h}) = \zeta^{-1}\tilde{\varphi}(\tilde{h}), \qquad \forall\zeta\in\mu_n$$

が成り立つことをいう．$h=(h_v)\in\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$, $\tilde{\varphi}=\prod_v\tilde{\varphi}_v\in\widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})})$ に対して正規化された軌道積分を

$$I(h,\tilde{\varphi}) = \prod_v I(h_v,\tilde{\varphi}_v).$$

により定義する．局所的な転移の存在から，$\tilde{\varphi}\in\widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})})$ に対して大局的な転移 $\varphi^+,\varphi^-\in C_0(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}))$ が存在することがわかる．

定理 5.1.

$$2\sum_{\substack{h\in\mathrm{SL}_2(F)/\sim\\ h:\text{ ell. reg.}}} I(h,\tilde{\varphi}) = \sum_{\substack{g\in\mathrm{PGL}_2(F)/\sim\\ \tau^{\pm}(g):\text{ ell. reg.}}} \left(I(g,\varphi^+)+I(g,\varphi^-)\right).$$

ここで左辺の h は正則な楕円的元の共役類を走り，右辺の g は $\boldsymbol{\tau}^{\pm}$ が正則で楕円的な元の共役類を走る．

楕円的でない元の跡公式の寄与についても $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$ の跡公式と $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ の跡公式の比較ができ，それによって両者の保型表現の対応を示すことができると考えられるが，現時点ではまだそういった結果を得るには至っていない．

この方面では最近 Wen-Wei Li [3] などが精力的に研究を進めている．

参考文献

[1] J.-L. Brylinski and P. Deligne, *Central extensions of reductive groups by* K_2, Publ. Math. IHES **94** (2001), 5–85.

[2] P. Delinge, *Extensions centrales de groupes algebriques simplement connexes et cohomologie galoisienne*, Publ. Math. IHES **84** (1996), 35–89.

[3] Wen-Wei Li, *La formule des traces pour les revêtements de groupes réductifs connexes,* I, arXiv:1004.4011, II. arXiv:1107.1865, III. arXiv:1107.2220, IV. arXiv:1209.4156,

[4] J. Milnor, Introduction to algebraic K-theory, Annals of Mathematics Studies, **72** Princeton University Press.

[5] G. Shimura, *On modular forms of half integral weight* Ann. of Math. (2) **97** (1973), 440–481.

[6] T. Shintani *On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight*, Nagoya Math. J. **58** (1975), 83–126.

[7] J.-L. Waldspurger, *Sur les coefficients de Fourier des formes modulair de poid demi entier* J. Math. Pures Appl. (9) **60** (1981), no. 4, 375–484.

[8] J.-L. Waldspurger, *Correspondence de Shimura*, J. Math. Pures Appl. (9) **59** (1980), no. 1, 1–132.

[9] J.-L. Waldspurger, *Correspondances de Shimura et quaternions* Forum Math. **3** (1991), no. 3, 219–307.

[10] A. Weil, *Sur certains groupes d'operateurs unitaires* Acta Math. **111** (1964) 143–211.

[11] Weissman, Metaplectic Tori over Local Fields Pacific J. Math. **241** (2009), no. 1, 169–200.

代数体の付随するガロワ群による特徴付けについて

尾崎　学 (早稲田大学　基幹理工)

1. 序

本稿では，代数体の同型類と算術的同値類を付随するガロワ群で特徴付けるという問題を，近年筆者によって得られた結果も交えて概説する．

以下，有理数体の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ を一つ固定して，その部分体を**代数体**，特に $\mathbb{Q}$ 上有限次拡大である代数体を**有限次代数体**ということにする．そして，

$$\mathcal{A}_0 := \{\text{有限次代数体全体}\} \subseteq \mathcal{A} := \{\text{代数体全体}\}$$

とおく．

本稿では以下の 2 つの同値関係を考察する：

(1) 同型　$K_1 \simeq K_2$　$(K_1, K_2 \in \mathcal{A})$

(2) 算術的同値　$K_1 \approx K_2 \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \zeta_{K_1}(s) = \zeta_{K_2}(s)$　$(K_1, K_2 \in \mathcal{A}_0)$

ここで，$F \in \mathcal{A}_0$ に対し，$\zeta_F(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{[\mathcal{O}_F : \mathfrak{a}]^s}$ （$\mathfrak{a}$ は F の整数環 $\mathcal{O}_F$ の非零イデアル全体を亙る）は F の Dedekind zeta 函数を表す．

明らかに，$K_1, K_2 \in \mathcal{A}_0$ に対し，$K_1 \simeq K_2 \Longrightarrow K_1 \approx K_2$ であるから，$\simeq$ は $\approx$ よりも強い $\mathcal{A}_0$ 上の同値関係である．

以下の節で，代数体の同型類と算術的同値類がいかに Galois 群の言葉で特徴付けられるかについて解説する．

2. 算術的同値類の特徴付け

数論研究を生業にしている人は多かれ少なかれ，Dedekind zeta 函数 $\zeta_F(s)$ は有限次代数体 F のことを良く知っていると信じている．実際，$\zeta_F(s)$ から F の多くの算術的情報が復元される：

命題 1. $K_1, K_2 \in \mathcal{A}_0$, $K_1 \approx K_2$ とすると，以下が成立する．

(1) すべての素数の K_1 と K_2 における分解様式が一致する．即ち，任意の素数 p に対して，

$$p\mathcal{O}_{K_i} = \mathfrak{p}_{i1}^{e_{i1}} \mathfrak{p}_{i2}^{e_{i2}} \cdots \mathfrak{p}_{ig_i}^{e_{ig_i}}$$

を素イデアル分解とするとき，適当に素イデアルの番号付を選べば，$g_1 = g_2$，$[\mathcal{O}_{K_1}/\mathfrak{p}_{1j} : \mathbb{F}_p] = [\mathcal{O}_{K_2}/\mathfrak{p}_{2j} : \mathbb{F}_p]$ $(1 \leq i \leq g_1 = g_2)$ が成立する（この条件は $K_1 \approx K_2$ の必要十分条件である）.

(2) $[K_1 : \mathbb{Q}] = [K_2 : \mathbb{Q}]$．さらに K_1 と K_2 の実無限素点と複素無限素点の個数がそれぞれ一致する．

(3) $d_{K_1} = d_{K_2}$ （判別式）

(4) $\mathcal{O}_{K_1}^\times \simeq \mathcal{O}_{K_2}^\times$ （Abel 群として）

(5) h_{K_i} を K_i の類数，R_{K_i} を K_i の単数規準とするとき，$h_{K_1}R_{K_1} = h_{K_2}R_{K_2}$ が成立.

しかし，$\zeta_F(s)$ は F のすべてを知っているわけではない：

例 1. $K_1 := \mathbb{Q}(\sqrt[8]{-15})$，$K_2 := \mathbb{Q}(\sqrt[8]{-240})$ とおくと，$K_1 \approx K_2$ である．しかし，K_1 と K_2 は同型ではない．さらに，$h_{K_1} \neq h_{K_2}$，$R_{K_1} \neq R_{K_2}$ ([2]).

従って，$\approx$ は $\simeq$ よりも真に弱い $\mathcal{A}_0$ 上の同値関係である．

それでは，有限次代数体の同型と算術的同値の差はどの程度なのであろうか．それを理解するために，函数体での類似を見てみる．F_1，F_2 を標数 l の有限体 $\mathbb{F}$ 上の 1 変数代数函数体として，C_1，C_2 を $\mathbb{F}$ 上の代数曲線で，それぞれの $\mathbb{F}$ 上函数体が F_1 と F_2 になるものとする．そして，$\zeta_{F_i}(s)$ を F_i の Dedekind zeta 函数とする．このとき，つぎが知られている：

定理 1 ((1)$\Longleftrightarrow$(3) は Weil, (2) との同値性は Tate[11])．つぎは同値である：

(1) $\zeta_{F_1}(s) = \zeta_{F_2}(s)$

(2) C_i の Jacobi 多様体 $\mathrm{Jac}(C_i)$（$i = 1, 2$）の間に $\mathbb{F}$ 上の同種写像 $\mathrm{Jac}(C_1) \sim \mathrm{Jac}(C_2)$ が存在する．

(3) p を l と異なる素数として，$X_{\overline{\mathbb{F}}F_i}(p)$ を $\overline{\mathbb{F}}F_i$ 上の最大不分岐 abel p-拡大の Galois 群とする（類体論よりこれは Tate 加群 $\varprojlim \mathrm{Jac}(C_i)[p^n]$ と自然に同型）．このとき，$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F}) \simeq \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}F_i/F_i)$-加群として

$$X_{F_1}(p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \simeq X_{F_2}(p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

が成立.

従って函数体の世界での算術的同値は即ち，Jacobi 多様体の同種であるから，代数体における同型と算術的同値の差は，函数体における Jacobi 多様体の同型と同種の差の類似として捉えることができる．

代数体の世界では Jacobi 多様体そのものの良い類似物は知られていないが，Tate 加群の良い類似物があり，それと Dedekind zeta 函数との関係の類似が追求されている——それが**岩澤理論**である．ここで円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大の岩澤理論について簡単に説明する．k を有限次代数体，素数 p を一つ固定しておく．函数体の係数拡大 $\overline{\mathbb{F}}F_i$ の類似物として $K := k(\mu_{p^\infty})$（μ_{p^∞} は 1 の p 冪乗根全体）を採る（本来であれば 1 の冪乗根全てを添加した拡大を考えたいところだが，現時点でその方向での類似の追求はうまくいっていない）．

$X_K(p)$ を K 上の最大不分岐 abel p-拡大 $L_K(p)/K$ の Galois 群，$X_{K,\{p\}}(p)$ を K 上の最大 p-分岐 abel p-拡大 $M_K(p)/K$ の Galois 群（「p-分岐」は「p 上に無い素点はすべて不分岐」の意）とする．

このとき，$\mathrm{Gal}(K/k) \simeq \mathrm{Gal}(k(\mu_p)/k) \times \mathrm{Gal}(K/k(\mu_p))$ が $\mathrm{Gal}(L_K(p)/k)$ 乃至は $\mathrm{Gal}(M_K(p)/k)$ の内部自己同型を通じて $X_K(p)$ 及び $X_{K,\{p\}}(p)$ に作用する．ここで，有限個の例外の p を除けば，$\mathrm{Gal}(k(\mu_{p^\infty})/k) \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}) =: G_p$ に注意．

函数体の場合，$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ の Frobenius 自己同型の $X_{\overline{\mathbb{F}}F_i}(p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ への作用の特性多項式 $\Phi(X)$ が本質的に $\zeta_{F_i}(s)$ に一致するのであった（Weil）．同様のことが代数体のこの枠組みでも $\underline{k\text{ が総実有限次代数体の場合}}$ には成立する（岩澤主予想＝ Wiles の定理）．即ち，$\mathbb{Q}_p$ 上の有限次線型空間 $(X_K(p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_P)^- := (1-J)(X_K(p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_P)$ （$J \in \mathrm{Gal}(k(\mu_p)/k)$ は複素共役）あるいは，$(X_{K,\{p\}}(p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_P)^+ := (1+J)(X_K(p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_P)$ への $\mathrm{Gal}(K/k(\mu_p)) \simeq \mathbb{Z}_p$ の生成元の作用の特性多項式 $P_p(X)$（岩澤多項式）が，Dedekind zeta 函数の負の整数点での値を p-進補間して得られる p-進 zeta 函数の零点で記述される．ここで，函数体の場合と決定的に異なるのは，函数体の場合には一つのの固定された素数 $p \neq l$ についての Frobenius 自己同型の特性多項式 $\Phi(X)$ から zeta 函数が完全に復元される，つまり zeta 函数は本質的に多項式であるが，代数体の場合には岩澤多項式 $P_p(X)$ から p-進 zeta 函数は復元できない．代数体の p-進 zeta も Dedekind zeta も多項式からかけ離れた函数だからである．従って，代数体に於いて定理 1 のそのままの類似は成立しないのであるが，次の定理が示すように，p を殆どすべての素数を走らすことで，岩澤多項式から Dedekind zeta を復元し，類似の結果を得ることができる：

定理 2 (足立-小松 [1](1987), J.Oh[9](1998)).
k_1，k_2 を総実有限次代数体とすると，次は同値：

(1) $k_1 \approx k_2$

(2) 有限個の例外を除いたすべての素数 p について，

$$X_{k_1(\mu_{p^\infty})}(p)^- \simeq X_{k_1(\mu_{p^\infty})}(p)^- \quad (\mathbb{Z}_p[[G_p]]\text{-加群として})$$

(3) 有限個の例外を除いたすべての素数 p について，

$$X_{k_1(\mu_{p^\infty}),\ \{p\}}(p)^+ \simeq X_{k_1(\mu_{p^\infty}),\ \{p\}}(p)^+ \quad (\mathbb{Z}_p[[G_p]]\text{-加群として})$$

注意 1. 実際には，(2) の同型の条件を "擬同型 $X_{k_1(\mu_{p^\infty})}(p)^- \sim X_{k_2(\mu_{p^\infty})}(p)^-$（$\mathbb{Z}_p[[G_p]]$-加群として）" に変えたもの（擬同型とは，核と余核が有限であるような準同型である），あるいは "$-$" を外したものも同様に同値である．(3) についても同様（"+" を外す）．

定理 2 の証明の概略を説明しよう．(1) $\Longleftrightarrow$ (2) の証明が本質的で，(2) と (3) は Kummer 双対性から概ね同値であることが従う．$\Longrightarrow$ 部分は次の群論的な命題から従う：

命題 2. (1) $k_1, k_2 \in \mathcal{A}_0$ とする．$N \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ を k_1k_2 を含むような任意の $\mathbb{Q}$ 上の有限次 Galois 拡大として，$G := \mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q})$, $H_1 := \mathrm{Gal}(N/k_1)$, $H_2 := \mathrm{Gal}(N/k_2)$ とおく．

このとき $k_1 \approx k_2$ であるための必要十分条件は，全単射 $f : H_1 \longrightarrow H_2$ と $\{\sigma_h \mid h \in H_1\} \subseteq G$ で $f(h) = \sigma_h h \sigma_h^{-1}$ ($\forall h \in H_1$) をみたすものが存在することである.（G の 2 つの部分群 H_1 と H_2 がこのような性質を持つとき，H_1 と H_2 は **Gassmann 同値**と言われる.）

(2) G を有限群，Δ を群，p を $\#G$ と素な素数，M を $\mathbb{Z}_p[G\times\Delta]$-加群とする．このとき，$G$ の Gassmann 同値な部分群 H_1, H_2 に対して，

$$M_{H_1} \simeq M_{H_2} \quad (\mathbb{Z}_p[\Delta]\text{-加群として})$$

ここで $M_H := M/\sum_{h\in H}(h-1)M$ は M の最大 H-不変商.

N を命題 2 と同様とすれば，$p \nmid \#\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q})$ のとき

$$X_{N(\mu_{p^\infty})}(p)_{\mathrm{Gal}(N(\mu_{p^\infty})/k_i(\mu_{p^\infty}))} \simeq X_{k_i(\mu_{p^\infty})}(p) \quad (i = 1, 2)$$

なので，この命題を $G = \mathrm{Gal}(N(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))$, $\Delta = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})$, $H_i = \mathrm{Gal}(N(\mu_{p^\infty})/k_i(\mu_{p^\infty}))$, $M = X_{N(\mu_{p^\infty})}(p)$ に適用すると（有限個の例外の素数 p を除いて，

$$\mathrm{Gal}(N(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Gal}(N(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})) \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}),$$
$$\mathrm{Gal}(N(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})) \simeq \mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q})$$

に注意），定理 2 の (1) $\Longrightarrow$ (2) が従う．

(2) $\Longrightarrow$ (1) は，上述の岩澤主予想（Wiles の定理）を用いる：有限個の例外を除いたすべて素数 p についての $X_{k_i(\mu_{p^\infty})}(p)^-$ の構造から，有理数 $\zeta_{k_i}(1-n)$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) の p 進絶対値を，有限個の例外の素数 p を除いて知ることができる．このことから，Dedekind zeta 函数の函数等式と解析的手法を駆使して，$\zeta_{k_1}(s) = \zeta_{k_2}(s)$ を導くことができる．

定理 2 は (2) $\Longrightarrow$ (1) の部分で総実代数体の岩澤主予想（Wiles の定理）を用いているので，総実でない一般の有限次代数体についてそのままの形では一般化されていない．しかし，少し弱い形であれば，一般の有限次代数体についても成立する：

命題 3 (O.). $k_1,\ k_2 \in \mathcal{A}_0$ とすると次は同値：

(1) $k_1 \approx k_2$,

(2) 有限個の例外を除いたすべての素数 p について，
$(X_{k_1(\mu_{p^\infty}),\{p\}}(p)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p)^{\omega_p} \simeq (X_{k_1(\mu_{p^\infty}),\{p\}}(p)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p)^{\omega_p}$（$\mathbb{Q}_p[G_p]$-加群として）
ここで，$\omega_p : \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ は円分指標で，$\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})]$-加群 X に対し，$X^{\omega_p} := \left(\frac{1}{p-1}\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})}\omega_p(\sigma)\sigma^{-1}\right)X$.

注意 2. 実際には，(2) の同型の条件を "$X_{k_1(\mu_{p^\infty}),\{p\}}(p)^{\omega_p} \simeq X_{k_2(\mu_{p^\infty}),\{p\}}(p)^{\omega_p}$（$\mathbb{Z}_p[[G_p]]$-加群として）" に変えたもの，あるいは "$\omega_p$" を外したものも同様に同値である．

定理 2 と命題 3 は，有限次代数体 k の無限次拡大 $L_{k(\mu_{p^\infty})}(p)/k$ あるいは $M_{k(\mu_{p^\infty})}(p)/k$ の Galois 群の族が k の算術的同値類を特徴付けるという結果であったが，もっと小さい制限分拡大の Galois 群の族によっても，特徴付けることができる．以下，一般に $F \in \mathcal{A}$ と素数 p, 素数の集合 S に対して，$X_{F,S}(p)$ で F 上の最大 S-分岐 abel p-拡大（「S-分岐」は S に含まれる素数上の F の素点以外はすべて不分岐の意）を表す．

定理 3 (東海林-O.[3](2013)). $k_1,\ k_2 \in \mathcal{A}_0$ とする．l_0 を，$l_0 > [k_i : \mathbb{Q}]$ $(i = 1, 2)$, $l_0 \nmid h_{k_1}h_{k_2}d_{k_1}d_{k_2}$ をみたすような固定された素数とする．このとき次は同値：

(1) $k_1 \approx k_2$,

(2) 任意の素数の集合 S に対して，

$$X_{k_1,S}(l_0) \simeq X_{k_2,S}(l_0),$$

(3) 有限個の例外を除くすべての素数 p に対して，

$$X_{k_1,\{p\}}(l_0)/l_0 \simeq X_{k_2,\{p\}}(l_0)/l_0.$$

この定理により，有限 Galois 群の族 $\{X_{k,\{p\}}(l_0)/l_0 \,|\, p \text{ は素数}\}$ が $k \in \mathcal{A}_0$ の算術的同値類を特徴付けることがわかる．

(1) $\Longrightarrow$ (2), (3) は命題 2 から直ちに従う．(2) $\Longrightarrow$ (1) の証明には次の定理を用いる：

定理 4 (Stuart-Perlis[10])． $k_1,\ k_2 \in \mathcal{A}_0$ に対して，次は同値：

(1) $k_1 \approx k_2$,

(2) 有限個の例外を除くすべての素数 p について，k_1 と k_2 に於ける p 上の素点の個数が一致する．

$X_{k,\{p\}}(l_0)/l_0$ は類体論により k における p 上の素点の個数と関連はあるが，単数群の影響によりこの群から直ちにその素点の個数が復元されるわけではない．しかし，技術的な方法より，殆ど全ての p について定理 3(2) の同型がが成立していることを利用すると，この困難は克服できて．定理 4 より (1) が導かれる．

3. 同型類の特徴付け

有限次代数体の Galois 群による特徴付けについては，Neukirch-内田の定理として名高い次の定理がある．以下，$F \in \mathcal{A}$ に対し，$G_F := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ を F の絶対 Galois 群とする．

定理 5 (Jürgen Neukirch[4], 内田興二 [6]，池田正験 [7]，岩澤健吉 [8])． $k_1,\ k_2 \in \mathcal{A}_0$ について，$\varphi : G_{k_1} \simeq G_{k_2}$ を位相群同型とする．このとき，$\alpha \in G_{\mathbb{Q}}$ で，

$$\alpha(k_1) = k_2,\ \varphi(\sigma) = \alpha\sigma\alpha^{-1}\ (\forall\sigma \in G_{k_1})$$

を満たすものが一意に存在する．特に $k_1 \simeq k_2$ である．

この定理の系として，絶対 Galois 群の自己同型に関する次の事実が得られる：

系 1. $k \in \mathcal{A}_0$ に対して，

$$\mathrm{Aut}(k) \simeq \mathrm{Out}(G_k),\quad g \mapsto (\sigma \mapsto \overline{g}\sigma\overline{g}^{-1}) \mod \mathrm{Inn}(G_k)$$

ここで，$\mathrm{Aut}(k)$ は k の自己同型群，$\mathrm{Out}(G_k)$ は G_k の外部自己同型群，$\mathrm{Inn}(G_k)$ は G_k の内部自己同型群，$g \in \mathrm{Aut}(k)$ に対して，$\overline{g}$ は $\overline{g}|_k = g$ なる $G_{\mathbb{Q}}$ の元とする．特に $\mathrm{Out}(G_{\mathbb{Q}}) = 1$ である．

ここで定理 5 の成立の経緯について簡単に説明する．まず初めに Neukirch が以下で説明するような基本的な成果を挙げた後に，それを基にして内田興二が定理の主張を証明した．同時期に池田は内田とは独立に系 1 の証明を完成させ，岩澤は池田の証明の手法で定理 5 を示すことができることを指摘した．

以下で定理 5 の証明の概略を説明しよう．すべての基本は次の Neukirch の定理である：

定理 6. $1 \neq H \subseteq G_{\mathbb{Q}}$ を閉部分群とする．ある局所体 $\mathbb{Q}_p \subseteq \kappa \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_p$ で，ある素数 $q \neq 2$ に対して $q^\infty \nmid [\kappa : \mathbb{Q}_p]$ （即ち，$\mathbb{Q}_p \subseteq M \subseteq \kappa$ で，$[M : \mathbb{Q}_p] < \infty$ なる M たちについて，$[M : \mathbb{Q}_p]$ の q-部分が有界）なるものについて，$H \simeq G_\kappa$ が成立しているものとする．このとき，$\overline{\mathbb{Q}}$ の素点 $\mathfrak{P}$ で、$H \subseteq D_{\mathbb{Q},\mathfrak{P}}$ なるものが一意に存在する．ここで，$F \in \mathcal{A}$ と $\overline{\mathbb{Q}}$ の素点 $\mathfrak{P}$ に対して，$D_{F,\mathfrak{P}}$ は $\mathfrak{P}$ に関する G_F の分解部分群を表す．特に $[\kappa : \mathbb{Q}_p] < \infty$ の場合には，$\mathfrak{P}$ は p の上の素点である．

この定理の系として，次が得られる：

系 2. $k \in \mathcal{A}_0$, p を素数とする．このとき，$\{D_{k,\mathfrak{P}} \,|\, \mathfrak{P}|p\}$ は $\{H \subseteq G_k \,|\, \exists \kappa/\mathbb{Q}_p : 有限次 : H \simeq G_\kappa\}$ の包含関係に関する極大元全体と一致する．

この系から，G_k の p 上の素点に関する分解部分群たちは，G_k の群論的構造のみから完全に定まることがわかる．言い換えると各素点の分解群は既に群 G_k の構造の中に “encode” されている ([5, p.786])．これはある意味で絶対 Galois 群が「素数のことを知っている」とも解釈できる．例えば Dirichlet の算術級数定理は定理 5 を用いることにより，$G_{\mathbb{Q}}$ の群構造に encode されていることが判る．とは言えども，例えば Riemann 予想などが encode されているかどうかは謎である（これは半分は冗談です）．

さて，系 2 から，各素数 p について

$$\{\varphi(D_{k_1,\mathfrak{P}}) \,|\, \mathfrak{P}|p\} = \{D_{k_2,\mathfrak{P}} \,|\, \mathfrak{P}|p\} \tag{1}$$

が従う．素数 p の k_i での分解様式は，G_{k_i} の部分群の族 $\{D_{k_1,\mathfrak{P}} \,|\, \mathfrak{P}|p\}$ から決定されるので，(1) と命題 1 より，$k_1 \approx k_2$ が得られる（Neukirch）．

内田はこの Neukirch の結果を基にして，巧妙な群論的方法で定理 5 を得た：Neukirch の結果より，任意の有限次拡大 K_1/k_1 に対し，K_2/k_2 を $\varphi(G_{K_1}) = G_{K_2}$ なる有限次拡大とすれば，$K_1 \approx K_2$ が従う．特に $N/\mathbb{Q}$ が $k_1k_2 \subseteq N$ であるような有限次 Galois 拡大のとき，N と算術的同値な有限次代数体は N 自身のみなので（これは命題 2(1) で $k_1/\mathbb{Q}$ を Galois とすれば，H_1 は G の正規部分群なので，$H_1 = H_2$ となることから従う），$\varphi(G_N) = G_N$ となる．よって，φ は，有限群の同型 $\varphi_N : \mathrm{Gal}(N/k_1) \simeq \mathrm{Gal}(N/k_2)$ を誘導する．しかも，上に述べたことと命題 2 より，φ_N は任意の部分群 $H \subseteq \mathrm{Gal}(N/k_1)$ について H と $\varphi_N(H)$ が $\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q})$ の部分群として Gassmann 同値になるという強い性質を持っていることが判る．この事実を足掛かりとして，内田は φ_N が実際に $\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q})$ の内部自己同型から誘導されることを示し，結局 φ が $G_{\mathbb{Q}}$ の内部自己同型から来ていることを証明したのである．

定理 5 を無限次代数体も含む代数体のクラスに拡張する試みについて説明する．その前に少し記号の準備をする．素数 p と $n \geq 1$ に対して，

$$\Pi_{p,n} := \{l \,|\, l \text{ は素数，} l \equiv 1 \pmod{p^n}\text{，} p^{\frac{l-1}{p}} \not\equiv 1 \pmod{l}\}$$
$$\Pi_n := \{l \,|\, l \text{ は素数，} l \equiv 1 \pmod{n}\}$$

とおく．そして，$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ を，以下の 2 条件をみたす $F \in \mathcal{A}$ 全体の集合とする：

• 部分体 $F_0 \subseteq F$ で，$F_0/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大，$[F : F_0] < \infty$ となるものが存在する．

• 任意の素数 p と整数 $n \geq 1$ に対して，$l_1, l_2 \nmid [F : \mathbb{Q}]$（すなわち，任意の $\mathbb{Q}$ 上有限次部分体 $M \subseteq F$ に対して，$l_1, l_2 \nmid [M : \mathbb{Q}]$）なる $l_1 \in \Pi_{p,n}$ と $l_2 \in \Pi_n$ が存在する．

ここで，$\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{F}$ に注意しよう．このとき，定理 5 の一般化である次の定理を得る：

定理 7. $K_1, K_2 \in \mathcal{F}$ に対して，$\varphi : G_{K_1} \simeq G_{K_2}$ を位相群同型とする．このとき，$\alpha \in G_{\mathbb{Q}}$ で，

$$\alpha(K_1) = K_2, \quad \varphi(\sigma) = \alpha\sigma\alpha^{-1} \ (\forall \sigma \in G_{K_1})$$

を満たすものが一意に存在する．特に $K_1 \simeq K_1$ である．

証明の概略について説明しよう．証明の土台は定理 5 同様，定理 6 及びその系である．まず，それらから次の補題が得られる：

補題 1. S, T を任意の素数の集合とする．定理 7 の仮定の下で，$G^T_{K_i,S}$ $(i = 1,2)$ を K_i 上の最大 S-分岐 T-分解拡大（即ち，S 上にない素点は不分岐かつ T 上にある素点はすべて完全分解するような最大拡大）の Galois 群とするとき，$G^T_{K_1,S} \simeq G^T_{K_2,S}$ が成立する．

この補題をうまく運用すると，Galois 拡大 $F/\mathbb{Q}$ で，$F \subseteq K_1 \cap K_2$ かつ $[K_i : F] < \infty$ $(i = 1,2)$ なるものが存在することがわかる．

有限次拡大 M_1/K_1 に対し，M_2/K_2 を $\varphi(G_{M_1}) = G_{M_2}$ なる有限次拡大，$N/\mathbb{Q}$ を $M_1M_2 \subseteq N$ なる Galois 拡大で，$[N : F] < \infty$ なるものとする．このとき，有限次 Galois 拡大 $N_0/\mathbb{Q}$ で $N_0 \subseteq N$ かつ制限写像が同型 $\pi : \mathrm{Gal}(N/F) \simeq \mathrm{Gal}(N_0/F_0)$ $(F_0 := N_0 \cap F)$ を誘導するものが存在する．このとき $M_{i,0} := N_0^{\pi(\mathrm{Gal}(N/M_i))}$ $(i = 1,2)$ とおけば，$M_{1,0} \approx M_{2,0}$ が補題 1 と次を用いることで証明できる：

補題 2. q を $\#\mathrm{Gal}(N_0/\mathbb{Q}) \mid q-1$. なる素数とする．
もしも任意の有限 $\mathbb{F}_q[\mathrm{Gal}(N_0/\mathbb{Q})]$-加群 Y について，

$$Y_{\mathrm{Gal}(N_0/M_{1,0})} \simeq Y_{\mathrm{Gal}(N_0/M_{2,0})} \quad (\mathbb{F}_q\text{-加群として})$$

が成立すれば，$M_{1,0}$ と $M_{2,0}$ は算術的同値である．

任意の有限 $\mathbb{F}_q[\mathrm{Gal}(N_0/\mathbb{Q})]$-加群 Y はある素数の集合 S,T に関する $X^T_{N_0,S}(q)$ として実現され，さらに S,T をうまく選べば，$X^T_{N_0,S}(q) \simeq X^T_{N,S}(q)$ とできる．ここで，補題 1 より，

$$X^T_{N_0,S}(q)_{\mathrm{Gal}(N_0/M_{i,0})} \simeq X^T_{N,S}(q)_{\mathrm{Gal}(N/M_i)} \simeq X^T_{M_i,S}(q) \quad (i=1,2)$$

は互いに同型であるから，補題 2 より $M_{1,0} \approx M_{2,0}$ が従う．

よって，定理 5 の証明と同様に，φ が有限群の同型

$$\varphi_{N_0} : \mathrm{Gal}(N_0/k_1) \simeq \mathrm{Gal}(N_0/k_2), \quad (k_i := N_0^{\pi(\mathrm{Gal}(N/K_i))} \ (i=1,2))$$

を誘導して，内田の手法によりこの同型 φ_{N_0} が $\mathrm{Gal}(N_0/\mathbb{Q})$ の内部自己同型から誘導されることも判る．そして，結局 φ 自身が $G_{\mathbb{Q}}$ の内部自己同型から来ていることを示すことができる．

References

[1] N.Adachi, K.Komatsu, The maximal p-extensions and zeta-functions of algebraic number fields. Mem. School Sci. Engrg. Waseda Univ.**51** (1987), 25–31.

[2] B.de Smit, R.Perlis, Zeta functions do not determine class numbers. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **31** (1994), no. 2, 213–215.

[3] M.Tohkailin, M.Ozaki, Characterization of arithmetical equivalence of number fields by Galois groups with restricted ramification, Tokyo J. Math. **36** (2013), no. 2, 347–354.

[4] J.Neukirch, Kennzeichnung der p-adischen und der endlichen algebraischen Zahlkrper, Invent. Math. **6** (1969), 296–314.

[5] J.Neukirch, A.Schmidt, K.Wingberg, Cohomology of number fields (2nd edition), Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **323**, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[6] K.Uchida, Isomorphisms of Galois groups. J. Math. Soc. Japan **28** (1976), no. 4, 617–620.

[7] M.Ikeda, Completeness of the absolute Galois group of the rational number field. J. Reine Angew. Math. **291** (1977), 1–22.

[8] K.Iwasawa, Automorphisms of Galois groups over number fields (1975) (未刊行), 岩澤健吉全集第 2 巻.

[9] J.Oh, On zeta functions and Iwasawa modules, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), no. 9, 3639–3655.

[10] D.Stuart, R.Perlis, A new characterization of arithmetic equivalence, J. Number Theory **53** (1995), no. 2, 300–308.

[11] J.Tate, Endomorphisms of abelian varieties over finite fields. Invent. Math. **2** (1966) 134–144.

早稲田大学理工学術院基幹理工学部数学科
尾崎　学
e-mail: ozaki@waseda.jp

数論的 $\mathscr{D}$ 加群と関数体のラングランズ対応

阿部 知行

1. 序説

X を（解析的）複素多様体とする．このとき次の圏同値があることはよく知られている：

$$\{X \text{ 上の局所系}\} \leftrightarrow \{X \text{ 上の積分可能接続付きベクトル束}\}$$

ここで“ $\rightarrow$ ”は V という局所系に対して $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} V$ というベクトル束に $\mathcal{O}_X$ の標準的な接続から定まる接続を入れる関手で, “ $\leftarrow$ ”は水平切断を取る関手である．

次に X を有限体（もっと一般に正標数の体）上の滑らかなスキームとする．このとき上記の対応の左辺の類似物はエタール・コホモロジーの理論になっていることが知られている．p 進コホモロジー論は右辺の類似物であると考えられる．p 進コホモロジー論は Grothendieck によるクリスタリン・コホモロジー論と Monsky と Washnitzer によるコホモロジー論から始まっているが，事実，いずれも技術的な条件を満たした積分可能接続付きのベクトル束（アイソクリスタルと呼ばれる）の理論といえる．これらの理論は Berthelot によるリジッド・コホモロジー論の登場で統一化され，様々な人の努力により絶対コホモロジー論として十分満足な枠組みが打ち立てられることとなった．

一方でエタール・コホモロジー論においては絶対コホモロジーと同じように相対コホモロジー論，または 6 つの関手の存在が極めて重要な役割を果たしている．そのため，p 進コホモロジー論でも 6 つの関手の存在を期待するのは自然なことである．複素数体上の理論に立ち戻ってみれば，ド・ラーム・コホモロジー論を含む 6 つの関手の理論として $\mathscr{D}$ 加群の理論があることは広く知られている．Berthelot は [Be1] で $\mathscr{D}$ 加群の理論の類似物を p 進コホモロジーの世界でも導入した．本論説の趣旨はこの数論的 $\mathscr{D}$ 加群の理論と呼ばれる理論の最近の進展について解説することにある．理論の重要な応用として，p 進コホモロジーに対するラングランズ対応，そして曲線の場合の Deligne による小同志予想の解決を紹介したい．

2. リジッド・コホモロジー論とアイソクリスタル

リジッド・コホモロジー論は言わば正標数体上の多様体のド・ラーム・コホモロジー理論である．ここでは最も基本的なアイディアの解説にとどめて，詳細はリジッド・コホモロジー論の数々の先駆的研究をなさってきた都築暢夫先生による啓発的な論説 [T] を参照いただきたい．

> 以後，標数 $p>0$ の完全体 k，完備離散付置環 R で剰余体として k を持つもの，その分数体 K を固定する．

X を k 上の滑らかな代数多様体とする．このとき X 上のコホモロジー理論を展開したい．そのため理想的な状況として持ち上げが存在する場合，つまり

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathscr{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[r, hook] & \mathrm{Spf}(R) \end{tikzcd}$$

というデカルト図式が存在して，右の垂直な射も滑らかな時を考える．最も単純なアイディアは $\mathscr{X}$ 上の可積分接続付きベクトル束の圏 $\mathrm{MIC}(\mathscr{X})$ をもって X 上の係数理論と考えるものであろう．これには主に 2 つの問題点がある

1. 別の持ち上げ $\mathscr{X}'$ を取ってくると $\mathrm{MIC}(\mathscr{X})$ と $\mathrm{MIC}(\mathscr{X}')$ の間に圏同値が期待できない．つまり X のみならず持ち上げに依ってしまう．

2. $\mathcal{E} \in \mathrm{MIC}(\mathscr{X})$ に対して有理係数のド・ラーム・コホモロジー $H^*(\mathscr{X}, \mathcal{E} \otimes \Omega^\bullet_{\mathscr{X}}) \otimes \mathbb{Q}$ を取ると必ずしも K 上有限次元とは限らない．

1 に対処するために $\mathrm{MIC}(\mathscr{X})$ という圏を狭めることを考える．具体的には全ての積分可能接続を考えるのではなく，"テーラー級数" の収束域が十分大きい物のみ考えるのである．これを簡単に解説するため

$$\nabla \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \Omega^1_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$$

を積分可能接続とする．局所的な性質を議論したいので，座標系が存在するとしてよく，固定する．対応する微分作用素を $\partial_1, \ldots, \partial_d$ とし，$\underline{k} \in \mathbb{N}^d$ に対して，$\underline{\partial}^{[\underline{k}]} := \prod_{i=1}^d (k_i!)^{-1} \partial_i^{k_i}$ とおく．$e \in \mathcal{E}$ という局所切断に対して，

$$\sum_{\underline{k}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]}(e) \otimes T^{\underline{k}} \in \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}[\![T]\!], \qquad (T^{\underline{k}} := T_1^{k_1} \ldots T_d^{k_d})$$

をテイラー級数という．この級数の収束半径が 1 より大きい（つまり > 1）とき $(\mathcal{E}, \nabla)$ を収束アイソクリスタルという．収束アイソクリスタルのみを考えると圏が標準的な同値を除いて X のみに依ることが知られている．また，この圏を貼り合わせて一般に持ち上げがない X に対しても圏が定義出来る．

2 は様々な問題が絡まっている．まず，$\mathscr{X}$ が固有で滑らかな場合は実は有限性は成立している．問題は $\mathscr{X}$ が固有的でないときに起こる．すると $\mathcal{E}$ として自明な接続付きの構造層を考えた場合でさえ有限性は崩れてしまう．これを解決するために Berthelot は Monsky と Washnitzer のアイディアに習い，$\mathcal{E}$ を境界方向にほんの少しだけ大きくすることを考えた（例えば [Be2] 参照）．正確な定義はリジッド空間上で行う必要があり，多少込み入ってくるので略すが，この延長可能なアイソクリスタルを**過収束アイソクリスタル**と呼び，X 上の過収束アイソクリスタルのなす圏を $\mathrm{Isoc}^\dagger(X)$ と書く．また，Berthelot は過収束アイソクリスタル $\mathcal{E}$ に対してそのコホモロジー $H^*_{\mathrm{rig}}(X, \mathcal{E})$ とコンパクト台コホモロジー $H^*_{\mathrm{rig,c}}(X, \mathcal{E})$ を定義し**リジッド・コホモロジー**と呼んだ．

次に p 進のリュービル数に起因する問題があり，一般の過収束アイソクリスタルで考えると簡単にコホモロジーが有限にならない例を構成できてしまう．そこで，"フロベニウス構造" と呼ばれる，数論幾何学的な条件を過収束アイソクリスタルに課すことによって有限性が担保されるのではないかと観察されていたが，証明は極めて困難であった．X が曲線の場合は，p 進微分方程式論の最も深い定理の一つである p 進局所モノドロミー定理が証明されることによって有限性が証明され，現在では X が一般の場合も Kedlaya [K1] によって示されている．

3. 数論的 $\mathscr{D}$ 加群

今回の主定理の一つは K 係数の 6 つの関手の枠組みが存在するということである．詳しくは以下のようになる：

3.1 定理 ([A2]). — X を分離的で k 上有限型なスキームとする．このとき三角圏 $D(X)$（正確に書きたいときは $D(X/K)$）と $f\colon X \to Y$ に対して次の関手

$$f_*, f_! \colon D(X) \to D(Y), \qquad f^*, f^! \colon D(Y) \to D(X)$$

があって，次の性質を持っている．

1. $D(X)$ には単位対象 K_X とテンソルと呼ばれる二項関手 $\otimes$ があって，閉モノイド圏を成している，つまり，モノイド圏で $\otimes$ の右随伴関手 $\mathcal{H}om$ が存在する．

2. f^* はモノイド関手である，つまり単位対象を保存しテンソルと可換である．

3. (f^*, f_*), $(f_!, f^!)$ は随伴組である．

4. 自然変換 $f_! \to f_*$ が存在し，f が固有射なら同型となる．

5. f が相対次元 d の平坦射なら跡射 $\mathrm{Tr}_f\colon f_!f^*[2d] \to \mathrm{id}$ という自然変換が存在し，f がさらに滑らかならその双対 $f^*[2d] \to f^!$ は同型である．

6. 次のデカルト図式を考える：
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y. \end{tikzcd}$$
すると自然な同型 $g^! \circ f_* \cong f'_* \circ g'^!$ がある．

7. $D(\mathrm{Spec}(k)) \cong D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{fin}}(K)$ というモノイド三角圏の同値がある．ここで右辺は K 線形空間の有界な導来圏で各コホモロジーが有限次元になっている三角圏である．

これだけではただの抽象論が存在していると言っているに過ぎないが，重要なのは次に示すリジッド・コホモロジー論との関係である：

8. X が**滑らか**なとき，特殊化関手 $\mathrm{sp}\colon \mathrm{Isoc}^\dagger(X/K) \to D(X/K)$ が存在して忠実充満である．

9. $p\colon X \to \mathrm{Spec}(k)$ が滑らかなとき，$\mathcal{E} \in \mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$ に対して，自然な同型
$$H^*_{\mathrm{rig}}(X, \mathcal{E}) \cong \mathcal{H}^*\bigl(p_*\,\mathrm{sp}(\mathcal{E})\bigr), \qquad H^*_{\mathrm{rig,c}}(X, \mathcal{E}) \cong \mathcal{H}^*\bigl(p_!\,\mathrm{sp}(\mathcal{E})\bigr)$$
が存在する．ただし，両同型の右辺では 7 を用いて点上の三角圏とベクトル空間の導来圏と同一視している．

3.2 注. — (i) 上記の定理の形は [A2] によるが，部分的な結果は Berthelot, Caro を中心に様々な形で知られており，それらの結果も上の定理の証明で多分に用いられている．重要な部分のみ記しておくと，Berthelot は固有で滑らかな形式的スキームに対して $\mathscr{D}$ 加群の理論を構成することにより，上の定理を構築するプログラムを初めて提起しており（[Be1, Be3, Be4, Be5] など），上記の定理を得る上で最も本質的かつ大きな貢献をしている．しかし，このプログラムは多くの困難な問題を抱えており，これらの問題の一部は Caro によって克服された．それにより，Caro は以下で定義する“ 埋め込み可能な ”多様体に対して定理（の一部）を得た．Caro のこれらの結果の多くは Kedlaya により解決された志甫予想 [K3] に強く依存していることを付け加えておきたい．筆者の定理に対する最大の貢献はより一般の多様体に対してもこの枠組みを広げたことにある．

(ii) 隣接輪体関手に関しても [AC2] による部分的な結果はある．基本的なアイディアは出ていると思うが，SGA 7 のような完全な理論は構築されておらず，これから成されるべきものである．

(iii) 上記の定理を合わせると X が滑らかなときのリジッド・コホモロジーの有限性が導かれるが，志甫予想を用いているため，別証というより一般化ととらえた方が正確である．

上記の定理は種々の結果をまとめて書いたもので，証明はとても大変だが，三角圏 $D(X)$ の構成のアイディアを紹介したいと思う．完備離散付置環 R 上に滑らかな形式的スキーム $\mathscr{X}$ があったとき $\mathscr{X}$ 上の環の層 $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ が Berthelot によって定義された．これは局所的には
$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} = \Bigl\{ \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]} \Bigm| \text{級数 } \textstyle\sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} T^{\underline{k}} \text{ の収束半径は} > 1 \Bigr\}$$
と書かれる環である．$f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ という射が与えられたとき
$$f_+\colon D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) \to D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}), \qquad f^!\colon D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}) \to D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$$

という二つの関手が普通の $\mathscr{D}$ 加群の理論と多かれ少なかれ同じように構成できる．詳しい話は割愛するが，古典論からも想像できるとおり，開移入に関する押し出しでは連接性が保存されない．開移入に対してもコホモロジー関手が期待通り振る舞うために古典論ではホロノミック加群という特殊な連接加群を導入した．数論的 $\mathscr{D}$ 加群でもこれの類似として“ 過ホロノミック加群 ”というものが Caro によって定義されている [C]．各コホモロジーが過ホロノミックな複体から構成される $D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ の忠実充満部分圏を $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{ovhol}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ と書く．

3.3 定義． — k 上のスキーム X が**埋め込み可能**であるとは R 上の**固有で滑らかな**形式的スキーム $\mathscr{P}$ と以下の水平射が**移入**（必ずしも開移入または閉移入になる必要はない）になっている可換図式が存在することをいう：

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathscr{P} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(k) & \hookrightarrow & \mathrm{Spf}(R). \end{array}$$

X が埋め込み可能である時三角圏 $D(X)$ を次のように定義する．まず埋め込み $X \hookrightarrow \mathscr{P}$ を取ってくる．このとき

$$D(X \hookrightarrow \mathscr{P}) := \left\{ \mathscr{C} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{ovhol}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{P},\mathbb{Q}}) \,\middle|\, \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{\overline{X}}(\mathscr{C}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}, \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{\overline{X}\setminus X}(\mathscr{C}) = 0 \right\}.$$

すると標準的な同型をのぞいて $D(X \hookrightarrow \mathscr{P})$ は X のみに依ることが Caro によって示された．この三角圏を $D(X)$ と定義するのである．

この枠組みを一般のスキームに拡張したい．鍵となるのは次の定理である：

3.4 定理． — X を埋め込み可能とする．すると $D(X)$ の t 構造が存在して次の自然な同型が存在する：

$$D^{\mathrm{b}}(\mathrm{Ovhol}(X)) \xrightarrow{\sim} D(X).$$

ここで $\mathrm{Ovhol}(X)$ はその t 構造の核である．

この定理を用いることで以下のように一般的に埋め込み可能ではない分離的で k 上有限型なスキーム X に対しても $D(X)$ が定義できる：まず，埋め込み可能な開部分スキームによる X の被覆 $\{U_i\}$ を取ってくる．貼り合わせ条件を課すことにより $\mathrm{Ovhol}(U_i)$ からアーベル圏 $\mathrm{Ovhol}(X)$ を構成することが出来る．そこで

$$D(X) := D^{\mathrm{b}}(\mathrm{Ovhol}(X))$$

と**定義**する．定理 3.4 は X が埋め込み可能なときはこの三角圏と以前定義した三角圏とが一致すると主張しているのである．

3.5 注． — (i) 分離的でない場合は単体的スキームのテクニックを用いて $D(X)$ を定義する必要がある．

(ii) $\mathrm{Ovhol}(X)$ は ℓ 進コホモロジーの偏屈層の圏に対応するものである．

三角圏は構成できたので，次の課題は 6 つの関手を構成することである．この構成は少々複雑なので詳しくは割愛するがアイディアは以下の通りである．例えば $f\colon X \to Y$ という射があるとき f_+ を構成したいとする．f が有限射であったと仮定する．すると Y のアファイン開被覆 $\{V_i\}$ とその引き戻しの X のアファイン開被覆 $\{U_i\}$ ができ，$f_i\colon U_i \to V_i$ を誘導する．f が有限射なので f_{i+} は上で定義した t 構造に関して完全関手になることが証明できる．そのため $f_{i+}\colon \mathrm{Ovhol}(U_i) \to \mathrm{Ovhol}(V_i)$ を貼り合わせて $f_+\colon \mathrm{Ovhol}(X) \to \mathrm{Ovhol}(Y)$ が定義でき，これも完全関手であることから自然に $f_+\colon D^{\mathrm{b}}(\mathrm{Ovhol}(X)) \to D^{\mathrm{b}}(\mathrm{Ovhol}(Y))$ に延長でき，これが我々の欲しかったものである．

完全関手の場合はこれで良いが，一般の場合はどうすれば良いだろうか．同じく f が有限射の場合，$f^!$ を構成することを考える．$f_i^!\colon D(V_i) \to D(U_i)$ は左完全関手である．そこで $\mathcal{H}^0$ を取ること

によって $f_i^{!0}\colon \mathrm{Ovhol}(V_i) \to \mathrm{Ovhol}(U_i)$ が定義でき，貼り合わせにより $f^{!0}\colon \mathrm{Ovhol}(Y) \to \mathrm{Ovhol}(X)$ が定義できる．これは左完全関手である．ここで $(f_+, f^!)$ が随伴対であることと f_+ が完全であることを用いると X, Y が埋め込み可能の時，$f^!$ は $f^{!0}$ の右導来関手であることを証明できる．そこで埋め込み可能と限らない場合も $f^!$ を $f^{!0}$ の右導来関手として定義するのである．ここで，$\mathrm{Ovhol}(X)$ は十分な単射的対象を有していないことに注意しなくてはならない．そのため Ind 圏の理論を用いて $\mathrm{Ind}(\mathrm{Ovhol}(X))$ を考えることにより対象を増やし定義する必要がある．

一般の射の場合は $X \xrightarrow{i} X \times Y \xrightarrow{p} Y$ と標準的に分解する．i は有限射なので上記の構成を用い，p に関しても若干複雑であるが同様の構成をすることにより f_+ 等の関手が構成される．

4. 重さの理論

講演では紹介しなかったが数論的 $\mathscr{D}$ 加群の理論には重さの理論も確立されているので紹介しておく．そのためにフロベニウス構造を導入する必要がある．重さの理論を構築したいので，簡単のため，この節では k を $q = p^s$ 個の元を持つ有限体とする．

4.1 定義. — X を分離的な k 上の有限型スキームとする．$\mathscr{E} \in \mathrm{Ovhol}(X)$ の（s **階**）**フロベニウス構造**とは同型 $\Phi\colon \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{E}$ であり，$(\mathscr{E}, \Phi)$ という組を F-$\mathscr{D}$ **加群**という．ここで $F\colon X \to X$ は X の s 階フロベニウス射である．F-$\mathscr{D}$ 加群の圏を F-$\mathrm{Ovhol}(X)$ と表記する．

4.2 注. — フロベニウス構造の定義の背景の一つと考えられるものに ℓ 進コホモロジー論におけるヴェイユ層（[D] 参照）の概念がある．X を $\mathbb{F}_q$ 上の多様体とする．$\mathrm{Ovhol}(X)$ は $X \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$ 上の ℓ 進構成可能層（正確には偏屈層）を考えるのと同等である．この観点で言えば F-$\mathrm{Ovhol}(X)$ を考えるのは X そのものの ℓ 進構成可能層（正確には $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ の位相を考えたくないのでヴェイユ層，またはヴェイユ偏屈層とするべきである）を考えることの類似であると言える．

4.3 例. — F-$\mathrm{Ovhol}(\mathrm{Spec}(k))$ の記述は簡単である．この圏は (V, Φ) という組の圏と同値である．ここで V は有限次元 K 線形空間で Φ は V の自己同型である．$\mathscr{E} = (V, \Phi) \in F$-$\mathrm{Ovhol}(\mathrm{Spec}(k))$ に対して Φ のモニックな固有多項式を $\mathrm{char}(\mathscr{E}, t)$ と書く．

4.4 定義. — 以後，体の同型 $\iota\colon \overline{\mathbb{Q}}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ を一つ固定する．$\mathscr{E} \in F$-$\mathrm{Ovhol}(\mathrm{Spec}(k))$ が**重さ** $\leq w$ (resp. $\geq w$) **である**とは任意の $\mathrm{char}(\mathscr{E}, t) = 0$ の解 $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ に対して，$|\iota(\alpha)| \leq q^{w/2}$ (resp. $\geq q^{w/2}$) となることを言う．$\mathscr{C} \in F$-$D^{\mathrm{b}}(X)$ が**重さ** $\leq w$ (resp. $\geq w$) **である**とは任意の整数 i に対して $\mathcal{H}^i(\mathscr{C})$ が重さ $\leq w + i$ (resp. $\geq w + i$) であることをいう．

重さが $* \in \{\leq w, \geq w\}$ の複体のなす部分圏を $D_*(\mathrm{Spec}(k))$ と書く．

4.5 定理 ([AC1, 4.1.3] p 進コホモロジーの重さ)**.** — 重さの枠組みが存在する．つまり $w \in \mathbb{R}$ に対して $D(X_0)$ の充満忠実部分圏 $D_{\geq w}$, $D_{\leq w}$ が存在して以下の性質を満たす．$f\colon X \to Y$ を分離的な k 上有限系スキームの射とする．

1. $D_*(\mathrm{Spec}(k))$ は上で定義した物である．
2. $f_!$ と f^* は $D_{\leq w}$ を保つ．
3. f_* と $f^!$ は $D_{\geq w}$ を保つ．
4. $\otimes$ は $D_{\geq w} \times D_{\geq w'}$ を $D_{\geq w+w'}$ に移す．
5. 双対関手 $\mathbb{D}$ は $D_{\geq w}$ と $D_{\leq -w}$ を交換する．

記号として $D_{\mathrm{m}}(X) := \bigcup_w D_{\geq w}(X) = \bigcup_w D_{\leq w}(X)$ と書いて ι **混複体**と呼ぶ．

4.6 注. — リジッド・コホモロジーの枠組みでは交叉コホモロジーは定義されていないが，数論的 $\mathscr{D}$ 加群を使っているので交叉コホモロジーが簡単に定義出来る．さらに，交叉コホモロジーの

純性定理も示すことが出来，ラングランズ対応の構成において重要な役割を果たす．詳細は [AC1, 4.2] を参照いただきたい．

5. ラングランズ対応

この節では p と異なる素数 ℓ と同型 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定する．主定理は Deligne の予想 [D, 1.2.10 (vi)] の曲線の場合である：

5.1 定理 ([A2, 4.1.3] 曲線の小同志予想)**.** — X を幾何学的に連結で滑らな $\mathbb{F}_q$ 上の曲線とする．次の二つの集合を考える：

- $\mathcal{G}_r$ を階数 r の滑らかな既約 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 層 $\mathscr{F}$ で判別式が有限になっている，つまり $(\bigwedge^r \mathscr{F})^{\otimes n} = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ となる $n \neq 0$ が存在するものの集合．
- $\mathcal{I}_r$ を階数 r の滑らかな既約な $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 過収束 F アイソクリスタル $\mathcal{E}$ で判別式が有限になっている，つまり $(\bigwedge^r \mathcal{E})^{\otimes n} = \overline{\mathbb{Q}}_p$ となる $n \neq 0$ が存在するものの集合．

このときこれら二つの集合の間の 1:1 対応が存在して，各閉点でのフロベニウス固有多項式が一致している．

注. — 証明は $\mathcal{G}_r$ と $\mathcal{I}_r$ の対応を直接構成するのではなく，p 進係数のラングランズ対応，つまり $\mathbb{A}$ を X のアデール環としたとき，$\mathcal{I}_r$ と $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現との対応を示す．方針は Drinfeld と Lafforgue によるシュトゥカの相対コホモロジーを計算することであり，Lafforgue により既に“ モチーフ ”は構成されていたことから，最も難しいのはスタックに対する 6 つの関手の枠組みを p 進コホモロジーに対してどのように構成するかであった．この構成は §3 で解説したとおりである．

この定理には標準的な応用がいくつかある(*)：

5.2 定理. — X を $\mathbb{F}_q$ 上の曲線とすると $D_{\mathrm{m}}(X) = D(X)$ である．

5.3 定理. — Čebotarev 稠密定理が成立する．つまり，X を $\mathbb{F}_q$ 上の滑らかな曲線とし，$\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ という二つの過収束 F アイソクリスタルが与えられており，各閉点での特性多項式が一致していると仮定する．すると $\mathcal{E}^{\mathrm{ss}} \cong \mathcal{E}'^{\mathrm{ss}}$ となる．ここで $(\cdot)^{\mathrm{ss}}$ は半単純化を意味する．

6. これからの課題

良い機会なのでこれからの p 進コホモロジー論の課題を筆者の個人的な観点からまとめておきたい．

6.1. 滑らかでない多様体のリジッド・コホモロジー論

滑らかとは限らない代数多様体 X に対しても過収束アイソクリスタルの圏 $\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$ とそのリジッド・コホモロジーが Berthelot によって構成されている．その場合，現状では，特殊化関手 $\mathrm{sp}\colon \mathrm{Isoc}^\dagger(X/K) \to D(X/K)$ は構成されていない．当然，存在が期待され，さらにそのリジッド・コホモロジーは $D(X/K)$ の押し出し関手によって計算されるはずである．これが出来ればリジッド・コホモロジー論は完全に数論的 $\mathscr{D}$ 加群の範疇で語られることになる．これらの枠組みが出来たら志甫淳先生による相対リジッド・コホモロジーの枠組みとの比較も問題になってくるであろう．

(*)講演では高次元多様体もある程度扱えると主張したが，終了後にギャップを発見したので，現状では主張が弱まっている．この場を借りてお詫びしたいと思います．

6.2. 高次元の小同志予想

高次元の場合の小同志予想は未だに示されていない．これは $\mathrm{Isoc}^{\dagger}(X)$ の構造が ℓ 進層のようには分からないことに起因しており，例えばベルティーニの定理（またはレフシェッツ型の定理）といわれる結果が成立するかは分かっていない：

> X を滑らかな多様体とし，$x \in X$ を閉点とする．$\mathcal{E}$ を X 上の与えられた既約な過収束アイソクリスタルとする．このとき次の性質を持つような x を通る曲線 C が存在するだろうか：$\mathcal{E}$ を C に制限した過収束アイソクリスタルは既約である．

このような定理は志甫淳先生などにより研究されている $\mathrm{Isoc}^{\dagger}(X)$ の基本群の性質と関わりがあるはずであり，高次元の小同志予想は目指すべき一つの目標である．

6.3. 特性多様体と分岐理論

$\mathscr{D}$ 加群には特性多様体と呼ばれる余接空間のサイクルが定義できる．特性多様体には $\mathscr{D}$ 加群の分岐の情報が多く含まれている．一方で斎藤毅先生を中心とした分岐の極めて研究の多くは 6 つの関手の枠組みや Kedlaya らによるアイソクリスタルの局所理論（[K2] 等）のアイディア用いれば p 進コホモロジーにも解釈することが出来るはずである．これらの理論と $\mathscr{D}$ 加群に元からある特性多様体の関係は興味深い研究課題である．

6.4. 整係数コホモロジー理論とフロベニウス傾き

X が固有で滑らかとすると，クリスタリン・コホモロジー $H^{*}_{\mathrm{cris}}(X/W(k))$ は $W(k)$ 上有限となっている．代数サイクルや L 関数の特殊値の研究などには整係数コホモロジー論は不可欠で，有理コホモロジー理論としてほぼ完全なリジッド・コホモロジー論があるにもかかわらず，未だにクリスタリン・コホモロジー論の重要性は低下していない．

有理コホモロジー論としてリジッド・コホモロジーを復元し，X が固有で滑らかならクリスタリン・コホモロジーと一致するような整係数コホモロジー論の構築は，野心的な研究目標かもしれないが，極めて重要な課題である．多様体 X 上に F アイソクリスタル $\mathcal{E}$ があると，各閉点でのフロベニウス傾きを考えることが出来る．これらの挙動は謎に満ちており，まとまった理論が多くは存在しない．整係数コホモロジー理論はこれらにも何らかの説明を与えるものと思う．

6.5. 混標数離散付置環上の $\mathscr{D}$ 加群の理論

数論的 $\mathscr{D}$ 加群によって，全ての完全体上に $\mathscr{D}$ 加群の理論が存在していることが分かる．自然な疑問としてはそれらの間の関係である．これはエタール・コホモロジー論では離散付置環上の理論の特殊化や一般化として説明される．$\mathscr{D}$ 加群ではそれに当たる理論の構築は興味深い．この理論の一つの方向性は坂内健一先生による論説 [Ba] が分かりやすい．また p 進 Hodge 理論の比較定理をこの観点から説明するのもおもしろいはずである．

References

[A1] Abe, T.: *Explicit calculation of Frobenius isomorphisms and Poincaré duality in the theory of arithmetic $\mathscr{D}$-modules*, Rend. Sem. Math. Univ. Padova **131**, p.89–149 (2014).

[A2] Abe, T.: *Langlands program for p-adic coefficients and the petits camarades conjecture*, preprint, available at arxiv.org/abs/1111.2479.

[AC1] Abe, T., Caro, D.: *Theory of weights in p-adic cohomology*, preprint, available at arxiv.org/abs/1303.0662.

[AC2] Abe, T., Caro, D.: *On Beilinson's equivalence for p-adic cohomology*, preprint, available at arxiv.org/abs/1309.4517.

[AM] Abe, T., Marmora, A.: *On p-adic product formula for epsilon factors*, to appear in J. Inst. Math. Jussieu, doi:10.1017/S1474748014000024.

[Ba] 坂内 健一: *Rigid syntomic cohomology* **と** *p*-**進** *polylogarithm*, 数理解析研究所講究録 **1154**, p.22–32 (2000).

[Be1] Berthelot, P.: *Cohomologie rigide et théorie des $\mathscr{D}$-modules*, Lecture Notes in Math. **1454**, p.80–124, Springer (1990).

[Be2] Berthelot, P.: *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, première partie, Prépublication IRMAR 96-03, Université de Rennes (1996).

[Be3] Berthelot, P.: *$\mathscr{D}$-modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 29, p.185–272 (1996).

[Be4] Berthelot, P.: *$\mathscr{D}$-modules arithmétiques. II. Descente par Frobenius*, Mém. Soc. Math. Fr. 81 (2000).

[Be5] Berthelot, P.: *Introduction à la théorie arithmétique des $\mathscr{D}$-modules*, Astérisque 279, p.1–80 (2002).

[C] Caro, D.: *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques surholonomes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **42**, p.141–192 (2009).

[D] Deligne, P.: *La conjecture de Weil.II*, Publ. Math. de I.H.E.S. **52**, p.313–428 (1981).

[K1] Kedlaya, K.S.: *Finiteness of rigid cohomology with coefficients*, Duke Math. J. **134**, p.15–97 (2006).

[K2] Kedlaya, K.S.: *Swan conductors for p-adic differential modules, I: A local construction*, Algebra and Number Theory **1**, p.269–300 (2007).

[K3] Kedlaya, K. S.: *Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals, IV: local semistable reduction at nonmonomial valuations*, Compos. Math. **147**, p.467–523 (2011).

[T] 都築 暢夫: **リジッド・コホモロジー**, 数学 **61**, p.64–82 (2009).

阿部知行：
東京大学 カブリ数物連携宇宙研究機構（WPI）
277-8583 千葉県柏市柏の葉 5-1-5
e-mail: `tomoyuki.abe@ipmu.jp`

等号付き多重ゼータ値と 2-1 公式

山本 修司（慶應義塾大学）

1　イントロダクション

等号付き多重ゼータ値，または**多重ゼータスター値**（multiple zeta-star value，以下 **MZSV** と略す）とは，

$$\zeta^\star(k_1,\dots,k_n)=\sum_{m_1\ge\cdots\ge m_n>0}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}}$$

なる多重級数の値である．ここで $k_1,\dots,k_n$ は正整数であり，収束のために $k_1\ge 2$ という条件を付ける．以下，このような列 $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_n)$ を**収束インデックス**といい，$k_1+\cdots+k_n$ を $\mathbf{k}$ の**重さ**と呼ぶ．

「等号付き」というのは，和をとるときに動くダミー変数 $m_1,\dots,m_n$ が等号付きの不等式で条件づけられているということであり，もちろん等号なしのバージョンを考えることもできる．実際，単に**多重ゼータ値**（multiple zeta value, 以下 **MZV**）といえば，普通は等号なしの

$$\zeta(k_1,\dots,k_n)=\sum_{m_1>\cdots>m_n>0}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}}$$

という値を指すことになっている．MZV の方が数論幾何や結び目理論など様々な分野との結びつきも強く，MZSV よりも「筋の良い」対象であるというのが一般的な認識だと思うが，本稿のテーマである 2-1 公式ではむしろ MZSV の方が主役である．

2-1 公式というのは，Ohno-Zudilin [2] により予想された，MZSV と $\frac{1}{2}$-MZV（後述）の間に成り立つ等式である．予想そのものは Zhao [5] によって証明されたが，等式が成立する背景を含めて十分に解明されたとは言えない，と筆者は思っている．そこで本稿では，2-1 公式の両辺に現れる値に関する筆者の結果を述べた後，筆者が抱えている疑問について説明したい．なお，多重ゼータ値に関する基本的な事柄について，本稿ではあまり説明しない．それらについては荒川・金子 [1] などを参照していただきたい．

2　2-1 公式

2-1 公式の主張を述べるため，まず t 多重ゼータ値というものを導入する．

定義 2.1 t を不定元とする．収束インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)$ に対し，

$$\zeta^t(\mathbf{k})=\sum_{\mathbf{p}} t^{\sigma(\mathbf{p})}\zeta(\mathbf{p})\in\mathbb{R}[t]$$

とおく．これを **t 多重ゼータ値（t-MZV）**と呼ぶ．ここで，右辺は

$$\mathbf{p}=(k_1\square k_2\square\ldots\square k_n)$$

において $n-1$ 個の $\square$ にそれぞれ「$+$」または「,」のいずれかを挿入して得られるインデックス $\mathbf{p}$ 全体にわたる和であり，$\sigma(\mathbf{p})$ は $\mathbf{p}$ を作るときに「$+$」を挿入した個数を表す．

例 2.2 $\zeta^t(k_1,k_2,k_3)=\zeta(k_1,k_2,k_3)+t\zeta(k_1+k_2,k_3)+t\zeta(k_1,k_2+k_3)+t^2\zeta(k_1+k_2+k_3)$.

注意 2.3 $t=0$ を代入すると $\zeta^0(\mathbf{k})=\zeta(\mathbf{k})$ となることは定義から明らかである．一方 $t=1$ を代入すると $\zeta^1(\mathbf{k})=\zeta^\star(\mathbf{k})$ となる．すなわち，t-MZV は MZV と MZSV を補間する多項式になっている．

定理 2.4 (2-1 公式，Zhao [5, Theorem 1.1]) 非負整数列 $\mathbf{j}=(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ が $j_1\geq 1$ を満たすとき，

$$\zeta^\star(\{2\}^{j_1},1,\{2\}^{j_2},1,\ldots,\{2\}^{j_n},1)=2^n\zeta^{1/2}(2j_1+1,2j_2+1,\ldots,2j_n+1) \tag{2.1}$$

が成り立つ．ここで，$\{2\}^j$ は 2 を j 個並べた列を表す．

例 2.5 $n=1$ のとき，

$$\zeta^\star(\overbrace{2,\ldots,2}^{j},1)=2\zeta(2j+1).$$

$n=2$ のとき，

$$\zeta^\star(\overbrace{2,\ldots,2}^{j_1},1\overbrace{2,\ldots,2}^{j_2},1)=4\zeta(2j_1+1,2j_2+1)+2\zeta(2j_1+2j_2+2).$$

なおこれらは，それぞれ Zlobin [6] および Ohno-Zudilin [2] によって証明されていた．

等式 (2.1) の左辺を $X(\mathbf{j})$，右辺を $Y(\mathbf{j})$ とおく．以下の 2 節で，$Y(\mathbf{j})$ と $X(\mathbf{j})$ のそれぞれについて，関連する筆者の結果を述べる．

3 $Y(\mathbf{j})$ について：t 調和積

$Y(\mathbf{j})$ は 2^n の因子を除き $\frac{1}{2}$-MZV で表される．この節では，まず通常の MZV が満たす調和関係式を復習した後，その t-MZV への拡張である t 調和関係式を述べ，さらにそれを $t=\frac{1}{2}$ に特殊化することで $Y(\mathbf{j})$ についての関係式が得られることを示す．

定義 3.1 $\mathfrak{h}^1 = \mathbb{Q}\langle z_k \mid k = 1, 2, \ldots\rangle$ を，無限個の変数 $z_1, z_2, \ldots$ に関する非可換多項式環とし，その $\mathbb{Q}$ 部分空間 $\mathfrak{h}^0 \subset \mathfrak{h}^1$ を

$$\mathfrak{h}^0 = \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{k \geq 2} z_k \mathfrak{h}^1$$

と定義する．また，$\mathbb{Q}$ 双線型写像 $*\colon \mathfrak{h}^1 \times \mathfrak{h}^1 \to \mathfrak{h}^1$ を以下のように定め，**調和積**と呼ぶ：

$$\begin{gathered} 1 * w = w * 1 = w, \\ z_k w * z_l w' = z_k(w * z_l w') + z_l(z_k w * w') + z_{k+l}(w * w'). \end{gathered}$$

ただし $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $w, w' \in \mathfrak{h}^1$ とする．

例 3.2

$$\begin{aligned} z_k * z_l &= z_k(1 * z_l) + z_l(z_k * 1) + z_{k+l}(1 * 1) \\ &= z_k z_l + z_l z_k + z_{k+l}, \\ z_{k_1} z_{k_2} * z_l &= z_{k_1}(z_{k_2} * z_l) + z_l(z_{k_1} z_{k_2} * 1) + z_{k_1+l}(z_{k_2} * 1) \\ &= z_{k_1} z_{k_2} z_l + z_{k_1} z_l z_{k_2} + z_{k_1} z_{k_2+l} + z_l z_{k_1} z_{k_2} + z_{k_1+l} z_{k_2}. \end{aligned}$$

命題 3.3 $\mathfrak{h}^1$ は $*$ を積として可換 $\mathbb{Q}$ 代数をなし，$\mathfrak{h}^0$ はその部分 $\mathbb{Q}$ 代数となる．さらに $\mathbb{Q}$ 線型写像 $Z\colon \mathfrak{h}^0 \to \mathbb{R}$ を

$$Z(1) = 1, \quad Z(z_{k_1} \cdots z_{k_n}) = \zeta(k_1, \ldots, k_n)$$

で定義すると，Z は $\mathbb{Q}$ 代数の準同型となる．

この命題の後半部分は，MZV の間に

$$\zeta(k)\zeta(l) = \zeta(k, l) + \zeta(l, k) + \zeta(k + l)$$

のような関係式が成り立つことを意味する．これらを MZV の**調和関係式**と呼ぶ．

次に t-MZV への拡張を考える．$\mathbb{Q}[t]$ 上の非可換多項式環 $\mathbb{Q}[t]\langle z_k \mid k \geq 1\rangle$ を $\mathfrak{h}^1[t] = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{h}^1 t^n$ と同一視して，後者の記号で表す（t は各 z_k と可換であることに注意）．

定義 3.4 $\mathbb{Q}[t]$ 双線型写像 $\overset{t}{*}\colon \mathfrak{h}^1[t] \times \mathfrak{h}^1[t] \to \mathfrak{h}^1[t]$ を以下のように定め，$\boldsymbol{t}$ **調和積**と呼ぶ：

$$\begin{gathered} 1 \overset{t}{*} w = w \overset{t}{*} 1 = w, \\ z_k w \overset{t}{*} z_l w' = z_k(w \overset{t}{*} z_l w') + z_l(z_k w \overset{t}{*} w') + (1 - 2t) z_{k+l}(w \overset{t}{*} w') + (t^2 - t) z_{k+l} \circ (w \overset{t}{*} w'). \end{gathered}$$

ただし $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $w, w' \in \mathfrak{h}^1[t]$．また $z_k \circ (\ )\colon \mathfrak{h}^1[t] \to \mathfrak{h}^1[t]$ は

$$z_k \circ 1 = 0, \quad z_k \circ (z_l w) = z_{k+l} w$$

で定義される $\mathbb{Q}[t]$ 線型写像とする．

定理 3.5 (Y. [3]) $\mathfrak{h}^1[t]$ は $\overset{t}{*}$ を積として可換 $\mathbb{Q}[t]$ 代数をなし，$\mathfrak{h}^0[t]$ はその部分 $\mathbb{Q}[t]$ 代数となる．さらに $\mathbb{Q}[t]$ 線型写像 $Z^t\colon \mathfrak{h}^0[t] \to \mathbb{R}[t]$ を

$$Z^t(1) = 1, \quad Z^t(z_{k_1}\cdots z_{k_n}) = \zeta^t(k_1,\ldots,k_n)$$

で定義すると，Z^t は $\mathbb{Q}[t]$ 代数の準同型となる．

さて，定義 3.4 において $t = \frac{1}{2}$ を代入すれば $\mathfrak{h}^1$ 上の $\frac{1}{2}$ 調和積 $\overset{1/2}{*}$ が得られ，$(\mathfrak{h}^1, \overset{1/2}{*})$ は可換 $\mathbb{Q}$ 代数となる．さらに $t = 1/2$ での特殊事情として次の事実が成り立つ．

系 3.6 $\mathfrak{h}^{1,\mathrm{odd}} = \mathbb{Q}\langle z_k \mid k \geq 1 : \mathrm{odd}\rangle$, $\mathfrak{h}^{0,\mathrm{odd}} = \mathfrak{h}^{1,\mathrm{odd}} \cap \mathfrak{h}^0$ とおくと，これらは $(\mathfrak{h}^1, \overset{1/2}{*})$ の部分 $\mathbb{Q}$ 代数となる．

この部分 $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathfrak{h}^{0,\mathrm{odd}}$ に $\mathbb{Q}$ 準同型 $Z^{1/2}$ を適用すれば次を得る．

系 3.7 $Y(j_1,\ldots,j_n)$ $(j_1 \geq 1, j_2,\ldots,j_n \geq 0)$ および 1 が生成する $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{Y}$ とおくと，$\mathcal{Y} = Z^{1/2}(\mathfrak{h}^{0,\mathrm{odd}})$ であり，したがって $\mathcal{Y}$ は $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$ 代数をなす．

例 3.8 (1) $k, l \geq 1$ について

$$z_k \overset{1/2}{*} z_l = z_k z_l + z_l z_k$$

が成り立つ．特に $k = 2j+1$, $l = 2j'+1$ とし，両辺を 4 倍して $Z^{1/2}$ を適用すると

$$Y(j)Y(j') = Y(j,j') + Y(j',j) \tag{3.1}$$

を得る．

(2) $k_1, l \geq 2$, $k_2 \geq 1$ について

$$z_{k_1}z_{k_2} \overset{1/2}{*} z_l = z_{k_1}z_{k_2}z_l + z_{k_1}z_l z_{k_2} + z_l z_{k_1}z_{k_2} - \frac{1}{4}z_{k_1+k_2+l}$$

が成り立つ．特に $k_1 = 2j_1+1$, $k_2 = 2j_2+1$, $l = 2j'+1$ とし，両辺を 8 倍して $Z^{1/2}$ を適用すると

$$Y(j_1,j_2)Y(j') = Y(j_1,j_2,j') + Y(j_1,j',j_2) + Y(j',j_1,j_2) - Y(j_1+j_2+j'+1) \tag{3.2}$$

となる．

4 $X(\mathbf{j})$ について：MZSV の積分表示

2-1 公式の左辺の値 $X(\mathbf{j})$ は，特殊な形のインデックスに対する MZSV であった．ここでは，一般の MZSV に対するある種の積分表示について述べ，$X(\mathbf{j})$ の値への簡単な応用を説明する．

まず，MZV に対する反復積分表示を復習しよう．$\omega_0(t) = \frac{dt}{t}$, $\omega_1(t) = \frac{dt}{1-t}$ とおく．

命題 4.1 収束インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ に対して

$$\zeta(\mathbf{k}) = \int_{1>t_1>t_2>\cdots>t_k>0} \omega_{\delta(1)}(t_1)\omega_{\delta(2)}(t_2)\cdots\omega_{\delta(k)}(t_k).$$

ただし $k = k_1 + \cdots + k_n$ は $\mathbf{k}$ の重さであり，δ は

$$\delta(i) = \begin{cases} 1 & (i \in \{k_1, k_1+k_2, \ldots, k_1+\cdots+k_{n-1}, k\}), \\ 0 & (i \notin \{k_1, k_1+k_2, \ldots, k_1+\cdots+k_{n-1}, k\}) \end{cases}$$

で定められる．

例 4.2

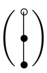
$$\zeta(2,1) = \int_{1>t_1>t_2>t_3>0} \underbrace{\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{1-t_2}}_{2}\underbrace{\frac{dt_3}{1-t_3}}_{1}.$$

この例において，右辺の積分の形を決めている要素は

- 変数が 3 つあり，$t_1 > t_2 > t_3$ という順序に並んでいることと，
- それぞれの変数に $\omega_0, \omega_1, \omega_1$ という微分形式が対応していること

である．これを次のような，2 色の頂点を持つ Hasse 図で表すことにする：

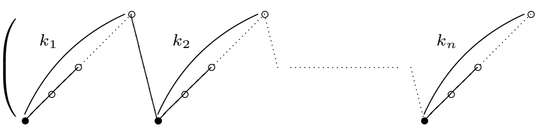
3 つの頂点が 3 つの変数（上から t_1, t_2, t_3）に対応し，それらを結ぶ線は大小関係（上の方が大きい）を表す．また $\circ$ は ω_0 に，$\bullet$ は ω_1 に対応する．X をこのような図（で表されるデータ）とするとき，対応する積分を $I(X)$ と書くことにする．例えば上の例は

$\zeta(2,1) = I$ ()

と書ける．

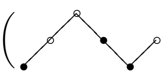
このような記法を用いると，MZSV に対する積分表示は次で与えられる．

定理 4.3 (Y. [4]) 収束インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ に対して

$\zeta^\star(\mathbf{k}) = I$ ()

が成り立つ．

例 4.4

$\zeta^\star(3,1,2) = I$ ()

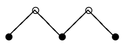
$$= \int_{t_1<t_2<t_3>t_4>t_5<t_6} \frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{dt_3}{t_3}\frac{dt_4}{1-t_4}\frac{dt_5}{1-t_5}\frac{dt_6}{t_6}.$$

ただし，右辺の積分においてすべての変数は区間 $[0,1]$ の中だけを動く．

ここで，2-1 公式の左辺の値 $X(\mathbf{j})$ は

$$X(j_1,\ldots,j_n)=\zeta^\star(\{2\}^{j_1},1,\{2\}^{j_2},1,\ldots,\{2\}^{j_n},1)$$

と定義されていたことを思い出そう．例えば

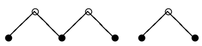
$$X(2)=\zeta^\star(2,2,1)=I\Bigl($$  $$\Bigr)$$

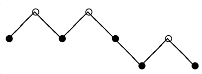
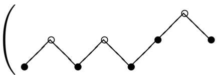
である．この表示を使うと，Y についての関係式 (3.1) に対応する次の関係式を示すことができる．

命題 4.5 $j,j'\geq 1$ に対して

$$X(j)X(j')=X(j,j')+X(j',j).$$

証明 簡単のため，$j=2$, $j'=1$ としよう（一般の場合も図が横長になるだけで，全く同様である）．このとき

$$X(2)X(1)=I\Bigl($$  $$\Bigr)$$

$$=I\Bigl($$  $$\Bigr)+I\Bigl($$  $$\Bigr)$$

と書ける．ここで第 1 の等号は，2 つの積分の積が直積上の積分に等しいことから分かる．また第 2 の等号は，左から 5 番目の頂点と 6 番目の頂点に対応する変数について，どちらが大きいかで積分領域を 2 つに分割することで得られる．さらに，右辺の第 1 項は

$$\zeta^\star(2,2,1,2,1)=X(2,1)$$

の積分表示，第 2 項は（図を右から読めば分かるように）

$$\zeta^\star(2,1,2,2,1)=X(1,2)$$

の積分表示を与えている．以上で $X(2)X(1)=X(2,1)+X(1,2)$ が言えた． ∎

5 疑問点

前 2 節の結果から浮かんでくる疑問点をいくつか挙げて，本稿のまとめに代える．

- $\mathcal{Y}$ の大きさについて
  第 3 節で定義した，2-1 公式の（右辺の）値 $Y(\mathbf{j})$ が生成する $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathcal{Y}$ は，多重ゼータ値全体が生成する $\mathbb{Q}$ 代数

  $$\mathcal{Z}=Z(\mathfrak{h}^0)=Z^{1/2}(\mathfrak{h}^0)$$

  の部分代数であるが，$\mathcal{Y}$ は $\mathcal{Z}$ の中でどの程度の大きさか，というのが一つ目の疑問である．

もう少し正確に述べよう．$k \geq 1$ について，重さ k の収束インデックスに対する MZV が生成する $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{Z}_k$ とおく：

$$\mathcal{Z}_k = \left\langle \zeta(k_1, \ldots, k_n) \;\middle|\; k_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, k_1 + \cdots + k_n = k \right\rangle_{\mathbb{Q}}.$$

また $\mathcal{Z}_0 = \mathbb{Q}$ とおく．これらについて，$\mathcal{Z} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{Z}_k$ という直和分解と，次元公式

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k,\ \text{ただし } d_k \text{ は } \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k = \frac{1}{1 - x^2 - x^3} \text{ で定まる数列}$$

が成り立つと予想されており，不等式 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k$ は証明されている．そこで $\mathcal{Y}_k = \mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}_k$ とおくとき，$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Y}_k$ はどのような数列だろうか？

- $\mathcal{Y}$ の乗法構造を $X(\mathbf{j})$ を使って記述できるか？
  $\mathcal{Y}$ における $\mathbb{Q}$ 代数の構造は，全射準同型 $Z^{1/2} \colon \mathfrak{h}^{0,\mathrm{odd}} \to \mathcal{Y}$ を通じて，$\mathfrak{h}^{0,\mathrm{odd}}$ における $\frac{1}{2}$ 調和積により記述することができる．このことから，(3.1) や (3.2) のような $Y(\mathbf{j})$ の間の具体的な関係式が得られることは第 3 節で述べたとおりである．2-1 公式により，$X(\mathbf{j})$ の間にもこれと同じ関係式が成り立つ．しかし，それらの関係式を 2-1 公式を経由せずに直接証明することはできていない．例えば (3.1) に対応するのは命題 4.5 であり，これは積分表示を用いて示すことができたが，(3.2) に対応する等式

  $$X(j_1, j_2)X(j') = X(j_1, j_2, j') + X(j_1, j', j_2) + X(j', j_1, j_2) - X(j_1 + j_2 + j' + 1)$$

  を直接示すことは，筆者の知る限りまだできていない．$X(\mathbf{j})$ についての新しい視点・解釈を与えることによって，そのような証明が可能にならないだろうか？
  なお，$\mathcal{Y}$ の乗法構造については，別の道筋もあり得る．すなわち，もしなにか $X(\mathbf{j})$ について新しい解釈が得られ，それによって $X(\mathbf{j})$ が生成するベクトル空間（つまり $\mathcal{Y}$）が代数をなすことが示されたとして，そうして得られる具体的な関係式が $\mathfrak{h}^{0,\mathrm{odd}}$ の $\frac{1}{2}$ 調和積から得られるものと同じである必然性はないのではないか？　もしこれらの関係式が異なるのであれば，積 $X(\mathbf{j})X(\mathbf{j}') = Y(\mathbf{j})Y(\mathbf{j}')$ を 2 通りに展開することによって非自明な線型関係式が得られるはずである．これは多重ゼータ値の複シャッフル関係式の類似であり，道筋としてはむしろこちらの方が面白いかもしれない．
- 2-1 公式が成り立つ「根拠」は何か？
  2-1 公式そのものをどのように理解すればよいか，という疑問である．Zhao [5] による証明は初等的で，議論そのものを追うことはできるが，等式が成立する内在的な理由（そのようなものがあるとして）を明らかにしているとは言えないように思う．例えば，何らかの量を 2 通りに計算すると，それぞれ $X(\mathbf{j})$ と $Y(\mathbf{j})$ に到達する，というような証明はできないものだろうか？

参考文献

[1] 荒川恒男，金子昌信，多重ゼータ値入門，COE Lecture Note Vol. 23, Kyushu University, 2010.

[2] Y. Ohno, W. Zudilin, *Zeta stars*, Commun. Number Theory Phys. 2 (2008), 325–347.

[3] S. Yamamoto, *Interpolation of multiple zeta and zeta-star values*, J. Alg. 385 (2013), 102–114.

[4] S. Yamamoto, *Multiple zeta-star values and multiple integrals*, preprint arXiv:1405.6499, 2014 (to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu).

[5] J. Zhao, *Identity families of multiple harmonic sums and multiple zeta (star) values*, preprint arXiv:1303.2227, 2013.

[6] S. A. Zlobin, *Generating functions for the values of a multiple zeta function*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. no. 2 (2005), 55–59; English transl., Moscow Univ. Math. Bull. 60:2 (2005), 44–48.

Heegner cycle の p-進高さ

小林 真一
東北大学大学院理学研究科

1 p-進 Gross-Zagier 公式

まずは研究動機として Gross-Zagier 公式について述べたい．整数論の中心的課題として代数多様体や保型形式などに付随する L-関数の特殊値と数論的不変量を結びつける特殊値公式がある．古くは類数公式, その楕円曲線版である Birch and Swinnerton-Dyer 予想, さらにそれを一般化した Beilinson-Bloch-Kato 予想などがある．Gross-Zagier 公式もこれらの予想と深く関わる公式である．わかりやすくするために楕円曲線の言葉で述べておく．有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線 E と Heegner 条件をみたす虚二次体 K に対し, Heegner 点という $E(K)$ の点を構成する方法がある．Gross-Zagier 公式は

$$L'(E/K,1) = (\text{簡単な因子} \neq 0) \times (E/K \text{ の周期}) \times (\text{Heegner 点の高さ})$$

というものである．ここで $L(E/K,s)$ は E の K 上の Hasse-Weil L-関数である．K の選択は自由度が大きく, K をうまく選ぶと階数 1 以下の場合の $\mathbb{Q}$ 上の BSD 予想に応用がある．またこの公式からいつ Heegner 点が無限位数の元を定めるかがわかる．

上では楕円曲線の言葉で Gross-Zagier 公式を述べたが, この公式は実際は重さ 2, $\Gamma_0(N)$ の楕円型保型形式に関する公式である．そこでただちに考えられる一般化は, 保型形式の重さを 2 から一般の偶数 $k \geq 2$ にしたらどうなるかである．このとき Heegner 点のかわりに現れる数論幾何的対象が Heegner cycle である．これは $k-1$ 次元の久賀-佐藤多様体の余次元 $k/2$ の代数的 cycle で K の Hilbert 類体上定義されるものである．[1] 一般の重さの楕円型保型形式に関する Gross-Zagier 公式は, 重さ 2 のときの約 10 年後に S. Zhang により示された．難しさは “点” ではない高次元 cycle に関する高さ理論にある．Zhang は Arakelov 交叉理論を使うことでこの問題に取り組んでいる．Gross-Zagier 公式の他の一般化として Hilbert 保

[1] この cycle が候補であることは, 早くも Gross-Zagier のオリジナルの論文の中で, Deligne による示唆があったと述べられている．

型形式を考えるなど, Zhang らによるさらなる一般化の研究も進んでいるがここではこれ以上述べない. (cf. [23].)

次に Gross-Zagier 公式の p-進版について述べる. Bertolini-Darmon らによる p-進化もあるが我々は Perrin-Riou による p-進化の流れに従う. これは純粋にアナロジーを辿ったもので, L-関数のかわりに p-進 L-関数を使い, p-進 L-関数の微分値と Heegner 点や Heegner cycle の p-進高さを結びつけるものである. [2] ここでは公式を少し正確に述べておく.

$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^n$ を $\Gamma_0(N)$ の重さ $k \in 2\mathbb{N}$ の正規固有カスプ新形式とする. K を虚二次体, 判別式を d_K, ϵ を $K/\mathbb{Q}$ に伴う 2 次の Dirichlet 指標とする. このとき

$$L(f/K, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)\epsilon(n)}{n^s}$$

とおく. ここで次の Heegner 条件を考える.

「ℓ が N の素因子 $\Longrightarrow$ イデアル (ℓ) は $\mathcal{O}_K$ で 2 つの異なる素イデアルに分解」

この条件から得られる重要な帰結は次の 2 つである.

- $L(f/K, s)$ の関数等式の符号は -1. とくに $L(f/K, k/2) = 0$.
- Heegner cycle $z_H \in \mathrm{CH}^{k/2}(\mathrm{KS}_{k-1}/H)_0$ が構成できる. ここで KS_{k-1} は $k-1$ 次元の久賀-佐藤多様体, H は K の Hilbert 類体. $k = 2$ のときは KS_{k-1} はモジュラー曲線で Heegner cycle は Heegner 点である. 詳しくは §2 で説明する.

p-進 L-関数について簡単に思い出しておく. 埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ を固定する. $p \nmid N$ で f の p-Euler 因子 $X^2 - a_p(f)X + p^{k-1} = 0$ の根を α, β とし, $|\alpha|_p \geq |\beta|_p$ となるように名前をつけておく. $a_p(f)$ が p-進単数であるとき, p を ordinary というが, このときは α は unit root である. f の円分 p-進 L-関数 $\mathscr{L}_p(f, \alpha, s)$ は $\mathbb{C}_p$ に値をもつ変数 $s \in \mathbb{Z}_p$ の p-進解析関数である. 円分というのは, この関数は p-冪導手の Dirichlet 指標 χ でひねった複素 L-関数の値 $L(f, \chi, i)$ $(1 \leq i \leq k-1)$ たちを補間することで作られるという意味である. $L(f, \chi, i)$ は適当な周期で割ると代数的数になっていることに注意しておく. f の K 上の円分 p-進 L-関数 $\mathscr{L}_p(f/K, \alpha, s)$ は $\mathscr{L}_p(f, \alpha, s)$ と $\mathscr{L}_p(f \otimes \epsilon, \epsilon(p)\alpha, s)$ の積として定義される. [3]

[2] Bertolini-Darmon のものは微分値ではなく値そのものであったり, 高さというよりは Abel-Jacobi 写像による Heegner 点の像を考えていたりするが, 反円分拡大という Heegner 点のシステムが住んでいる方向を直接みており, 高さではなく有理点自身を求めることに利用できるなどの長所がある.

[3] 正確には複素周期からくるちょっとした修正が必要. p-進 L-関数は複素周期の取り方に依存し, isogeny 不変性などが成り立たない.

p-進 Gross-Zagier 公式 (予想)： $p \nmid N$ とする.

$$\mathscr{L}_p'(f/K,\alpha,k/2)=u^{-2}(4|d_K|)^{1-\frac{k}{2}}\left(1-\frac{p^{\frac{k}{2}-1}}{\alpha}\right)^2\left(1-\frac{p^{\frac{k}{2}-1}}{\epsilon(p)\alpha}\right)^2\langle\mathfrak{z}_K^{(k)},\mathfrak{z}_K^{(k)}\rangle_{p,f/K,\alpha}.$$

ここで $\mathfrak{z}_K^{(k)}$ は Heegner cycle を K 上に trace したもの. $\langle\ ,\ \rangle_{p,f/K,\alpha}$ は f/K に対応する円分 p-進高さ対で, α-固有空間による Hodge filtration の splitting に付随するもの. また $u := \sharp\mathcal{O}_K^{\times}/2$ である.

p-進高さや Heegner cycle については次節以降で説明する. ここでは上が解けている場合を簡単にまとめておく. 解けている場合も正確には細かい条件があるが省略する.

- $k=2$, p が good ordinary で K で split のとき. B. Perrin-Riou [19], (1987).
- $k>2$, p が good ordinary で K で split のとき. J. Nekovář [16], (1995).
- $k=2$, p が good non-ordinary[4] のとき. S. Kobayashi [11], (2013).

ちなみに実数値の場合は $k=2$ のとき Gross-Zagier [9], (1987), $k>2$ のとき Zhang [24], (1997) で $k>2$ のときは p-進の方が先に証明されている. 現在は $k>2$, p が good non-ordinary で K で split のときを研究中であり, 今回の講演はこの研究の内容の一部の紹介である. p が K で split するという条件は, 証明の中で極めて重要な役割を果たす. しかし p-進高さの非自明性があるときは, $\mathbb{Q}$ 上の BSD 予想と結びつけることで最終的には取ることができる. ($k=2$ で non-ordinary の場合はこれに該当.) ただこれは p が K で inert する場合の現象を何ひとつ解明するものではない. この場合はモジュラー曲線を $\mathbb{Z}_p$ 上で考えたとき, Heegner 点が定めるセクションが supersingular point と交わっていることに注意する. p-進 Gross-Zagier 公式の証明の概略, 方針等については [10] を参照してほしい. それらは大筋においてはすべての場合に共通である. p が ordinary のときは円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大以外の K の $\mathbb{Z}_p$-拡大に対しても p-進 Gross-Zagier 公式が示されていることにも注意しておく. [5]

p-進 L-関数について少し補足しておく. 一般に p-進 L-関数を定義するためには, 考えているモチーフのみならず $\mathbb{Z}_p$-拡大と p-進 de Rham 実現の Hodge filtration の splitting を選ぶ必要ある. (カスプ形式 f に対しては, f に付随する p-進表現 V_f に対し $D_{\mathrm{dR}}(V_f)$ の Hodge filtration F^0 の $\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間としての splitting.) 例えば楕円曲線 E の p-進 L-関数といっ

[4] f が楕円曲線に付随するときは, その楕円曲線が p で supersingular reduction をもつことと同値であるが, 保型形式を考えているときは supersingular という用語は適切ではないように思う.

[5] ただし反円分拡大のときは同じ設定だと $0=0$ という自明な式になってしまう.

ても, どういう $\mathbb{Z}_p$-拡大に付随するものかで性質はまったく異なる. K_∞ を K の $\mathbb{Z}_p$-拡大とすると, K_∞/K に付随する E の p-進 L-関数の λ-不変量はアーベル群 $E(K_\infty)$ と強いつながりがある. この群は当然考えている K_∞ によって性質が異なる. 例えば円分なら (無限次代数体だが) 有限生成アーベル群, 一方反円分なら階数は無限[6] である. 有限生成だったとしてもその階数は考えている K_∞ で異なる. このように p-進 L-関数は Hasse-Weil L-関数の単純な類似物というわけではない.[7] 一方 Hodge filtration の splitting はモチーフの p-進的 deformation のしやすさと関わっており, その取り方によって関数の p-進的な挙動の複雑さが異なってくる. p が ordinary ならば splitting として unit root 空間がとれ, そのときは非常にきれいな deformation が得られる. p が non-ordinary のときも splitting としてフロベニウスの固有空間をとると変形の様子が見やすい. $\mathscr{L}_p(f,\alpha,s)$ の α は α-固有空間による splitting に対応している. しかし non-ordinary の場合, 固有空間による splitting は functorial ではないので ordinary のときのように必ずしもよいものとはいえない. p-進 L-関数を $\mathbb{C}_p$ に値をもつ関数としてではなく, 適当な p-進 de Rham cohomology に値をもつベクトル値関数として捉えるより本質的な定式化もある. その場合は Hodge filtration の splitting を選ぶ必要はない. ただ Gross-Zagier 公式のような計算による証明を行う場合は, ベクトル値ではなく $\mathbb{C}_p$ に値をもつ関数と考える方が都合がよいと思われる.

2 Heegner 点と Heegner cycle

ここでは Heegner 点と Heegner cycle を簡単に説明する. (cf. [7].) Heegner 点とは大雑把にいえばモジュラー曲線の CM 点のことである. つまりモジュラー曲線は楕円曲線のモジュライになっており, CM 楕円曲線に対応する点が Heegner 点である. 例えばレベル 1 のモジュラー曲線 $X(1)$ は, j-関数によりリーマン球面になっており, CM 楕円曲線の j-不変量が与えるリーマン球面上の点が Heegner 点である. singular moduli という言い方もできるかもしれない. よく知られているように CM 楕円曲線の j-不変量は代数的 (整) 数になっているので, Heegner 点はモジュラー曲線の代数的な点を定める.

BSD 予想と関連して面白いのは, 志村谷山予想の解決により, 有理数体上定義された楕円曲線 E はその導手を N とすると, モジュラー曲線 $X_0(N)$ から定数でない射 $X_0(N) \to E$ が存在することである. これより $X_0(N)$ の有理点が見つかると, この射による像として E の有理点を構成できる. 例えば虚二次体 K が Heegner 条件をみたすとする. このとき $\mathcal{O}_K$ の

[6] 具体的には p-冪導手の Heegner 点のシステムを含んでいる.

[7] 虚二次体には $\mathbb{Z}_p$-拡大が無限に存在するが, Gross-Zagier 公式の観点からいうと反円分拡大のときだけ特異な現象が起こり, それ以外の拡大でおこる現象は本質的に同じように思われる.

中で $(N)=\mathcal{N}\mathcal{N}^*$, $\mathcal{O}_K/\mathcal{N}\cong\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ となるよう素イデアル分解できる. (もちろんこのような分解の仕方は一意ではない.) このとき自然な射影

$$\mathbb{C}/\mathcal{O}_K \longrightarrow \mathbb{C}/\mathcal{N}^{-1}$$

は $\mathcal{O}_K$ を準同型環とする CM 楕円曲線間の位数 N の cyclic isogeny となる. これよりこの isogeny が $X_0(N)$ の CM 点を定めるが, この場合 K の Hilbert 類体を H とすると $X_0(N)$ の H-有理点となる. よってこの Heegner 点から $E(H)$ の点が構成され, K や $\mathbb{Q}$ まで trace を取れば $E(K)$ や $E(\mathbb{Q})$ の点を構成できる. このようにしてできる楕円曲線の点を Heegner 点ということも多い.

Euler 系の議論や岩澤理論的議論のためには, 一つの Heegner 点を考えるだけでなく, Heegner 点のシステムを考えることが重要である. K の order $\mathcal{O}$ を考える. これは K の格子で部分環になっているものである. $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}_K$ に指数有限で含まれ, その指数 c は導手といわれる. 上の Heegner 点の議論において $\mathcal{O}_K$ を $\mathcal{O}$ の可逆イデアルに置き換えても同様の話ができる. そのようにしてできる Heegner 点を導手 c の Heegner 点という. モジュライ解釈では $\operatorname{End}E=\mathcal{O}$ となる CM 楕円曲線に対応する. 導手 c の Heegner 点は導手 c の ring class field H_c 上定義される. つまり $X_0(N)(H_c)$ の点を定める. ring class field は $\mathrm{Gal}(H_c/K)\cong\operatorname{Pic}\mathcal{O}$ となる体で, 具体的には j-関数を使って $K(j(\mathbb{C}/\mathcal{O}))$ として構成される. また K の反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大は $\cup_n H_{p^n}$ に含まれる. このようにして大量の Heegner 点ができるが, これらは体 H_c のノルムに関して Euler 因子と関連する特別な関係式で結ばれている. つまり Euler システムをなす. p-進高さの計算でも, 知りたいのは $c=1$ の Heegner 点であるが, それを計算するためにこのノルムシステムが重要な役割を果たす.

次に Heegner cycle について説明する. 簡単のため $\mathbb{Q}$-scheme の圏で考えることにする. まずは久賀-佐藤多様体を思い出す. $f:\mathcal{E}\to Y(N)$ を full level 構造の普遍楕円曲線, $\overline{\mathcal{E}}\to X(N)$ を一般普遍楕円曲線とする. また包含写像を $j:Y(N)\to X(N)$ と書く. k を 2 以上の偶数とし $X(N)$ 上のファイバー積

$$\overline{\mathcal{E}}^{(k-2)} := \overline{\mathcal{E}}\times_{X(N)}\cdots\times_{X(N)}\overline{\mathcal{E}} \qquad (k-2\text{ 個})$$

は, $k\geq 4$ ならば $X(N)$ のカスプのファイバー上に特異点をもつ. これを Deligne による標準的特異点解消を行ってできるのものが久賀-佐藤多様体 KS_{k-1} である. [8] “標準的” 特異点解消は次で説明するよい性質をもつ. まず自然に

$$\mathcal{E}^{(k-2)} := \mathcal{E}\times_{Y(N)}\cdots\times_{Y(N)}\mathcal{E}\subset \mathrm{KS}_{k-1}$$

[8] index は次元に合わせることにした.

となっている．次に $\Gamma = ((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \rtimes \{\pm 1\})^{k-2} \rtimes \mathfrak{S}_{k-2}$ とおくと，この群は $\mathcal{E}^{(k-2)}$ にレベル構造による平行移動や -1 倍，成分の置換によって自然に作用している．そしてこの作用が KS_{k-1} に自然に延びる．また指標 $\Gamma \to \{\pm 1\}$ を $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ を 1 に，$\{\pm 1\}$ は恒等写像で，$\mathfrak{S}_{k-2}$ は符号指標で送ることにより定義する．この指標に対応する射影子 $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2N(k-2)!}][\Gamma]$ を考える．このとき久賀-佐藤多様体のコホモロジーの ε-部分が保型形式に付随するモチーフとなる．例えばエタールコホモロジーの同型

$$V_p := H^1_{et}(X(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, j_* Sym^{k-2}(R^1 f_* \mathbb{Q}_p)) \cong \varepsilon H^{k-1}_{et}((\mathrm{KS}_{k-1})_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p) = \varepsilon H^*_{et}((\mathrm{KS}_{k-1})_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p)$$

がある．最後の等式では $k > 2$ と仮定する．これを Hecke 作用素でカスプ形式 f に対応する部分を切り取れば f の Galois 表現ができる．また Hodge 構造をみるとカスプ形式の空間が現れる．(本質的に Eichler-Shimura 同型.)

さて Heegner 条件を満たす虚二次体 K を固定し，τ を $X_0(N)$ の導手 c の Heegner 点とする．便宜的に自然な有限射 $X(N) \to X_0(N)$ による τ の逆像をひとつ取り，それもまた τ と書く事にする．E_τ を τ に対応する H_c 上の CM 楕円曲線とする．このとき $c\sqrt{d_K} \in \mathrm{End}_K E_\tau$ であり，そのグラフ $\Gamma_\tau \subset E_\tau \times_{H_c} E_\tau$ を考える．Heegner cycle Z_τ は次で定義される KS_{k-1} の cycle である．

$$Z_\tau := \Gamma_\tau \times \cdots \times \Gamma_\tau \subset E_\tau \times \cdots \times E_\tau \subset \mathcal{E} \times_{Y(N)} \cdots \times_{Y(N)} \mathcal{E} \subset \mathrm{KS}_{k-1}$$

(ファイバー積は最初は $\frac{k}{2} - 1$ 個，次は $k-2$ 個で H_c 上．τ は $\mathrm{Spec}\, H_c \to Y(N)$ を定め，E_τ はこれによる $\mathcal{E}$ の引き戻しになっている.) また $k > 2$ ならば $\varepsilon H^k(\mathrm{KS}_{k-1}) = 0$ より，$\varepsilon Z_\tau \in CH^{\frac{k}{2}}(\mathrm{KS}_{k-1})_0 \otimes \mathbb{Q}$ がわかる．(下つき 0 は cycle map の核，つまり 0 にホモロジー同値.) そして p-進 étale Abel-Jacobi 写像の像として $H^1(H_c, V_p(\frac{k}{2}))$ の元が定まるが，実は Block-Kato Selmer 群 $H^1_{\mathrm{f}}(H_c, V_p(\frac{k}{2}))$ の元になっていることが知られている．($p \nmid N$ と仮定している.) Heegner cycle は Heegner 点と同様に Euler システムを形成する．(cf. [17])

3　p-進高さ関数

F を代数体 ($\mathbb{Q}$ の有限次拡大) とする．F 上定義されたアーベル多様体 A に対しては実数に値を持つ Néron-Tate の高さ対

$$\langle\ ,\ \rangle :\ A^\vee(F) \times A(F) \ \longrightarrow\ \mathbb{R}$$

があり，非退化性などのよい性質を持っていることが知られている．ここで $A^\vee$ は A の双対アーベル多様体である．1980 年代に実数ではなく p-進数に値をもつ p-進高さ対

$$\langle\ ,\ \rangle :\ A^\vee(F) \times A(F) \ \longrightarrow\ \mathbb{Q}_p$$

が, Néron [18], Schneider [21], Mazur-Tate [14], Zarhin [25] らによって研究された. また代数曲線に対しては Coleman-Gross [6] の仕事がある.

実数値のときにはない p-進値高さ関数の大きな特徴は次の２つである.

- p-進対数関数, すなわちイデール類群からの準同型 $\mathbb{A}_F^\times/F^\times \to \mathbb{Z}_p$ の取り方に依存.
- Hodge filtration の splitting の選び方に依存.

つまりこれらの選び方を変えると異なる高さ関数が生まれるので, p-進高さ関数は多様体に対して複数存在することになる. [9] 最初の選択は類体論により F の $\mathbb{Z}_p$-拡大を考えることと本質的に同値である. よってこれらは p-進 L-関数を定義するための情報と一致しており, p-進 L-関数の特殊値公式 (p-進 Birch and Swinnerton-Dyer 予想など) に関する予想とつじつまがあっている. p-進では高さ関数が一意に定まらない理由は, $\mathbb{Q}_p$ には $\mathbb{Z}_p$ などコンパクトな部分群が複数 (無限個) あるからと言えるかもしれない. Néron-Tate 高さの理論では, 素朴には生じる有界関数の曖昧さを, 群演算との両立性を要求することで取り除いている. また無限遠点における局所高さの一意性は非自明な連続準同型 $A(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ が存在しないことに依拠している.

次に p-進高さ関数の一般化について述べる. 一般のモチーフや高次元 cycle に対して, 高さ関数を幾何学的に構成しその性質を研究するのは困難なことが多い. しかしながら p-進には p-進 Galois 表現という比較的扱いやすい対象があり, Bloch-Kato の理論 [3] により "有理点" を p-進 Galois 表現の言葉で表すことも可能になっている. Nekovář は Zarhin らのアーベル多様体における p-進高さの理論を Bloch-Kato の用語で書き直すことにより, 一般の (幾何学的に生じると予想される) p-進 Galois 表現 V に対し, p-進高さ対

$$\langle\ ,\ \rangle_p :\ H^1_{\mathrm{f}}(F, V^*(1)) \times H^1_{\mathrm{f}}(F, V) \ \longrightarrow\ \mathbb{Q}_p$$

を定義した. H^1_{f} は Block-Kato の Selmer 群であり, Tate-Shafarvich 群の p-part の有限性を認めると, アーベル多様体のときは有理点の集合 $A(F) \otimes \mathbb{Q}_p$ と自然に同型になる. $V^*(1)$ は V の Kummer 双対であり, V がアーベル多様体の Tate 加群ならその双対アーベル多様体の Tate 加群に相当する. このペアリングはやはり対数関数の取り方と Hodge filtration の splitting の選び方に依存する. Heegner cycle の p-進高さは $V = V_p(k/2)$ とし, εZ_τ の p-進 étale Abel-Jacobi 像として定まる H^1_{f} の元の高さとして定義される. この場合 canonical に $V^*(1) \cong V$ となっていることに注意する.

これまでは主に大域高さについて話をしてきたが, 高さ関数の深い性質を調べるときには, 大域高さを局所高さの和として書き, 各々の局所項を計算することになる. とくに p 上の素

[9] Mazur-Tate [14] は論文のタイトルで, canonical なのに複数形を使っていることに注意している.

点における p-進局所高さが重要であるので, これについて少し述べる. まず実数値対応物として代数曲線 (リーマン面) の無限素点における実数値局所高さ関数を考えてみよう. 局所高さは Weil 関数などを用いて明示的に構成されることが多いが, p-進化のためにはより理論的な見方が必要である. X をリーマン面, 簡単のため divisor $D_1 = [P] - [Q]$, $D_2 = [R] - [S]$ で P, Q, R, S はすべて異なるものを考える. このとき D_1 と D_2 の無限素点における実数値局所高さは

$$\int_S^R \omega_{PQ}$$

の実部で与えられる. ここで ω_{PQ} は P, Q でのみ一位の極をもつ第三種微分形式 [10] で P, Q での留数がそれぞれ 1, -1 となるものである. ただしこの条件だけからは ω_{PQ} が一意に定まらないので次のように Hodge filtration の splitting の情報も付け加える.

第三種微分形式は de Rham cohomology $H^1_{\mathrm{dR}}(X - \{P, Q\})$ の Hodge filtration F^1 の元と思えるが, 写像 $\Psi : F^1 H^1_{\mathrm{dR}}(X - \{P, Q\}) \to H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ で第一種微分の空間 $F^1 H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ 上では恒等的になっているものがある. この Ψ は本質的に混合 Hodge 構造を使って作られる. ここで複素共役が -1 倍で作用する $H^1_{\mathrm{dR}}(X) = H^1_{\mathrm{Betti}}(X) \otimes \mathbb{C}$ の実部分ベクトル空間を W とするとき, ω_{PQ} に $\Psi(\omega_{PQ}) \in W$ という条件をつける. このとき ω_{PQ} は一意に定まり, 積分の実部は道の取り方によらず well-defined になる. この構成は実混合 Hodge 構造の Deligne の canonical splitting と対応している. (cf. [8]). 楕円曲線 (複素トーラス)E のときに具体的に書くなら, ω_{PQ} は

$$\left(\zeta^*(z-P) - \zeta^*(z-Q) + \frac{\overline{P} - \overline{Q}}{a(E)}\pi\right) dz$$

である. 実際これは第三種微分形式で純虚数周期を持っている. ここで $a(E)$ は E の基本領域の面積, $\zeta^*(z)dz$ は因子 [0] に付随する正規 (被約) テータ関数 $\theta(z)$ の対数微分である. ($d\zeta^*(z) \in H^{0,1}(X)$.) ここで $\hat{\theta}(z) = \exp(-\frac{\pi z\bar{z}}{a(E)})\theta(z) = \exp(-\frac{z\eta(z)}{2})\sigma(z)$ とおく. ($\sigma(z)$ は Weierstrass σ-関数.) このとき無限素点における局所高さは,

$$\log\left|\frac{\hat{\theta}(R-P)\,\hat{\theta}(S-Q)}{\hat{\theta}(R-Q)\,\hat{\theta}(S-P)}\right|$$

で表される. ([13, Chapter 13], [22, Chapter VI].)

代数曲線のときこの構成の p-進類似を辿ったものが Coleman-Gross の p-進 (局所) 高さである. (大域高さは局所高さの和として定義する.) 積分は p-進の Coleman 積分に置き換える. 留数をもつ第三種微分形式を積分するために p-進対数関数の指定と, 上の W の代わりとして Hodge filtration の splitting の選び方 (フロベニウスの固有空間など) に任意性が生まれる.

[10] 高々一意の極をもつ有理型微分形式. さらに留数が整数という条件をつけることもある.

Ψ の類似物の構成として Coleman-Gross では rigid 幾何的類似を辿るが, Besser [1] によりフロベニウス構造を使ったより本質的な構成も与えれている. Heegner cycle に適用するためには, 代数曲線の局所系つきコホモロジーを考える必要がある. より正確には, higher weight の保型形式を扱うときは, カスプで退化しているような locally free でない係数を扱うので少し厄介である. (しかも Hodge 構造の変形を扱う必要もある.) p-進では overconvergent F-isocrystal が局所系の類似ではあるが, やはり保型形式への応用のためには退化する係数を扱う必要がある. 今回は p-進 Gross-Zagier 公式の証明のために必要最低限の ad hoc な扱いですませて, 係数付き Coleman-Gross の p-進局所高さの一般論を建設することはしなかった. (実数値のときは Brylinski [4] によって行われている.) これは今後の課題だろう. 阿部さんの講演とも関連していると思われる.

リーマン面のときの局所高さ理論が混合 Hodge 構造と密接に関わることはすでに述べた通りである. 局所高さは第三種微分形式の積分であるが, 第一種 (正則) 微分形式の場合は, この種の積分は所謂 Abel-Jacobi 写像である. Carlson により Abel-Jacobi 写像は混合 Hodge 構造の extension を使って解釈されているが, 局所高さも Scholl により混合 Hodge 構造の mixed extension (SGA 7/I, IX.9.3 の extension panachée) を使って解釈されている. 先ほどのリーマン面の例では mixed extension は部分コンパクト台つきコホモロジー $H^1(X-P;Q)$ と Gysin 列などを使って作られる. このようなことから適切なコホモロジー論があれば局所高さの理論は建設できる. (実際 Motivic な局所高さが Scholl によって定義されている.) Fontaine や Bloch-Kato の言語により, p-進 Galois 表現 (étale cohomology) の mixed extension を使って定義されるものが, Nekovář の p-進 (局所) 高さ理論である. (例えば Ψ に相当するものは単にフロベニウスの weight に注目した Dieudonné 加群の splitting として構成される.)

今, Coleman-Gross 型と Nekovář の 2 つの p-進局所高さの構成について説明したが, メリットとディメリットは次の通りである. まず Nekovář の方法のメリットは p-進 Galois 表現の一般論を形式的に利用するだけですむので, 一般的枠組の中で強い制約もなく展開でき, 基本性質を示すことも容易である. とくに局所と大域の相性がよく, 高さ対の積公式が自然に成り立つ. つまり大域高さが Abel-Jacobi 像を経由する. (例えばリーマン面の場合, 局所高さは因子類ではなく因子そのものに依存して定義されるので, Abel-Jacobi 像を経由するものではない.) これは Gross-Zagier 公式の証明において極めて本質的な性質である. これがないと Heegner cycle の height から p-進保型形式を作れなくなる. ディメリットは Galois 表現的であるため, p-進特有の深い性質を導きにくく計算にも向いていないところである. また $\mathbb{Z}_p$-拡大に関する整構造の分析ができない. Coleman-Gross 型のメリットは p-進解析的で rigid cohomology などとの相性が良い. したがって Katz の p-進保型形式論や Coleman の

p-進保型形式関連の仕事との相性がよい．p-進的な数値計算もしやすく, 最近は (定数係数のときは) コンピュータプログラムもこの構成に基づいて書かれている．ディメリットは大域高さの理論ができないことである．もちろん局所項の和として大域高さを定義することはできるが, Abel-Jacobi 像を経由するかという根本的な問題が解決できない．(定数係数のときはアーベルの定理により解決できる.) また $\mathbb{Z}_p$-拡大に関する整構造の分析もできない．p-進 Hodge 理論の比較定理 (部分コンパクト台つき) を認めるとこの２つの高さを比較できるので, 長所を生かし欠点を補いあうこともできるが, 共通の問題点は, $\mathbb{Z}_p$-拡大に関する整構造を分析できないところである．p-進高さは $\mathbb{Z}_p$-拡大の性質に依存するはずなのに, 両者の構成には $\mathbb{Z}_p$-拡大が本質的に現れない．対数関数の選択として表面的に登場するのみである．この欠点を補う第三の構成法がある．それはアーベル多様体の通常素点の場合の Schneider [21] による構成に端を発するノルム構成法である．この構成法では, $\mathbb{Z}_p$-拡大はこの方向に p-進高さ関数の定義域を動かしたときの挙動と結びつく形で登場する．岩澤理論的構成法である．Heegner cycle の p-進高さの計算はこの三種類の構成法をすべて駆使して行うのであるが, ノルム構成法に基づく部分が最も深いところであるので, この構成法についてもう少しだけ説明する．ノルム構成法は, アーベル多様体のときは ordinary なら [21], non-ordinary なら [12], 一般のガロワ表現に対しては, 今回 Perrin-Riou の理論を使うことで一般化した．

ノルム構成法においては, 計算したい cycle を, ある種のノルム系の構成要素として捉えることが胆である．そしてそのノルム系がある冪級数で補間されることを示し, その冪級数を使って高さを構成 (計算) するという方法である．Coleman 冪級数論的構成法と言ってもよい．Coleman 冪級数論は explicit reciprocity law と絡んで発展したわけであるが, そこでも計算したい量を冪級数で補間し, その冪級数の対数微分などを使って reciprocity law を計算していた．例えば楕円単数に関しては楕円単数のシステム (Euler 系) があり, ほとんど定義から, それを補間する Coleman 冪級数はテータ関数 (本質的に Weierstrass σ-関数) の形式冪級数展開である．そのテータ関数の log が実質的に局所高さ関数であることから, 高さ関数と Coleman 冪級数論とのつながりを感じてもらえるだろうか.

Heegner cycleのノルム構成による高さの計算に関して説明する．前節でみたようにHeegner cycle はある種のノルム系をなしているので, それを補間する “Coleman 冪級数” を見つけることが高さの計算の鍵となる．[11] ordinary のときはこれは本質的に通常の Coleman 冪級数論で事足りる．non-ordinary のときも, 重さが 2 ならば, 通常の Coleman 冪級数論を拡張させることでそれほど困難なく行われる．higher weight のときの困難さはここの部分にある．これまでにできている場合は, 基本的に形式群の理論を使って示されており, 補間は素朴な

[11] 正確にはこれは Abel-Jacobi 像を計算する鍵である．局所高さの場合は, 二つの Heegner cycle が絡み合う mixed な状況でこの問題を考える必要がある．

冪級数論から大きく逸脱するものではない．それに対し cycle の補間は, H^1_{f} の元という p-進 etale Abel-Jacobi 写像と Fontaine の言語を使って抽象的にできる元を扱わねばならず, 具体的に計算するのが非常に困難である．しかも補間のためにはある種の合同式が必要なので integral な p-進 Hodge 理論も必要となる．また non-ordinary のときは一般に $k-1$ 個の twist $s=1,\ldots,k-1$ 上の合同式が必要になるが, $s=k/2$ 上にしか Heegner cycle が存在しない．今回は cycle を補間する Coleman 冪級数論の一般論の建設はあきらめ, 欲しい冪級数を直接構成する手段を取った．Perrin-Riou の理論 [20] より冪級数が与えられると (局所的な)H^1_{f} の元のシステムを構成できることが知られている．Serre-Tate の local moduli の理論, Katz の p-進保型形式の理論, Bertollini-Darmon-Prasanna, Castella の p-進 Abel-Jacobi 像の Coleman 積分を使った計算を組み合わせることで, Heegner cycle のシステムを生み出す冪級数を構成できる．講演ではもう少し詳しい説明を行ったが, ここでは詳細は差し控えさせていただく．論文が完成したらどこかで解説させていただければ幸いである．

参考文献

[1] Besser, A.: The p-adic height pairings of Coleman-Gross and of Nekovář, Number theory, 13–25, CRM Proc. Lecture Notes, 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[2] Bertolini, M., Darmon, H., Prasanna, K.: Generalized Heegner cycles and p-adic Rankin L-series. With an appendix by Brian Conrad. Duke Math. J. 162 (2013), no. 6, 1033–1148.

[3] Bloch, S., Kato, K.: L-functions and Tamagawa numbers of motives. The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 333–400, Progr. Math., 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[4] Brylinski, J-L.: Heights for local systems on curves. Duke Math. J. 59 (1989), no. 1, 1–26.

[5] Coleman, R., Gross, B.: p-adic heights on curves. Algebraic number theory, 73–81, Adv. Stud. Pure Math., 17, Academic Press, Boston, MA, 1989.

[6] Gross, B.: Heegner points on $X_0(N)$. Modular forms (Durham, 1983), 87–105, Ellis Horwood Ser. Math. Appl.: Statist. Oper. Res., Horwood, Chichester, 1984.

[7] Gross, B.: Local heights on curves. Arithmetic geometry (Storrs, Conn., 1984), 327–339, Springer, New York, 1986.

[8] Gross, B., Zagier, D.: Heegner points and derivatives of L-series. Invent. Math. 84 (1986), no. 2, 225–320.

[9] Kobayashi, S.: On the p-adic Gross-Zagier formula for elliptic curves at supersingular primes. Algebraic number theory and related topics 2010, 61–79, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B32, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2012.

[10] Kobayashi, S.: The p-adic Gross-Zagier formula for elliptic curves at supersingular primes. Invent. Math. 191 (2013), no. 3, 527–629.

[11] Kobayashi, S.: The p-adic height pairing on abelian varieties at non-ordinary primes, To appear in Iwasawa Theory 2012, Contributions in Mathematical and Computational Sciences, Vol. 7, Bouganis, Thanasis, Venjakob, Otmar (Eds.) 2014, XII, 483p, Springer.

[12] Lang, S.: Fundamentals of Diophantine geometry. Springer-Verlag, New York, 1983. xviii+370 pp.

[13] Mazur, B., Tate, J.: Canonical height pairings via biextensions. Arithmetic and geometry, Vol. I, 195–237, Progr. Math., 35, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[14] Nekovář, J.: On p-adic height pairings, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1990–91, 127–202, Progr. Math., 108, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.

[15] Nekovář, J.: On the p-adic height of Heegner cycles. Math. Ann. 302 (1995), no. 4, 609–686.

[16] Nekovář, J.: Kolyvagin's method for Chow groups of Kuga-Sato varieties. Invent. Math. 107 (1992), no. 1, 99–125.

[17] Néron, A.: Fonctions thêta p-adiques et hauteurs p-adiques. Seminar on Number Theory, Paris 1980-81 (Paris, 1980/1981), pp. 149–174, Progr. Math., 22, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1982.

[18] Perrin-Riou, B.: Points de Heegner et dérivées de fonctions L p-adiques. Invent. Math. 89 (1987), no. 3, 455–510.

[19] Perrin-Riou, B.: Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, Invent. Math. 115 (1994), 81–149.

[20] Schneider, P.: p-adic height pairings. I. Invent. Math. 69 (1982), no. 3, 401–409.

[21] Silverman, J.: Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves. Graduate Texts in Mathematics, 151. Springer-Verlag, New York, 1994. xiv+525 pp.

[22] Yuan, X., Zhang, S-W., Zhang, W.: The Gross-Zagier formula on Shimura curves. Annals of Mathematics Studies, 184. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2013. x+256 pp.

[23] Zhang, S-W.: Heights of Heegner cycles and derivatives of L-series. Invent. Math. 130 (1997), no. 1, 99–152.

[24] Zarhin, Y. G.: p-adic heights on abelian varieties. Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1987–88, 317–341, Progr. Math., 81, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

冪零軌道と W 代数

荒川 知幸 (京大・数理研)

1. 序

(アフィン)W 代数は Kac-Moody 代数や Virasoro 代数などの無限次元リー環を含み, 可積分系, 共型場理論, 散在型有限群, モジューラ表現論, 4 次元のゲージ理論, 幾何学的 Langlands 対応など様々な分野と関係のある興味深い頂点代数の族である. 一方, その構造は極めて複雑であり, そのため W 代数の表現論は最近までよくわかっていなかった. しかしようやく近年, 有限 W 代数の表現論の進展などに伴い, W 代数の表現論も応用可能なレベルにまで進展しつつある ([A1, A2, A3, A7]).

Premet[Pre] によって導入された有限 W 代数は (アフィン)W 代数の有限次元版であり, その歴史は Kostant[Kos] に遡る. 有限 W 代数は Slodowy の横断片の自然な量子化であり, その表現論は普遍包絡環の primitive ideal の理論と密接な関係がある. 両者の関係は Premet によって予想され Losev[Los2] によって確立された. 冪零軌道は primitive ideal の重要な不変量として現れる. したがってその理論は有限 W 代数にとっても重要である.

本稿では (アフィン)W 代数に対する Losev の結果のアナローグを考察する. アフィン Kac-Moody 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ に関しては (現時点では) primitive ideal の理論は存在しないが, 頂点代数の理論の中では普遍アフィン頂点代数の極大イデアルが primitive ideal のアナローグであるとみなすことができる。その随伴多様体はアフィン Kac-Moody 代数の最高ウエイト $k\Lambda_0$ (k はレベル) の最高ウエイト表現の特異台と一致するが、それは $\mathfrak{g}^*$ のアーク空間の部分スキームして定義される. 有限次元リー環の場合と異なり, アフィン Kac-Moody 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の普遍包絡環には $\widehat{\mathfrak{g}}$ の中心元以外の非自明な中心が存在しないため冪零錐との関係は全く明らかではないが、$\widehat{\mathfrak{g}}$ の許容表現に関してはその特異台が $\mathfrak{g}$ の冪零錐のアーク空間に含まれことを示すことができる (Feigin-Frenkel 予想 [A5]). これは $\widehat{\mathfrak{g}}$ の許容表現に付随した頂点代数の随伴多様体 [A4] が $\mathfrak{g}$ の冪零錐に含まれることと同値である。

許容表現の特異台, あるいは対応する随伴多様体に関してはさらに既約性も成立し, これらの明示的に決定することも可能である ([A5]). このことと, アフィン Kac-Moody 代数の許容表現 [A6], 及び Losev の結果のアナローグ, すなわちアフィン Kac-Moody 代数と W 代数との関係から, 例えば 20 年来の未解決問題であった主冪零軌道に付随する W 代数の有理性問題 [FKW] を解決することが可能になった ([A7]). 本稿ではそうした状況を報告したい.

2. 有限次元リー環の表現論における冪零軌道

$\mathfrak{g}$ を有限次元複素単純リー環とし, $U(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環とする:

$$U(\mathfrak{g})=T(\mathfrak{g})/\langle x\otimes y-x\otimes x-[x,y]\mid x,y\in\mathfrak{g}\rangle.$$

ただし, $T(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ のテンソル代数. このとき, $\mathfrak{g}$ 加群とは (多元環としての)$U(\mathfrak{g})$ 加群のことに他ならない.

$$U_p(\mathfrak{g}):=\sum(\text{高々}\,p\,\text{個の}\ \mathfrak{g}\ \text{の元の積})\subset U(\mathfrak{g})$$

とおくと,

$$0 = U_{-1}(\mathfrak{g}) \subset U_0(\mathfrak{g}) \subset U_1(\mathfrak{g}) \subset \dots, \quad U(\mathfrak{g}) = \bigcup_p U_p(\mathfrak{g})$$

$$U_p(\mathfrak{g})U_q(\mathfrak{g}) \subset U_{p+q}(\mathfrak{g}), \quad [U_p(\mathfrak{g}), U_q(\mathfrak{g})] \subset U_{p+q-1}(\mathfrak{g})$$

となる. これを $U(\mathfrak{g})$ の PBW フィルトーレーション, あるいは標準トレーションフィルトレーションという. Associated graded algebra

$$\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_p U_p(\mathfrak{g})/U_{p-1}(\mathfrak{g})$$

には次で Poisson 代数の構造が入る.

$$\sigma_p(a)\sigma_q(b) = \sigma_{ab}, \quad \{\sigma_p(a), \sigma_q(b)\} = \sigma_{p+q-1}([a,b]).$$

ここで, $\sigma_p : U_p(\mathfrak{g}) \to U_p(\mathfrak{g})/U_{p-1}(\mathfrak{g})$ は自然な射影 (symbol map).

定理 2.1 (Poincaré-Birkoff-Witt)**.** 次のポアソン代数の同型が存在する.

$$\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*].$$

ただし, $\mathfrak{g}^*$ には Kirillov-Kostant の Poisson 構造を入れる (つまり $x, y \in \mathfrak{g} \subset \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ に対して $\{x, y\} = [x, y]$).

$\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ を $U(\mathfrak{g})$ の中心とすると, $\mathcal{Z}_p(\mathfrak{g}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cap U_p(\mathfrak{g})$ により $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ に誘導フィルトレーションが入り, $\operatorname{gr} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_p \mathcal{Z}_p(\mathfrak{g})/\mathcal{Z}_{p-1}(\mathfrak{g})$ は $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ の Poisson 可換な部分代数になる. 実際,

$$\operatorname{gr} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G$$

が成立することが知られている. ただし $\operatorname{Lie} G = \mathfrak{g}$ なる連結な半単純代数群.

I を $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアルとして, 誘導フィルトレーション $I_p = I \cap U_p(\mathfrak{g})$ に関する associated graded $\operatorname{gr} I = \bigoplus_p I_p/I_{p-1} \subset \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ は $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ の G 不変なイデアルとなる. この零集合

$$\operatorname{Var}(I) := \{\lambda \in \mathfrak{g}^* \mid f(\lambda) = 0,\ \forall f \in \operatorname{gr} I\}$$

は I の随伴多様体と呼ばれる. $\operatorname{Var}(I)$ は $\mathfrak{g}^*$ の G 不変, コーニックな部分代数多様体である.

随伴多様体は I が $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal, すなわちある単純加群 M の零化イデアル[1]になるときが特に重要である. Shur の補題より, 単純加群 M についてはある中心指標 $\gamma : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ が存在し,

$$z - \chi(z) \in I = \operatorname{Ann}_{U(\mathfrak{g})} M, \quad z \in Z(\mathfrak{g}) \tag{1}$$

となる.

$\mathcal{N}$ を $\mathfrak{g}$ の冪零錐とする.

$$\mathcal{N} =: \{x \in \mathfrak{g} \mid (\operatorname{ad} x)^r = 0,\ r \gg 0\} \subset \mathfrak{g}.$$

$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}$ の不変内積 $(\ |\ )$ で同一視すると,

$$\mathcal{N} = \{\lambda \in \mathfrak{g}^* \mid p(\lambda) = 0,\ \forall p \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G_+\} \subset \mathfrak{g}^*$$

[1] 次の定理が知られている.

定理 2.2 (Duflo '77)**.** 任意の primitigve ideal は単純な最高ウエイト加群の零化イデアルである.

となることはよく知られている．ここで $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G_+$ は $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G$ の argumentation ideal. (つまり $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_l]$, $\deg p_i > 0$, としたとき $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G_+ = \sum_{i=1}^l \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]p_i$.) 従って (1) より, primitive ideal I については

$$\mathrm{Var}(I) \subset \mathcal{N}$$

が成立する[2].

定理 2.3 (Joseph[Jos])**.** $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal I の随伴多様体は既約である．すなわち, ある冪零軌道[3]$\mathbb{O}$ が存在して

$$\mathrm{Var}(I) = \overline{\mathbb{O}}$$

となる．

3. 冪零軌道と有限 W 代数

$f \in \mathcal{N}$ を零でない元とする．Jacobson-Morozov の定理から f を含む $\mathfrak{sl}_2$ トリプル $\{e, f, h\}$ が存在する:

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

点 $f \in \mathfrak{g}$ における Slodowy の横断片とはアフィン空間

$$\mathcal{S}_f := f + \mathfrak{g}^e \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*$$

のことを云う．$\mathcal{S}_f$ はその各点において $\mathfrak{g}$ の G 軌道と横断的に交わることが知られている ([GG]).

$\gamma : \mathbb{C}^* \to G$, $t \mapsto \gamma_t$, を $h \in \mathfrak{g}$ が生成する G の 1 パラメーター部分群とすると,

$$\mathbb{C}^* \ni t : x \mapsto t^{-2} \operatorname{Ad}(\gamma_t^{-1})(x)$$

は $\mathcal{S}_f$ 上の $\mathbb{C}^*$ 作用を定める．容易に分かるようにこの $\mathbb{C}^*$ 作用は f に縮小する．

以下に説明するように $\mathcal{S}_f$ はポアソン多様体の構造が入る．$\chi \in \mathfrak{g}^*$ を $x \mapsto (f|x)$ で定める．また, $\mathfrak{g}$ の次数付けを

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j, \quad \mathfrak{g}_j = \{x \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{ad} h(x) = jx\}$$

で与える．このとき,

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 & \to & \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto & \chi([x, y]) \end{array}$$

はシンプレクティック形式を定めることがわかる．この形式に関する $\mathfrak{g}_1$ のラグランジャン部分空間 l を固定し,

$$\mathfrak{m} = l \oplus \bigoplus_{j \geq 2} \mathfrak{g}_j \subset \mathfrak{g}$$

と定めると, $\mathfrak{m}$ は $\mathfrak{g}$ の冪零部分代数になる．また, χ の $\mathfrak{m}$ への制限は指標になる (すなわち, $\chi([\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]) = 0$)

M を $\mathfrak{m}$ に対応する G の冪単部分群とすると制限写像

$$\mu : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{m}^*$$

は M の作用に関するモーメント写像であり, 点 $\chi \in \mathfrak{m}^*$ は一点からなる M の軌道である．逆像 $\mu^{-1}(\chi) = \chi + \mathfrak{m}^\perp$ は $\mathcal{S}_f$ を含むが, $\mathcal{S}_f$ の横断性より次が従う．

---

[2] このことから, $U(\mathfrak{g})$ の任意の有限生成加群の零化イデアル冪零錐に含まれることがわかる．

[3] $\mathbb{O} = \operatorname{Ad} G.x$, $x \in \mathcal{N}$ の形の (随伴作用に関する)G 軌道のことである．

定理 3.1 ([Kos, GG]). (i) χ はモーメント写像 μ の正則値である.
(ii) 次はアフィン代数多様体の同型を与える.

$$M \times \mathcal{S}_f \xrightarrow{\sim} \mu^{-1}(\chi), \quad (g, x) \mapsto \mathrm{Ad}\, g.x.$$

定理 3.1 より $\mathcal{S}_f \cong \mu^{-1}(\chi)/M$ には還元されたポアソン多様体の構造が入る.

ポアソン多様体 $\mathcal{S}_f$ は自然な非可換変形を持つことが知られている ([Kos, Pre]). 以下にその BRST 還元法を用いた構成 ([KS]) を説明する.

$\mathcal{C}l^\bullet_{\mathfrak{m}}$ を $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*$ に付随したクリフォード代数とし, $\deg \mathfrak{m} = -1$, $\deg \mathfrak{m}^* = 1$ によって次数付けをいれる: $\mathcal{C}l^\bullet_{\mathfrak{m}} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}l^p_{\mathfrak{m}}$.

$\mathcal{C}l^\bullet_{\mathfrak{m}}$ のフィルトレーションを $\mathcal{C}l^\bullet_{\mathfrak{m},p} = \Lambda^{\leq p}(\mathfrak{m})\Lambda^\bullet(\mathfrak{m}^*)$ で定めると

$$\mathrm{gr}\, \mathcal{C}l^\bullet_{\mathfrak{m}} = \bigoplus_p \mathcal{C}l^\bullet_{\mathfrak{m},p}/\mathcal{C}l^\bullet_{\mathfrak{m},p-1}$$

はスーパーポアソン代数になる. これを古典クリフォード代数という. 環としては

$$\mathrm{gr}\, \mathcal{C}l^\bullet_{\mathfrak{m}} = \Lambda(\mathfrak{m}) \otimes \Lambda(\mathfrak{m}^*)$$

であり, ポアソン構造は

$$\{x, y\} = 0 \quad \{f, g\} = 0 \quad \{f, x\} = f(x) \quad (x, y \in \mathfrak{m},\ f, g \in \mathfrak{m}^*)$$

で与えられる.

テンソル積 $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}l^\bullet_{\mathfrak{m}}$ には自然にスーパー代数の構造が入るが, Lie 代数の準同型

$$\theta : \mathfrak{m} \mapsto U(\mathfrak{m}) \otimes \mathcal{C}l^0 \subset U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}l^\bullet_{\mathfrak{m}}, \quad x \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}(x)$$

が存在する. ただし

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{m} \mapsto \mathcal{C}l^0$$

は $\mathfrak{m}$ の随伴作用が定める Lie 代数の準同型である[4].

補題 3.2. ([KS, Akm, BD]
(i) 任意の $x \in \mathfrak{m}$ について $[Q, 1 \otimes x] = \theta(x) + \chi(x)$ をみたす $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}l^1_{\mathfrak{m}}$ の元 Q が唯一存在する.
(ii) 上で定まる元 Q は $Q^2 = 0$ を満たす.

具体的には, Q は次で与えられる. $\mathfrak{m}$ の基底を $\{x_i\}$, その双対基底を $\{x_i^*\}$, 構造定数を $\{c_{ij}^k\}$ とすると

$$Q = \sum_i (x_i + \chi(x_i)) \otimes x_i^* - 1 \otimes \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} c_{ij}^k x_i^* x_j^* x_k. \tag{2}$$

Q は odd の元だから $Q^2 = 0$ より $(\mathrm{ad}\, Q)^2 = 0$ が従う. 従って $(C^\bullet(\mathfrak{g}), \mathrm{ad}\, Q)$ は dga(differential graded algebra) である. 特にそのコホモロジー

$$H^\bullet_f(U(\mathfrak{g})) := H^\bullet(U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}l^\bullet_{\mathfrak{m}}, \mathrm{ad}\, Q)$$

は次数付けされたスーパー代数の構造を持つ.

スーパー代数 $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}$ のフィルトレーション $F_p(U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}) = \sum_{i+j \leq p} U_i(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}l^\bullet_{\mathfrak{m},j}$ に関する associated graded は

$$\mathrm{gr}_F(U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}) = \mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{gr}\, \mathcal{C}l^\bullet_{\mathfrak{m}} \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \otimes \mathrm{gr}\, \mathcal{C}l^\bullet_{\mathfrak{m}}$$

---

[4] $\mathfrak{m}$ の冪零性を使う.

となる．$Q \in (F_1 U(\mathfrak{g}) \otimes Cl^{\bullet}_{\mathfrak{m}})$ の $\mathrm{gr}_F(U(\mathfrak{g})\otimes \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]\otimes \mathrm{gr}\,\mathcal{C}l^{\bullet}_{\mathfrak{m}}$ での像を $\bar{Q}$ と書くと $(\mathrm{ad}\,\bar{Q})^2 = 0$ である．従って $(\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]\otimes \mathrm{gr}\,\mathcal{C}l^{\bullet}_{\mathfrak{m}}, \mathrm{ad}\,\bar{Q})$ は dgPa(differential graded Poisson algebra) である．とくにそのコホモロジーはポアソン (スーパー) 代数になる．

定理 3.3 ([KS])**.** 任意の $i \in \mathbb{Z}^{\times}$ について $H^i(\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]\otimes \mathrm{gr}\,\mathcal{C}l^{\bullet}_{\mathfrak{m}}, \mathrm{ad}\,\bar{Q}) = 0$ が成立し, 次のポアソン代数としての同型が存在する．

$$H^0(\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]\otimes \mathrm{gr}\,\mathcal{C}l^{\bullet}_{\mathfrak{m}}, \mathrm{ad}\,\bar{Q}) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{S}_f]$$

定理 3.4 ([Kos, Pre, GG])**.** $H^{i\neq 0}_f(U(\mathfrak{g})) = 0$ and $\mathrm{gr}\,H^0_f(U(\mathfrak{g})) \cong \mathbb{C}[\mathcal{S}_f]$． ここで $\mathrm{gr}\,H^0_f(U(\mathfrak{g}))$ は $U(\mathfrak{g})\otimes\mathcal{C}l^{\bullet}_{\mathfrak{m}}$ のフィルトレーションが誘導する $H^{\bullet}_f(U(\mathfrak{g}))$ のフィルトレーションに関する associated graded ポアソン代数.

$\mathcal{S}_f$ の量子化

$$U(\mathfrak{g}, f) := H^0_f(U(\mathfrak{g})) \tag{3}$$

を $(\mathfrak{g}, f)$ に付随する有限 W 代数と呼ぶ[5]．

この有限 W 代数の定義は通常のものとは異なるが, 等価であることを確かめることが出来る ([A2, DSK, BGK])．

例 3.5. $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ とする．($\mathfrak{gl}_N$ は単純ではないが上で述べたことがそのまま適用される．)

$$f = f_{prin} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると $f = F_{prin}$ は主冪零元である．すなわち,

$$\mathcal{N} = \overline{\mathrm{Ad}\,G.f_{prin}}$$

定義から

$$\mathcal{S}_f = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N \\ 1 & y_1 & y_2 & \dots & y_{N-1} \\ 0 & 1 & y_1 & \dots & y_{N-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & y_1 \end{pmatrix} | y_1, \dots, y_N \in \mathbb{C} \right\}$$

となるが,

$$\mathbb{C}[\mathcal{S}_f] \underset{\text{制限写像}}{\overset{\sim}{\leftarrow}} \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^{GL_N} \underset{\text{Chevalley の制限定理}}{\cong} \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^{\mathfrak{S}_N}$$

が成立する．ここで $\mathfrak{h}$ は対角行列からなる $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環．この量子化として

$$U(\mathfrak{g}, f_{prin}) \underset{\text{Kostant の Whitttaker 模型 [Kos]}}{\overset{\sim}{\leftarrow}} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \underset{\text{Harish-Chandra 同型}}{\cong} S(\mathfrak{h})^{\mathfrak{S}_N}, \tag{4}$$

が成立するとが知られている．

---

[5] $U(\mathfrak{g}, f)$ はラグランジャン部分空間 l の取り方に依らず定まることが知られている．

上で与えた有限 W 代数の定義の利点はその関手性にある. いろいろなバージョンを考えることができるが (cf. [A2, A7]) ここでは $U(\mathfrak{g})$ の Harish-Chandra 両側加群の圏 $\mathcal{HC}$ を考える:

$$\mathcal{HC} = \{\mathfrak{g} \text{ の随伴作用が局所有限であるような両側 } U(\mathfrak{g}) \text{ 加群のなす圏 }\}.$$

$M \in \mathcal{HC}$ について $M \otimes \mathcal{C}l^{\bullet}_{\mathfrak{m}}$ は自然に両側 $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}l^{\bullet}_{\mathfrak{m}}$ 加群であり, 特に $\operatorname{ad} Q$ が作用する. 従ってそのコホモロジー $H^{\bullet}_f(M) = H^0(M \otimes \mathcal{C}l^{\bullet}_{\mathfrak{m}}, \operatorname{ad} Q)$ は両側 $U(\mathfrak{g}, f)$ 加群になり, 関手

$$\mathcal{HC} \to \{ \text{ 両側 } U(\mathfrak{g}, f) \text{ 加群の圏 } \}, \quad M \mapsto H^0_f(M), \tag{5}$$

が定まる.

定理 3.6 ([Los2, Gin])**.** 任意の $M \in \mathcal{HC}$ について $H^{i \neq 0}_f(M) = 0$. 従って (5) は完全関手.

I を $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアルとすると I と $U(\mathfrak{g})/I$ は共に $\mathcal{HC}$ 対象である. 従って定理 3.6 より次の完全列が存在する.

$$0 \to H^0_f(I) \to U(\mathfrak{g}, f) \to H^0_f(U(\mathfrak{g})/I) \to 0.$$

故に $H^0_f(I)$ の (graded な) イデアルである. $U(\mathfrak{g}, f)$ の両側イデアル J に対してもその associated variety $\operatorname{Var}(J)$ が $\mathcal{S}_f$ の部分代数多様体として定まるが, $H^0_f(I)$ は graded なので $\operatorname{Var}(H^0_f(I))$ は $\mathcal{S}_f$ の $\mathbb{C}^*$ 不変な部分代数多様体である.

定理 3.7 ([Los1], [Gin])**.** $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアル I について次が成立する.

$$\operatorname{Var}(H^0_f(I)) = \operatorname{Var}(I) \cap \mathcal{S}_f.$$

系 3.8. I を $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal, $\mathbb{O}$ を $\operatorname{Var}(I) = \overline{\mathbb{O}}$ となる $\mathfrak{g}$ の冪零軌道とする.

(i) $H^0_f(U(\mathfrak{g})/I) \neq 0 \iff \operatorname{Ad} G.f \subset \overline{\mathbb{O}}$.

(ii) $H^0_f(U(\mathfrak{g})/I)$ が (零でない) 有限次元 (代数) $\iff f \in \mathbb{O}$.

$H^0_f(U(\mathfrak{g})/I)$ は $U(\mathfrak{g}, f)$ の商代数であるので, $H^0_f(U(\mathfrak{g})/I)$ の既約表現は $U(\mathfrak{g}, f)$ の既約表現でもある.

定理 3.9 ([Los2])**.** I を $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal, $\mathbb{O}$ を $\operatorname{Var}(I) = \overline{\mathbb{O}}$ となる $\mathfrak{g}$ の冪零軌道, $f \in \mathbb{O}$ とすると, $H^0_f(U(\mathfrak{g})/I)$ は有限次元半単純代数. さらに $U(\mathfrak{g}, f)$ の任意の有限次元既約表現はこのようにして現れる.

4. カイラル表現論における冪零軌道

$\widehat{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ に付随するアフィン Kac-Moody 代数とする.

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K.$$

交換関係は

$$[xt^m, yt^n] = [x, y]t^{m+n} + (x|y)\delta_{m+n,0}K, \quad [K, \widehat{\mathfrak{g}}] = 0 \quad (x, y \in \mathfrak{g})$$

で与えられる.

以下 $\mathfrak{g}$ の内積は $(\theta, \theta) = 2$ と正規化されているとする. ただし θ は $\mathfrak{g}$ の最高ルート. $k \in \mathbb{C}$ について

$$V^k(\mathfrak{g}) := U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K)} \mathbb{C}_k$$

とおく．ただし, $\mathbb{C}_k$ は $\mathfrak{g}[t]$ が自明に, K が定数 k で作用する $\mathfrak{g}[t]\oplus\mathbb{C}K$ の一次元表現. $V^k(\mathfrak{g})$ は自然な頂点代数の構造を持つことが知られており,

$$\text{頂点代数としての } V^k(\mathfrak{g}) \text{ 加群} = \text{レベル } k \text{ の滑らかな } \widehat{\mathfrak{g}} \text{ 加群}$$

となる ([Kac, FBZ] などを参照). ここで $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群 M が $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群がレベル k であるとは中心元 K が定数 k で作用すること, また滑らかであるとは任意の $x\in\mathfrak{g}$, $m\in M$ に対して $xt^r m=0$ が十分大きな r に対して成立することを云う. $V^k(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ に付随したレベル k の普遍頂点代数と呼ばれる.

$N_k(\mathfrak{g})$ を $V^k(\mathfrak{g})$ の唯一の極大部分加群とすると, 一般論により $N_k(\mathfrak{g})$ は $V^k(\mathfrak{g})$ の頂点代数としてのイデアルでもある. 従って既約商加群 $L_k(\mathfrak{g})=V^k(\mathfrak{g})/N_k(\mathfrak{g})$ は単純な頂点代数となる. $L_k(\mathfrak{g})$ 加群の圏 $L_k(\mathfrak{g})$-Mod は $V^k(\mathfrak{g})$ 加群の圏 $V^k(\mathfrak{g})$-Mod(= レベル k の滑らかな $\widehat{\mathfrak{g}}$ のなす圏) の次で与えられる充満部分圏である.

$$L_k(\mathfrak{g})\text{-Mod}=\{M\in V^k(\mathfrak{g})\text{-Mod}\mid a_{(n)}M=0\ \forall a\in N_k(\mathfrak{g}), n\in\mathbb{Z}\}$$

ここで, 頂点代数 V について V-Mod で V 加群の圏を表し,

$$V\to(\operatorname{End}M)[[z,z^{-1}]],\quad a\mapsto a(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_{(n)}z^{-n-1}$$

を V のベクトル空間 M への表現とする.

$L_k(\mathfrak{g})$-Mod の記述は基本的な問題ではあるが一般には未解決である. ただし, 次はよく知られている.

定理 4.1. k が非負整数の時, $L_k(\mathfrak{g})$-Mod は $\widehat{\mathfrak{g}}$ のレベル k の可積分表現のなす圏に等しい.

頂点代数 $V^k(\mathfrak{g})$, $L_k(\mathfrak{g})$ は $\deg xt^n=-n$ により次数付けされていることに注意する.

Zhu[FZ] は関手

$$\{\text{次数付けされた頂点代数のなす圏}\}\to\{\mathbb{C}\text{ 上の多元環のなす圏}\},\quad V\mapsto A(V),$$

を構成し, 次の全単射が存在することを示した.

$$\begin{array}{ccc}\{\mathbb{Z}_{\geq0}\text{ で次数付けされた単純 } V \text{ 加群の同型類}\} & \xrightarrow{\sim} & \{\text{単純 } A(V) \text{ 加群の同型類}\}\\ M & \mapsto & M_{top}.\end{array}$$

ここで, M_{top} は M の最低次数の成分.

普遍アフィン頂点代数の場合, 自然な同型

$$A(V^k(\mathfrak{g}))\cong U(\mathfrak{g})$$

が任意の k について成立しおり, $U(\mathfrak{g})$ の単純加群 E に対応する単純 $V^k(\mathfrak{g})$ 加群は誘導表現 $U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{g}[t]\oplus\mathbb{C}K)}E$ の唯一の既約商である.

また頂点代数の全射 $V\to V'$ は多元環の全射 $A(V)\to A(V')$ を誘導する. 従って $L_k(\mathfrak{g})$ の Zhu 代数は $U(\mathfrak{g})$ の商に同型となる:

$$A(L_k(\mathfrak{g}))\cong U(\mathfrak{g})/I_k\quad \exists\text{ 両側イデアル } I_k.$$

よって単純 $L_k(\mathfrak{g})$ 加群の分類は ($U(\mathfrak{g})$ の表現論を modulo として) I_k を含む $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal の分類に帰着する. Primitive ideal J が I_k に含まれれば $\operatorname{Var}(J)\subset\operatorname{Var}(I_k)$ であるので, まず I_k の associated variety を決定しようというのは自然な発想である. しかし $A(V)$ の定義が複雑なため, 一般にはこれが既に難しい.

一方, 頂点代数 V に対してはその随伴多様体を定義する方法が別にある. Zhu[Zhu] により,

$$R_V := V/C_2(V), \quad C_2(V) = \{a_{(-2)}b \mid a, b \in V\}.$$

は次でポアソン代数の構造を持つことが知られている.

$$\bar{a}\bar{b} = \overline{a_{(-1)}b}, \quad \{\bar{a}, \bar{b}\} = \overline{a_{(0)}b}.$$

R_V を Zhu の C_2 代数と云う. 従って V の随伴多様体 X_V を

$$X_V = \operatorname{Specm} R_V$$

で定義することができる.

V が $V^k(\mathfrak{g})$, あるいはその商であるとき, $C_2(V) = \mathfrak{g}[t^{-1}]t^{-2}V$ となることがわかる. 従って

$$\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] = S(\mathfrak{g}) \cong R_{V^k(\mathfrak{g})}, \quad x \mapsto \overline{xt^{-1}\mathbf{1}}$$

が成立し,

$$X_{V^k(\mathfrak{g})} = \mathfrak{g}^*$$

となる. $X_{L_k(\mathfrak{g})}$ は $\mathfrak{g}^*$ の G 不変なポアソン部分代数多様体である.

X_V は次の意味で V の重要な不変量である.

定理 4.2 ([A4])**.** 次の条件は同値である.

(i) $\dim X_V = 0$,
(ii) $\dim \operatorname{Spec}(\operatorname{gr} V) = 0$.

ここで $\operatorname{gr} V$ は V の自然なフィルトレーションに関する associated graded vertex algebra[6].

X_V の次元が 0 であるような頂点代数は C_2 有限であると呼ばれる. 定理 4.2 より, C_2 有限な頂点代数は有限次元代数の類似と見なすことができるが, 様々な良い性質を持つことが知られている ([ABD, H2, H1, Miy] などを参照のこと).

次はよく知られている.

定理 4.3. 次の三つの条件は同値.

(i) $\dim X_{L_k(\mathfrak{g})} = 0$,
(ii) $L_k(\mathfrak{g})$ は可積分である.
(iii) $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

上の定理より, C_2 有限性条件はアフィン Kac-Moody 代数の表現論における可積分性条件を一般の頂点代数に拡張したものであるとみなすこともできる.

さて Zhu 代数と Zhu の C_2 代数の関係は次で与えられる.

補題 4.4 ([ALY])**.** 自然なポアソン代数の全射

$$R_V \twoheadrightarrow \operatorname{gr} A(V)$$

が存在する. ここで $\operatorname{gr} A(V)$ は V の次数付けが誘導する $A(V)$ のフィルトレーションに関する associated graded Poisson algebra.

---

[6] これは Poisson vertex algebra であり, 特に可換な $\mathbb{C}$ 代数の構造が入る.

上の補題から

$$\mathrm{Var}(I_k) \subset X_{L_k(\mathfrak{g})} \tag{6}$$

が従う.

写像 $R_{L_k(\mathfrak{g})} \twoheadrightarrow \operatorname{gr} A(L_k(\mathfrak{g}))$ は一般には同型では無い[7]が, 我々は次を予想している.

予想 4.5 ([A7])**.** 任意の k について $\mathrm{Var}(I_k) = X_{L_k(\mathfrak{g})}$.

さて $U(\mathfrak{g})$ の primitive イデアルの associated variety の場合と違い, $X_{L_k(\mathfrak{g})}$ は冪零錐 $\mathcal{N}$ に含まれるとは限らない. 実際, k が有理数でないとき $L_k(\mathfrak{g}) = V^k(\mathfrak{g})$ であるので $X_{L_k(\mathfrak{g})} = \mathfrak{g}^*$ となる.

一方, 定理 4.3 より $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき $X_{L_k(\mathfrak{g})} = \{0\}$ である. これ以外に $X_{L_k(\mathfrak{g})} \subset \mathcal{N}$ となるような場合はあるであろうか?

$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環とすると, $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}K$ は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Cartan 部分環になる. その双対を $\widehat{\mathfrak{h}}^+ = \mathfrak{h}^* \oplus \mathbb{C}\Lambda_0$ とする. ただし, $\Lambda_0(K) = 1$, $\Lambda_0(\mathfrak{h}) = 0$.

$\widehat{\Delta}^{re}$ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の実ルートの集合, $\widehat{\Delta}^{re}_+$ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の正の実ルートの集合とする.

$\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ について $L(\lambda)$ を最高ウエイト λ の $\widehat{\mathfrak{g}}$ の既約表現とする. $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現として,

$$L_k(\mathfrak{g}) \cong L(k\Lambda_0)$$

である.

$L(\lambda)$ は次を満たすとき許容表現であると云う.

(i) λ は regular dominant である. すなわち,

$$\langle \lambda + \widehat{\rho}, \alpha^\vee \rangle \notin \{0, -1, -2. \dots\}, \quad \forall \alpha \in \widehat{\Delta}^{re}_+$$

ここで $\widehat{\Delta}^{re}_+$ は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の正の実ルートの集合.

(ii) $\mathbb{Q}\widehat{\Delta}(\lambda) = \mathbb{Q}\widehat{\Delta}^{re}$. ただし, $\mathbb{Q}\widehat{\Delta}(\lambda)$ は λ の integral root system: $\widehat{\Delta}(\lambda) = \{\alpha \in \widehat{\Delta}^{re} \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}\}$.

定義から,

$$\{\text{ 可積分表現 }\} \subset \{\text{ 許容表現 }\}$$

である. 従って許容表現は可積分表現の一般化と見なすことができる.

許容表現は可積分表現と同様, 様々な良い性質を持つ. 例えば条件 (i) より可積分表現は Weyl-Kac 型の指標公式を持つことが従う.

$$\operatorname{ch} L(\lambda) = \sum_{w \in \widehat{W}(\lambda)} \frac{(-1)^{\ell_\lambda(w)} e^{w \circ \lambda}}{\prod_{\alpha \in \widehat{\Delta}_+} (1 - e^{-\alpha})^{\dim \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha}}. \tag{7}$$

ここで $\widehat{W}(\lambda)$ は $\widehat{\Delta}^{re}(\lambda)$ に対応する鏡映で生成される $\widehat{\mathfrak{g}}$ のワイル群 $\widehat{W}$ の部分群. さらに (ii) の条件から $\operatorname{ch} L(\lambda)$ はある種のテータ関数で表すことができ, モジュラー群 $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用に関する不変性を持つことがわかる (指標がモジュラー不変性を持つ表現は許容表現に限ることが予想されている [KW1]). また 2 つの許容表現の間には非自明な拡大がない ([GK]). 従って $\widehat{\mathfrak{g}}$ の許容表現は半単純な圏をなす.

一方, 可積分表現でない許容表現は (可積分表現とは異なり) ワイル群不変性を持たず[8], ユニタリー性も成立しない. 自然な幾何学的実現は (現在のところ) 知られておらず, 結晶基底の存在も (現在のところ) 知られていない.

---

[7]例えば $\mathfrak{g}$ が E_8 型で $k = 1$ のとき, (vareity は共に $\{0\}$ であるが) 核が非自明であることが容易にわかる.

[8]指標 (7) は $\widehat{W}(\lambda)$ 不変ではない.

レベル k は $L(k\Lambda_0)$ が許容表現となるとき許容であると云われる．これは次の条件と同値である．(1) $k \in \mathbb{Q}$ かつ (2) $k\Lambda_0$ が $\widehat{\mathfrak{g}}$ ウエイトとして regular dominant である．具体的には許容レベルは次の形をしている ([KW2]).

$$k + h^\vee = \frac{p}{q}, \quad (p,q) \in \mathbb{N},\ (p,q) = 1,\ p \geq \begin{cases} h^\vee & (r^\vee, q) = 1 \text{ のとき}, \\ h & (r^\vee, q) = r^\vee \text{ のとき} \end{cases}$$

ここで, $h, h^\vee$ はそれぞれ $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Coxter 数と双対 Coxeter 数, $r^\vee = \begin{cases} 1 & \mathfrak{g} \text{ が } ADE \text{ 型のとき} \\ 2 & \mathfrak{g} \text{ が } BCF \text{ 型のとき} \\ 3 & \mathfrak{g} \text{ が } G_2 \text{ 型のとき}. \end{cases}$

次の結果は Feigin-Frenkel によって予想され, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のときは Feigin-Malikov [FM] によって示されていた．

定理 4.6 ([A5])**.** k が許容であれば $X_{L_k(\mathfrak{g})} \subset \mathcal{N}$.

さらに次が成立する (Joseph の定理のアフィンアナローグ).

定理 4.7 ([A5])**.** k が許容レベルの時 $X_{L_k(\mathfrak{g})}$ は k の分母 $q \in \mathbb{N}$ のみに依る $\mathcal{N}$ の既約な部分代数多様体である．すなわち, 各 $q \in \mathbb{N}$ に対して冪零軌道 $\mathbb{O}_q$ が存在し, 分母が q の許容レベル k に対して

$$|X_{L_k(\mathfrak{g})}| = \overline{\mathbb{O}_q}$$

となる．具体的には $\overline{\mathbb{O}_q}$ は次で与えられる．

$$\overline{\mathbb{O}_q} = \begin{cases} \{x \in \mathfrak{g} \mid (\operatorname{ad} x)^{2q} = 0\}, & (q, r^\vee) = 1 \text{ のとき}, \\ \{x \in \mathfrak{g} \mid \pi_{\theta_s}(x)^{2q/r^\vee} = 0\}, & (q, r^\vee) = r^\vee \text{のとき}. \end{cases}$$

ここで θ_s は $\mathfrak{g}$ の最高ショートルート, π_{θ_s} は最高ウエイト θ_s の $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現.

例 4.8. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ のとき, $\mathbb{O}_q$ は分割 $\begin{cases} (n) \vdash n & (q \geq n) \\ (q, q, \dots, q, s) \vdash n\ (0 \leq s < n) & (q < n) \end{cases}$ に対応する冪零軌道である．

注意 4.9. 上の定理から k が許容レベルの時

$$\operatorname{Specm}(\operatorname{gr} L_k(\mathfrak{g})) \cong J\overline{\mathbb{O}_q}$$

であることも従う．ここで JX は X のアーク空間[9]

定理 4.10. [A7] k が許容レベルの時予想 4.5 は正しい．すなわち, $q \in \mathbb{N}$ を k の分母とすると

$$\operatorname{Var}(I_k) = \overline{\mathbb{O}_q}.$$

定理 4.6 と定理 4.10 の証明には (アフィン)W 代数を使う．

Duflo の定理から, 次の結果は I_k を含む $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal を完全に決定する．

定理 4.11 ([A6])**.** $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ をレベル k(i.e. $\lambda(K) = k$) とすると $L(\lambda)$ が $L_k(\mathfrak{g})$ 加群であるための必要十分条件は $L(\lambda)$ が $\widehat{\Delta}(\lambda) \cong \widehat{\Delta}(k\Lambda_0)$ なる許容表現であることである．

---

[9] $\mathbb{C}$ 上の有限型スキーム X に対し, JX は任意の可換 C 代数 A に対し $\operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} A, JX) \cong \operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} A[[t]], X)$ を満たすスキームとして定義される (cf. citeEinMus).

5. (アフィン)W 代数

$f \in \mathcal{N}$ とし, $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ を $(\mathfrak{g}, f)$ に付随するレベル $k \in \mathbb{C}$ の W 代数とする ([FF, KRW]). $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は一般にはリー環ではなく頂点代数であり, 次の性質を持つ.

- $X_{\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)} \cong \mathcal{S}_f$ かつ, $\operatorname{gr} \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \cong \mathbb{C}[J\mathcal{S}_f]$ ([DSK, A5]).
- $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は次の意味で有限 W 代数 $U(\mathfrak{g}, f)$ のアフィン化である[10]([[DSK, A2]]).

$$A(\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)) \cong U(\mathfrak{g}, f)$$

- $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は次の意味でアフィン Kac-Moody 代数や Virasoro 代数の一般化である.
  - $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, 0) = V^k(\mathfrak{g})$,
  - $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_2, f)$ は ($k \neq -2$ のとき) 中心電荷 $1-6(k+1)^2/(k+2)$ の Virasoro 頂点代数である.

$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は量子 Drinfeld-Sokolov 還元法によって定義される. すなわりある BRST コホモロジー関手 $H_f^\bullet(?)$ を用いて

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) = H_f^0(V^k(\mathfrak{g}))$$

と定義される ((3) のアナローグ).

$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の唯一[11]の既約単純商を $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ と書く. $X_{\mathcal{W}^K(\mathfrak{g},f)} \cong \mathcal{S}_f$ なので $X_{\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},f)}$ は $\mathcal{S}_f$ の $\mathbb{C}^*$ 不変なポアソン部分代数多様体になる. 従って,

$$\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f) \text{ が } C_2 \text{ 有限} \iff X_{\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},f)} = \{f\}.$$

例 5.1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$, $f = f_{prin}$ とする. (4) より,

$$U(\mathfrak{g}, f_{prin}) \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h})^{\mathfrak{S}_N} \hookrightarrow S(\mathfrak{h})$$

であった. $\mathfrak{h}$ の自然なアフィン化としては Heisenberg 代数が考えられる. 対応する頂点代数は $\mathfrak{h}$ に付随した (レベル $\kappa = k + N$ の[12]) 普遍アフィン頂点代数 $\mathcal{H}_\kappa$ である. これは生成場 $x_i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_{i,n} z^{-n-1}$ $(i = 1, \ldots, N)$, OPE

$$x_i(z)x_j(w) \sim \frac{\kappa \delta_{i,j}}{(z-w)^2}$$

$$(\iff [x_{i,n}, x_{j,m}] = \kappa n \delta_{n+m,0} \delta_{i,j})$$

で定義される頂点代数である.

Harish-Chandra 同型のアフィン化として, 三浦変換と呼ばれる頂点代数の埋め込み

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{prin}) \hookrightarrow \mathcal{H}_\kappa.$$

が存在することが知られている.

$\mathcal{H}_\kappa$ の部分頂点代数としては $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{prin})$ は以下で定義される場

$$W^{(1)}(z), W^{(2)}(z), \ldots, W^{(N)}(z)$$

---

[10] $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は一般には $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graded なのでここでの Zhu 代数は正確には Ramond twisted Zhu 代数である.

[11] $k = -h^\vee$ の時は唯一の graded simple quotient

[12] $\kappa \neq 0$ に依らない.

で生成される.

$$\sum_{j=0}^{N} W^{(j)}(z)(\nu\partial)^{N-j} =: (\nu\partial_z + x_1(z))(\nu\partial_z + x_1(z))\dots(\nu\partial_z + x_N(z)) :$$

ここで, $\partial_z x_i(z) = \frac{d}{dz}x_i(z) + x_i(z)\partial_z$, $\nu = \kappa - 1 = k + N - 1$. よって

$$W^{(r)}(z) = \sum_{i_1<i_2<\dots<i_r} : x_{i_1}(z)x_{i_2}(z)\dots x_{i_r}(z) : + lower$$

という形をしている ([FL], [AM] も参照のこと). ただし, $W^{(r)})(z)$ たちの OPE(交換関係) に関する closed formula は知られていない (導出は不可能だと思われる).

さて, 有限次元の場合同様, 次の関手が定まる.

$$V^k(\mathfrak{g})\text{-Mod} \to \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)\text{-Mod}, \quad M \mapsto H_f^0(M)$$

KL_k を $\widehat{\mathfrak{g}}$ のレベル k の Harish-Chandra $(\widehat{\mathfrak{g}}, G[[t]])$ 加群の圏とする. すなわち KL_k は $G[[t]]$ 加群の構造を持ち, その作用を微分することによって得られる $\mathfrak{g}[[t]]$ の作用が $\mathfrak{g}[t] \subset \widehat{\mathfrak{g}}$ の作用と整合的な対象からなるレベル k の $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群のなす充満部分圏である.

定理 5.2 ([A5]). 任意の $k \in \mathbb{C}$, $M \in \mathrm{KL}_k$ について $H_f^{i\neq 0}(M) = 0$. 従って

$$\mathrm{KL}_k \to \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)\text{-Mod}, \quad M \mapsto H_f^0(M),$$

は完全関手.

上の定理より, 特に自然な全射 $V^k(\mathfrak{g}) \to L_k(\mathfrak{g})$ は頂点代数の全射 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) = H_f^0(V^k(\mathfrak{g})) \to H_f^0(L_k(\mathfrak{g}))$ を誘導する. 従って $H_f^0(L_k(\mathfrak{g}))$ は零でなければ $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の商頂点代数である. 特に単純 W 代数 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ をその商に持つ.

予想 5.3 ([FKW, KRW]). $H_f^0(L_k(\mathfrak{g}))$ は零でなければ $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ に同型.

上の予想は多くの場合 [A1, A2, A3] において証明されている.

定理 5.4 ([A5]). 任意の $k \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{N}$ について次が成立する.

$$X_{H_f^0(L_k(\mathfrak{g}))} = X_{L(k\Lambda_0)} \cap \mathcal{S}_f.$$

系 5.5. $H_f^0(L_k(\mathfrak{g})) \neq 0 \iff f \in X_{L(k\Lambda_0)}$.

系 5.6. k を分母が $q \in \mathbb{N}$ の許容レベル, $f \in \mathbb{O}_q$ とする. このとき $X_{H_f^0(L(k\Lambda_0))} = \{f\}$. 従って $H_f^0(L(k\Lambda_0))$ は C_2 有限. 故に $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ も C_2 有限.

6. W 代数の極小模型

頂点代数 V は全ての加群が完全可約のとき有理的であると云われる.

定理 6.1. V を有理的かつ C_2 有限, CFT 型の頂点作用素代数とする.

(i) ([Zhu], Dong-Lin-Ng]) $\{M_1, \dots, M_r\}$ を単純 V 加群の完全代表系, $v \in V$ のウエイト k の斉次ベクトルとすると $\{q^{-\frac{c_V}{24}} \operatorname{tr}_{M_i}(o(v)q^{L_0})\}$ はウエイト k のモジュラー形式となる. ただし, $o(v)$ は V の斉次成分を保つ $v(z)$ のフーリエ係数.

(ii) ([H1]) V 加群の圏はモジュラーなテンソル圏になる. 特に対応する Reshetikhin-Turaev 不変量は 3 次元多様体の不変量を与える.

主冪零軌道 $\mathbb{O}_{prin}$ は $\mathcal{N}$ の中の稠密な G 軌道であった. 許容レベル k は次を満たすとき非退化であると云われる.

$$X_{L_k(\mathfrak{g})} = \overline{\mathbb{O}_{prin}} (= \mathcal{N}).$$

$q \in \mathbb{N}$ を k の分母とするとこれは次の条件と同値である.

$$q \geq \begin{cases} h & ((q, r^\vee) = 1 \text{ のとき}), \\ r^{\vee L} h^\vee & ((q, r^\vee) = r^\vee \text{のとき}). \end{cases}$$

予想 6.2 ([FKW]). k を非退化許容レベルすると $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f_{prin})$ は有理的 (かつ C_2 有限).

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のとき, 非退化許容レベルに対応する $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f_{prin})$ は Virasoro 代数の極小模型 ([BPZ]) に対応した頂点代数に他ならない.

予想 6.2 は Kac-脇本 [KW2] によって一般化された. 冪零軌道 $\mathbb{O}_q$ を用いるとそれは次の形で述べることができる ([A5]).

予想 6.3 ([KW2]). k を $q \in \mathbb{N}$ を分母とする許容数とする. 次を満たすとき $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ は有理的である.

- $f \in \mathbb{O}_q$.
- f は標準 Levi type である.
- $(q, r^\vee) = 1$.

現在我々は上の条件のうち, 最後の 2 つの条件は必要ないと考えている.

予想 6.4 (A.). k を $q \in \mathbb{N}$ を分母とする許容数とする. $f \in \mathbb{O}_q$ とすると $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ は有理的である.

定理 6.5. (i) ([A7]) 予想 6.2 は正しい.
(ii) ([A8]) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ のとき, 予想 6.3 は正しい（このときは最後の 2 つの条件は自動的に満たされる).
(iii) ([A8]) f が ADE 型の副正則元の時一般化された Kac-脇本予想 6.4 は正しい (DE 型の副正則元は標準 Levi type ではない).

References

[ABD] Toshiyuki Abe, Geoffrey Buhl, and Chongying Dong. Rationality, regularity, and C_2-cofiniteness. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(8):3391–3402 (electronic), 2004.

[Akm] Füsun Akman. A characterization of the differential in semi-infinite cohomology. *J. Algebra*, 162(1):194–209, 1993.

[ALY] Tomoyuki Arakawa, Ching Hung Lam, and Hiromichi Yamada. Zhu's algebra, C_2-algebra and C_2-cofiniteness of parafermion vertex operator algebras. *Adv. Math.*, 264:261–295, 2014.

[AM] Tomoyuki Arakawa and Alexander Molev. Explicit generators in rectangular affine W -algebras o type A. arXiv:1403.1017 [math.RT].

[A1] Tomoyuk Arakawa. Representation theory of superconformal algebras and the Kac-Roan-Wakimoto conjecture. *Duke Math. J.*, 130(3):435–478, 2005.

[A2] Tomoyuki Arakawa. Representation theory of W-algebras. *Invent. Math.*, 169(2):219–320, 2007.

[A3] Tomoyuki Arakawa. Representation theory of W-algebras, II. In *Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics*, volume 61 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 51–90. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2011.

[A4] Tomoyuki Arakawa. A remark on the C_2 cofiniteness condition on vertex algebras. *Math. Z.*, 270(1-2):559–575, 2012.

[A5] Tomoyuki Arakawa. Associated varieties of modules over Kac-Moody algebras and C_2-cofiniteness of W-algebras. 04 2010. 1004.1554v2.

[A6] T. Arakawa. Rationality of admissible affine vertex algebras in the category $\mathcal{O}$. arXiv:1207.4857[math.QA].

[A7] Tomoyuki Arakawa. Rationality of W-algebras; principal nilpotent cases. arXiv:1211.7124[math.QA].

[A8] Tomoyuki Arakawa. in preparation.

[BD] Alexander Beilinson and Vladimir Drinfeld. Quantization of hitchin's integrable system and hecke eigensheaves. *preprint*.

[BGK] Jonathan Brundan, Simon M. Goodwin, and Alexander Kleshchev. Highest weight theory for finite W-algebras. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (15):Art. ID rnn051, 53, 2008.

[BPZ] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nuclear Phys. B*, 241(2):333–380, 1984.

[DSK] Alberto De Sole and Victor G. Kac. Finite vs affine W-algebras. *Japan. J. Math.*, 1(1):137–261, 2006.

[FBZ] Edward Frenkel and David Ben-Zvi. *Vertex algebras and algebraic curves*, volume 88 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2004.

[FF] Boris Feigin and Edward Frenkel. Quantization of the Drinfel′d-Sokolov reduction. *Phys. Lett. B*, 246(1-2):75–81, 1990.

[FKW] Edward Frenkel, Victor Kac, and Minoru Wakimoto. Characters and fusion rules for W-algebras via quantized Drinfel′d-Sokolov reduction. *Comm. Math. Phys.*, 147(2):295–328, 1992.

[FL] V. A. Fateev and S. L. Lykyanov. The models of two-dimensional conformal quantum field theory with Z_n symmetry. *Internat. J. Modern Phys. A*, 3(2):507–520, 1988.

[FM] Boris Feigin and Fyodor Malikov. Modular functor and representation theory of $\widehat{\mathrm{sl}}_2$ at a rational level. In *Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995)*, volume 202 of *Contemp. Math.*, pages 357–405, Providence, RI, 1997. Amer. Math. Soc.

[FZ] Igor B. Frenkel and Yongchang Zhu. Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras. *Duke Math. J.*, 66(1):123–168, 1992.

[GG] Wee Liang Gan and Victor Ginzburg. Quantization of Slodowy slices. *Int. Math. Res. Not.*, (5):243–255, 2002.

[Gin] Victor Ginzburg. Harish-Chandra bimodules for quantized Slodowy slices. *Represent. Theory*, 13:236–271, 2009.

[GK] Maria Gorelik and Victor Kac. On complete reducibility for infinite-dimensional Lie algebras. *Adv. Math.*, 226(2):1911–1972, 2011.

[H1] Yi-Zhi Huang. Rigidity and modularity of vertex tensor categories. *Commun. Contemp. Math.*, 10(suppl. 1):871–911, 2008.

[H2] Yi-Zhi Huang. Vertex operator algebras and the Verlinde conjecture. *Commun. Contemp. Math.*, 10(1):103–154, 2008.

[Jos] Anthony Joseph. On the associated variety of a primitive ideal. *J. Algebra*, 93(2):509–523, 1985.

[Kac] Victor Kac. *Vertex algebras for beginners*, volume 10 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 1998.

[Kos] Bertram Kostant. On Whittaker vectors and representation theory. *Invent. Math.*, 48(2):101–184, 1978.

[KRW] Victor Kac, Shi-Shyr Roan, and Minoru Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.

[KS] Bertram Kostant and Shlomo Sternberg. Symplectic reduction, BRS cohomology, and infinite-dimensional Clifford algebras. *Ann. Physics*, 176(1):49–113, 1987.

[KW1] V. G. Kac and M. Wakimoto. Classification of modular invariant representations of affine algebras. In *Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988)*, volume 7 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pages 138–177. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.

[KW2] Victor G. Kac and Minoru Wakimoto. On rationality of W-algebras. *Transform. Groups*, 13(3-4):671–713, 2008.

[Los1] Ian Losev. 1-dimensional representations and parabolic induction for w-algebras. *preprint*, 2009. arXiv:math/0906.0157[math.RT].

[Los2] Ivan Losev. Finite-dimensional representations of W-algebras. *Duke Math. J.*, 159(1):99–143, 2011.

[Miy] Masahiko Miyamoto. Modular invariance of vertex operator algebras satisfying C_2-cofiniteness. *Duke Math. J.*, 122(1):51–91, 2004.

[Pre] Alexander Premet. Special transverse slices and their enveloping algebras. *Adv. Math.*, 170(1):1–55, 2002. With an appendix by Serge Skryabin.

[Zhu] Yongchang Zhu. Modular invariance of characters of vertex operator algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(1):237–302, 1996.

Rudvalis 群の周辺

北詰 正顕 (Masaaki Kitazume)

千葉大学大学院理学研究科

0 はじめに

本稿では，千吉良直紀氏（熊本大学大学院自然科学研究科）との共同研究に基づき，Rudvalis の単純群 Ru に関する研究結果（あるいは，途中経過）について述べたいと思う。

話のきっかけは，ちょうど 6 年前の第 53 回代数学シンポジウム [15] において「散在型単純群の周辺」というタイトルで話したとき，その準備の過程で，

定理 1. Ru の 4060 次の置換表現によって不変な，長さ 4060 の自己双対符号が存在する。

という事実に気づき，シンポジウムの講演でアナウンスしたことにある。

このような計算は，最終的には計算機（ソフトウェア Magma [2]）を用いている。Magma は，群や組合せ構造を扱うことのできるシステムであり，具体的な群の置換表現をデータベースとして持っているため，それを呼び出して，さまざまな計算が行えるのである。我々は，この結果を知って，これを数学的に理解・説明するために，あらためて，Ru の 4060 次の置換表現について勉強を始めたのである。その一端は，いくつかの講演記録に残っている ([16], [14])。

上記の結果で，一番の懸案だったのは，符号を構成するために理論的に説明出来る部分に，あるひとつの生成元を付け加えるのであるが，その生成元の記述・特徴付けがうまくできないということであった。今回のテーマは，Rudvalis 群の勉強において，これまで難解だった Conway の論文 [7] を読み解く内に，その副産物としてこの生成元の特徴付けをすることができた，という話である。

1 Rudvalis 群の周辺の単純群

まず，入門講義として，有限単純群の分類定理を振り返りながら，これからの話に登場する Ru に関連する群の紹介から始めたい。

「有限単純群の分類定理」によれば，有限単純群は，次のいずれかに分類される。

(0) 素数位数の巡回群

(1) 5 次以上の交代群 A_n $(n \geq 5)$

(2) Lie 型の単純群
$A_n(q), B_n(q), C_n(q), D_n(q), E_6(q), E_7(q), E_8(q), F_4(q), G_2(q)$
${}^2A_n(q), {}^2B_n(q), {}^2D_n(q), {}^3D_4(q), {}^2E_6(q), {}^2F_4(q), {}^2G_2(q)$

(3) 26 個の散在型単純群
$M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_1, J_2, J_3, J_4, HS, Suz, McL, He,$
$Ru, Ly, ON, Co_1, Co_2, Co_3, F_{22}, F_{23}, F'_{24}, H, Th, BM, M.$

散在型単純群については，それが位数最大の散在型単純群である Monster M に含まれるか (正確に言えば，部分群の剰余群として含まれるか) 否かによって，2 つのグループに大別される。結論だけ述べると，26 個のうち 20 個は Monster に含まれ，

$$J_1, J_3, J_4, Ru, Ly, ON$$

の 6 個が含まれていない。Griess [10] では，前者を ”Happy family” と呼び，後者については”Pariahs” と名付けている。この言葉の意味については，辞書ででも調べてもらうことにして，あまりよろしいと思えない命名である。しかし，すぐに廃れてしまったわけでもなく，Web page [1] でも相変わらず使われているようである。何が Happy かというと，確かに Mathieu 群や Conway 群などは，Golay 符号や Leech 格子といった数学的な背景も豊富にあり，沢山の研究がなされている。Monster と moonshine VOA の研究は，近年ますます盛んである。そこでは，Monster と Conway 群，Mathieu 群の関連（それは VOA と Leech 格子，Golay 符号の関連に起因する）が重要な要素として存在する。比べて Pariahs の群達は，他の群との関連に乏しく，数学的な背景がしっかりと捉えられないものが多く，研究も進んでいないのが実情である。それ故の命名と思われるが，しかし Happy family の中でも，うまく捉えられず研究の進んでいない群はいくつかある。

＊　＊　＊

さて，本稿の主役は，その Pariahs のひとつの Rudvalis 群である。この群は Pariahs の中では，関連する群も比較的多い。ではあるのだが，ここに現れる群は，なかなか「くせもの」揃いなのである。

このことを明確にするために，冒頭の分類定理の結果について，もう一度振り返ることにする。まず，(0) の素数位数の単純群は，アーベル群であり以降の (1)–(3) とは明確に区別される。また，(3) の散在型単純群は (1), (2) に含まれないものというのが定義であるから，これも明確に区別される。しかし，(1) と (2) については排他的な分類にはなっ

ていない。実際，次のような同型対応が存在する。

$$\begin{aligned} A_5 \cong L_2(4) \cong L_2(5), &\qquad L_2(7) \cong L_3(2), \\ A_6 \cong L_2(9) \cong S_4(2)', &\qquad L_2(8) \cong {}^2G_2(3)', \\ A_8 \cong L_4(2), &\qquad U_3(3) \cong G_2(2)', \\ U_4(2) \cong S_4(3). & \end{aligned}$$

このうち，交換子群を表す記号 ”′” の付いたものは，Lie 型の群の一般論で構成された段階では単純群にならず，交換子群にして（上記の場合，どれも指数が 2 下がる）初めて単純群になるという例外的な Lie 型の群と言える。ただし，右辺の見方をすれば，立派な（標準的な）Lie 型の群である。このような群は，もうひとつ存在する。それは，例外的な Lie 型の群で他の群との同型対応もない群で，Tits 群 [11] と呼ばれるものである。

$$T = {}^2F_4(2)'$$

先にも触れた Web page [1] では，Tits 群 T が Sporadic groups の中に掲載されていたりする。実際，Tits 群は標準的な Lie 型の群ではないから，一般的な構成法から Lie 型の群の性質を述べようとするならば，別個に取り扱わなくてはいけない。

本稿で扱う，Ru と関連する群とは，以上の中の次の 3 つである。

$$A_6 \cong L_2(9) \cong S_4(2)', \quad U_3(3) \cong G_2(2)', \quad T = {}^2F_4(2)'$$

筆者にとっては，Tits 群 T が最も難しい存在であるが，最初の 2 つもなかなかのくせ者なのである。特に，A_6 は交代群の中で唯一「自己同型群が対称群より大きくなる」という性質を持っていて，例外的な現象を記述する場合に，いろいろな形で登場する群でもある。

2 28 次元の複素格子

冒頭にも書いた，Rudvalis 群 Ru の勉強は，この群（正確には，位数 4 の中心を持つ $4.Ru$ という形の群）が作用する，$\mathbb{Z}[i](i = \sqrt{-1})$ 上 28 次元の複素格子の勉強から始まる。ここでは，ATLAS [6] の記述，および，R. A. Wilson による [12], [13] が参考文献となるが，この勉強をまとめたものが RIMS 講究録 [16] に残っているので，詳しいことはこれを参照いただくことにして，ここでは要点のみをまとめておく。また [14] も参照されたい。

2.1 28 次元の基底

まず，複素格子が存在する 28 次元の空間の基底を，$U_3(3) \cong G_2(2)'$ の 28 次の置換表現を用いて記述することから始める。

ユニタリ群 $U_3(3)$ が作用する，9 元体（素体に 1 の原始 4 乗根 i を付け加えた体）

$$\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[i] = \{\ x + yi \mid x, y \in \mathbb{F}_3 = \{0, 1, -1\}\ \}.$$

上の 3 次元のユニタリ空間 V を考える。ユニタリ計量を指定する必要はないが，例えば，$V = \mathbb{F}_9^3$ (数ベクトル空間) として，計量を

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3}$$

と定める。ユニタリ群 $U_3(3)(= SU_3(3))$ は，3 次のユニタリ行列で行列式が 1 のもの全体と定義する。このとき $U_3(3)$ は単純群であり，9 元体の自己同型から定まる位数 2 の外部自己同型を付け加えた群 $\Gamma U_3(3) = U_3(3) : 2$ が $G_2(2)$ と（例外的な）同型になる。

V の isotropic(長さ 0)，non-isotropic(長さが非 0) vector の全体をそれぞれ Ω, Γ と表し，(定数倍を無視して）生成する 1 次元部分空間（これを $[v] = \mathbb{F}_9 v$ と表す）の全体を Ω^*, Γ^* と表すことにする。

$$\begin{array}{ll} \Omega = \{\ v \in V \setminus \{0\} \mid (v, v) = 0\ \}, & \Omega^* = \{\ [v] \mid v \in \Omega\ \} \\ \Gamma = \{\ v \in V \mid (v, v) \neq 0\ \}, & \Gamma^* = \{\ [v] \mid v \in \Gamma\ \} \end{array}$$

よく知られた性質であるが，$U_3(3)$ は 28 点集合 Ω^* に 2 重可移に作用する。

$U_3(3)$ が作用する Ω のベクトルを用いて，28 次元空間 $\mathbb{C}^{28}$ の正規直交基底を $e_v (v \in \Omega)$ と定める。ただし，V における定数倍について，

$$e_{cv} = c^2 e_v$$

と定めることとする。ここで，定数 c は，左辺においては $\mathbb{F}_9 \setminus \{0\}$ の元を表し，右辺においては複素数（± 1, $\pm i$）を表していると約束する。従って Ω^* と $\mathbb{C}e_v$ たちが 1 対 1 に対応して，28 個のベクトルが与えられたことになる。

2.2 short vectors

次に，この 28 次元空間のノルム（長さの平方）が 4 であるベクトルを天下りで提示することにする。定数倍をのぞいて合計 4060 個になるベクトルは，3 つのタイプに分かれており，28 次元格子の最小ノルムのベクトルの集合を与えるものである。

(1) Ω^* の異なる 2 元 $[a], [b]$ に対し，2 次元部分空間 $\langle a, b\rangle$ は（2 重可移性から，これらの取り方によらず）Ω^* の元（1 次元部分空間）をちょうど 4 つ含んでいる。定数倍を調整して $(a, b) = i$（または $-i$）としておけば，$[a], [b], [a + b], [a - b]$ の 4 つである。この Ω^* の 4 点部分集合を hyperbolic line と呼ぶことにする。hyperbolic line は全部で $63 (= (28 \times 27)/(4 \times 3))$ 個である。なお，$\langle a, b\rangle$ の直交補空間は，non-isotropic vector（x とおく）で生成され，$\langle a, b\rangle = \langle x\rangle^\perp$ となることを注意しておく。

さて，ここで与える第一のタイプのノルム 4 のベクトルは，

$$e_a + e_b + e_{a+b} + e_{a-b} \quad (a, b, a+b, a-b \in \Omega)$$

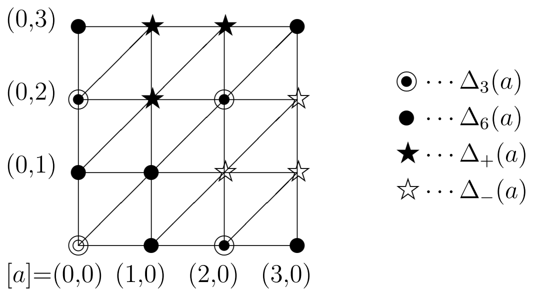
と表されるものと，その偶数個の符号変化をとったものである。その総数は，全体の定数倍（$\pm 1, \pm i$ 倍）を除いて 63×4 となる。

(2) 次に，V の直交基底（ただし，定数倍は無視）

$$E = \{[x_1], [x_2], [x_3]\}, \quad ((x_i, x_j) = 0 \ (i \neq j), V = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle)$$

をとる。計量の性質から，$[x_i] \in \Gamma^*$ (non-isotropic) である。

このとき，各 x_i に対応する（前述の）hyperbolic line を考えると，そこに共通部分はなく，和集合として 12 点集合ができる。その Ω^* における補集合として得られる 16 点集合を $\delta(E)$ と表すことにする。ここには 12 本の hyperbolic line が含まれているが，これによって $\delta(E)$ にはグラフの構造が入る。すなわち，16 点集合 $\delta(E)$ の 2 点が，$\delta(E)$ の部分集合であるような hyperbolic line に含まれるとき，この 2 点が隣接しているとしてグラフの構造を入れるのである。これが（有名な）Shrikhande graph と呼ばれるグラフと同型になる。このグラフの（ひとつの）定義は，$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ を点集合として，(i, j) の隣接点を $(i, k), (k, j), (i+k, j+k)$ $(k \in \mathbb{Z}/4Z)$ とするものである。



さて，$[a]$ を $\delta(E)$ の 1 点として，$[a]$ が $(0, 0)$ に対応させるとき，

$$\begin{aligned}
\Delta_3(a) &= \{(2,0), (0,2), (2,2)\}, \\
\Delta_6(a) &= \{(1,0), (3,0), (0,1), (0,3), (1,1), (3,3)\}, \\
\Delta_+(a) &= \{(1,2), (1,3), (2,3)\}, \\
\Delta_-(a) &= \{(2,1), (3,1), (3,2)\}
\end{aligned}$$

とおく。$\Delta_3(a), \Delta_6(a)$ は，$[a]$ の隣接点の集合で，その固定部分群による軌道になっている。また，$\Delta_+(a), \Delta_-(a)$ は，$[a]$ の非隣接点の集合で，その固定部分群の（非原始的な）作用における非原始域になっている。

以上の準備の下で，2 つめのタイプのノルム 4 のベクトルを

$$e_a + \sum_{b\in\Delta_3(a)} e_b + (-i)\sum_{b\in\Delta_6(a)} e_b \pm \left(\sum_{b\in\Delta_+(a)} e_b - \sum_{b\in\Delta_-(a)} e_b\right)$$

と定義する。ベクトルの総数は，直交基底の個数 (63) に，$\delta(E)$ の 1 点の決め方 (16) と符号 ($\pm$) の 2 通りをかけて，$63\times 16\times 2$ となる。

(3) 最後の 3 つめのタイプのベクトルは，$[a]\in\Omega^*$ をひとつ取ると，ひとつ決まるものである。

$$f_a = \frac{1}{2+2i}\left\{ (1-2i)e_a + \sum_{[b]\in\Omega^*,(a,b)=1} e_b \right\}$$

さらに，(2) で述べた $\delta(E)$ という部分集合以外のみを -1 倍することを許す（すなわち $[c]\notin\delta(E)$ のとき，e_c を $-e_c$ に変える）ことにして，それを f_a^E と書くことにする。この符号変化は 63 通りであるから，最初のものと合わせれば，ここで与えたベクトルの総数は，28×64 ということになる。

以上で，定数倍 ($\pm 1, \pm i$ 倍) を除いて，

$$4060 = 63\times 4 + 63\times 16\times 2 + 28\times 64$$

個のベクトル（ノルムはすべて 4）が与えられた。

命題 2. ここで与えた short vector が生成する $\mathbb{Z}[i]$ 上の格子 L は，ランク 56 の実格子として even unimodular であり，その theta series は

$$\Theta_L(q) = 1 + 0\cdot q + (4060\times 4)q^2 + \cdots$$

となる。すなわち，ここで与えたベクトルと，それを $\pm 1, \pm i$ 倍した 4060×4 個が，最小ノルム (=4) のベクトルの全体を与えている。

なお

$$\Theta_L(q) = E_4^7 - 1680E_4^4\Delta + 364000E_4\Delta^2 \quad (\Delta = \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728})$$

である [14]。

3 $U_3(3)$ と $G_2(2)$

前節のベクトルの定義においては，ユニタリ群 $U_3(3)$ の働くユニタリ空間における，isotropic vector, non-isotropic vector, 直交基底，などが関わっていた。（すでに注意した

ように，non-isotropic vector を考えることと，hyperbolic line を考えることは同等のことである。）

このうち，isotropic vector は「ランク 1 の Lie 型の群」としての $U_3(3)$ にとって本質的に重要である。すなわち，isotropic vector の固定部分群は，$U_3(3)$ の唯一の極大 parabolic 部分群を与える。一方， non-isotropic vector と直交基底は，$U_3(3):2$ を $G_2(2)$ と見たときの「ランク 2 の Lie 型の群」として重要なものなのである。すなわち，直交基底 $\{[x_1],[x_2],[x_3]\}$ 全体を $\mathcal{P}$ とするとき，

$(\mathcal{P},\Gamma^*)$ は generalized hexagon である。

正確な言葉の定義は省略するが，$\mathcal{P}\cup\Gamma^*$ から 2 つの元を任意に取るとき，それらが（$\mathcal{P}$ の元を頂点，Γ^* の元を辺とみて）必ず六角形に含まれているというのである。

さて，特に，$\mathcal{P}$ の 2 点を結ぶ辺の最小個数で距離を定義すると，2 点間の距離は高々3 であるが，距離が 3 のときに成り立つ次の性質が，後に重要となる。

補題 3. $D,E\in\mathcal{P}$ が距離 3 であるとする。このとき，次が成り立つ。

(1) $\delta(D)\cap\delta(E)$ は，1 点を共有する 3 本の hyperbolic line の和集合である。

(2) $\delta(D)\cap\delta(E)$ を含むもうひとつの $F\in\mathcal{P}$ が存在する。（F と D,E との距離も 3 になる。）

4　ランク 3 グラフ

4.1　ランク 3 グラフと short vector

歴史的に見ると，Rudvalis 群はグラフの自己同型群として構成された [8]。そのグラフは，ランク 3 の置換表現（1 点の固定部分群の orbit の個数が 3 であるような置換表現）を用いて作られるもので，パラメータ $(4060,1755,730,780)$ の strongly regular graph になる。すなわち，1 点の隣接点の個数が 1755 個で，2 点に共通する隣接点の個数が，2 点が隣接するとき 730 個，隣接しないとき 780 個である。この置換表現の 1 点の固定部分群が ${}^2F_4(2)$ であり，交換子を取らないと単純群（Tits 群）にならないという，例外型な Lie 型の群である。

この置換表現は，2 節で与えた short vector への置換表現として与えられる。すなわち，記号 Λ で定数倍を同一視したときの 4060 個の short vector 全体の集合を表すことにすれば，次が成り立つのである。

命題 4. Λ を点集合として，その内積が 0 であるときに辺で結ばれるとしてグラフを定義すれば，パラメータ $(4060,1755,730,780)$ の strongly regular graph になり，その自己同型群は Rudvalis 群である。

4.2 Hoffman-Singleton graph

このグラフを，複素格子 L とは独立に構成した Coolsaet の結果 [9] がある。それは，グラフを Hoffman-Singleton グラフと呼ばれる，パラメータ $(50, 7, 0, 1)$ の strongly regular graph を用いて記述したものである。Hoffman-Singleton グラフは，ユニタリ群 $U_3(5):2$ を自己同型群に持つグラフであるが，Lie 型の群として記述できるものでなく，きわめて例外的なグラフである。1 辺の固定部分群が，$\mathrm{Aut}(A_6) \cong A_6.2^2$ という群で，冒頭に述べた，例外的な同型を持つ，例外的な Lie 型の群のひとつになっている。以下，HoS と略記することにしよう。

Coolsaet の結果を簡単に述べておく。Rudvalis 群のグラフの 4060 個の頂点が，下記の様に，HoS の言葉を用いて記述できるというものである。

まず，HoS には 175 個の辺 (edge) が存在する。次に，HoS において一つの頂点から辺を伝って一週する最短経路を考えると，5 角形 (pentagon) ができる。これが，1260 個存在する。最後に，このような pentagon をふたつ組み合わせると Petersen graph と呼ばれる，パラメータ $(10, 3, 0, 1)$ の strongly regular graph ができるのだが，その中に，互いに接しない 3 つの辺を取ることができる。これを hexad と呼んでいて，全部で 2625 個存在する。以上の edge, pentagon, hexad を合わせた $175 + 1260 + 2625 = 4060$ 個の対象が，Rudvalis 群のグラフの頂点に対応している。さらに，ここに 2 点間の関係（辺）を定義するのであるが，ここでは省略する。また，ここで構成したグラフが Rudvalis 群のグラフであることの証明は，これがランク 3 グラフであることを示した上で，有限単純群の分類定理（正確には，そこから得られるランク 3 の置換群の分類定理）を使う。

さて，Coolsaet の結果の元となる HoS との関係は，Conway [7] による次のような観察が発端である。

命題 5. ([7]) 互いの内積が 1 であるような 7 つの short vector の集合（これを heptad と呼ぶ）を 50 組取ることができて，2 つの集合の共通部分が 0 か 1 となる。共通部分が 1 個であるときに，辺で結ばれるというグラフを作ると，HoS と同型なグラフができて，その自己同型群 $U_3(5):2$ は Rudvalis 群の部分群となる。

この記述を最初に読んだとき（ずっと昔の話であるが）には，このようなことを，どのように確認すれば良いのか，さっぱり見当もつかなかった。格子 L（特に short vector）に関する理解が進み，様々な計算（実際の計算は計算機 (Magma) に任せるとしても）を行うことができるようになって，ようやく，いろいろなことが確認できるようになったのである。次に述べる，$U_3(3)$ の言葉を用いて heptad を具体的に与えるという結果は，我々の勉強のささやかな成果の一つである。

前節の最後に述べた，3 つの直交基底 D, E, F（距離 3） をとる。$\delta(D) \cap \delta(E)$ は，1 点を共有する 3 本の hyperbolic line の和集合であるので，これを

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}, \{e_1, e_5, e_6, e_7\}, \{e_1, e_8, e_9, e_{10}\}$$

とおくことにする。このとき，次が成り立つ。

命題 6. 7つの short vector

$$-e_1+e_2+e_3+e_4, -e_1+e_5+e_6+e_7, -e_1+e_8+e_9+e_{10}, f_1, f_1^D, f_1^E, f_1^F$$

は heptad である。

4.3 generalized octagon

上述の Coolsaet の結果においては，最終段階を分類定理に頼っているため，グラフの構造に深く立ち入ることはしていないと思われる。実際には，グラフの１点の隣接点全体には ${}^2F_4(2)$ が作用し，そこには（ランク２の Lie 型の群として）generalized octagon の構造が入る。具体的な定義としては short vector v をひとつ固定したとき，v と直交する short vector u_1, u_2, u_3 で

$$v \equiv u_1+u_2+u_3 \pmod{(1+i)L}$$

が成り立つときに $\{u_1, u_2, u_3\}$ を line と定義するのである。例えば，$v=e_a+e_b+e_{a+b}+e_{a-b}$ であるとき，u_1, u_2, u_3 として，v の符号を変化させたもの（３通り）を取れば良い。しかし，このような定義をしても，これが generalized octagon であることや，${}^2F_4(2)$ が作用するものであるということを示すことは難しいように思われる。

次のような観察が，この部分の進展に寄与できるのではないかと思っている。それは，上記のように heptad を作ることができるようになったことの副産物のひとつであり，再び例外的な群 A_6 を登場させるものでもある。

命題 7. *HoS* において，ひとつの辺 (edge) を含む heptad は 45 個存在する。この 45 個の short vector は，最初に取った edge に対応する点の隣接点における sub-octagon をなす。

この sub-octagon とは $\mathrm{Aut}(A_6) \cong A_6.2^2$ が作用するもので，点集合として 45 個の 2^2 型の置換 $((i\ j)(k\ l))$ をとり，互いに可換な 3 つの置換の集合を直線として定義するのである。このとき，直線には 2 つのタイプ

$$\{(1\ 2)(3\ 4), (3\ 4)(5\ 6), (1\ 2)(5\ 6)\}, \quad \{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

があって，この２つのタイプは S_6 では互いに移ることはなく，その外部自己同型で移るという性質のものである。

このような sub-octagon の存在から ${}^2F_4(2)$ が作用する generalized octagon を特徴付けるというプレプリント [3] が発表されており，Rudvalis 群の特徴付けに一役買える観察になるだろうと思う。

5 Ru が作用する自己直交符号

最後に，冒頭に述べた自己直交符号について述べる。まず，Chigira-Harada-Kitazume [5] による結果の紹介から始める。

(G, Ω) を次数 $n(=|\Omega|)$ の置換群とする。Ω の部分集合全体 $\mathcal{P}(\Omega)$ は，対称差を考えることで，2元体上の n 次元ベクトル空間と見なされ，G は自然にここに作用する。このとき，G の位数2の元 σ の固定点 $Fix(\sigma)$ の生成する符号（部分ベクトル空間）を $F(G, \Omega)$，その直交補空間を $C(G, \Omega)$ と表す。

$$F(G, \Omega) := \langle Fix(\sigma) \mid \sigma \in I(G) \rangle, \quad C(G, \Omega) := F(G, \Omega)^{\perp}$$

置換表現が特定されている場合には，次数 n だけを書いて，$F(G, n), C(G, n)$ と表すことにする。

定理 8 ([5])**.** C を G の Ω への作用で不変な，長さ n の自己直交符号 ($C \subset C^{\perp}$) とするとき，

$$C \subset C(G, \Omega)$$

が成り立つ。

さらに，C が自己双対 ($C = C^{\perp}$) ならば，$F(G, \Omega)$ は自己直交で

$$F(G, \Omega) \subset C \subset C(G, \Omega)$$

が成立する。

この定理の後半の条件をみたす原始置換群は，実は，限られた場合にすぎない。次の定理は，散在型単純群に限って述べたものであるが，一般の単純群で調べても，めぼしい例が増えることはない。

定理 9. 散在型単純群 G に対し，次数 10080 以下の原始置換表現について，$F(G, n)$ が 0 でなく，かつ自己直交となるのは，以下のいずれかに限る。

$$\begin{aligned} G &= M_{12}, \quad n = 144,\ 220, \\ G &= M_{22}, \quad n = 22,\ 330,\ 672, \\ G &= M_{24}, \quad n = 24,\ 2024, \\ G &= J_2, \quad n = 100,\ 10080, \\ G &= Ru, \quad n = 4060. \end{aligned}$$

このうち，$(M_{12}, 144)$, $(M_{22}, 672)$ については実際には自己双対符号は存在しないことが示される。また，$(M_{24}, 2024)$, $C(J_2, 10080)$ については，そのチェックをしていない。残りの場合については，G-不変な自己双対符号の分類が可能であり，$(M_{22}, 22)$, $(M_{22}, 330)$,

$(M_{24}, 24)$ については一意的で，残る $(J_2, 100)$([4]), $(M_{12}, 220)$, $(Ru, 4060)$ の場合は 3 つ存在する。

そこで，Rudvalis 群の場合に，それがどのような符号かを調べようと思い，まずその生成系をとらえようと思ったわけである。Magma による計算で $F(Ru, 4060)$ が 2029 次元であることはわかっていた。従って，あと一つの生成元を求めればよい。問題は，それを数学的にどう記述するかということである。

前節と同様に，Rudvalis 群のグラフを HoS を用いて記述したものを用いる。グラフの点集合は，定数倍を除いた short vector の集合であり，そこへの 4060 次の置換表現について，その作用で不変な自己双対符号を考える。

命題 10. *HoS において，ひとつの点を含む pentagon は 126 個存在する。この 126 個の short vector の集合と，$F(Ru, 4060)$ とで生成される符号は，Ru-不変な自己双対符号を与える。*

あと 2 つの自己双対符号があるのだが，その生成系については，未だうまい記述が見つかっていない。

参考文献

[1] R. Abbott, J. Bray, S. Linton, S. Nickerson, S. Norton, R. Parker, I. Suleiman, J. Tripp, P. Walsh and R. Wilson, "ATLAS of Finite Group Representations - Version 3", published electronically at
`http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/`.

[2] W. Bosma and J. Cannon, Handbook of Magma Functions, Department of Mathematics, University of Sydney, Available online at
`http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/`.

[3] B. De Bruyn, The uniqueness of a certain generalized octagon of order (2,4), preprint.

[4] N. Chigira, M. Harada and M. Kitazume, Some Self-Dual Codes Invariant under the Hall–Janko Group, J. Algebra, **316** (2007), 578–590.

[5] N. Chigira, M. Harada and M. Kitazume, Finite permutation groups and self-orthogonal codes, J. Algebra, **309** (2007), 610–621.

[6] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker and R. A. Wilson, ATLAS of Finite Groups, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[7] J. H. Conway, A quaternionic construction for the Rudvalis group, in " Topics in group theory and computation" (Proc. Summer School, University Coll., Galway, 1973), 69–81. Academic Press, London, 1977.

[8] J. H. Conway, D. B. Wales, Construction of the Rudvalis group of order 145, 926, 144, 000, J. Algebra 27 (1973), 538–548.

[9] K. Coolsaet, A construction of the simple group of Rudvalis from the group $U_3(5)$, J. Group Theory **1** (1998), 143–163.

[10] R.L.Griess, The Friendly Giant, Invent. Math. **69** (1982), 1–102.

[11] J. Tits, Le groupe de Janko d'ordere 604,800, Theory of Finite Groups (R. Brauer and C. Sah eds.), 91–95, Benjamin, New York-Amsterdam, 1969.

[12] R. A. Wilson, The Geometry and Maximal Subgroups of the Simple Groups of A. Rudvalis and J. Tits, Proc. London Math. Soc. 48 (1984), 533–563.

[13] R. A. Wilson, The finite simple groups, Springer, 2009.

[14] 千吉良直紀，Rudvalis 群と格子，第 57 回代数学シンポジウム報告集，2012.

[15] 北詰正顕，散在型単純群の周辺，第 53 回代数学シンポジウム報告集，2008.

[16] 北詰正顕，Rudvalis 群に対する複素格子について，RIMS 講究録 1811「有限群とその表現，頂点作用素代数，組合せ論の研究」2012 年 3 月.

minimal affinization の Jacobi-Trudi 型指標公式について

直井克之

概要

量子ループ代数の有限次元加群は様々な他の分野と関連を持ち, 近年盛んに研究がなされている。本稿では, 量子ループ代数の有限次元既約加群の特別な族である minimal affinization について, その Jacobi-Trudi 型指標公式を紹介する。またその証明についても概略を述べたいと思う。

1 minimal affinization

1.1 量子ループ代数

まず量子ループ代数について簡単に述べておく。正確な定義については [CP94, Section 12.2] 等を参照いただきたい。

$\mathfrak{g}$ を rank n の有限次元複素単純 Lie 代数とする。$\mathfrak{g}$ と Laurent 多項式環のテンソル積 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ に対し, bracket 積を $[x \otimes f, y \otimes g] = [x, y] \otimes fg$ と定めることで Lie 代数が定義できる。これを**ループ代数**と呼び $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ と表す。

量子ループ代数 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ は有理関数体 $\mathbb{C}(q)$ 上の結合的代数であり, 生成元 $\left\{x_{i,r}^{\pm}, k_i^{\pm 1}, h_{i,m} \mid 1 \leq i \leq n, r \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$ といくつかの関係式 (cf. [CP94, Theorem 12.2.1][*1]) により定義される。また $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ は, ループ代数 $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ を q 変形することで得られる代数, ということもできる。実際上で述べた生成元から $\mathbf{A} = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$ 上生成される $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の部分 $\mathbf{A}$ 代数を $U_{\mathbf{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ と表すとき, 代数として

$$U(\mathbf{L}\mathfrak{g}) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbf{A}} U_{\mathbf{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g}) / \langle 1 \otimes k_i - 1 \otimes 1 \mid 1 \leq i \leq n \rangle \tag{1.1}$$

が成り立つ ($\mathbb{C} \cong \mathbf{A}/\langle q-1 \rangle$ により $\mathbb{C}$ を $\mathbf{A}$ 加群とみなした)。

[*1] 正確には, [CP94, Theorem 12.2.1] は $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の中心拡大である量子アフィン代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の関係式である。この関係式において $\mathcal{C}^{\pm\frac{1}{2}} = 1$ とすると, $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の定義関係式が得られる。

また $\{x_{i,0}^{\pm}, k_i^{\pm 1} \mid 1 \leq i \leq n\}$ が生成する $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の部分代数を $U_q(\mathfrak{g})$ と表す。これは $U(\mathfrak{g})$ の q 変形であり, $\mathfrak{g}$ の量子展開環と呼ばれる代数である。

1.2 minimal affinization

Chari は evaluation 加群や Kirillov-Reshetikhin 加群 (これらについては次節で述べる) の拡張として, minimal affinization と呼ばれる有限次元既約 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群の族を定義した [Cha95]。本稿の目的は, $\mathfrak{g}$ が古典型の場合にこの minimal affinization の指標公式を与えることである。そこで本節では minimal affinization の定義について述べたいと思う。

まず準備として, $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元加群について必要なことを述べておく (詳しくは [Jan96, Chapter 5] 等を参照いただきたい)。P を $\mathfrak{g}$ のウェイト格子とし, $P^+ \subseteq P$ を支配的整ウェイトの集合とする。また $(\ ,\ )$ で P 上の Weyl 群不変な $\mathbb{Z}$ 値非退化双線型形式を表す。$U_q(\mathfrak{g})$ 加群 V が

$$V = \bigoplus_{\lambda \in P} V_\lambda, \quad V_\lambda = \{v \in V \mid k_i v = q^{(\lambda, \alpha_i)} v \text{ for } i \in I\}$$

(α_i は単純ルート) を満たすとき, V は **1 型**であるという。全ての有限次元 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群は 1 型加群を簡単な自己同型でひねったものの直和として表されるので, 話を 1 型加群に限定してもなんら一般性は失われない。そこで以下本稿を通して, 有限次元 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 (および $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群) は全て 1 型であると仮定し, いちいち断らないことにする。

(1 型) 有限次元 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群の圏は有限次元 $\mathfrak{g}$ 加群の圏と非常によく似ており, 以下の定理が成り立つ。

定理 1.1. (i) 任意の $\lambda \in P^+$ に対し, 最高ウェイトが λ であるような有限次元既約 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 $V_q(\lambda)$ が同型を除いてただ一つ存在する。

(ii) 有限次元 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群の圏は半単純であり, 任意の既約加群はある $V_q(\lambda)$ に同型である。

(iii) $V_q(\lambda)$ の指標を $\operatorname{ch} V_q(\lambda) := \sum_\mu (\dim V_q(\lambda)_\mu) e^\mu \in \mathbb{Z}[P]$ と定める。このとき, $\operatorname{ch} V_q(\lambda)$ は最高ウェイト λ の既約 $\mathfrak{g}$ 加群 $V(\lambda)$ の指標 $\operatorname{ch} V(\lambda)$ と一致する。

続いて affinization の定義について述べる。minimal affinization はこの affinization の中で “極小”なものとして定義される。

定義 1.2. (i) 有限次元既約 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群 V が $U_q(\mathfrak{g})$ 加群として

$$V \cong V_q(\lambda) \oplus \bigoplus_{\mu<\lambda} V_q(\mu)^{\oplus m_\mu(V)} \qquad (m_\mu(V) \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

と既約分解するとき, V は $V_q(\lambda)$ の **affinization** であるという[*2]。

(ii) V と W を $V_q(\lambda)$ の affinization とする。これらが $U_q(\mathfrak{g})$ 加群として同型であるとき, V と W は**同値**であるという。また V の同値類を $[V]$ で表す。

$V_q(\lambda)$ の affinization の同値類の集合を $\mathbf{D}_\lambda$ と表すと, 任意の $\lambda \in P^+$ に対し $\mathbf{D}_\lambda$ は空でない有限集合となる。また $\mathbf{D}_\lambda$ 上にある種の辞書式順序による半順序[*3]を定めることで, 半順序付き集合 $(\mathbf{D}_\lambda, \leq)$ が定義できる。

定義 1.3 ([Cha95])**.** $V_q(\lambda)$ の affinization V に対し, その同値類 $[V]$ が $(\mathbf{D}_\lambda, \leq)$ において極小となるとき V を $V_q(\lambda)$ の **minimal affinization** と呼ぶ。

上の $\leq$ は全順序ではないため $\mathbf{D}_\lambda$ の極小元は一意とは限らず, $U_q(\mathfrak{g})$ 加群として同型でない $V_q(\lambda)$ の minimal affinization は複数ありうる。しかしながら多くの場合に一意性が成り立つことが知られている。例えば以下の定理が成り立つ。

定理 1.4 ([CP95])**.** $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形が直線型のとき (i.e., $ABCFG$ 型のとき), 任意の $\lambda \in P^+$ に対し $V_q(\lambda)$ の minimal affinization の同値類は一意である。

上の定理に含まれない場合, すなわち DE 型では実際に minimal affinization の同値類が一意とならない場合がある (DE 型に関して詳しくは [CP96a, CP96b] を参照いただきたい)。しかし, 例えば以下のような特別な $\lambda \in P^+$ に対してはやはり一意性が成り立つ。

命題 1.5. $\mathfrak{g}$ が D_n 型のとき $\lambda \in P^+$ が $\langle h_{n-1}, \lambda\rangle = 0$ または $\langle h_n, \lambda\rangle = 0$ を満たすならば, $V_q(\lambda)$ の minimal affinization の同値類は一意である。ここで h_{n-1}, h_n は spin node に付随する余ルートを表す。

本稿の後半では D 型の minimal affinization についても考察を行うが, その際には上

[*2] 全ての有限次元既約 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群はある (ただ一つの) $V_q(\lambda)$ の affinization となることも知られている。

[*3] 正確な定義は以下の通り: $[V], [W] \in \mathbf{D}_\lambda$ に対し $m_\mu(V), m_\mu(W)$ ($\mu \in P^+$) で $V_q(\mu)$ に関するそれぞれの重複度を表すとき, 任意の $\mu \in P^+$ に対し

(i) $m_\mu(V) \leq m_\mu(W)$, または (ii) ある $\nu > \mu$ が存在して $m_\nu(V) < m_\nu(W)$ となる,

のいずれかが成り立つならば $[V] \leq [W]$ と定める。

の命題の仮定を満たす場合だけを考えることにする。そのため本稿に登場する minimal affinization (の同値類) は, 常に最高ウェイトだけから定まるものである。

1.3 minimal affinization の例

例 1. 零でない $a \in \mathbb{C}^*$ に対し, 線形写像 $\mathrm{ev}_a\colon \mathbf{L}\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を $\mathrm{ev}_a(x \otimes f) = f(a)x$ と定義すると, これは Lie 代数の準同型となる。この ev_a を **evaluation map** と呼ぶ。

以下 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ と仮定する。このとき Lie 代数の場合と同様に, 任意の $a \in \mathbb{C}(q)^\times$ に対し代数準同型 $\mathrm{ev}_a\colon U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g}) \to U_q(\mathfrak{g})$ が定義できる [Jim86, Section 2] (これもやはり evaluation map と呼ばれる)。このとき既約 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 $V_q(\lambda)$ の引き戻し $\mathrm{ev}_a^*\big(V_q(\lambda)\big)$ は既約 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群となる (**evaluation module** と呼ばれる)。これが $V_q(\lambda)$ の (同値を除いて唯一の) minimal affinization であることは定義から明らかであろう。このように $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ のときには, minimal affinization と evaluation module は同じ概念である。

補足 1.6. ループ代数の場合には evaluation map は全ての型で定義できるが, 量子ループ代数の場合には $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}_{n+1}$ のとき evaluation map は**存在しない**。そのため $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}_{n+1}$ のときには, 上の例とは異なりほとんどの minimal affinization は $U_q(\mathfrak{g})$ 加群として可約となる。またその既約分解を求めるのは一般に簡単な問題ではない[*4]。

例 2. 改めて $\mathfrak{g}$ を任意の単純 Lie 代数とする。$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $1 \leq i \leq n$ に対し $\lambda = m\varpi_i$ (ϖ_i は基本ウェイト) とおくと, $V_q(\lambda)$ は同値を除いて唯一の affinization をもつ。これらを **Kirillov-Reshetikhin (KR) 加群**と呼ぶ。KR 加群は「T 系を満たす (cf. [KNS09, Nak03, Her06])」,「フェルミ型分解公式を満たす (cf. [HKO$^+$99, HKO$^+$02])」,「結晶基底を持つ (cf. [OS08])」など興味深い性質を数多く持ち, 有限次元既約 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群の中でもとりわけ重要な加群である。

minimal affinization は, 上の例で述べた加群の自然な拡張として定義された概念である。しかしそれが (一般化のための一般化ではなく) 真に興味深い対象であるためには, これらの例を超えた一般の minimal affinization が良い性質を持っていることが不可欠であろう。今のところそのような決定的な結果が得られているとは必ずしも言い難いが, 近年少しずつ一般の minimal affinization の持つ性質も見つかってきている (minuscule 性 [Her07, CH10], 拡大 T 系 [MY12] 等)。また本稿で紹介する Jacobi-Trudi 型指標公式も, 一般の minimal affinization が持つ良い性質の一例と言えるであろう。

[*4] そうでなければ本稿の結果はあまり意味のないものになってしまう。

2 minimal affinization の Jacobi-Trudi 型指標公式

2.1 Jacobi-Trudi 公式

まず導入として, 古典的な Jacobi-Trudi 公式

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \det\Big(h_{\lambda_i - i + j}(\mathbf{x})\Big)_{1\le i,j\le n} \tag{2.1}$$

を思い出そう。ここで $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0)$ は分割, すなわち非増加非負整数列を表す。また $s_\lambda(\mathbf{x})$ は Schur 多項式, $h_k(\mathbf{x})$ は k 次完全対称多項式を表す[*5]。

(2.1) から既約 $\mathfrak{sl}_{n+1}$ 加群の指標公式が以下のようにして得られる[*6]。$\mathfrak{sl}_{n+1}$ の支配的整ウェイト $\lambda \in P^+$ に対し, 対応する分割 $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n)$ を $\lambda_i = \sum_{i\le k\le n}\langle h_k, \lambda\rangle$ と定める (添え字づけは標準的なものとする)。この分割をやはり λ と表すと, 対応する Schur 関数 $s_\lambda(\mathbf{x})$ は既約 $\mathfrak{sl}_{n+1}$ 加群 $V(\lambda)$ の指標と (適当な同一視のもとで) 一致する[*7]。また $h_k(\mathbf{x})$ は $\mathrm{ch}\, V(k\varpi_1)$ と一致する (ϖ_1 は基本ウェイト)。このことから (2.1) は, 既約 $\mathfrak{sl}_{n+1}$ 加群の指標公式

$$\mathrm{ch}\, V(\lambda) = \det\Big(\mathrm{ch}\, V\big((\lambda_i - i + j)\varpi_1\big)\Big)_{1\le i,j\le n} \tag{2.2}$$

と等価な等式である。

(2.2) は $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ のときに成り立つ式であり, 他の型では一般には成り立たない。しかし左辺の $V(\lambda)$ を minimal affinization に置き換えると, 同様の式が他の型でも成り立つ, というのが次節で述べる主定理の主張である。

2.2 主定理

以下本稿を通して $\mathfrak{g}$ は古典型と仮定する (単純ルートなどの添え字づけは [Kac90, Section 4.8] に従う)。また各 $\lambda \in P^+$ に対し, $V_q(\lambda)$ の minimal affinization を一つ固定し $L_q(\lambda)$ と表す。

定理 2.1 ([Sam14, Nao14]). $\lambda \in P^+$ が $\begin{cases} \langle h_n, \lambda\rangle = 0 & \mathfrak{g}\text{: } BC \text{ 型} \\ \langle h_{n-1}, \lambda\rangle = \langle h_n, \lambda\rangle = 0 & \mathfrak{g}\text{: } D \text{ 型}\end{cases}$ を満たす

*5 この公式は (2.2) の導出のために述べたにすぎないので, ご存じない方は無視していただいて構わない。

*6 通常は $\mathfrak{gl}_n$ を考えるが, 後の話の都合上ここでは $\mathfrak{sl}_{n+1}$ を考えることにする。

*7 $\mathfrak{sl}_{n+1}$ で話をしているので, 正確には $x_1x_2\cdots x_{n+1} = 1$ という関係式で割ってやる必要がある。

と仮定し, $\lambda_i = \sum_{i\le k\le n}\langle h_k, \lambda\rangle$ $(1\le i\le n)$ とおく。このとき,

$$\operatorname{ch} L_q(\lambda) = \begin{cases} \det\Big(\operatorname{ch} V\big((\lambda_i - i + j)\varpi_1\big)\Big)_{1\le i,j\le n} & \mathfrak{g}\text{: } ABD \text{ 型} \\ \det\Big(\sum_{0\le 2\ell\le \lambda_i - i + j} \operatorname{ch} V\big((\lambda_i - i + j - 2\ell)\varpi_1\big)\Big)_{1\le i,j\le n} & \mathfrak{g}\text{: } C \text{ 型} \end{cases} \tag{2.3}$$

が成り立つ。

任意の $k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対し, $U_q(\mathfrak{g})$ 加群として

$$L_q(k\varpi_1) \cong \begin{cases} V_q(k\varpi_1) & \mathfrak{g}\text{: } ABD \text{ 型} \\ \bigoplus_{0\le 2\ell\le k} V_q\big((k-2\ell)\varpi_1\big) & \mathfrak{g}\text{: } C \text{ 型} \end{cases}$$

が成り立つ。よって (2.3) は, 以下の統一的な形で書くこともできる*8:

$$\operatorname{ch} L_q(\lambda) = \det\Big(\operatorname{ch} L_q\big((\lambda_i - i + j)\varpi_1\big)\Big)_{1\le i,j\le n}.$$

また上の定理から, $L_q(\lambda)$ における既約 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 $V_q(\mu)$ の重複度 $\Big[L_q(\lambda), V_q(\mu)\Big]$ について以下の公式が得られる。

系 2.2 ([NN06, Sam14])**.** $\lambda\in P^+$ が定理 2.1 の仮定を満たすとする。このとき任意の $\mu\in P^+$ に対し,

$$\Big[L_q(\lambda), V_q(\mu)\Big] = \begin{cases} \delta_{\lambda,\mu} & \mathfrak{g}\text{: } A \text{ 型} \\ \sum_\kappa c^\lambda_{2\kappa,\mu} & \mathfrak{g}\text{: } BD \text{ 型} \\ \sum_\kappa c^\lambda_{(2\kappa)',\mu} & \mathfrak{g}\text{: } C \text{ 型} \end{cases}$$

が成り立つ。ここで κ は分割の集合を走る。また $c^\lambda_{\mu,\nu}$ は Littlewood-Richardson 係数 (cf. [Mac98]), κ' は κ の転置を表す。

補足 2.3. (1) 1.3 節の例 1 から, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ のとき任意の $\lambda\in P^+$ に対し $\operatorname{ch} L_q(\lambda) = \operatorname{ch} V_q(\lambda)\ \big(= \operatorname{ch} V(\lambda)\big)$ が成り立つ。よって A 型のときは, 定理は (2.2) の単なる言いかえに過ぎない。

(2) 定理 (および系) の仮定をもう少し弱めることも出来る。すなわち, B_n 型の場合は $\langle\lambda, h_n\rangle\in 2\mathbb{Z}_{\ge 0}$, D_n 型の場合は $\langle h_{n-1}, \lambda\rangle = \langle h_n, \lambda\rangle$ という仮定の下でも定理が成り立つ。ただしこのとき λ_i たちも少し修正する必要がある。

*8 定理 1.1 (iii) より $\operatorname{ch} V_q(\mu) = \operatorname{ch} V(\mu)$ であった。

上の定理と中井・中西による予想との関係について述べておく。[NN06] において, 彼らは minimal affinization の q 指標の行列式による表示を予想として提唱した[*9]。ここで q 指標というのは, $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群の $\left\{k_i^{\pm 1}, h_{i,m} \mid 1 \leq i \leq n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$ に関する一般化同時固有値のデータを与えるものである[*10]。特に q 指標を適当に特殊化することで, 通常の指標が得られる。

彼らの予想した公式を特殊化すると, (2.3) の右辺と等しい式となる。このことは定理 2.1 が, 彼らの予想の状況証拠となる結果であることを意味している。また AB 型の場合には, 既に予想に証明が与えられている。

定理 2.4 ([Her07, Theorem 6.1])**.** $\mathfrak{g}$ が AB 型のとき, 中井・中西の予想は正しい。

予想から定理 2.1 は容易に従うので, AB 型の場合には定理 2.1 はすでに知られていた公式である。一方 CD 型については中井・中西の予想は今のところ未証明であり, 定理 2.1 は新しい結果である[*11]。

3 主定理の証明

3.1 次数付き極限

まず証明において重要な役割を果たす次数付き極限について述べる。$U_{\mathbf{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g}) \subseteq U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ を 1.1 節で定義した部分 $\mathbf{A}$ 代数とする。各 minimal affinization $L_q(\lambda)$ に対し, 零でないウェイト λ のベクトル $v_\lambda \in L_q(\lambda)_\lambda$ を一つ固定し, $L_{\mathbf{A}}(\lambda) := U_{\mathbf{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})v_\lambda \subseteq L_q(\lambda)$ とおく。すると同型 (1.1) により $L_1(\lambda) := \mathbb{C} \otimes_{\mathbf{A}} L_{\mathbf{A}}(\lambda)$ は $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ 加群となる (これを $L_q(\lambda)$ の**古典極限**と呼ぶ)。このときある $a \in \mathbb{C}^\times$ が存在して,

$$\mathfrak{g} \otimes (t+a)^N L_1(\lambda) = 0 \quad (N \gg 0)$$

を満たす。この a に対し**カレント代数** $\mathfrak{g}[t] := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t] \subseteq \mathbf{L}\mathfrak{g}$ の自己同型 τ_a を $\tau_a\big(x \otimes f(t)\big) = x \otimes f(t+a)$ と定め, $\mathfrak{g}[t]$ 加群 $L(\lambda)$ を $L(\lambda) := \tau_a^* L_1(\lambda)$ により定義する。この $L(\lambda)$ を $L_q(\lambda)$ の**次数付き極限**と呼ぶ。このとき定義から容易に以下が示せる。

---

*9 彼らの予想は minimal affinization とは限らない加群に関するものも含んでいる。

*10 通常の指標は $\{k_i^{\pm 1}\}$ に関する同時固有値のデータを与えるものであった。よって q 指標は, 加群に関して通常の指標より多くの情報を持っている。

*11 $\mathfrak{g}$ が ADE 型の場合には, 中島により全ての有限次元既約 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群に対し, その q 指標を与えるアルゴリズムが得られている [Nak04]。しかしこのアルゴリズムはかなり複雑なものであり, これを用いて D 型の場合に中井・中西予想 (または定理 2.1) を証明することは難しいであろうと思われる。

命題 3.1. $\mathrm{ch}\, L_q(\lambda) = \mathrm{ch}\, L_1(\lambda) = \mathrm{ch}\, L(\lambda)$ が成り立つ。

このことから $\mathrm{ch}\, L_q(\lambda)$ を求めるには, $\mathrm{ch}\, L(\lambda)$ が分かれば十分である。この事実を用いて,「minimal affinization そのものではなく, その次数付き極限を調べる」というのが定理 2.1 の証明の基本アイデアである。

指標が同じというだけであれば古典極限 $L_1(\lambda)$ も同様であるが, いくつかの理由から $L(\lambda)$ の方が $L_1(\lambda)$ に比べ扱いが容易である。特に重要な点として $L(\lambda)$ は $\mathbb{Z}$ 次数付き $\mathfrak{g}[t]$ 加群であり[*12], この次数構造が $L(\lambda)$ を調べる際に様々な点で役に立つ[*13]。他にも $L_1(\lambda)$ は $L_q(\lambda)$ の選び方に依るが $L(\lambda)$ は依らない, $\mathfrak{g}[t]$ は自然にアフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数とみなせる, 等が $L_1(\lambda)$ ではなく $L(\lambda)$ を調べる主な理由である。

3.2 minimal affinization の定義関係式

筆者は [Nao13, Nao14] において $L(\lambda)$ の定義関係式を決定した。この結果は定理 2.1 の証明において重要な役割を果たすので, 本節ではこの結果について述べることにする。

$\mathfrak{g}$ の三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ を固定する。また, 正ルートの集合 Δ_+ の部分集合 Δ_+^1 を以下のように定義する:

$$\Delta_+^1 = \Big\{\alpha \in \Delta_+ \mid \alpha = \sum_{1\le i\le n} n_i\alpha_i \text{ with } n_i \le 1\Big\}.$$

定理 3.2 ([Nao13, Nao14])**.** $\lambda \in P^+$ に対し, $M(\lambda)$ をベクトル v から以下の関係式により定義される $\mathfrak{g}[t]$ 加群とする:

$$\mathfrak{n}_+[t]v = 0, \quad (h \otimes t^s)v = \delta_{s0}\langle h, \lambda\rangle v \text{ for } h \in \mathfrak{h}, s \ge 0,$$
$$f_i^{\langle \lambda, h_i\rangle+1}v = 0 \text{ for } 1 \le i \le n, \quad (f_\alpha \otimes t)v = 0 \text{ for } \alpha \in \Delta_+^1.$$

このとき同型 $L(\lambda) \cong M(\lambda)$ が成り立つ。

この定理の証明についても, 概略を述べておきたい。証明のためには, 二つの全射

$$M(\lambda) \twoheadrightarrow L(\lambda), \quad L(\lambda) \twoheadrightarrow M(\lambda)$$

の存在を示せばよい。一つ目を示すには $L(\lambda)$ が $M(\lambda)$ の定義関係式を満たすことを確かめればよく, これはそれほど難しくない。

[*12] $\mathfrak{g}[t]$ は $\mathbb{C}[t]$ の次数により, $\mathbb{Z}$ 次数付き Lie 代数の構造を持つ。

[*13] KR 加群の場合には, この $\mathbb{Z}$-grading は結晶基底上のエネルギー関数と関連する。詳しくは [Nao12] を参照いただきたい。

一方二つ目の全射の存在を直接示すことは容易ではない。そこで一般化 Demazure 加群 $D(\xi_1,\dots,\xi_n)$ を間にはさんで,

$$L(\lambda) \twoheadrightarrow D(\xi_1,\dots,\xi_n) \twoheadrightarrow M(\lambda)$$

を示すことになる。

ここで一般化 Demazure 加群についてざっくり紹介することにする。$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}c\oplus\mathbb{C}d$ をアフィン Lie 代数とする (cf. [Kac90])。このとき $\mathfrak{g}[t]$ は自然に $\widehat{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数とみなせる。Λ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の支配的整ウェイトとし, $\widehat{V}(\Lambda)$ で既約最高ウェイト $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群を表す。$\widehat{W}$ をアフィン Weyl 群とし, $\xi\in\widehat{W}\Lambda$ に対し 1 次元ウェイト空間 $\widehat{V}(\Lambda)_\xi$ の零でないベクトルを v_ξ と表す。$\Lambda^1,\dots,\Lambda^k$ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の支配的整ウェイトとし, 各 $1\le i\le k$ に対し $\xi_i\in\widehat{W}\Lambda^i$ とするとき, 一般化 Demazure 加群 $D(\xi_1,\dots,\xi_n)$ は

$$D(\xi_1,\dots,\xi_k) = \mathfrak{g}[t](v_{\xi_1}\otimes\cdots\otimes v_{\xi_k}) \subseteq \widehat{V}(\Lambda^1)\otimes\cdots\otimes\widehat{V}(\Lambda^k)$$

と定義される。

$\xi_1,\dots,\xi_n$ を適切に選んだとき, 全射 $L(\lambda)\twoheadrightarrow D(\xi_1,\dots,\xi_n)$ の存在は以下のようにして証明される。簡単のため $\mathfrak{g}$ が B 型であると仮定する*14。まず KR 加群のテンソル積に $L_q(\lambda)$ が埋め込めること, すなわち

$$L_q(\lambda) \hookrightarrow L_q(m_1\varpi_1)\otimes\cdots\otimes L_q(m_n\varpi_n)$$

を示す。ただし $\lambda = \sum_i m_i\varpi_i$ とする。すると $L(\lambda)$ の構成により, 零でない射 $\Phi\colon L(\lambda)\to L(m_1\varpi_1)\otimes\cdots\otimes L(m_n\varpi_n)$ が得られる。また各 $L(m_i\varpi_i)$ に対し, 適切な Λ^i が存在して $L(m_i\varpi_i)\hookrightarrow\widehat{V}(\Lambda^i)$ が示せることから, 単射

$$\iota\colon L(m_1\varpi_1)\otimes\cdots\otimes L(m_n\varpi_n)\hookrightarrow\widehat{V}(\Lambda^1)\otimes\cdots\otimes\widehat{V}(\Lambda^n)$$

が構成できる。このとき $\iota\circ\Phi$ の像が一般化 Demazure 加群 $D(\xi_1,\dots,\xi_n)$ となることが確かめられるので, $L(\lambda)\twoheadrightarrow D(\xi_1,\dots,\xi_n)$ が示せることになる。

一方 $D(\xi_1,\dots,\xi_n)$ が $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群の部分 $\mathfrak{g}[t]$ 加群であることを用いると, ある種のアフィン Weyl 群に関する対称性により, 帰納的にその定義関係式を決定することが出来る。あとはその定義関係式を $M(\lambda)$ の生成元が満たすことを確認することで, もう一つの全射 $D(\xi_1,\dots,\xi_n)\twoheadrightarrow M(\lambda)$ の存在も示すことが出来る。

*14 他の型でも大体同様であるが, $L_q(\lambda)$ を埋め込むテンソル積の選び方を少し修正する必要がある。

3.3 $\mathrm{ch}\, M(\lambda)$ の決定

定理 3.2 により, 定理 2.1 を証明するには $\mathrm{ch}\, M(\lambda)$ を求めればよい。この $M(\lambda)$ については, 筆者が定理 3.2 を証明する以前から既に Chari と Greenstein により研究がなされており, 以下の命題が示されていた。

命題 3.3 ([CG11])**.** $\lambda \in P^+$ が定理 2.1 の仮定を満たすとき,

$$\sum_{(\mu,s)\in\Gamma(\lambda)} (-1)^s \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}} \big(V(\mu), \bigwedge^s \mathfrak{g} \otimes V(\lambda)\big) \mathrm{ch}\, M(\mu) = \mathrm{ch}\, V(\lambda)$$

が成り立つ。ただし $\Gamma(\lambda) = \{(\mu, s) \in P^+ \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \lambda = \mu + \sum_{\alpha \notin \Delta_+^1} n_\alpha \alpha,\ \sum_\alpha n_\alpha = s\}$ とする。

(2.3) の右辺を H_λ と表すことにする。このとき Sam により, 以下の命題が証明された。

命題 3.4 ([Sam14])**.** $\lambda \in P^+$ が 2.1 の仮定を満たすとき,

$$\sum_{(\mu,s)\in\Gamma(\lambda)} (-1)^s \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}} \big(V(\mu), \bigwedge^s \mathfrak{g} \otimes V(\lambda)\big) H_\mu = \mathrm{ch}\, V(\lambda)$$

が成り立つ。

これら二つの命題から $\mathrm{ch}\, M(\lambda) = H_\lambda$ が示せる。よって本節の初めに述べた通り, 定理 2.1 の証明が完了したことになる。

謝辞 第 59 回代数学シンポジウムにおいて講演の機会をくださった世話人の方々, 特に講演を薦めてくださった池田岳先生に心より感謝申し上げます。

参考文献

[CG11] V. Chari and J. Greenstein. Minimal affinizations as projective objects. *J. Geom. Phys.*, 61(3):594–609, 2011.

[CH10] V. Chari and D. Hernandez. Beyond Kirillov-Reshetikhin modules. In *Quantum affine algebras, extended affine Lie algebras, and their applications*, volume 506 of *Contemp. Math.*, pages 49–81. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[Cha95] V. Chari. Minimal affinizations of representations of quantum groups: the rank 2 case. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 31(5):873–911, 1995.

[CP94] V. Chari and A. Pressley. *A guide to quantum groups.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[CP95] V. Chari and A. Pressley. Minimal affinizations of representations of quantum groups: the nonsimply-laced case. *Lett. Math. Phys.*, 35(2):99–114, 1995.

[CP96a] V. Chari and A. Pressley. Minimal affinizations of representations of quantum groups: the irregular case. *Lett. Math. Phys.*, 36(3):247–266, 1996.

[CP96b] V. Chari and A. Pressley. Minimal affinizations of representations of quantum groups: the simply laced case. *J. Algebra*, 184(1):1–30, 1996.

[Her06] D. Hernandez. The Kirillov-Reshetikhin conjecture and solutions of T-systems. *J. Reine Angew. Math.*, 596:63–87, 2006.

[Her07] D. Hernandez. On minimal affinizations of representations of quantum groups. *Comm. Math. Phys.*, 276(1):221–259, 2007.

[HKO$^+$99] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Y. Yamada. Remarks on fermionic formula. In *Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998)*, volume 248 of *Contemp. Math.*, pages 243–291. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[HKO$^+$02] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Z. Tsuboi. Paths, crystals and fermionic formulae. In *MathPhys odyssey, 2001*, volume 23 of *Prog. Math. Phys.*, pages 205–272. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002.

[Jan96] J. C. Jantzen. *Lectures on quantum groups*, volume 6 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[Jim86] M. Jimbo. A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, 11(3):247–252, 1986.

[Kac90] V.G. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras.* Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 1990.

[KNS09] A. Kuniba, T. Nakanishi, and J. Suzuki. T-systems and Y-systems for quantum affinizations of quantum Kac-Moody algebras. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 5:Paper 108, 23, 2009.

[Mac98] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and orthogonal polynomials*, volume 12 of *University Lecture Series.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lectures presented at Rutgers University, New Brunswick, NJ.

[MY12] E. Mukhin and C. A. S. Young. Extended T-systems. *Selecta Math. (N.S.)*, 18(3):591–631, 2012.

[Nak03] H. Nakajima. t-analogs of q-characters of Kirillov-Reshetikhin modules of quantum affine algebras. *Represent. Theory*, 7:259–274 (electronic), 2003.

[Nak04] H. Nakajima. Quiver varieties and t-analogs of q-characters of quantum affine algebras. *Ann. Math.*, 160:1057–1097, 2004.

[Nao12] K. Naoi. Fusion products of Kirillov–Reshetikhin modules and the $X = M$ conjecture. *Adv. Math.*, 231(3-4):1546–1571, 2012.

[Nao13] K. Naoi. Demazure modules and graded limits of minimal affinizations. *Represent. Theory*, 17:524–556, 2013.

[Nao14] K. Naoi. Graded limits of minimal affinizations in type D. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 10:Paper 047, 20, 2014.

[NN06] W. Nakai and T. Nakanishi. Paths, tableaux and q-characters of quantum affine algebras: The C_n case. *J. Phys. A*, 39(9):2083–2115, 2006.

[OS08] M. Okado and A. Schilling. Existence of Kirillov-Reshetikhin crystals for nonexceptional types. *Represent. Theory*, 12:186–207, 2008.

[Sam14] S. Sam. Jacobi–Trudi determinants and characters of minimal affinizations. *Pacific J. Math.*, 272(1):237–244, 2014.

頂点作用素代数の多変数型トレイス関数と
モジュラー不変性

宮本雅彦（筑波大学数理物質系）

1　序文

ここで発表する内容は、学振特別研究員として筑波大学に 1 年間滞在した Matthew Krauel 氏との共同研究 [6] である。

頂点作用素代数 (VOA) の概念は、モンスター単純群の既約表現の次数と楕円モジュラー関数 $J(\tau)$ の係数との神秘的な関係を説明するために Borcherds によって導入されたものである [2]。これは現在は、リーマン面上の共形場理論の（対となっている片方の）カイラル代数の代数版と理解されており、それゆえ、モジュラー不変の性質を持つと考えられている。実際、いくつかの例において、既約加群 $W=\oplus_{n=0}^{\infty}W_{r+n}$ の指標と呼ばれる関数 $Z_W(\mathbf{1},\tau):=\sum_{n=0}^{\infty}\dim W_{r+n}q^{r+n-c/24}$ $(q=e^{2\pi i\tau})$ の張る空間が直接計算によりモジュラー不変性を持つことが観察されていた。VOA の公理を使った一般的な証明は、1996 年に Zhu [9] によって与えられている。そこでは、正規 VOA において、指標だけではなく、既約加群上のトレイス関数族の張る空間が $SL_2(\mathbb{Z})$-不変性を持つことを示した。

この講演では、Zhu の結果を拡張して、多変数型のトレイス関数を考え、そのモジュラー不変性を証明する。その応用として、ジーゲルテータ級数の変換公式を統一的に求める。

頂点作用素代数の正確な定義は少し長いので、ここでは必要な事に絞って簡単な説明をしておこう。ヴィラソロ代数

$$Vir=(\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}L(n))\oplus\mathbb{C}C$$

とは、関係式

$$[Vir,C]=0,[L(n),L(m)]=(n-m)L(n+m)+\delta_{n+m,0}\frac{n^3-n}{12}C$$

を満たすリー代数であり、ループ代数 $\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}x^n\frac{d}{dx}$ の中心拡大である。ヴィラソロ代数の表現で、C が $c\in\mathbb{C}$ 倍として作用するとき、c をその表現における中心電荷と呼ぶ。

VOA とはこのヴィラソロ代数を拡張したものと考えてよい。ただし、もはやリー代数ではなく、普遍包絡環に近いものであるが、結合代数ではない。VOA の外見は、次数付きベクトル空間 $V=\oplus_{n=0}^{\infty}V_n$、線形写像 $Y(\cdot,z):V\to\mathrm{End}(V)[[z^{-1},z]]$、 そして真空とヴィラソロ元と呼ばれる 2 つの特別な元 $\mathbf{1}\in V_0,\ \omega\in V_2$ からなる 4 つ組 $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ （通常は簡単

に V と書く）であるが、これらは、後で説明する局所可換などのいくつかの条件を満す。$v \in V_n$ のとき、v のウエイトを n と言い、$\mathrm{wt}(v)=n$ で表す。$v \in V$ の線形写像 $Y(\cdot,z)$ による像 $Y(v,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$ は v の頂点作用素 (vertex operator) と呼ばれる。各整数 n に対して、z^{-n-1} の係数 $v_n \in \mathrm{End}(V)$ を利用して、V の中に、$v \times_n u = v_n(u)$ という n-積を作り出すことができる。以下 $v_n(u)$ を $v_n u$ と記す。すべての整数に対して積が定義できるので、V は無限個の積を持つ代数となる。これが頂点作用素代数 (vertex operator algebra) である。重要な性質は、$v,u \in V$ の頂点作用素が以下の交換関係（局所可換）と結合関係

$$\begin{aligned}[]
[v_n, u_m] &= \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} (v_j u)_{n+m-j} \\
(v_n u)_m &= \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} (-1)^j \{v_{n-j}u_{m+j} - (-1)^n u_{n+m-j} v_j\}
\end{aligned}$$

を満たすことである。右辺は一見無限和のように見えるが、VOA やその表現には常に “下に有界”(j が十分大きいと $v_j u = 0$) という性質を要求する。この性質がリー代数との大きな違いであり、VOA に難しさと、独自性を与えている。なぜ、“j が十分大” なのに下に有界と言う理由は、$\mathrm{wt}(v_j u) = \mathrm{wt}(v) + \mathrm{wt}(u) - j - 1$ という性質を持っているからである。

ヴィラソロ元 $\omega \in V_2$ は $Y(\omega,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n) z^{-n-2}$ の係数 $L(n) := \omega_{n+1}$ がヴィラソロ代数の関係式を満たしているものであり、このヴィラソロ代数の中心電荷 c を VOA の中心電荷 (central charge) と呼ぶ。さらに、$L(0)$ の固有値がウエイトを与え、微分も $Y(L(-1)v,z) = \frac{d}{dz}Y(v,z)$ によって与えられているという条件も仮定する。真空 $\mathbf{1} \in V_0$ は自明な作用 $Y(\mathbf{1},z) = 1_V$ を持つ元である。ここでは、$V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$ を満たしている CFT-タイプと呼ばれる VOA だけを扱う。VOA の詳細については、[5] を参照してほしい。

VOA は一応代数なので、加群も同じような形で定義される。即ち、W が VOA V の加群であるとは、加群上の頂点作用素

$$Y^W(\cdot,z) : v \in V \mapsto Y^W(v,z) = \sum_{n\in Z} v_n^W z^{-n-1} \in \mathrm{End}(W)[[z^{-1},z]]$$

が与えられ、V と同じような条件を満たすことである。加群に対しても $v \in V_n$ なら、$o(v) := v^W_{\mathrm{wt}(v)-1}$ は次数を保つ作用であり、$L(0) := o(\omega)$ の固有値が W の次数を与えている。

この講演では、V のすべての加群が有限種類の既約加群（同型類）の直和となっていると仮定する。このような VOA を正規と呼ぶ。このとき、既約加群 W はある有理数（共形ウエイト）r があって、

$$W = \oplus_{n=0}^{\infty} W_{r+n}$$

と次数空間の直和に分解する。斉次元のウエイトの差は整数である。

先に述べたように、Zhu は、W の指標 $\sum_{n=0}^{\infty} \dim W_{r+n} q^{r+n-c/24}$ だけではなく、すべて

の $v\in V$ に対するトレイス関数

$$Z_W(v,\tau)=\mathrm{Tr}_W o(v)q^{L(0)-c/24}$$

の族を考えた。利点は、異なる既約加群に対して、同じ指標となることがあっても、W 上のトレイス関数の族として考えると、一次独立となっており、トレイス関数から既約加群 W を再構成できるのである。また、

$$Z_W(\omega-\frac{c}{24}\mathbf{1},\tau)=2\pi i\frac{d}{d\tau}Z_W(\mathbf{1},\tau)$$

のように微分も扱うことができる。Zhu はこのトレイス関数の族を使って、正規 VOA という条件だけで（当初はいくつかの条件も付けていたが、現在では必要ない）一般論としてトレイス関数の族の張る空間のモジュラー不変性を証明した。即ち、$W^1,\dots,W^k$ を既約 V-加群（の同型類）全体の集合とすると、トレイス関数

$$Z_j(v,\tau)=\mathrm{Tr}_{W^j}o(v)q^{L(0)-c/24}$$

は上半平面上 $\mathcal{H}=\{\tau\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(\tau)>0\}$ の関数として解析関数に絶対収束し、$\sigma=\begin{pmatrix}a&b\\e&f\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、$S(\sigma)_{hj}\in GL_k(\mathbb{C})$ が存在して、すべての $v\in V$ に対して、

$$\left(\frac{1}{e\tau+f}\right)^{\mathrm{wt}[v]}Z_h(v,\frac{a\tau+b}{e\tau+f})=\sum_{j=1}^{k}S(\sigma)_{hj}Z_j(v,\tau)$$

が成り立つのである。wt$[v]$ は 新しい頂点作用素 $Y[v,z]:=Y(v,e^{2\pi iz}-1)e^{w\pi iz\mathrm{wt}(v)}$ と新ヴィラソロ元 $\widetilde{\omega}=2\pi i(\omega-\frac{c}{24}\mathbf{1})$ による新しい VOA $(V,Y[,],\widetilde{\omega},\mathbf{1})$ によって与えられるウエイトである。wt[] と wt() の違いの説明は長くなるので、あまり違いを気にしないことにする。

VOA のモジュラー不変性の結果はいくつかの形で拡張されている。例えば、有限自己同型との関連から、加群だけでなくツイスト加群までも含めたモジュラー不変性 [4] や有限生成加群はすべて $\mathbb{N}$-次数付け可能であるという条件で、ある種のトレイス関数を導入することでモジュラー不変性が証明されている [7]。

2 多変数型トレイス関数

この拡張を考えたきっかけは、トレイス関数を $\tau\in\mathbb{C}$ 上の関数と見ず、VOA のウエイト 2 の空間の一次元部分代数 $\mathbb{C}\omega$ 上の関数と考えたことである。$(V_2,\times_1)$ は代数であり、$v\in V_2$ に対して、$\omega_1 v=v_1\omega=2v$ なので、$\omega/2$ は単位元と同じであり、$\mathbb{C}\omega/2$ は $\mathbb{C}$ と同型

な可換代数である。その観点から、$(V_2, \times_1)$ のより広い可換部分代数を変数領域とするトレイス関数が定義できると考えた。

最初の拡張は、半単純可換代数であり、1 の冪等元分解を考えることである。V のウエイト 2 の空間で考えると、互いに直交した共形元 $e^j \in V_2$ $(j = 1, \ldots, g)$ があって、

$$\omega = e^1 + \cdots + e^g$$

となっていることを意味する。ここで、共形元とは、それが生成する部分頂点作用素代数のヴィラソロ元となっているものであり、$e^j/2$ は $(V_2, \times_1)$ において冪等元である。c_j で e^j の中心電荷を表し、$\tilde{e}^j = e^j - \frac{c_j}{24}\mathbf{1}$ と置く。これを使って既約加群 W^h 上の多変数トレイス関数を

$$Z_h(v : \tau_1, \ldots, \tau_g) := \mathrm{Tr}_{W^h} o(v) e^{o(\sum_{j=1}^{g} 2\pi i \tau_j \tilde{e}^j)} \tag{2.1}$$

と定義する。変数領域は、$(V_{[2]}, \times_{[1]})$ の可換部分代数 $\mathbb{C}\tilde{e}^1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\tilde{e}^g$ の中の上半空間

$$\sum_{j=1}^{g} \tau_j \tilde{e}^j \in \mathcal{H}\tilde{e}^1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}\tilde{e}^g \subseteq V_{[2]}$$

あり、$\sigma \in SL(2, \mathbb{Z})$ の作用は、

$$(\tau_1 \tilde{e}^1, \ldots, \tau_g \tilde{e}^g) \mapsto (\frac{a\tau_1 + b}{e\tau_1 + f}\tilde{e}^1, \ldots, \frac{a\tau_g + b}{e\tau_g + f}\tilde{e}^g)$$

である。この設定で、次のモジュラー不変性を得る。

Theorem 1 V を正規 *VOA* とし、$\omega = \sum_{j=1}^{g} e^j \in V_2$ を直交共形元への分解とする。$v \in V$ をすべての e^j に関して、$\mathrm{wt}_j[]$-斉次元とし、すべての j に対して、$\mathrm{wt}_j[w] \leq \mathrm{wt}_j[v]$ となる $w \in V$ に対しては、$Z_h(w : \tau_1, \ldots, \tau_g)$ が $\mathcal{H}^{\times g}$ 上で解析関数に絶対収束すると仮定する。このとき、$(\tau_1, \ldots, \tau_g) \in \mathcal{H}^{\oplus g}$ と $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、

$$\prod_{p=1}^{g} (e\tau_p + f)^{-\mathrm{wt}_p[v]} Z_\ell \left(v : \frac{a\tau_1 + b}{e\tau_1 + f}, \ldots, \frac{a\tau_g + b}{e\tau_g + f} \right) = \sum_{h=1}^{r} S(\sigma)_{\ell h} Z_h \left(o(v) : \tau_1, \ldots, \tau_g \right)$$

が成り立つ。ここで、$S(\sigma)_{ij}$ は以前に述べた *Zhu* 理論で出てくる行列である。

注意　各共形元 e^j に対しては、正規条件を仮定していないので、[8] で扱っている Zhu 理論の直和型ではない。

3　ジョルダン代数

変数領域である可換代数をさらに拡張する。$(V_2, \times_1)$ は代数となっているが、一般には結合法則も可換性も満たしているわけではない。$(V_2, \times_1)$ の部分代数 $\mathcal{G}$ が Griess 部分代数であるとは、$u, v \in \mathcal{G}$ に対して $u_2 v = 0$ となるものを言う。このとき、$\mathcal{G}$ は可換代数となる。一般的に、$u, v \in V_2$ なら、$u_1 v \in V_1$ となるので、$V_1 = 0$ の場合には、V_2 自体が Griess 代数となる。有名な例は、ムーンシャイン VOA $V^\natural$ である。

ウエイト 1 の元 $u \in V_1$ があれば、$L(-1)u \in V_2$ であり、$e^{2\pi i o(L(-1)u)z}$ を付け加えると、ヤコビ形式として扱うことが出来ることを注意しておく。ここでは、それを考えず、Griess 部分代数だけを考えることにする。

$(V_2, \times_1)$ のグライス部分代数 $\mathcal{G}$ で、すべての元が直交冪等元達の線形和となっているようなものや、またはそれを完備化したものが全体となるものを考える。例えば、B_g 型のジョルダン代数、即ち、g 次対称複素行列全体の空間 $\mathrm{Sym}_g(\mathbb{C})$ はこの条件を満たしている。ここでの積は $A \times B = AB + BA$ である。頂点作用素代数の立場から言うと、$(V_2, \times_1)$ の部分代数 $\mathcal{G}$ および線形写像 $\mu : \mathrm{Sym}_g(\mathbb{C}) \to \mathcal{G}$ があって、μ が左のジョルダン代数と右の $(\mathcal{G}, \times_1)$ との間の代数同型を与えていることである。しかも、単位行列 I_g の像は $\mu(I_g) = \omega$ となることも仮定する。($I_g A + A I_g = 2A$ なので、$v \in V_2$ に対する $\omega_1 v = 2v$ に対応)。

この設定で、$A = (\tau_{ij}) \in \mathcal{H}_g$ に対して、多変数トレイス関数

$$Z_\ell\,(v : A) := \mathrm{Tr}_{W^\ell} o(v) e^{o\left(2\pi i\left(\mu(A) - \frac{\mathrm{tr}(A)c}{24g}\mathbf{1}\right)\right)}, \tag{3.1}$$

を定義する。ここで、$\mathcal{H}_g = \{A + Bi \mid A, B \in \mathrm{Sym}_g(\mathbb{R}), B$ は正定値 $\}$ はジーゲル上半空間である。$\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の $\mathcal{H}_g$ への作用は、$\sigma(Z) = (aZ + bI_g)(eZ + fI_g)^{-1}$ である。この設定でのモジュラー不変性を紹介しておこう。元を直交冪等元の線形和に表示した場合の直交冪等元は、もともとの $\mu(Z)$ に依存するので、$v \in V$ を Z に依存した直交共形元による多重ウエイトの斉次元に分解するのは非常に複雑である。それゆえ、簡単な場合のみを述べる。

Theorem 2 $Z_j\,(\mathbf{1} : A)$ はすべて $\mathcal{H}_g$ 上で解析関数に絶対収束すると仮定する。このとき、

$$Z_j\left(\mathbf{1} : (aA + bI_g)(eA + fI_g)^{-1}\right) = \sum_{h=1}^{r} S(\sigma)_{jh} Z_h\,(\mathbf{1} : A)\,,$$

となる。ここでも、$S(\sigma)_{jh}$ は *Zhu* 理論で与えられた行列である。 ∎

定理でも述べているが、多変数を考えているにも関わらず、モジュラー変換式の係数は一変数での係数と全く同じであることを強調しておく。

タイプ B_g のジョルダン代数を含む VOA の例は多い。例えば、g 次元ベクトル空間から構成される中心電荷 g のフリーボゾン型と呼ばれる VOA $M^g(1)$ は、次の節で示すように、B_g 型のジョルダン代数を含んでいる。また、有名なムーンシャイン頂点作用素 $V^\natural$ は B_{24} 型のジョルダン代数を含んでいる中心電荷 24 の正規 VOA である。Ashihara-Miyamoto[1] では、任意の $c \in \mathbb{C}$ と $g \in \mathbb{N}$ に対して、中心電荷 c で、$(V_2, \times_1)$ 自身が B_g 型のジョルダン代数となるものを構成している。

4　ジーゲルテーター級数とモジュラー変換

上の定理の応用として、ジーゲルテータ級数のシンプレクティック群による変換公式を格子 VOA の立場から見ていこう。その為に、格子 VOA について説明する。

4.1　格子 VOA の構造

以下、L をランク g の正定値偶格子とする。g-次元内積空間 $\mathbb{C}L := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ からフリーボゾン型 VOA $M^g(1)$ を以下のように構成する。まず、$\mathbb{C}L$ の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を利用して、アフィンリー代数

$$\widehat{\mathbb{C}L} := \left(\oplus_{j=1}^{g} \oplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} a_j(n) \right) \oplus \mathbb{C}$$

を作る。ここで、$\{a_j \mid j = 1, \ldots, g\}$ は $\mathbb{C}L$ の正規直交基底であり、リー積は $[a_j(n), a_k(m)] = \delta_{n+m,0} n \langle a_j, a_k \rangle$ で定義されている。$\widehat{\mathbb{C}L}$ は基底の取り方に依存しない。部分代数 $\widehat{\mathbb{C}L}_{\geq 0} := \left(\oplus_{j=1}^{g} \oplus_{n \geq 0} \mathbb{C} a_j(n) \right) \oplus \mathbb{C}$ を取り、各 $\alpha \in \mathbb{C}L$ に対して、一次元 $\widehat{\mathbb{C}L}_{\geq 0}$-加群 $\mathbb{C}e^\alpha$ を

$$n > 0 \text{ に対して } a(n)e^\alpha = 0, \qquad a(0)e^\alpha = \langle a, \alpha \rangle e^\alpha \tag{4.1}$$

で定義し、その誘導加群

$$M^g(1) \otimes e^\alpha := U(\widehat{\mathbb{C}L}) \otimes_{U(\widehat{\mathbb{C}L}_{\geq 0})} \mathbb{C}e^\alpha,$$

を考える。ここで、$U(R)$ は R の普遍包絡環を表す。これらの誘導加群のうち、$M^g(1) \otimes e^0$ は中心電荷 g の VOA 構造を持つことがわかる。簡単の為に、以下 $M^g(1) \otimes e^0$ を $M^g(1)$ と表記する。頂点作用素の例としては

$$Y(a(-1) \otimes e^0, z) = \textstyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} (a(n) \otimes 1) z^{-n-1},$$
$$Y(a(-1)b(-1) \otimes e^0, z) = \sum_{m \in Z, n \in \mathbb{N}} a(-1-n)b(m+n) \otimes 1 + b(-1+m-n)a(n) \otimes 1) z^{-m-1}.$$

等がある。$\mathbf{1} := 1 \otimes e^0$ が真空であり、$\omega := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{g} a_i(-1)a_i(-1) \otimes e^0$ がヴィラソロ元である。これらを $M^g(1) \otimes e^\alpha$ に作用させることで、$M^g(1) \otimes e^\alpha$ は $M^g(1)$-加群となる。

$\alpha \in L$ に関する誘導加群を集めた

$$V_L = \bigoplus_{\alpha \in L} M^g(1) \otimes e^{\alpha}$$

は中心電荷 g の VOA の構造を持つ。これが格子 VOA である。

V_L は中心電荷 g の正規 VOA であり、既約加群を $W^1, \ldots, W^k$ と並べる。各既約加群 W^j は、$\langle \beta_j, L\rangle \subseteq \mathbb{Z}$ となる $\beta_j \in \mathbb{Q}L$ を使って、$W^j = V_{L+\beta_j} = \oplus_{\alpha \in L} M^g(1) \otimes e^{\alpha+\beta_j}$ と表される [3]。各 W^j に対して、

$$Z_j(v,z) = \mathrm{Tr}_{W^j} o(v) e^{2\pi i \tau (L(0) - \frac{g}{24})}$$

と置く。すると、Zhu の理論により、$S = (s_{ij}) \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ があって、

$$(\frac{1}{\tau})^{\mathrm{wt}[v]} Z_j(v, -1/\tau) = \sum_{h=1}^{k} s_{jh} Z_h(v,\tau) \tag{4.2}$$

となる。$M^g(1)$ の指標は $(1/\eta(\tau))^g$ なので、$V_{L+\beta_j}$ の指標は $\theta_{L+\beta_j}(\tau)/\eta(\tau)^g$ である。ここで、$\theta_{L+\beta_j}(\tau)$ は格子（または剰余類） $L + \beta_j$ に関するテーター級数である。

次に、$(M^g(1))_2$ の中に B_g 型のジョルダン代数が含まれていることを紹介する。$\mathbb{R}L$ の直交基底 $\{a_i \mid i = 1, \ldots, g\}$ を使って、$\omega^{ij} = \frac{1}{2} a_i(-1) a_j(-1) \otimes e^0 \in (M^g(1))_2$ と置くと、$\mu(E_{ij} + E_{ji}) = \omega^{ij} + \omega^{ji}$ で定義される

$$\mu : \mathrm{Sym}_g(\mathbb{C}) \to (M^g(1))_2$$

は（中への）代数同型である。ここで、E_{ij} は (i,j) 成分が 1 で他は 0 である基本行列を表す。しかも、$\{\omega^{jj} \mid j = 1, \ldots, g\}$ は互いに直交した中心電荷 1 の共形元であり、 $\omega = \sum_{i=1}^{g} \omega^{ii}$ となっている。

4.2 ジーゲルテーター級数

上の構成から、$A = (\tau_{ij}) \in \mathcal{H}_g$ と V_L-加群 W^j に対して、その指標

$$Z_j(\mathbf{1} : A) = \mathrm{Tr}_{W^j} e^{o\left(2\pi i\left(\mu(A) - \frac{\mathrm{tr}(A)}{24}\right)\right)}$$

を考える。ここで、$\mu(A) = \sum_{i=1}^{g} \sum_{j=1}^{g} \tau_{ij} \omega^{ij} \in (M^g(1) \otimes e^0)_2$ である。V_L は正規なので、定理の結果が成り立つ。次にジーゲルテータ級数部分を取り出す為に、$A \in \mathcal{H}_g$ に対して、A の固有値 $\{\mu_1, \ldots, \mu_g\}$ (重複を許す）を使って

$$\gamma_j(A) = Z_j(\mathbf{1} : A) \prod_{i=1}^{g} \eta(\mu_i)$$

を定義する。$A \in \mathcal{H}_g$ なので、$\mu_i \in \mathcal{H}$ である．すると、次が成り立つ。

Proposition 3 $Z_j(\mathbf{1}:A)$ は $\mathcal{H}_g$ 上の解析関数に絶対収束し、$\gamma_j(\mathbf{1}:A)$ は 剰余類 $L+\beta_j$ と直交基底 $\{a^j : j=1,\ldots,g\}$ で定義されるジーゲルテータ級数であり、

$$\left(-i\frac{1}{\det(A)}\right)^{g/2}\gamma_j(-A^{-1})=\sum_{h=1}^{r}s_{jh}\gamma_h(A)$$

となる。 ここの (s_{jh}) は *Zhu* 理論 *(4.2)* で出てきたものである。

シンプレクティック群 $Sp(g)$ は、

$$S : A \to -A^{-1}, \quad T_i : A \to A+E_{ii}, \quad T_{ij} : A \to A+E_{ij}+E_{ji} \quad (1 \le i < j \le g)$$

で生成されているが、変換 T_i と T_{ij} による変換はスカラー倍となっており、簡単に分かる。それゆえ一番難しい部分は、$S : A \to -A^{-1}$ である。上の定理は、この部分が Zhu 理論の $S=(s_{ij})$ とエータ級数の変換公式で与えられることを示している。

References

[1] T. Ashihara, M. Miyamoto, Deformation of central charges, vertex operator algebras whose Griess algebras are Jordan algebras. J. Algebra **321** (2009), no.6, 1593-1599.

[2] R. E. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **83**, (1986), 3068-3071.

[3] C. Dong, *Vertex algebras associated with even lattices*, J. Algebra 161 (1993), no. 1, 245-265.

[4] C. Dong, H. Li, G. Mason, *Modular-invariance of trace functions in orbifold theory and generalized Moonshine*, Comm. Math. Phys. 214 (2000), no. 1, 1-56.

[5] I. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, "Vertex Operator Algebras and the Monster", Pure and Applied Math., Vol. 134, Academic Press, 1988.

[6] M. Krauel and M. Miyamoto, *A modular invariance property of multivariable trace functions for regular vertex operator algebras*, preprint.

[7] M. Miyamoto, Modular invariance of vertex operator algebras satisfying C_2-cofiniteness, Duke Math. J. **122** (2004) no.1, 51-91.

[8] M. Miyamoto, *Modular invariance of trace functions on VOAs in many variables*, Proceedings on Moonshine and related topics (Montreal, QC, 1999), 131-137, CRM Proc. Lecture Notes, 30, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[9] Y. Zhu, *Modular invariance of characters of vertex operator algebras*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 237-302.

Deformation quantization and localization of noncommutative algebras and vertex algebras

TOSHIRO KUWABARA[1]

The present paper is a report for the proceeings of 59th Algebra Symposium held at the University of Tokyo on 8–11th September 2014.

0. Introduction

We discuss certain infinite-dimensional noncommutative associative algebras. One well-known class of infinite-dimensional associative algebras is universal enveloping algebras of Lie algebras. For a semi-simple Lie algebra $\mathfrak{g}$, the central quotient of its universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})/Z(\mathfrak{g})$ is naturally isomorphic to the algebra of differential operators $\mathcal{D}(G/B)$ on the corresponding flag manifold G/B. Such an isomorphism connects the representation theory of the Lie algebra $\mathfrak{g}$ and geometrical properties of the flag manifold G/B and/or its cotangent bundle $T^*(G/B)$. Namely, the isomorphism leads an equivalence of categories between the category of $(U(\mathfrak{g})/Z(\mathfrak{g}))$-modules and the category of $\mathcal{D}_{G/B}$-modules where $\mathcal{D}_{G/B}$ is the sheaf of differential operators. The equivalence is known as the Beilinson-Bernstein correspondence and it is one of the most fundamental facts of the representation theory of semi-simple Lie algebras.

The above situation can be generalized, and it achieve the notion of quantizations. Note that, in the above, the universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ is equipped with a natural filtration, and the associated graded algebra $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})/Z(\mathfrak{g})$ with respect to the filtration is naturally isomorphic to the coordinate ring $\mathbb{C}[T^*(G/B)]$. The commutator $[a, b] = ab - ba$ on $U(\mathfrak{g})$ induces a Poisson bracket on $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})/Z(\mathfrak{g})$, while $\mathbb{C}[T^*(G/B)]$ is also equipped with a Poisson bracket induced from the symplectic structure of the cotangent bundle $T^*(G/B)$. The isomorphism between $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})/Z(\mathfrak{g})$ and $\mathbb{C}[T^*(G/B)]$ is not just an isomorphism of commutative algebras, but it is an isomorphism of Poisson algebras. We say that $U(\mathfrak{g})/Z(\mathfrak{g})$ is a quantization of $\mathbb{C}[T^*(G/B)]$ (or $T^*(G/B)$). Namely, in general cases, for a symplectic manifold X, a filtered associative algebra is called a quantization of $\mathbb{C}[X]$ (or of X), if the associated graded algebra is isomorphic to $\mathbb{C}[X]$ as a Poisson algebra.

In the past decades, several noncommutative algebras which give quantizations of certain symplectic manifolds were introduced. These algebras are constructed by using so called the quantum Hamiltonian reduction, which is noncommutative analogue of Hamiltonian reduction in symplectic geometry. These algebras, constructed by the quantum Hamiltonian reduction, include finite $\mathcal{W}$-algebras and rational Cherednik algebras, which play important and fundamental roles in the representation theory of semi-simple and/or affine Lie algebras and Ariki-Koike algebras.

When an associative algebra A is a quantization of a certain symplectic manifold X, a natural question is if we can localize A as a sheaf of noncommutative algebras on X: Namely, does there exist a sheaf of noncommutative algebras on X whose algebra of global sections is isomorphic to A? And if one exists, is there an equivalence of categories between their module categories like the Beilinson-Bernstein correspondence? If the algebra A is constructed by the quantum Hamiltonian reduction, such problems were well studied and now we know when such a method of localization works well.

[1]National Research University Higher School of Economics, Department of Mathematics and International Laboratory of Representation Theory and Mathematical Physics, 20 Myasnitskaya Ulitsa, Moscow 101000, RUSSIA. email: toshiro.kuwa@gmail.com

The present paper is a brief and introductory survey which is intended to show an outline of the constructions of quantizations and their localization, and also known results and applications. We also discuss quantizations of certain infinite-dimensional manifolds, called arc spaces, and their localization. Such a quantization is equipped with a certain infinite-dimensional algebraic structure, called a vertex algebra. On the other hand, while we will discuss the construction by quantum Hamiltonian reduction in a general setting, the detail of constructions of certain concrete algebras, e.g. the rational Cherednik algebras, will not be included in the present survey. In [K3], we have a catalog of several algebras obtained by quantum Hamiltonian reduction such as the rational Cherednik algebras and quantized toric algebras. Also, for the finite $\mathcal{W}$-algebras, we have a nice survey [Lo1]. Refer them for these examples.

1. Quantization of Poisson structure

Consider a complex symplectic manifold X and let $\mathcal{O}_X$ be its structure sheaf. Its symplectic form makes $\mathcal{O}_X$ a sheaf of Poisson algebras on X. Namely, $\mathcal{O}_X$ is equipped with a $\mathbb{C}$-bilinear form $\{-,-\}$, called a Poisson bracket, such that $\{-,-\}$ is a Lie bracket on $\mathcal{O}_X$ and $\{f,-\}$ is a derivation on $\mathcal{O}_X$ for any $f \in \mathcal{O}_X$. In particular, the coordinate ring $\mathbb{C}[X] = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ is a Poisson algebra. In this survey, we consider noncommutative algebras connected with such a Poisson algebra structure.

Let A be a noncommutative associative algebra over $\mathbb{C}$, and we assume that there exists a filtration $\{F_i A\}_{i \geq 0}$ of algebras, satisfying the condition:

$$[a,b] \underset{\text{def}}{=} ab - ba \in F_{i+j-1}A, \qquad \text{for any } a \in F_i A,\ b \in F_j A. \tag{1}$$

In this situation, the associated graded algebra $\operatorname{gr}_F A$ turns out to be a Poisson algebra whose the Poisson bracket is given by

$$\{\bar{a}, \bar{b}\} \underset{\text{def}}{=} [a,b] \mod F_{i+j-2}A, \quad \text{for } a \in F_i A,\ b \in F_j A$$

where $\bar{a}$ (resp. $\bar{b}$) is a class in $\operatorname{gr}_F A$ in which $a \in A$ (resp. b) belongs. Then, we say that the noncommutative algebra A is a quantization, i.e. noncommutative analogue, of the Poisson algebra $\mathbb{C}[X]$ if there exists an isomorphism $\operatorname{gr}_F A$ and $\mathbb{C}[X]$ as Poisson algebras with the above Poisson bracket.

1.1. **Examples.** Since Lie algebras are an algebraic structure which appears as an algebra consisting of vector fields on a certain manifold, such a situation appears frequently in Lie algebra theory. For example, here we see two classical and typical examples of quantization:

1. The algebra of differential operators with polynomial coefficient (the Weyl algebra) $\mathcal{D}(\mathbb{C}^d)$ on $\mathbb{C}^d$. The algebra $\mathcal{D}(\mathbb{C}^d)$ is equipped with a filtration given by order of differential operators. Namely, the filtration given by $\deg x_i = 0$ and $\deg \partial/\partial x_i = 1$ where $x_1, \ldots, x_d$ is the standard coordinates of $\mathbb{C}^d$. The associated graded algebra is naturally isomorphic to the coordinate ring $\mathbb{C}[T^*\mathbb{C}^d]$ of the cotangent bundle $T^*\mathbb{C}^d$, and moreover the isomorphism is an isomorphism of Poisson algebras. Thus we regard the noncommutative algebra $\mathcal{D}(\mathbb{C}^d)$ as a quantization of the Poisson algebra $\mathbb{C}[T^*\mathbb{C}^d]$. Note that we can choose a different filtration given by $\deg x_i = 1/2$ and $\deg \partial/\partial x_i = 1/2$, and this filtration also induces the same associated graded Poisson algebra $\mathbb{C}[T^*\mathbb{C}^d]$.

2. The universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ of a finite-dimensional simple algebra $\mathfrak{g}$. Let $\underline{X} = G/B$ be the flag manifold associated with a Lie group G with the Lie algebra $\mathfrak{g}$ (where B is its Borel subgroup). We have an action of G on $\underline{X} = G/B$ by left-multiplication. This action induces a homomorphism of Lie algebras $\mu_D : \mathfrak{g} \longrightarrow \operatorname{Vect}(\underline{X})$ where $\operatorname{Vect}(\underline{X})$ is a Lie algebra consisting

of vector fields on $\underline{X}$. This homomorphism induces an isomorphism of algebras $\mu_D : U(\mathfrak{g})/Z(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(\underline{X})$, where $Z(\mathfrak{g})$ is the center of $U(\mathfrak{g})$. That is, the quotient algebra $U(\mathfrak{g})/Z(\mathfrak{g})$ is a quantization of the coordinate ring $\mathbb{C}[T^*\underline{X}] \simeq \mathbb{C}[\mathcal{N}]$ where $\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}$ is the nilpotent cone of the Lie algebra $\mathfrak{g}$. Note that there exists a resolution of singularities $T^*\underline{X} \longrightarrow \mathcal{N}$ called the Springer resolution, and this resolution induces the isomorphism between the coordinate rings $\mathbb{C}[T^*\underline{X}]$ and $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$ as Poisson algebras. Namely, $U(\mathfrak{g})/Z(\mathfrak{g})$ is a quantization of $\mathbb{C}[T^*\underline{X}]$.

2. Localization of quantized algebras

Let X be a symplectic manifold with structure sheaf $\mathcal{O}_X$. Assume that we have a noncommutative algebra A which gives a quantization of the coordinate ring $\mathbb{C}[X] = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Theory of algebraic geometry allows us to consider localization of the commutative algebra $\mathbb{C}[X]$, that is the structure sheaf $\mathcal{O}_X$. Namely, localization of $\mathbb{C}[X]$ is a sheaf of commutative algebras whose algebra of global sections turns out to be $\mathbb{C}[X]$. Since our quantization A is a natural noncommutative analogue of the coordinate ring $\mathbb{C}[X]$, it is a natural question if there exists a sheaf of noncommutative algebras on X whose algebra of global sections turns out to be our algebra A. We call it localization of the noncommutative algebra A. We will require that localization $\mathcal{A}$ of A is a sheaf of noncommutative algebra on X, equipped with a filtration satisfying the condition (1), and the associated graded algebra is isomorphic to the structure sheaf $\mathcal{O}_X$ as a sheaf of Poisson algebras. We also require that the following diagram commutes:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{gr}"] & \mathbb{C}[X] \\ \mathcal{A} \arrow[u, "\Gamma(X,—)"] \arrow[r, "\mathrm{gr}"] & \mathcal{O}_X \arrow[u, "\Gamma(X,—)"'] \end{tikzcd}$$

In such a situation, we also call $\mathcal{A}$ a quantization of the structure sheaf $\mathcal{O}_X$.

To be precise, we need to consider a sheaf of $\mathbb{C}[[\hbar]]$-algebras on X equipped with a certain $\mathbb{C}^*$-action, and consider the $\mathbb{C}^*$-finite part of the algebra of its global sections to extract a $\mathbb{C}$-algebra from it. In the following example, we see why we need to consider a sheaf of $\mathbb{C}[[\hbar]]$-algebras, not a sheaf of $\mathbb{C}$-algebras.

2.1. **Microlocalization of sheaves of differential operators.** Consider the second example of the quantizations. If we consider the flag manifold $\underline{X} = G/B$ associated with the simple Lie algebra $\mathfrak{g} = Lie(G)$, the algebra of differential operators $\mathcal{D}(\underline{X})$ on $\underline{X}$ is isomorphic to the quotient algebra of the universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})/Z(\mathfrak{g})$. Thus, if we consider the sheaf of differential operators $\mathcal{D}_{\underline{X}}$ on $\underline{X}$, we have a natural isomorphism $\Gamma(\underline{X}, \mathcal{D}_{\underline{X}}) \simeq U(\mathfrak{g})/Z(\mathfrak{g})$. Nevertheless, the sheaf $\mathcal{D}_{\underline{X}}$ is not localization of $U(\mathfrak{g})/Z(\mathfrak{g})$ in the above sense, because the sheaf $\mathcal{D}_{\underline{X}}$ is a sheaf on $\underline{X}$, not on its cotangent bundle $X \underset{\mathrm{def}}{=} T^*\underline{X}$. Thus, to construct localization of $U(\mathfrak{g})/Z(\mathfrak{g})$ in the above sense, we need to construct a sheaf on X, i.e. we need to localize $\mathcal{D}_{\underline{X}}$ in the cotangent direction. Now we consider how such a localization $\mathcal{A}$ of $\mathcal{D}(\underline{X})$ on the cotangent bundle $X = T^*\underline{X}$ looks like.

Assume that we have local coordinates $(x_1, \ldots, x_d)$ of $\underline{X}$. Let $\partial_1, \ldots, \partial_d \in \mathcal{D}_{\underline{X}}$ be the partial differential operators $\partial_i = \partial/\partial x_i$ associated with this coordinates. We denote the equivalent class of ∂_i in $\operatorname{gr}\mathcal{D}_{\underline{X}} \simeq \mathcal{O}_{T^*\underline{X}}$ by y_i and the equivalent class of x_i by the same symbol x_i. Then $(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_d)$ gives local symplectic coordinates of $X = T^*\underline{X}$. On the open subset $\{y_i \neq 0\} \subset X$, the localization sheaf $\mathcal{A}$ has a local section ∂_i^{-1}, which is the inverse of ∂_i. Since $\mathcal{A}$ is localization of $\mathcal{D}(\underline{X})$, it is natural that the multiplication $\cdot$ in $\mathcal{A}$ satisfies the Leibniz rule. Then, by the Leibniz rule, we have

$$\partial_i^{-1} \cdot x_i^{-1} = x_i^{-1}\partial_i^{-1} + x_i^{-2}\partial_i^{-2} + 2x_i^{-3}\partial_i^{-3} + \dots,$$

and RHS turns an infinite sum. Here each term of RHS means symbols of differential operators. Thus, to construct localization of $\mathcal{D}(\underline{X})$ on $X = T^*\underline{X}$, we need to allow such infinite sums. Algebraically, it can be obtained by introducing a Rees algebra with respect to the filtration of $\mathcal{D}_{\underline{X}}$ and taking completion of it.

Now we introduce the precise definition of deformation-quantization of the structure sheaf $\mathcal{O}_X$. Let $\hbar$ be an indeterminate and let A be an associative $\mathbb{C}[[\hbar]]$-algebra such that the quotient algebra $A/\hbar A$ is a commutative $\mathbb{C}$-algebra. Then, for any a, $b \in A$, $[a, b] = ab - ba$ lies in $\hbar A$, and hence $\{\bar{a}, \bar{b}\} = \frac{1}{\hbar}[a, b]$ is well-defined on $A/\hbar A$, where $\bar{a}$ (resp. $\bar{b}$) be the class to which a (resp. b) belongs. It is easy to see that $\{-, -\}$ is a Poisson bracket on the quotient algebra $A/\hbar A$.

Definition 2.1. *For a symplectic manifold X, a deformation-quantization of $\mathcal{O}_X$ (or of X) is a sheaf $\mathcal{A}$ of associative $\mathbb{C}[[\hbar]]$-algebras, which is flat over $\mathbb{C}[[\hbar]]$ and complete in $\hbar$-adic topology, such that*

$$(\mathcal{A}/\hbar\mathcal{A}, h^{-1}[-, -]) \simeq (\mathcal{O}_X, \{-, -\})$$

as a sheaf of Poisson algebras.

A basic example of deformation-quantization is the following $\hbar$-deformed Weyl algebra $A_{T^*\mathbb{C}^d}$. As a vector space, we define

$$A_{T^*\mathbb{C}^d} = \mathbb{C}[[\hbar]][x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d],$$

and its defining relations are given by $[y_i, x_j] = y_i x_j - x_j y_i = \hbar\delta_{ij}$, $[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 0$ where δ_{ij} is Kronecker's delta. With localizing it in a straight-forward way, we have a sheaf $\mathcal{A}_{T^*\mathbb{C}^d} \simeq_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{T^*\mathbb{C}^d} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[\hbar]]$, and this sheaf gives a deformation-quantization of the structure sheaf $\mathcal{O}_{T^*\mathbb{C}^d}$. Note that in $\mathcal{A}_{T^*\mathbb{C}^d}$, we have a local section x_i^{-1} and y_i^{-1}, and their product is given by the infinite sum

$$y_i^{-1} \cdot x_i^{-1} = x_i^{-1}y_i^{-1} + \hbar x_i^{-2}y_i^{-2} + 2\hbar^2 x_i^{-3}y_i^{-3} + \dots,$$

which is well-defined in $\mathcal{A}_{T^*\mathbb{C}^d}$.

To construct the localization of $\mathcal{D}(\underline{X})$ for the manifold $\underline{X}$ on its cotangent bundle $X = T^*\underline{X}$, we patch up $\mathcal{A}_{T^*\mathbb{C}^d}$ with local symplectic coordinates by gluing. Let $\{U_\alpha\}_\alpha$ be an affine open covering of $\underline{X}$. Then we have the open covering $\{T^*U_\alpha\}_\alpha$ of $X = T^*\underline{X}$, and on each T^*U_α, we have local symplectic coordinates $(x_1^\alpha, \dots, x_d^\alpha, y_1^\alpha, \dots, y_d^\alpha)$. Now we can introduce a sheaf $\mathcal{A}_{T^*U_\alpha}$ on T^*U_α, which is a restriction of $\mathcal{A}_{T^*\mathbb{C}^d}$ with respect to the symplectic coordinates. These sheaves can be glued together into a sheaf of $\mathbb{C}[[\hbar]]$-algebras $\mathcal{A}_{T^*\underline{X}} \simeq_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{T^*\underline{X}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[\hbar]]$. This sheaf $\mathcal{A}_{T^*\underline{X}}$ gives a deformation-quantization of $\mathcal{O}_{T^*\underline{X}}$.

One natural and fundamental problem of deformation-quantizations is if there exists a deformation-quantization of $\mathcal{O}_X$ and how many deformation-quantizations exist for given complex symplectic manifold X. In this survey, we do not care this problem and consider deformation-quantizations which can be constructed explicitly. For the existence and classification problem of deformation-quantization, refer [BeKa], [Lo2] and references therein.

2.2. **Quantum Hamiltonian reduction.** As the above example, for a symplectic manifold X which is the cotangent bundle $X = T^*\underline{X}$ of a complex manifold $\underline{X}$, we have a deformation-quantization of $\mathcal{O}_X$. But an important point of deformation-quantization is that we can also construct a deformation-quantization on a symplectic manifold which is not a cotangent bundle of a certain manifold. Quantum Hamiltonian reduction is a method to construct a noncommutative algebra which is a quantization of a certain Poisson algebra.

First we review the notion of Hamiltonian reduction. It is a method to construct a symplectic variety. The quantum Hamiltonian reduction is noncommutative analogue of the Hamiltonian reduction.

Let $\underline{X}$ be a complex manifold. We assume that an algebraic/Lie group M acts on $\underline{X}$. Then this action naturally induces an action of M on $T^*\underline{X}$ and on its structure sheaf $\mathcal{O}_{T^*\underline{X}}$, and the action preserves the Poisson bracket on $\mathcal{O}_{T^*\underline{X}}$. Moreover, by differentiating the induced action of M on the structure sheaf $\mathcal{O}_{\underline{X}}$ of $\underline{X}$ (not $T^*\underline{X}$), we have a homomorphism of Lie algebras

$$\mu_D : \mathfrak{m} = LieM \longrightarrow \mathrm{Vect}(\underline{X}) \subset \mathcal{D}(\underline{X}),$$

and a homomorphism of $\mathbb{C}$-algebras,

$$\mu_D : U(\mathfrak{m}) \longrightarrow \mathcal{D}(\underline{X}).$$

The homomorphism μ_D induces a homomorphism of commutative algebras between their associated graded algebras

$$\mu^* : S(\mathfrak{m}) = \mathbb{C}[\mathfrak{m}^*] \longrightarrow \mathbb{C}[T^*\underline{X}]$$

where $S(\mathfrak{m})$ is the symmetric algebra over the vector space $\mathfrak{m}$, and $\mathfrak{m}^*$ is the dual vector space of $\mathfrak{m}$. By considering associated morphism with μ^* between algebraic varieties, we have a morphism $\mu : T^*\underline{X} \longrightarrow \mathfrak{m}^*$, called a moment map associated with the M-action on $T^*\underline{X}$. By the construction, this morphism μ is compatible with the M-action on $T^*\underline{X}$. Namely, the subset $\mu^{-1}(\chi) \subset T^*\underline{X}$ is closed under the action of M for $\chi \in \mathfrak{m}^*$. Then, we set

$$X^0_\chi = \mu^{-1}(\chi)/\!/M \underset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\mu^{-1}(\chi)]^M.$$

The affine scheme X^0_χ may have singularities, but it is a Poisson variety, whose Poisson bracket is naturally induced from the Poisson bracket on $\mathbb{C}[T^*\underline{X}]$. We may also construct nonsingular symmetric manifold associated with the M-action by using geometric invariant theory. Here we do not care details of geometric invariant theory, and we assume that we can take a Zariski open subset of $\mu^{-1}(\chi)$ denoted by $\mu^{-1}(\chi)^{ss}$ such that the group M acts free on $\mu^{-1}(\chi)^{ss}$. The subset $\mu^{-1}(\chi)^{ss}$ is called semistable locus with respect to the action of M. Since the M-action on $\mu^{-1}(\chi)^{ss}$ is free, the quotient with respect to the M-action

$$X_\chi = \mu^{-1}(\chi)^{ss}/M$$

turns out to be a nonsingular scheme. Moreover, the symplectic form on $T^*\underline{X}$ induces a symplectic form on X_χ and thus X_χ is a symplectic manifold. The symplectic manifold X_χ is called Hamiltonian reduction of $T^*\underline{X}$ with respect to the M-action. Note that X_χ is a quotient of subset of the original symplectic manifold $T^*\underline{X}$ with respect to the M-action.

Important known algebras are obtained by quantum Hamiltonian reduction for the case where $\underline{X}$ is a linear representation of the group M (thus is a $\mathbb{C}$-vector space), and $\chi = 0$. For known examples of such algebras, refer [K3, Section 5]. Below we consider such a case and denote $X = X_0$ simply.

The structure sheaf of the new symplectic manifold X can be constructed explicitly from the structure sheaf of $T^*\underline{X}$. While X is a quotient of subset of $T^*\underline{X}$, its structure sheaf $\mathcal{O}_X$ can be written in the form of the M-invariant subalgebra of the quotient of $\mathcal{O}_{T^*\underline{X}}$ as follows:

$$\mathcal{O}_X \simeq \big(p_*\big(\mathcal{O}_{(T^*\underline{X})^{ss}} \;/\; \mathcal{O}_{(T^*\underline{X})^{ss}}\mu^*(\mathfrak{m})\big)\big)^M$$

where $p : \mu^{-1}(0)^{ss} \longrightarrow X$ is the projection. Namely, the structure sheaf $\mathcal{O}_X$ is the algebra of M-invariants of M-coinvariants of the structure sheaf $\mathcal{O}_{T^*\underline{X}}$.

The quantum Hamiltonian reduction is quantization of the Hamiltonian reduction. Namely, we consider noncommutative analogue of the above construction by replacing the structure sheaf $\mathcal{O}_{T^*\underline{X}}$ by its deformation-quantization $\mathcal{A}_{T^*\underline{X}}$. Let $c : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathbb{C}$ be a linear function on $\mathfrak{m}$ which is invariant under the adjoint action of $\mathfrak{m}$. This function c is a parameter of the quantization. Consider the following sheaf of $\mathbb{C}[[\hbar]]$-algebras on the symplectic manifold X, which is a subquotient of the deformation-quantization $\mathcal{A}_{(T^*\underline{X})^{ss}}$:

$$\mathcal{A}_{X,c} = \left(p_*\left(\mathcal{A}_{(T^*\underline{X})^{ss}} \,/\, \mathcal{A}_{(T^*\underline{X})^{ss}}(\mu_D - \hbar c)(\mathfrak{m})\right)\right)^M .$$

The construction naturally implies that the sheaf of $\mathbb{C}[[\hbar]]$-algebras $\mathcal{A}_{X,c}$ is a deformation-quantization of $\mathcal{O}_X$. Indeed, under the following geometric conditions, we can show that $\mathcal{A}_{X,c}$ is a deformation-quantization of $\mathcal{O}_X$:

(1) $\mu^{-1}(0)^{ss} \neq \emptyset$,
(2) the moment map μ is a flat morphism,
(3) the action of M on $\mu^{-1}(0)^{ss}$ is free,
(4) the morphism $X \longrightarrow X_0$ is birational and X_0 has only normal singularities.

2.3. **Algebra of global sections.** Now we make precise the connection between the quantization of the coordinate ring $\mathbb{C}[X]$ and the deformation-quantization of the structure sheaf $\mathcal{O}_X$.

Let X be a symplectic manifold obtained by Hamiltonian reduction, and let $\mathcal{A}_{X,c}$ be a deformation-quantization of $\mathcal{O}_X$ as in Section 2.2. Note that $\mathcal{A}_{X,c}$ is a sheaf of $\mathbb{C}[[\hbar]]$-algebras and thus its algebra of global sections $\Gamma(X, \mathcal{A}_{X,c})$ is also a $\mathbb{C}[[\hbar]]$-algebra. By construction, we have $\Gamma(X, \mathcal{A}_{X,c})/\hbar\Gamma(X, \mathcal{A}_{X,c}) \simeq \mathbb{C}[X]$. In Section 1, we defined a quantization of the Poisson algebra $\mathbb{C}[X]$ as a filtered $\mathbb{C}$-algebra. Thus the algebra of global sections $\Gamma(X, \mathcal{A}_{X,c})$ is not a quantization in that sense. But we can obtain a quantization of $\mathbb{C}[X]$ by modifying the notion of "the algebra of global sections" a little.

Recall that we assumed that $\underline{X}$ is a linear representation of M and thus $\underline{X}$ is a $\mathbb{C}$-vector space. Consider a $\mathbb{C}^*$-action on $T^*\underline{X}$ such that the induced equivariant $\mathbb{C}^*$-action on $\mathcal{O}_{T^*\underline{X}}$ makes the coordinate functions x_i, y_i of $T^*\underline{X}$ semi-invariant elements of weight one. By letting $\hbar$ be also a semi-invariant element of weight two, the $\mathbb{C}^*$-action lift to an equivariant action on the deformation-quantization $\mathcal{A}_{T^*\underline{X}}$. These $\mathbb{C}^*$-actions induce a $\mathbb{C}^*$-action on the symplectic manifold X, and also an equivariant $\mathbb{C}^*$-action on the sheaf $\mathcal{A}_{X,c}$ on X. Then the algebra of global sections $\widehat{A}_c \underset{\text{def}}{=} \Gamma(X, \mathcal{A}_{X,c})$ is a $\mathbb{C}[[\hbar]]$-algebra with a $\mathbb{C}^*$-action.

The algebra $\widehat{A}_c$ is decomposed into a direct product of weight spaces with respect to the $\mathbb{C}^*$-action: $\widehat{A}_c = \prod_m (\widehat{A}_c)_m$ where $(\widehat{A}_c)_m$ is the weight space of weight m. Consider the direct sum $\bigoplus_m (\widehat{A}_c)_m$. Then, it is a $\mathbb{C}[\hbar]$-subalgebra of $\widehat{A}_c$. We call it the finite part of $\widehat{A}_c$ with respect to the $\mathbb{C}^*$-action, and denote $(\widehat{A}_c)_{\mathbb{C}^*\text{-fin}}$. Now consider the specialization $\hbar = 1$, and we obtain a $\mathbb{C}$-algebra

$$A_c = \Gamma_F(X, \mathcal{A}_{X,c}) \underset{\text{def}}{=} (\widehat{A}_c)_{\mathbb{C}^*\text{-fin}}/(\hbar - 1)(\widehat{A}_c)_{\mathbb{C}^*\text{-fin}}.$$

The $\mathbb{C}[[\hbar]]$-algebra $\widehat{A}_c$ is graded by the power of $\hbar$, and the grading induces a filtration of the $\mathbb{C}$-algebra A_c.

Proposition 2.2. *Under the conditions (1)–(4) in Section 2.2, the algebra $A_c = \Gamma_F(X, \mathcal{A}_{X,c})$ is a quantization of the Poisson algebra $\mathbb{C}[X]$.*

We also have the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd} A_c \arrow[r, "\mathrm{gr}"] & \mathbb{C}[X] \\ \mathcal{A}_{X,c} \arrow[u, "\Gamma_F(X,—)"] \arrow[r, "\hbar=0"] & \mathcal{O}_X \arrow[u, "\Gamma(X,—)"'] \end{tikzcd}$$

Similarly, we can construct "the algebra of global sections" also for the deformation-quantization $\mathcal{A}_{T^*\underline{X}}$ of the cotangent bundle $T^*\underline{X}$ for a manifold $\underline{X}$.

3. Deformation-quantization of arc spaces

3.1. **Arc spaces.** The notion of deformation-quantization and quantum Hamiltonian reduction works also for certain infinite-dimensional manifolds, not only finite-dimensional ones. For a finite-dimensional manifold X, consider an infinite-dimensional manifold $J_\infty X$, called an arc space or a ∞-Jet scheme on X. We regard X as a scheme of finite type over $\mathbb{C}$. Then the arc space $J_\infty X$ is a scheme whose R-valued points for a $\mathbb{C}$-algebra R is given by

$$J_\infty X(R) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, R, J_\infty X) \underset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, R[[t]], X) = X(R[[t]]).$$

Namely, the arc space $J_\infty X$ is a scheme, whose $\mathbb{C}$-valued points are infinitesimal arcs on X. Then, for an R-valued point $x(t)$ of $J_\infty X$, we can regard $x(t)$ as an infinite-dimensional arc on X and its head $x(0)$ is an R-valued point of X. Thus, we have a canonical projection $J_\infty X \longrightarrow X$, $x(t) \mapsto x(0)$.

We consider a finite-dimensional symplectic manifold X. Then its structure sheaf $\mathcal{O}_X$ is equipped with a Poisson bracket $\{—,—\}$. Along with it, the structure sheaf $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ has an additional structure, called a vertex Poisson algebra. Vertex Poisson algebras are vertex algebra analogue of Poisson algebras, which are naturally obtained as an associated graded algebra of a certain vertex algebra. First, we review briefly the definition of vertex algebras.

A vertex algebra is a quadruple of data $(V, \mathbf{1}, T, Y(—,z))$, where

- V — a vector space,
- $\mathbf{1} \in V$ — a vector in V, called the vacuum vector
- $T : V \longrightarrow V$ — a linear operator, called the translation operator
- $Y(—,z) : V \longrightarrow \mathrm{End}\, V[[z,z^{-1}]]$ — a linear operator, where $Y(A,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_{(n)} z^{-n-1}$ is a formal series of linear operators $A_{(n)}$ on V for each vector $A \in V$. The operator $Y(A,z)$ is called the vertex operator associated with A.

These data are subject to the following axioms:

- (vacuum axiom) The vacuum vector satisfies $Y(\mathbf{1},z) = \mathrm{id}_V$, and for any $A \in V$, we have $Y(A,z)\mathbf{1} \in V[[z]]$, so that $Y(A,z)\mathbf{1}$ can be specialized at $z = 0$. Then, we have $Y(A,z)\mathbf{1}|_{z=0} = A$. In other words, we have $A_{(n)}\mathbf{1} = 0$ for any $n \geq 0$ and $A_{(-1)}\mathbf{1} = A$ in V.
- (translation axiom) For any $A \in V$, we have
$$[T, Y(A,z)] = \partial_z Y(A,z),$$
and $T\mathbf{1} = 0$.
- (locality axiom) For any A, $B \in V$, the vertex operators $Y(A,z)$ and $Y(B,w)$ are mutually local: Namely, there exists $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
$$(z-w)^N [Y(A,z), Y(B,w)] = 0.$$

From the above definition of vertex algebras, we obtain the following identity between coefficients of vertex operators $Y(A,z)$ and $Y(B,z)$ for A, $B \in V$, so called Borcherds' identity:

$$\sum_{j\geq 0}\binom{m}{j}(A_{(n+j)}B)_{(m+l-j)} = \sum_{j\geq 0}(-1)^j\binom{n}{j}\{A_{(m+n-j)}B_{(l+j)} - (-1)^n B_{(n+l-j)}A_{(m+j)}\}$$

for any l, m and $n \in \mathbb{Z}$.

A vertex algebra V is called a commutative vertex algebra if $A_{(n)} = 0$ for any $A \in V$ and $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. In this situation, operators $A_{(-m)}$ and $B_{(-n)}$ commute for any A, $B \in V$ and m, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, and we can identify the commutative vertex algebra V as a commutative $\mathbb{C}$-algebra in infinitely many variables with the derivation T. For any manifold X, the structure sheaf $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ of the arc space $J_\infty X$ has a structure of a sheaf of commutative vertex algebras with variables $f_{(-n)} = (1/n!)T^n f$ for $f \in \mathcal{O}_X$ and $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. The canonical projection $J_\infty X \longrightarrow X$ induces an embedding $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_{J_\infty X}$ given by $f \mapsto f_{(-1)}$ for $f \in \mathcal{O}_X$.

A vertex Poisson algebra is a tuple $(V, \mathbf{1}, T, Y_+(—,z), Y_-(—,z))$, such that the quadruple $(V, \mathbf{1}, T, Y_+(—,z))$ is a commutative vertex algebra with the vertex operator $Y_+(A,z) = \sum_{n\leq -1} A_{(n)}z^{-n-1}$, and coefficients of $Y_-(A,z) = \sum_{n\geq 0} A_{(n)}z^{-n-1}$ satisfies a truncation of the Borcherds' identity. It is vertex-algebraic analogue of Poisson algebras in the following sense; if $(V, \mathbf{1}, T, Y(—))$ is a vertex algebra with filtration and the associated graded vertex algebra $\operatorname{gr} V$ with respect to the filtration is commutative, we can define the structure of a vertex Poisson algebra on the associated graded vertex algebra $\operatorname{gr} V$.

Assume that X is a symplectic manifold. Consider the arc space $J_\infty X$, and then the structure sheaf $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ is a sheaf of commutative vertex algebras as above. Moreover, the Poisson bracket $\{—,—\}$ on $\mathcal{O}_X$ induces a structure of a vertex Poisson algebra on $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ which satisfies

$$f_{(n)}g = \begin{cases} \{f,g\} & \text{if } n = 0, \\ 0 & \text{if } n \geq 1, \end{cases}$$

for f, $g \in \mathcal{O}_X$ and also satisfies the (truncated) Borcherds' identity.

3.2. **Deformation-quantization of $J_\infty X$.** As deformation-quantization of the vertex Poisson algebras, we obtain the notion of $\hbar$-adic vertex algebras, which are introduced by H. Li in [Li]. An $\hbar$-adic vertex algebra is a quadruple $(V, \mathbf{1}, T, Y(—,z))$ where V is a flat $\mathbb{C}[[\hbar]]$-module which is complete in $\hbar$-adic topology, such that $(V/\hbar^N V, \mathbf{1}, T, Y(—,z))$ is a vertex algebra over $\mathbb{C}$ for any $N \geq 0$. Note that a $\hbar$-adic vertex algebra need not a vertex algebra over $\mathbb{C}[[\hbar]]$.

Assume that, for an $\hbar$-adic vertex algebra $(V, \mathbf{1}, T, Y(—,z))$, the quotient vertex algebra $(V/\hbar V, \mathbf{1}, T, Y(—,z))$ is a commutative vertex algebra. Then, $V/\hbar V$ has naturally the structure of vertex Poisson algebra defined by

$$\bar{a}_{(n)}\bar{b} = \hbar^{-1}a_{(n)}b \mod \hbar$$

for a, $b \in V$ and $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, and where $\bar{a} = a \mod \hbar \in V/\hbar V$ is the equivalent class of a.

Now we introduce the notion of deformation-quantization for vertex algebras. Let X be a symplectic manifold, and consider the structure sheaf $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ of the arc space $J_\infty X$ as a sheaf of vertex Poisson algebras. We say that the sheaf of $\hbar$-adic vertex algebras $\mathcal{A}^{ch}_X$ on $J_\infty X$ is a deformation-quantization of $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ (or of $J_\infty X$) if its quotient $\mathcal{A}^{ch}_X/\hbar\mathcal{A}^{ch}_X$ is isomorphic to $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ as a sheaf of vertex Poisson algebras on $J_\infty X$.

As the usual deformation-quantization, we can construct a deformation-quantization of $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ as a sheaf of $\hbar$-adic vertex algebras in the following two cases:

(1) When X is the cotangent bundle of a certain manifold $\underline{X}$, i.e. $X = T^*\underline{X}$, we may have a sheaf of vertex algebras called an algebra of chiral differential operators (CDO) on X, denoted by $\mathcal{D}^{ch}_{\underline{X}}$, which was introduced in [BD] and [GMS] independently. Note that there exists an obstruction for existence of such a sheaf, but it is known that if the second Chern class $ch_2(\mathcal{T}_{\underline{X}})$ vanishes, such a sheaf $\mathcal{D}^{ch}_{\underline{X}}$ exists. See [GMS] for details.

By a similar method for localizing the sheaf of differential operators $\mathcal{D}_{\underline{X}}$ on $T^*\underline{X}$ as a deformation-quantization of $X = T^*\underline{X}$, we can construct localization of the sheaf of vertex algebras $\mathcal{D}^{ch}_{\underline{X}}$ as a sheaf of $\hbar$-adic vertex algebras on $X = T^*\underline{X}$, and moreover, as a sheaf on its arc space $J_\infty X$. This construction gives a deformation-quantization of the structure sheaf $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ in the above sense. We denote it $\mathcal{A}^{ch}_{X,\hbar}$.

(2) When a symplectic manifold X is constructed by Hamiltonian reduction $X = \mu^{-1}(\chi)^{ss}/M$ as above for an action of a certain unipotent Lie group M on a manifold $\underline{X}$ and the CDO $\mathcal{D}^{ch}_{\underline{X}}$ exists, we can construct a deformation-quantization of $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ as quantum Hamiltonian reduction of $\mathcal{A}^{ch}_{X,\hbar}$. In [AKM], with using a certain cohomological and quantum Hamiltonian reduction, called a BRST cohomology, a deformation-quantization of $\mathcal{O}_{J_\infty X}$ is constructed for a Slodowy variety X, a symplectic manifold which is obtained by Hamiltonian reduction of a flag variety.

As "a vertex algebra of global sections" with respect to a certain $\mathbb{C}^*$-action, we obtain (1) a vertex algebra at critical level associated with the affine Lie algebra corresponding to the flag variety, or (2) an affine $\mathcal{W}$-algebra at critical level associated with the Slodowy variety X, respectively. Namely, these deformation-quantizations are regarded as localization of such vertex algebras.

4. Applications of localization to representation theory

When an associative algebra A is localized by a deformation-quantization of a certain symplectic manifold X, the representation theory of A may be connected with the geometrical structure of the underlying manifold X. And indeed many applications of such a localization to the representation theory are known. In this section, we summarize some of such results which are recently studied for algebras obtained by quantum Hamiltonian reduction.

Throughout this section, we use the following notation. Let X be a symplectic manifold, and let $\mathcal{A}_{X,c}$ be a deformation-quantization of the structure sheaf $\mathcal{O}_X$ with a parameter of quantization c. Set $A_c = \Gamma(X, \mathcal{A}_{X,c})_{fin}|_{\hbar=1}$ be an associative $\mathbb{C}$-algebra which is obtained as "the algebra of global sections". In this section, we may assume that the symplectic manifold X is obtained by Hamiltonian reduction, and the Hamiltonian reduction satisfies the assumptions (1)–(4).

4.1. **Beilinson-Bernstein type correspondence.** The most fundamental results are certain equivalences of categories between the category of A_c-modules and the category of $\mathcal{A}_{X,c}$-modules with an equivariant torus action, which the functor of taking "global sections" gives. In the classical case of the universal enveloping algebra of simple Lie algebra $U(\mathfrak{g})$, such an equivalence of categories essentially coincides with an equivalence of abelian categories known as the Beilinson-Bernstein correspondence. In the case of quantum Hamiltonian reduction, we have (1) equivalence of triangulated categories between derived categories of module categories and (2) equivalence of abelian categories which is direct analogue of the Beilinson-Bernstein correspondence.

(1) Let A_c-mod be the abelian category of finitely-generated A_c-modules, and let $\mathcal{A}_{X,c}$-mod$_{\mathbb{C}^*\text{-equiv}}$ be the abelian category of coherent $\mathcal{A}_{X,c}$-modules with the $\mathbb{C}^*$-equivariant action, which are torsion-free over $\mathbb{C}[[\hbar]]$. Then an object of $\mathcal{A}_{X,c}$-mod$_{\mathbb{C}^*\text{-equiv}}$ are a sheaf on X and thus we can consider the module of its global sections. For an object $\mathcal{M} \in \mathcal{A}_{X,c}$-mod$_{\mathbb{C}^*\text{-equiv}}$, the module of global sections $\Gamma(X, \mathcal{M})$ is a $\mathbb{C}[[\hbar]]$-module with $\mathbb{C}^*$-action, since $\mathcal{M}$ is equipped with the equivariant $\mathbb{C}^*$-action. Then, taking finite part with respect to $\mathbb{C}^*$-action, denoted $\Gamma(X, \mathcal{M})_{\mathbb{C}^*\text{-fin}}$, we have a $\mathbb{C}[\hbar]$-module. Finally, substituting $\hbar = 1$, we obtain a $\mathbb{C}$-vector space

$$\Gamma_F(X, \mathcal{M}) \underset{\text{def}}{=} \Gamma(X, \mathcal{M})_{\mathbb{C}^*\text{-fin}}|_{\hbar=1} = \Gamma(X, \mathcal{M})_{\mathbb{C}^*\text{-fin}} \otimes_{\mathbb{C}[\hbar]} \mathbb{C}_1,$$

where $\mathbb{C}_1$ is the $\mathbb{C}[\hbar]$-module by augmentation at $\hbar = 1$. Since $\Gamma_F(X, \mathcal{A}_{X,c}) \simeq A_c$, $\Gamma_F(X, \mathcal{M})$ is an A_c-module. This construction gives a functor of abelian categories

$$\Gamma_F(X, —) : \mathcal{A}_{X,c}\text{-mod}_{\mathbb{C}^*\text{-equiv}} \longrightarrow A_c\text{-mod}.$$

Consider the derived functor, and we have

$$R\Gamma_F(X, —) : D^b(\mathcal{A}_{X,c}\text{-mod}_{\mathbb{C}^*\text{-equiv}}) \longrightarrow D^b(A_c\text{-mod})$$

where $D^b(—)$ is a bounded derived category.

The following result is due to I. Gordon and I. Losev [GL]. Independently, K. McGerty and T. Nevins also studied essentially the same result independently in a little different manner in [MN1].

Theorem 4.1. *If the algebra A_c has finite global dimension, we have an equivalence of triangulated categories*

$$R\Gamma_F(X, —) : D^b(\mathcal{A}_{X,c}\text{-mod}_{\mathbb{C}^*\text{-equiv}}) \xrightarrow{\simeq} D^b(A_c\text{-mod})$$

with the quasi-inverse functor $\mathcal{A}_{X,c} \otimes^L_{A_c} (—)$.

(2) Under a certain condition, the above functor $\Gamma_F(X, —)$ also gives an equivalence of abelian categories, not only the derived equivalence. Note that the Hamiltonian reduction X is defined as a projective variety over X^0:

$$X = \operatorname{Proj} \bigoplus_{m \geq 0} \mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^M_{\theta^m} \longrightarrow X^0 = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^M$$

where θ is a certain character of the group M. From the definition, we have a line bundle $\mathcal{O}(1)$ which is associated with the $\bigoplus_m \mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^M_{\theta^m}$-module $\bigoplus_m \mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^M_{\theta^{(m+1)}}$. Moreover, we can construct a sheaf $\mathcal{A}^\theta_{X,c}$ which gives a quantization of this line bundle $\mathcal{O}(1)$ in the sense that $\mathcal{A}^\theta_{X,c} \otimes_{\mathbb{C}[[\hbar]]} \mathbb{C}_0 \simeq \mathcal{O}(1)$ where $\mathbb{C}_0$ is a $\mathbb{C}[[\hbar]]$-module on $\mathbb{C}$ by augmentation at $\hbar = 0$. This sheaf is an $(\mathcal{A}_{X,c+d\theta}, \mathcal{A}_{X,c})$-bimodule where $d\theta$ is a character of the Lie algebra $\mathfrak{m}$ obtained by differentiating θ. By considering the tensor product with $\mathcal{A}^{\theta^m}_{X,c}$ over $\mathcal{A}_{X,c}$, we have a functor

$$\mathcal{A}^{\theta^m}_{X,c} \otimes_{\mathcal{A}_{X,c}} (—) : \mathcal{A}_{X,c}\text{-mod}_{\mathbb{C}^*\text{-equiv}} \longrightarrow \mathcal{A}_{X,c+md\theta}\text{-mod}_{\mathbb{C}^*\text{-equiv}}$$

for each $m \in \mathbb{Z}$. We have $\mathcal{A}^{\theta^m}_{X,c} \otimes_{\mathbb{C}[[\hbar]]} \mathbb{C}_0 \simeq \mathcal{O}(m) \simeq \mathcal{O}(1)^{\otimes m}$, and the functor is an equivalence of categories whose quasi-inverse functor is given by $\mathcal{A}^{\theta^{-m}}_{X,c+md\theta}$. By applying "the functor of taking global sections" $\Gamma_F(X, —)$, we have functors

$$\Gamma_F(X, \mathcal{A}^{\theta^m}_{X,c}) \otimes_{A_c} (—) : A_c\text{-mod} \longrightarrow A_{c+md\theta}\text{-mod}$$

for each $m \in \mathbb{Z}$.

Theorem 4.2. *Assume that the functor $\Gamma_F(X, \mathcal{A}^{\theta^m}_{X,c}) \otimes_{A_c} (—)$ is an equivalence of abelian categories (with the quasi-inverse given by $\Gamma_F(X, \mathcal{A}^{\theta^{-m}}_{X,c+md\theta}) \otimes_{A_{c+md\theta}} (—)$) for all $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then,*

$$\Gamma_F(X, —) : \mathcal{A}_{X,c}\text{-mod}_{\mathbb{C}^*\text{-equiv}} \xrightarrow{\sim} A_c\text{-mod}$$

is an equivalence of abelian categories with the quasi-inverse $\mathcal{A}_{X,c} \otimes_{A_c} (—)$.

The theorem is analogue of well-known theorem in the representation theory of simple Lie algebras, so called the Beilinson-Bernstein correspondence, studied in [BB1, BB2], and also in [BrKa]. For algebras obtained by quantum Hamiltonian reduction, it was first established for the rational Cherednik algebra of the symmetric group $\mathfrak{S}_n$ by M. Kashiwara and R. Rouquier in [KR], and later for some other cases in [BeKu], [DK] separately. Recently, K. McGerty and T. Nevins in [MN2] gave a general criterion when such an abelian equivalence holds by using Kashiwara's equivalence and Kirwan-Ness stratification.

In known cases of quantum Hamiltonian reduction, the sheaf of $\mathbb{C}[[\hbar]]$-algebras $\mathcal{A}_{X,c}$ is locally isomorphic to the $\hbar$-deformed Weyl algebra

$$\mathcal{D}_{\mathbb{C}^d,\hbar} = \mathbb{C}[[\hbar]][x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_d]$$

with defining relation given by $[y_i, x_j] = \delta_{ij}\hbar$, $[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 0$. Thus the above equivalences connect the representation theory of A_c with microlocal analysis on the symplectic manifold X through the sheaf $\mathcal{A}_{X,c}$, and hence we have many applications in the representation theory of A_c.

First, for an A_c-module M, the support of the corresponding sheaf of modules $\mathcal{A}_{X,c} \otimes_{A_c} M$ in the symplectic manifold X is an invariant of modules. It is analogue of characteristic varieties in $\mathcal{D}$-module theory. We also have analogue of characteristic cycles, cycles on X (with multiplicities) associated with the module. For certain quantum Hamiltonian reduction A_c, characteristic cycles of some important A_c-modules were studied in [GS] (for the rational Cherednik algebra for $\mathfrak{S}_n$) and in [K1] (for the rational Cherednik algebra for $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$).

Moreover, for the rational Cherednik algebra for $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, we can construct explicitly sheaves of modules corresponding to irreducible modules and standard modules in the category $\mathcal{O}$ of A_c, a highest weight category analogous to the Bernstein-Gelfand-Gelfand category for a simple Lie algebra. ([K2]) As a consequence, it follows that sheaves of modules corresponding to modules in the category $\mathcal{O}$ are regular holonomic in the sense of microlocal analysis. Conjecturally the same fact holds for the category $\mathcal{O}$ of other type of rational Cherednik algebra, but it is still an open problem.

4.2. **BRST cohomologies.** The construction of the algebra A_c as quantum Hamiltonian reduction associated with the M-action on $\mathcal{A}_{T^*\underline{X}}$ induces a certain cohomology, called a BRST cohomology. The BRST cohomology (or so called BRST reduction) is first introduced by theoretical physicist in the area of quantum field theory. Mathematically, it is known that the BRST cohomology gives a cohomological interpretation of the (quantum) Hamiltonian reduction (cf. [KS], [F]). In [K3], the explicit description of the BRST cohomology associated with the quantum Hamiltonian reduction is given in the case where $\underline{X}$ is a linear representation of the group M. We denote the BRST cohomology associated with the action of M on the ring of differential operators $\mathcal{D}(\underline{X})$ by $H^\bullet_{BRST,c}(\mathfrak{m}, \mathcal{D}(\underline{X}))$, where $\mathfrak{m}$ is the Lie algebra of M and c is the parameter of the quantum Hamiltonian reduction A_c. We can also define the sheaf version of the BRST cohomology, and it is denoted $\mathcal{H}^\bullet_{BRST,c}(\mathfrak{m}, \mathcal{A}_{(T^*\underline{X})^{ss}})$. Then, we have the following two isomorphisms of graded algebras (with respect to the degree of cohomologies) under certain conditions:

$$\mathcal{H}^{\bullet}_{BRST,c}(\mathfrak{m}, \mathcal{A}_{(T^*\underline{X})^{ss}}) \simeq \mathcal{A}_{X,c} \otimes_{\mathbb{C}} H^{\bullet}_{DR}(M), \tag{2}$$

$$H^{\bullet}_{BRST,c}(\mathfrak{m}, \mathcal{D}(\underline{X})) \simeq A_c \otimes_{\mathbb{C}} H^{\bullet}_{DR}(M), \tag{3}$$

where $H^{\bullet}_{DR}(M)$ is the de Rham cohomology of M. The former isomorphism follows from the geometrical conditions in Section 2.2, and indeed it is essentially a geometrical fact. On the other hand, to prove the latter isomorphism we need to make advantage of the representation theory of A_c. Indeed, by using the abelian and derived equivalences of categories in Section 4.1, we obtain (3) from (2).

4.3. **Isomorphism of quantizations.** Some noncommutative algebras give quantizations of the same Poisson algebra. In such a case, it is a natural problem if these quantizations are isomorphic with each other. But usually it is not easy to compare their different constructions directly. On the other hand, the deformation theory for deformation-quantization of a symplectic manifold is studied by R. Bezrukavnikov and D. Kaledin in [BeKa]. As an application of their result, I. Losev proved isomorphisms between certain noncommutative algebras, which are constructed by quantum Hamiltonian reduction in [Lo2]. For example, deformed preprojective algebras introduced in [CBH] and finite $\mathcal{W}$-algebras associated with a subregular nilpotent orbit in simple Lie algebra of type ADE are isomorphic with each other.

References

[AKM] T. Arakawa, T. Kuwabara, F. Malikov, *Localization of affine W-algebras*, Comm. Math. Phys., available online, (DOI) 10.1007/s00220-014-2183-x.

[BB1] A. Beilinson, J. Bernstein, *Localisation de $\mathfrak{g}$-modules* (French), C. R. Acad. Sci. Paris Se'r. I Math. **292** (1981), no. 1, 15-18.

[BB2] A. Beilinson, J. Bernstein, *A proof of Jantzen conjectures*, I. M. Gelfand Seminar, Adv. Soviet Math. **16** (1993), Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1-50.

[BD] A. Beilinson, V. Drinfeld, *Chiral algebras*, American Mathematical Society Colloquium Publications **51**, American Mathematical Society, Providence, RI (2004)

[BeKa] R. Bezrukavnikov and D. Kaledin, *Fedosov quantization in algebraic context*, Mosc. Math. J. **4** (2004), 559-592.

[BeKu] G. Bellamy and T. Kuwabara, *On deformation quantizations of hypertoric varieties*, Pacific J. Math. **260** (2012), no. 1, 89-127.

[BrKa] J.-L. Brylinski, M. Kashiwara, *Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems*, Inv. Math. **64** (1981), no. 3, 387-410.

[CBH] W. Crawley-Boevey and M. Holland, *Noncommutative deformations of Kleinian singularities*, Duke Math. J. **92** (1998), no. 3, 605-635.

[DK] C. Dodd and K. Kremnizer, *A Localization Theorem for Finite W-algebras*, preprint, `arXiv:math.RT/0911.2210v1`.

[F] B. Feigin, *Semi-infinite homology of Lie, Kac-Moody and Virasoro algebras* (Russian), Uspekhi Mat. Nauk **39** (1984), no. 2, 155-156.

[GL] I. Gordon and I. Losev, *On category $\mathcal{O}$ for cyclotomic rational Cherednik algebras*, J. Eur. Math. Soc **16** (2014), no. 5, 1017-1079.

[GMS] V. Gorbounov, F. Malikov, V. Schechtman, *Gerbes of chiral differential operators. II. Vertex algebroids*, Invent. Math. **155** (2004), no. 3, 605-680.

[GS] I.G. Gordon and J.T. Stafford, *Rational Cherednik algebras and Hilbert schemes II: representations and sheaves*, Duke Math. J **132** (2006), 73-135.

[K1] T. Kuwabara, *Characteristic cycles of standard modules for the rational Cherednik algebra of type $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$*, J. Math. Kyoto Univ. **48** (2008), vol. 1, Kyoto University, 167-217.

[K2] T. Kuwabara, *Representation theory of the rational Cherednik algebras of type $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ via microlocal analysis*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **49** (2013), no. 1, 87-110.

[K3] T. Kuwabara, *BRST cohomologies for symplectic reflection algebras and quantizations of hypertoric varieties*, preprint, `arXiv:1311.1787v1`.

[KR] M. Kashiwara and R. Rouquier, *Microlocalization of the rational Cherednik algebras*, Duke Math. J. **144** (2008), no. 3, 525-573.

[KS] B. Kostant, S. Sternberg, *Symplectic reduction, BRS cohomology, and infinite-dimensional Clifford algebras*, Ann. Physics **176**, no.1, 49-113 (1987)

[Li] H. Li, *Vertex algebras and vertex Poisson algebras*, Contemp. Math., **6** (2004), no. 1, 61-110.
[Lo1] I. Losev, *Finite W-algebras*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Volume III (2010), Hindustan Book Agency, New Delhi, 1281-1307.
[Lo2] I. Losev, *Isomorphisms of quantizations via quantization of resolutions*, Adv. Math. **231** (2012), vol. 3-4, 1216-1270.
[MN1] K. McGerty and T. Nevins, *Derived equivalence for quantum symplectic resolutions*, Selecta Math. (N.S.) **20** (2014), no. 2, 675-717.
[MN2] K. McGerty and T. Nevins, *Compatibility of t-structures for quantum symplectic resolutions*, preprint, arXiv:1312.7180v1.