有限群のブロック多元環とコホモロジー環

佐々木 洋城
信州大学

はじめに

筆者はこの 15 年ほど有限群のブロック多元環のコホモロジー環の基礎的な部分の勉強をして来ました．ちょうど 10 年前の仙台での第 49 回代数学シンポジウムでも Brauer 対応で対応するブロックのコホモロジー環について講演させていただきました．この度，再び機会をいただいたことは大変ありがたく，また光栄に存じます．組織委員会には心からお礼を申し上げます．10 年を振り返って，成果の少なさには身の縮む思いですが，恥を忍んで報告させていただきます．

1　有限群のコホモロジー環

G を有限群とし，R を単位元をもつ可換環とする．群環 RG は特殊な多元環である．主な特徴を挙げてみる：

- RG は G を基底とする自由 R 加群である
- RG は対称多元環である
- R は添加写像 $\varepsilon : RG \to R; \sum_{g\in G} a_g\, g \mapsto \sum_{g\in G} a_g$ により，RG-加群である
- 部分群 $H \leqslant G$ に対して RG は自由 RH-加群である
- RG は $\Delta : RG \to RG \otimes RG; g \mapsto g \otimes g$ を余積として Hopf 代数である

RG-加群 U を係数加群とする G のコホモロジー群を

$$H^*(G,U) = \mathrm{Ext}^*_{RG}(R,U) = \bigoplus_{n \geqq 0} \mathrm{Ext}^n_{RG}(R,U)$$

と定義する．有限群のコホモロジー群の主な特徴を挙げよう：

- $H^*(G,R)$ は cup 積により可換次数付多元環である．
- U, V が RG-加群ならば $\mathrm{Ext}^*_{RG}(U,V)$ は Yoneda 積により $H^*(G,R)$-加群である．
- 部分群 $H \leqslant G$，元 $g \in G$ に対して次の写像が定義される：

$$\begin{aligned}&\mathrm{res}_H : H^*(G,U) \to H^*(H,U),\ \mathrm{tr}^G : H^*(H,U) \to H^*(G,U),\\ &\mathrm{con}^g : H^*(H,U) \to H^*({}^gH,U).\end{aligned}$$

- これらの写像は次の性質をもつ：
  - 部分群 $H \leqslant G$ に対して合成 $\mathrm{tr}^G \circ \mathrm{res}_H : H^*(G,R) \to H^*(G,R)$ は $|\,G\!:\!H\,|$ 倍である．

– 部分群 $H, K \leqslant G$ について次のいわゆる Mackey 分解公式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
 & H^*(G,U) \arrow[dr, "\mathrm{res}_K"] & \\
H^*(H,U) \arrow[ur, "\mathrm{tr}^G"] \arrow[dr, "\bigoplus_{HgK\in H\backslash G/K} \mathrm{res}_{{}^gH\cap K}\circ \mathrm{con}^g"'] & \circlearrowright & H^*(K,U) \\
 & \bigoplus_{HgK\in H\backslash G/K} H^*({}^gH\cap K,U) \arrow[ur, "\sum_{HgK\in H\backslash G/K} \mathrm{tr}^K"'] &
\end{tikzcd}
$$

他に重要な写像として norm 写像，inflation 写像などがある．このような写像とその性質により有限群のコホモロジー論は豊かな世界を形作っている．基本定理は何といっても次の定理である．

定理 (Evens [2]，Venkov [22]). R が Noether 的ならばコホモロジー環 $H^*(G,R)$ も Noether 的である．

$S \leqslant G$ を Sylow p-部分群とする．指数 $|\,G\!:\!S\,|$ が R で可逆ならば可換図式

$$
\begin{tikzcd}
H^*(G,R) \arrow[rr, "|\,G:S\,|\cdot", "\simeq"'] \arrow[dr, hook, "\mathrm{res}_S"'] & \circlearrowright & H^*(G,R) \\
 & H^*(S,R) \arrow[ur, "\mathrm{tr}^G"'] &
\end{tikzcd}
$$

が得られるから，直和分解 $H^*(S,R) = \operatorname{Im}\mathrm{res}_S \oplus \operatorname{Ker}\mathrm{tr}^G$ が得られる．さらに，いわゆる stable elements theorem により

$$H^*(G,R) \simeq \operatorname{Im}\mathrm{res}_S = \{\, \zeta \in H^*(S,R) \mid \mathrm{res}_{P\cap {}^gP}\,\zeta = \mathrm{res}_{S\cap {}^gS}\,{}^g\zeta \ \ \forall g \in G \,\}$$

が成り立ち，さらに，これを言い換えて

$$
\begin{aligned}
&= \{\, \zeta \in H^*(S,R) \mid \mathrm{res}_Q\,\zeta = \mathrm{res}_Q\,{}^g\zeta \ \ \forall Q \leqslant S, \forall\, g \in N_G(Q) \,\} \\
&= \{\, \zeta \in H^*(S,R) \mid \zeta \text{ は } \mathcal{F}_S(G)\text{-安定} \,\}.
\end{aligned}
$$

ここで，$\mathcal{F}_S(G)$ は S の部分群を対象とする圏で Frobenius 圏とよばれている．

2　対称多元環の Hochschild コホモロジー環

有限群の群環は対称多元環であり，その Hochschild コホモロジー環は通常のコホモロジー環を含む．そこで，ここでは，一般に対称多元環の Hochschild コホモロジー環について，必要な範囲で若干の事項を述べる．

A, B を対称 R-多元環とする．

(A, B)-両側加群 X は左 A-加群としても，右 B-加群としても有限生成，射影的であると仮定する．

- 対 $(\zeta, \tau) \in HH^*(A) \times HH^*(B)$ は条件

$$\zeta \otimes 1_X = 1_X \otimes \tau \in \mathrm{Ext}^*_{A\otimes_R B^{\mathrm{op}}}(X, X).$$

を満たすとき X-stable であるという．

- transfer 写像とよばれ写像が定義される：

$$t_X : HH^*(B) \to HH^*(A), \quad t_{X^*} : HH^*(A) \to HH^*(B).$$

ここで，$X^* = \mathrm{Hom}_R(X, R)$ である．この写像は，A, B が対称多元環であることと X が左 A-加群としても，右 B-加群としても有限生成射影的であるということに基づいて定義される．

一般に，有限群 G のコホモロジー環 $H^*(G,R)$ は Hochschild コホモロジー環 $HH^*(RG)$ に diagonal embedding $\delta_G : H^*(G,R) \to HH^*(RG)$ により埋め込まれる．これは多元環の単射準同型である．

$H \leqslant G$ を部分群とする．(RH, RG)-両側加群としての RG を X とおくと，$X^* \simeq {}_{RG}RG_{RH}$ である．コホモロジー環における写像 $\mathrm{tr}^G, \mathrm{res}_H$ は ${}_{RH}RG_{RG}, {}_{RG}RG_{RH}$ が導く Hochschild コホモロジー環の transfer 写像と compatible である：

$$\begin{tikzcd}
H^*(G,R) \arrow[r, "\delta_G"] \arrow[d, "\mathrm{res}_H"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & HH^*(RG) \arrow[d, "t_{({}_{RH}RG_{RG})}"] \\
H^*(H,R) \arrow[r, "\delta_H"'] & HH^*(RH)
\end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd}
H^*(G,R) \arrow[r, "\delta_G"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & HH^*(RG), \\
H^*(H,R) \arrow[r, "\delta_H"'] \arrow[u, "\mathrm{tr}^G"] & HH^*(RH) \arrow[u, "t_{({}_{RG}RG_{RH})}"']
\end{tikzcd}$$

さらに

$$\mathrm{Im}(\delta_H \circ \mathrm{res}_H) \subset HH^*(RH) \text{ の } {}_{RH}RG_{RH}\text{-stable 部分環.}$$

G の Sylow p-部分群 S の指数 $|G\!:\!S|$ が R で可逆ならば，$\zeta \in H^*(S,R)$ について

$$\zeta \text{ が } \mathcal{F}_S(G)\text{-stable} \iff \delta_S\zeta \in HH^*(RS) \text{ は } {}_{RS}RG_{RS}\text{-stable.}$$

さらに，上の二つの可換図式を合成して

$$\begin{tikzcd}
H^*(S,R) \arrow[r, "\delta_S"] \arrow[d, "\mathrm{res}_S \circ \mathrm{tr}^G"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & HH^*(RS) \arrow[d, "t_{({}_{RS}RG_{RS})}"] \\
H^*(S,R) \arrow[r, "\delta_H"'] & HH^*(RS)
\end{tikzcd}$$

が得られ，かつ

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{res}_S \circ \mathrm{tr}^G \simeq H^*(G,k)$$

である．

3 ブロック多元環

本節以降，係数環としては標数 $p > 0$ の代数的閉体 k を採用する．標数 p は G の位数の素因数であるとする．

群環 kG は直既約な両側イデアルの直和に分解される：

$$kG = B_0 \oplus B_1 \oplus \cdots \oplus B_m.$$

この直和因子を G のブロック・イデアルまたはブロック多元環とよぶ．ただ一つのブロック多元環のみが添加写像 $\varepsilon : kG \to k$ によって零化されない．そのブロック多元環を主ブロックとよぶ．B_0 を主ブロックとする．k の射影分解に現れる射影加群はすべて主ブロックに属するから，$H^*(G,k) = \mathrm{Ext}^*_{kG}(k,k) = \mathrm{Ext}^*_{B_0}(k,k)$ が成り立つ．従って，G のコホモロジー環は主ブロックのコホモロジー環である．主客を転倒させると

$$\boxed{B_0 \text{ のコホモロジー環} = \mathrm{Ext}^*_{B_0}(k,k) = \mathrm{Ext}^*_{kG}(k,k) = H^*(G,k).}$$

それでは，ブロック多元環一般についてはどうなのだろうか？

ブロック多元環には defect 群とよばれる p-部分群が定められる．主ブロックの defect 群は Sylow p-部分群である．Sylow p-部分群が G で共役であるように，defect 群も G で共役である．

B を kG のブロック多元環とし，D をその defect 群とする．

主ブロックには自明な加群 k が属しているが，一般のブロック多元環にはそのような「標準的な加群」は存在しない．それゆえ，主ブロックのように Ext 群を用いてホモロジー代数的に定義することはできない．

「ブロック多元環 B のコホモロジー環」を定義するためには適切にカテゴリーを選ぶ必要がある．

以上を次の表にまとめてみる：

<table>
<tr><td colspan="2">ブロック多元環</td><td>主ブロック B_0</td><td>B</td></tr>
<tr><td colspan="2">defect 群 P</td><td>Sylow p-部分群 S</td><td>D</td></tr>
<tr><td rowspan="4">コホモロジー環を定義するために</td><td>Ext</td><td>$\mathrm{Ext}^*_{B_0}(k,k)$</td><td>なし</td></tr>
<tr><td>$H^*(P,k)$ において</td><td>$H^*(S,k)$ の $\mathcal{F}_S(G)$-安定部分環</td><td>$H^*(D,k)$ の $\boxed{?1}$ -安定部分環</td></tr>
<tr><td></td><td>$\updownarrow \delta_S$</td><td>$\updownarrow \delta_D$</td></tr>
<tr><td>$HH(kP)$ において</td><td>$\mathrm{Im}\,\delta_S \cap ({}_{kS}kG_{kS}$-安定部分環$)$</td><td>$\mathrm{Im}\,\delta_D \cap ({}_{kD}\boxed{?2}{}_{kD}$-安定部分環$)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">コホモロジー環をとらえるために</td><td>$\mathrm{res}_S \circ \mathrm{tr}^G$</td><td>?3</td></tr>
</table>

$\boxed{?1}$, $\boxed{?2}$ には何が入るか，入るべきか？ それが問題である．

ブロック多元環 B には source 加群とよばれる直既約 $k[G\times D^{\mathrm{op}}]$ が定められる．それは B の $k[G\times D^{\mathrm{op}}]$-加群としての直和因子で $\Delta(D)$ を vertex とするものである．二つの source 加群は同型であるとは限らないが，$N_G(D)$ の元により共役である．source 加群は defect 群を指定して考えるものであるから，(B, kD)-source 加群とよぶことにする．

X を (B, kD)-source 加群とする．

$A = X^* \otimes_B X$ とおく．A は B の source 多元環とよばれていて，モデュラー表現論において大変重要な役割を果たしている．それは次の定理が成り立つからである．

定理 (Puig [14]). A と B は Morita 同値である．

p-部分群 $Q \leqslant G$ と $k[QC_G(Q)]$ のブロック多元環 b_Q との対 (Q, b_Q) を subpair または Brauer pair とよぶ．（日本語ではそれぞれ部分対，Brauer 対となるが，ここでは英語のまま使わせてもらう）

subpairs には順序が定義され，集合 $\{ (Q, b_Q) \mid Q \leqslant G$ は p-部分群，b_Q は $k[QC_G(Q)]$ のブロック多元環$\}$ は順序集合である．subpair は有限群の構造論における p-部分群と同様の役割をモデュラー表現論において果たす.

定義. 部分群 $H \leqslant G$ と kH のブロック多元環 C について

C が (kH, kH)-両側加群として B の重複度が 1 の直和因子に同型である

とき，B と C は Brauer 対応で対応しているといい，$B = C^G$ と書く．このとき，C のどの defect 群も B のある defect 群に含まれる.

subpair (Q, b_Q) については b_Q の Brauer 対応は常に定義される．$B = {b_Q}^G$ のとき (Q, b_Q) を B-subpair とよぶ.

P, $Q \leqslant G$ を p-部分群とする．subpair (P, b_P) 対して $k[QC_G(Q)]$ のブロック多元環 b_Q で $(Q, b_Q) \leqslant (P, b_P)$ となるものが一意的に存在する．(P, b_P) が B-subpair ならば，この (Q, b_Q) も B-subpair である．

さて，D は B の defect 群であった．B-subpair (D, b) を Sylow B-subpair とよぶ．Sylow B-subpair やそれに含まれる subpair について構造論における Sylow の定理と同様のことが成り立つ．さて，(B, kD)-source 加群 X に付随して，ある条件を満たすように，$k[DC_G(D)]$ のブロック多元環 b_D が定められる．この b_D は D を defect 群としてもち，$B = {b_D}^G$ が成り立つ．すなわち，(D, b_D) は B-subpair である．b_D は X によって定められるから，Sylow (B, X)-subpair とよびたい.

定義. B を kG のブロック多元環とし，defect 群（のひとつ）を D とする．B の (B, kD)-source 加群（のひとつ）を X とし，(D, b_D) を Sylow (B, X)-subpair とする．Brauer 圏 $\mathcal{F}_{(D, b_D)}(B, X)$ を次のように定義する.

- 対象は部分群 $Q \leqslant D$ である.
- Q, $R \leqslant D$ に対して (Q, b_Q), $(R, b_R) \leqslant (D, b_D)$ とする．射 $\varphi : Q \to R$ は ${}^g(Q, b_Q) = (R, b_R)$ をみたす $g \in G$ がひきおこす共役写像である.

定義 (Linckelmann [8])**.** ブロック多元環 B の D，X に関するコホモロジー環 $H^*(G, B; X)$ を $H^*(D, k)$ の $\mathcal{F}_{(D, b_D)}(B, X)$-stable 部分環と定義する．すなわち

$$\boxed{H^*(G, B; X) = \{ \zeta \in H^*(D, k) \mid \ \mathrm{res}_Q\, \zeta = {}^g\mathrm{res}_Q\, \zeta \ \forall Q \leqslant D \ \forall g \in N_G(Q, b_Q) \}.}$$

S が Sylow p-部分群で X_0 を (B_0, kS)-source 加群とすると

$$H^*(G, B_0; X_0) = \{ \zeta \in H^*(S, k) \mid \zeta \text{ は } \mathcal{F}_S(G)\text{-stable} \} \simeq H^*(G, k)$$

が成り立つ．従って，前項の $\boxed{?1}$ の中には $\mathcal{F}_{(D, b_D)}(B, X)$ が入る.

定理 1 (Linckelmann [8]). 今までと同じ記号で，次の可換図式が得られる：

$$\begin{tikzcd} H^*(D,k) \arrow[r, "\delta_D"] & HH^*(kD) \arrow[r, "T_X"] & HH^*(B) \\ H^*(G,B;X) \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \boxed{{}_{kD}A_{kD}\text{-stable 部分環}} \arrow[u, hook] \arrow[r, tail, two heads] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \boxed{X\text{-stable 部分環}} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

ここで T_X は X によって引き起こされる正規化された transfer 写像である．

そこで，$\boxed{\ ?2\ }$ の中には A が入るべきであると思われていたが，実際

定理 2 (Sasaki [18]). $\zeta \in H^*(D,k)$ について

$$\delta_D\zeta \in HH^*(kD) \text{ が } {}_{kD}A_{kD}\text{-stable} \Longrightarrow \zeta \in H^*(G,B;X).$$

が成り立ち，これによってブロック多元環のコホモロジー環の定義が合理的であることが確認されたといってよい．

次の課題は自然である．

課題 1. $A = X^* \otimes_B X$ の (kD,kD)-両側加群としての構造を知りたい．

この課題はモデュラー表現論においても重要な，しかも困難な課題としてとらえられている．

ブロック多元環は Ext を用いて表現することはできない．つまり，ホモロジー代数をおいそれとは展開できないのである．しかし，主ブロックのコホモロジー環での事実を考えれば

課題 2. 写像 $t : H^*(D,k) \to H^*(D,k)$ を適切に定義し，その像として $H^*(G,B;X)$ を把握したい．

次に，ブロック多元環のコホモロジー環の間に写像を定義したい．何の関係もないブロック多元環の間では，さすがに，無理である．しかし，せめて，Brauer 対応で対応しているブロック多元環に対してはどうだろうか？

課題 3. $H \leqslant G$ を部分群とする．kH のブロック多元環 C の Brauer 対応が定義され，それは B に一致し，さらに，D は C の defect 群でもあるとする．このとき次のような写像を定義したい．

$$\mathrm{res}_C : H^*(G,B;X) \to H^*(H,C;Y), \quad \mathrm{tr}^B : H^*(H,C;Y) \to H^*(G,B;X)$$

もちろん，Frobenius の相互律など，当然期待される性質を備えた写像でなければならない．また，(B,kD)-source 加群 X と (C,kD)-source 加群 Y は「よい」関係になければならない．

4 ブロック多元環の source 多元環の加群構造

(B,kD)-source 加群 X は B の，従って，kG の (kG,kD)-両側加群としての直和因子に同型であるから，$A = X^* \otimes_B X$ は $kG \otimes_{kG} kG = kG$ の (kD,kD)-両側加群としての直和因子に同型である．従って，G における (D,D)-両側剰余類 DgD が定める (kG,kD)-両側加群 $k[DgD]$ の直和に同型である．

$${}_{kD}A_{kD} = {}_{kD}X^* \otimes_B X_{kD} \simeq \bigoplus \text{いくつかの } k[DgD].$$

どの $k[DgD]$ がいくつの重複度で現れるか？これが問題である．

Puig による次の結果と Linckelman [7]，Külshammer–Okuyama–Watanabe [6] 以外には知られていないというのが実情である（と思う）．

定理 (Puig [15]). 今までの記号の下で

(1) (kD, kD)-両側加群として

$$A \simeq \left(\bigoplus_{gDC_G(D) \in N_G(D, b_D)/DC_G(D)} k[Dg] \right) \oplus N. \tag{*}$$

ここで，N は $x \in G \setminus N_G(D)$ の $k[DxD]$ の直和である．

(2) $k[Dg]$（$gDC_G(D) \in N_G(D, b_D)/DC_G(D)$)）の形の加群のどの二つも同型でない．

この N については，J. Thévenaz は教科書 [21] 392p で次のように述べている：

> ”. . . , the summands of $(\mathcal{O}Gb)_\gamma$ isomorphic to $\mathcal{O}PgP$ for some $g \notin N_G(P)$ seem much more difficult to handle.”

最近，コホモロジー論（といっても簡単な事実のみ）を用いて次がわかった．

定理 3 (Sasaki [19]). G, B, D, X, A は今までと同様とする．$(P, b_P), (Q, b_Q) \subseteq (D, b_D)$ は $g \in G$ で共役である（${}^g(P, b_P) = (Q, b_Q)$）とする．$PC_D(P)$ は b_P の defect 群であるか，$QC_D(Q)$ は b_Q の defect 群であると仮定する．写像

$$t_g : H^*(D, k) \to H^*(D, k); \zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_Q {}^g\zeta$$

が 0 写像でなければ

(1) $Q = D \cap {}^gD$ であり

(2) (kD, kD)-両側加群 $k[DgD]$ は source 多元環 A の直和因子に同型である．

この定理の写像 t_g の由来は次の節で述べるように，A が導く transfer 写像にある．

さらに，最近，次が得られた．

定理 4 (Okuyama and Sasaki [13]). $(Q, b_Q) \leqslant (D, b_D)$ とする．(Q, b_Q) は essential B-subpair とする．$N_G(Q, b_Q)$ には真部分群 $M \geqslant N_D(Q)C_G(Q)$ で $M/QC_G(Q)$ は $N_G(Q, b_Q)/QC_G(Q)$ の strongly p-embedded 部分群となるものが存在する．

$x \in N_G(Q, b_Q) \setminus M$ について

(1) ${}^xD \cap D = Q$,

(2) (kD, kD)-両側加群 $k[DxD]$ は (kD, kD)-両側加群として A の直和因子に同型であり，その重複度は p を法として 1 に合同である．

5　ブロック多元環のコホモロジー環に対する trace 写像

G, B, D, X, A は今までと同様とする．

source 多元環 A を (kD, kD)-両側加群とみなして定義される Hochschild コホモロジー環 $HH^*(kD)$ の transfer 写像 t_A は $H^*(D,k)$ の transfer 写像 t を引き起こす：

$$\begin{array}{ccc} H^*(D,k) & \xrightarrow{\delta_D} & HH^*(kD) \\ t\Big\downarrow & \circlearrowright & \Big\downarrow t_A \\ H^*(D,k) & \xrightarrow[\delta_D]{} & HH^*(kD) \end{array} .$$

唐突ではあるが，次が成り立つと信じている！

予想.

$$H^*(G,B;X) = t(H^*(D,k)).$$

例 **1.** $N_G(D,b_D) = \{\, g \in N_G(D) \mid {}^g(D,b_D) = (D,b_D) \,\}$ が (D,b_D) における subpair の融合を統制するならば上の「予想」は正しい．例えば

- D が可換
- D が G で正規である

場合などがある．

transfer 写像 t は A の (kD, kD)-両側加群としての直和分解 (*) により次のように記述される：

$$t : H^*(D,k) \to H^*(D,k); \zeta \mapsto \sum_{gDC_G(D) \in N_G(D,b_D)/DC_G(D)} {}^g\zeta + \sum_{N \simeq \bigoplus_{DgD} k[DgD]} \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_{D \cap {}^gD} {}^g\zeta. \quad (*2)$$

しかしながら，前節で述べたように，(kD, kD)-両側加群として N の様子はわからないので具体的に解析することは困難である．

例 **2.** B をテイム表現型（つまり直既約加群がひとつのパラメータを用いて記述できる）のブロック多元環とする． このとき，$p = 2$ であり，defect 群は 4 元群，二面体群，準二面体群，（一般）四元数群である．Kawai–Sasaki [3] と定理 4 とにより

(1) transfer 写像 $t : H^*(D,k) \to H^*(D,k)$ を記述し，
(2) $\mathrm{Im}\, t = H^*(B,D;X)$ が成り立つ（つまり，このブロックについては予想が正しい）

ことが確認できた．この例は予想が成り立つ「自明でない」最初の例である．

例 **3.** $p = 2$ とし，ブロック B の defect 群 D は wreathed 2-群 $(\mathbf{Z}/2^n \times \mathbf{Z}/2^n) \rtimes \mathbf{Z}/2$ に同型であるとする：

$$D = \langle a, b, t \mid a^{2^n} = b^{2^n} = 1, ab = ba, t^2 = 1, tat = b \rangle.$$

Kawai–Sasaki [3] ではこのブロック多元環のコホモロジー環についても計算し，写像 $\mathrm{Tr}_D^B : H^*(D,k) \to H^*(D,k)$ で $\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}_D^B = H^*(G,B;X)$ であるものを構成した．

$U = \langle a, b \rangle, V = \langle a^{2^{n-1}}, ab, t \rangle \leqslant D$ とおき，$(U, b_U) \leqslant (D, b_D)$，$(V, b_V) \leqslant (D, b_D)$ とする．集合 $\{\, (D,b_D), (U,b_U), (V,b_V) \,\}$ は共役族とよばれるものであり，(D, b_D) に含まれる B-subpair の融合は

$N_G(D,b_D), N_G(U,b_U), N_G(V,b_V)$ に属する元による共役の合成として記述される．wreathed 2-群の自己同型群は 2-群であることから，$N_G(D,b_D)/DC_G(D)$ は単位群である．従って，$N_G(U,b_U), N_G(V,b_V)$ のありようによって subpair の融合のありかたが決まる．

$N_G(U,b_U)/C_G(U) \leqslant \mathrm{Aut}\ U \simeq \mathrm{GL}(2,2)$，$N_G(V,b_V)/VC_G(V) \leqslant \mathrm{Aut}\ V \simeq \mathrm{GL}(2,2)$ であるが，ここでは，ともに $\mathrm{GL}(2,2)$ に同型であると仮定しよう．

このとき，$(U,b_U),(V,b_V)$ は essential な subpair であり，元 $g_0 \in N_G(U,b_U)$，$g_1 \in N_G(V,b_V)$ でそれぞれ (U,b_U)，(V,b_V) の位数 3 の自己同型を引き起こすものをとる．

写像 $\mathrm{Tr}_D^B : H^*(D,k) \to H^*(D,k)$ を次のようにつくる：

$$\mathrm{Tr}_D^B : \zeta \mapsto \zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_U {}^{g_0}\zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_V {}^{g_1}\zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_T {}^{g_1 g_0}\zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_W {}^{g_0 g_1}\zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_F {}^{g_1 g_0 g_1}\zeta.$$

ここで，$T = \langle a, b^{2^{n-1}} \rangle$，$W = \langle ab, a^{2^{n-1}}t \rangle$，$F = \langle t, (ab)^{2^{n-1}} \rangle$ である．この写像は B のコホモロジー環をつくる：

$$\mathrm{Im}\, \mathrm{Tr}_D^B = H^*(G,B;X).$$

この写像の意味づけをしたい．

(1) Tr_D^B の第 1 項の写像 $\zeta \mapsto \zeta$ は $N_G(D,b_D)/DC_G(D)$ から引き起こされる．

$(U,b_U),(V,b_V)$ は essential な subpair であるから，写像 Tr_D^B の第 2 項，第 3 項については定理 4 により，Puig の定理における N の直和因子から得られるものであることがわかる．

(2) 直既約 (kD,kD)-両側加群 $k[Dg_0D]$，$k[Dg_1D]$ は $A = X^* \otimes_B X$ の直和因子に同型である．その重複度はそれぞれ奇数である．
(3) (kD,kD)-両側加群 $k[Dg_0D]$，$k[Dg_1D]$ が引き起こす $HH^*(kD)$ の transfer 写像の $H^*(D,k)$ への制限 $\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_{D \cap {}^{g_0}D} {}^{g_0}\zeta$，$\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_{D \cap {}^{g_1}D} {}^{g_1}\zeta$ はそれぞれ，$\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_U {}^{g_0}\zeta$，$\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_V {}^{g_1}\zeta$ となる．

第 4，第 5 項の写像については定理 3 が適用できて，次がわかる．

(4) 直既約 (kD,kD)-両側加群 $k[Dg_1g_0D]$，$k[Dg_0g_1D]$ は $A = X^* \otimes_B X$ の直和因子に同型である．しかしながら $k[Dg_1g_0D]$，$k[Dg_0g_1D]$ の重複度は不明である．
(5) (kD,kD)-両側加群 $k[Dg_1g_0D]$，$k[Dg_0g_1D]$ が引き起こす $HH^*(kD)$ の transfer 写像の $H^*(D,k)$ への制限 $\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_{D \cap {}^{g_1g_0}D} {}^{g_1g_0}\zeta$，$\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_{D \cap {}^{g_0g_1}D} {}^{g_0g_1}\zeta$ はそれぞれ，$\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_T {}^{g_1g_0}\zeta$，$\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_W {}^{g_0g_1}\zeta$ となる．

第 6 項については

(6) 最後の項の写像 $\zeta \mapsto \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_F {}^{g_1g_0g_1}\zeta$ と A の直和因子との関わりについては全く不明である．

一方，A が導く transfer 写像 $t : H^*(D,k) \to H^*(D.k)$ は $(D.b_D)$ における subpair の融合をつぶさに調べることにより，ある整数 $m_1, m_2, m_3 \geqq 0$ により

$$t : \zeta \mapsto \zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_U {}^{g_0}\zeta + \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_V {}^{g_1}\zeta + m_1 \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_T {}^{g_1g_0}\zeta + m_2 \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_W {}^{g_0g_1}\zeta + m_3 \mathrm{tr}^D \mathrm{res}_F {}^{g_1g_0g_1}\zeta$$

と記述されることがわかる．係数の m_1, m_2 は上で述べた (4)，(5) により 1 以上であるが，偶数か奇数かはまだ不明である．係数 m_3 については全く不明である．

6 Brauer 対応

ここでは，次の状況で考察する．

- $DC_G(D) \leqslant H \leqslant G$
- C は kH のブロック多元環で C の G への Brauer 対応は B である : $C^G = B$
- D は C の defect 群である．

$$\boxed{H^*(G, B; X) \text{ と } H^*(H, C; Y) \text{ との関係を調べたい！}}$$

もちろん，B の source 加群 X と C の source 加群 Y は注意深く設定しなければならない．さらに，ブロック B，C を結びつける加群が必要である．

次のように X，Y と (B, C)-両側加群 L をとる．

(1) B の source 加群は直既約 $k[G \times D^{\mathrm{op}}]$-加群であり，$C$ の source 加群は直既約 $k[H \times D^{\mathrm{op}}]$-加群である．$X$ と Y は Green 対応で対応しているように指定する．

(2) C を $k[H \times H^{\mathrm{op}}]$-加群とみて，$C$ の $G \times H^{\mathrm{op}}$ への Green 対応を $L = L(B, C)$ とおく．L は直既約 (B, C)-両側加群である．

$$\begin{tikzcd}
 & & G\times G^{\mathrm{op}} \arrow[d, dash] & B \\
 & & G\times H^{\mathrm{op}} \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] & L=L(B,C) \arrow[dd, leftrightarrow, "\text{Green 対応}"] \\
X \arrow[dd, leftrightarrow, "\text{Green 対応}"'] & G\times D^{\mathrm{op}} \arrow[dd, dash] & & \\
 & & H\times H^{\mathrm{op}} \arrow[dl, dash] & C \\
Y & H\times D^{\mathrm{op}} \arrow[d, dash] & & \\
 & \Delta D & &
\end{tikzcd}$$

(B, C)-両側加群 L は B-加群と C-加群を結びつける．Green 対応の精密化を与えるといえる．

B と C についてある条件の下では $H^*(G, B; X)$ は $H^*(H, C; Y)$ に含まれる．このようなとき，包含写像を $\mathrm{res}_C : H^*(G, B; X) \to H^*(H, C; Y)$ と考えてよいであろう．この包含写像は上で定義した L の k 双対 L^* が引き起こす Hochschild コホモロジー環の transfer 写像 $HH^*(kB) \to HH^*(C)$ から引き起こされる (Sasaki [17])．

さらに

定理 5 (**[18]**).

$$H^*(G,B;X) \subseteq H^*(H,C;Y) \Longleftrightarrow \delta_D H^*(G,B;X) \subseteq HH^*_{Y^*\otimes_C L^*\otimes_B X}(kD).$$

この条件が成り立つとき，次は可換である．

$$\begin{tikzcd}
H^*(G,B;X) \arrow[r, tail, "\delta_D"] \arrow[d, hook, "\mathrm{res}_C"'] & HH^*_{X^*\otimes_B L\otimes_C Y}(kD) \arrow[r, tail, two heads, "T_X"] \arrow[d, hook] & HH^*_{L\otimes_C Y}(B) \arrow[d, tail, "T_{L^*}"] \\
H^*(H,C;Y) \arrow[r, tail, "\delta_D"'] & HH^*_{Y^*}(kD) \arrow[r, tail, two heads, "T_Y"'] & HH^*_Y(C)
\end{tikzcd}$$

写像 $\mathrm{res}_C : H^*(G,B;X) \to H^*(H,C;Y)$ については，B と C が共通の defect 群をもつ場合は目処がついたといってよいと思う．

しかし，$\mathrm{tr}^B : H^*(H,C;Y) \to H^*(G,B;X)$ については，Kawai–Sasaki [3] に計算例はあるものの，なお不明である．

7 Varieties

前節まではブロック多元環のコホモロジー理論の基礎にかかわる課題について述べた．なお不十分なのではあるが，創始者の M. Linckelmann はそんなことにはおかまいなく，よい結果を与えている．特に，ブロックのコホモロジー環における support variety に関する仕事 [7]，[9]，[11] は特筆に値する．近年の Hochschild コホモロジー環における support variety の研究の端緒になっていると思う．この節では，その一部（もちろん結論のみ）を紹介して，本報告を閉じることにする．

群環の Hochschild コホモロジー環の特徴はなんといっても，群のコホモロジー環からの diagonal embedding があるということである．S. Siegel と S. Witherspoon は [20] において

(1) $\delta_G : H^*(G,k) \to HH^*(kG)$ はべき零根基を法として同型をひきおこすか？
(2) 合成 $\delta_G : H^*(G,k) \to HH^*(kG) \to HH^*(B_0)$ はべき零根基を法として同型をひきおこすか？（B_0 は主ブロック）

という課題を提起した．

次の自然な写像

$$\tau : H^*(G,B;X) \xrightarrow{\delta_D} HH^*_{X^*\otimes_B X}(kD) \xrightarrow{T_X} HH^*_X(B)$$

を考える．Linckelmann は次の定理を示し，上の課題を解決した．

定理 6 (**Linckelmann [11]**). 上の写像は同型

$$H^*(G,B;X)/\{\text{べき零元}\} \simeq HH^*(B)/\{\text{べき零元}\}$$

を引き起こす．特に

$$H^*(G,B;X)\text{ の極大イデアル・スペクトラム} \simeq HH^*(B)\text{ の極大イデアル・スペクトラム}.$$

参考文献

[1] J. L. Alperin, M. Linckelmann, and R. Rouquier, Source algebras and source modules, J. Algebra **239** (2001), no. 1, 262–271.

[2] L. Evens, The cohomology ring of a finite group, Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), 224–239.

[3] H. Kawai and H. Sasaki, Cohomology algebras of 2-blocks of finite groups with defect groups of rank two, J. Algebra **306** (2006), no. 2, 301–321.

[4] ———, Cohomology algebras of blocks of finite groups and Brauer correspondence, Algebr. Represent. Theory **9** (2006), no. 5, 497–511.

[5] R. Kessar, M. Linckelmann, and G. R. Robinson, Local control in fusion systems of p-blocks of finite groups, J. Algebra **257** (2002), no. 2, 393–413.

[6] B. Külshammer, T. Okuyama, and A. Watanabe, A lifting theorem with applications to blocks and source algebras, J. Algebra **232** (2000), 299–309.

[7] M. Linckelmann, On derived equivalences and local structure of blocks of finite groups, Turkish J. Math. **22** (1988), 93–107.

[8] ———, Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups, Algebr. Represent. Theory **2** (1999), 107–135.

[9] ———, Varieties in block theory, J. Algebra **215** (1999), 460–480.

[10] ———, Quillen stratification for block varieties, J. Pure and Appl. Algebra **172** (2002), 257–270.

[11] ———, Hochschild and block cohomology varieties are isomorphic, J. London Math. Soc. (2) **81** (2010), 389–411.

[12] 奥山哲郎, 佐々木洋城, 飛田明彦, 有限群のコホモロジー論, 数学 **62** (2010), 240–266.

[13] T. Okuyama and H.Sasaki, A note on source algebras of blocks, unpublished note.

[14] L. Puig, Pointed groups and construction of characters, Math. Z. **176** (1981), 265–292.

[15] ———, Pointed groups and construction of modules, J. Algebra **116** (1988), 7–129.

[16] 佐々木 洋城, 有限群のブロック・イデアルのコホモロジー環と Brauer 対応, 第 49 回代数学シンポジウム報告集, 2005, pp. 203–217.

[17] H. Sasaki, Cohomology algebras of blocks of finite groups and Brauer correspondence II, Algebr. Represent. Theory **13** (2010), 445–465.

[18] ———, Cohomology of block ideals of finite group algebras and stable elements, Algebr. Represent. Theory **16** (2013), 1039–1049.

[19] ———, Source algebras and cohomology of block ideals of fintie group algebras, Proc. 46 Symp. Ring Theory and Representation Theory (I. Kikumasa, ed.), 2014, pp. 209–215.

[20] S. Siegel and S. Witherspoon, The Hochschild cohomology ring of a group algebra, Proc. London Math. Soc. (3) **79** (1999), no. 1, 131–157.

[21] J. Thévenaz, G-algebras and modular representation theory, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 1995.

[22] B. B. Venkov, Cohomology algebras for some classifying spaces (russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR **127** (1959), 943–944.