minimal affinization の Jacobi-Trudi 型指標公式について

直井克之

概要

量子ループ代数の有限次元加群は様々な他の分野と関連を持ち, 近年盛んに研究がなされている。本稿では, 量子ループ代数の有限次元既約加群の特別な族である minimal affinization について, その Jacobi-Trudi 型指標公式を紹介する。またその証明についても概略を述べたいと思う。

1 minimal affinization

1.1 量子ループ代数

まず量子ループ代数について簡単に述べておく。正確な定義については [CP94, Section 12.2] 等を参照いただきたい。

$\mathfrak{g}$ を rank n の有限次元複素単純 Lie 代数とする。$\mathfrak{g}$ と Laurent 多項式環のテンソル積 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ に対し, bracket 積を $[x \otimes f, y \otimes g] = [x, y] \otimes fg$ と定めることで Lie 代数が定義できる。これを**ループ代数**と呼び $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ と表す。

量子ループ代数 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ は有理関数体 $\mathbb{C}(q)$ 上の結合的代数であり, 生成元 $\{x_{i,r}^{\pm}, k_i^{\pm 1}, h_{i,m} \mid 1 \leq i \leq n, r \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ といくつかの関係式 (cf. [CP94, Theorem 12.2.1][*1]) により定義される。また $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ は, ループ代数 $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ を q 変形することで得られる代数, ということもできる。実際上で述べた生成元から $\mathbf{A} = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$ 上生成される $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の部分 $\mathbf{A}$ 代数を $U_{\mathbf{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ と表すとき, 代数として

$$U(\mathbf{L}\mathfrak{g}) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbf{A}} U_{\mathbf{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g}) / \langle 1 \otimes k_i - 1 \otimes 1 \mid 1 \leq i \leq n \rangle \tag{1.1}$$

が成り立つ ($\mathbb{C} \cong \mathbf{A}/\langle q-1 \rangle$ により $\mathbb{C}$ を $\mathbf{A}$ 加群とみなした)。

[*1] 正確には, [CP94, Theorem 12.2.1] は $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の中心拡大である量子アフィン代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の関係式である。この関係式において $\mathcal{C}^{\pm\frac{1}{2}} = 1$ とすると, $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の定義関係式が得られる。

また $\{x_{i,0}^{\pm}, k_i^{\pm 1} \mid 1 \le i \le n\}$ が生成する $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の部分代数を $U_q(\mathfrak{g})$ と表す。これは $U(\mathfrak{g})$ の q 変形であり, $\mathfrak{g}$ の量子展開環と呼ばれる代数である。

1.2 minimal affinization

Chari は evaluation 加群や Kirillov-Reshetikhin 加群 (これらについては次節で述べる) の拡張として, minimal affinization と呼ばれる有限次元既約 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群の族を定義した [Cha95]。本稿の目的は, $\mathfrak{g}$ が古典型の場合にこの minimal affinization の指標公式を与えることである。そこで本節では minimal affinization の定義について述べたいと思う。

まず準備として, $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元加群について必要なことを述べておく (詳しくは [Jan96, Chapter 5] 等を参照いただきたい)。P を $\mathfrak{g}$ のウェイト格子とし, $P^+ \subseteq P$ を支配的整ウェイトの集合とする。また $(\ ,\ )$ で P 上の Weyl 群不変な $\mathbb{Z}$ 値非退化双線型形式を表す。$U_q(\mathfrak{g})$ 加群 V が

$$V = \bigoplus_{\lambda \in P} V_\lambda, \quad V_\lambda = \{v \in V \mid k_i v = q^{(\lambda, \alpha_i)} v \text{ for } i \in I\}$$

(α_i は単純ルート) を満たすとき, V は **1 型**であるという。全ての有限次元 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群は 1 型加群を簡単な自己同型でひねったものの直和として表されるので, 話を 1 型加群に限定してもなんら一般性は失われない。そこで以下本稿を通して, 有限次元 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 (および $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群) は全て 1 型であると仮定し, いちいち断らないことにする。

(1 型) 有限次元 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群の圏は有限次元 $\mathfrak{g}$ 加群の圏と非常によく似ており, 以下の定理が成り立つ。

定理 1.1. (i) 任意の $\lambda \in P^+$ に対し, 最高ウェイトが λ であるような有限次元既約 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 $V_q(\lambda)$ が同型を除いてただ一つ存在する。

(ii) 有限次元 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群の圏は半単純であり, 任意の既約加群はある $V_q(\lambda)$ に同型である。

(iii) $V_q(\lambda)$ の指標を $\operatorname{ch} V_q(\lambda) := \sum_\mu (\dim V_q(\lambda)_\mu) e^\mu \in \mathbb{Z}[P]$ と定める。このとき, $\operatorname{ch} V_q(\lambda)$ は最高ウェイト λ の既約 $\mathfrak{g}$ 加群 $V(\lambda)$ の指標 $\operatorname{ch} V(\lambda)$ と一致する。

続いて affinization の定義について述べる。minimal affinization はこの affinization の中で "極小"なものとして定義される。

定義 1.2. (i) 有限次元既約 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群 V が $U_q(\mathfrak{g})$ 加群として

$$V \cong V_q(\lambda) \oplus \bigoplus_{\mu<\lambda} V_q(\mu)^{\oplus m_\mu(V)} \qquad (m_\mu(V) \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

と既約分解するとき, V は $V_q(\lambda)$ の **affinization** であるという[*2]。

(ii) V と W を $V_q(\lambda)$ の affinization とする。これらが $U_q(\mathfrak{g})$ 加群として同型であるとき, V と W は**同値**であるという。また V の同値類を $[V]$ で表す。

$V_q(\lambda)$ の affinization の同値類の集合を $\mathbf{D}_\lambda$ と表すと, 任意の $\lambda \in P^+$ に対し $\mathbf{D}_\lambda$ は空でない有限集合となる。また $\mathbf{D}_\lambda$ 上にある種の辞書式順序による半順序[*3]を定めることで, 半順序付き集合 $(\mathbf{D}_\lambda, \leq)$ が定義できる。

定義 1.3 ([Cha95])**.** $V_q(\lambda)$ の affinization V に対し, その同値類 $[V]$ が $(\mathbf{D}_\lambda, \leq)$ において極小となるとき V を $V_q(\lambda)$ の **minimal affinization** と呼ぶ。

上の $\leq$ は全順序ではないため $\mathbf{D}_\lambda$ の極小元は一意とは限らず, $U_q(\mathfrak{g})$ 加群として同型でない $V_q(\lambda)$ の minimal affinization は複数ありうる。しかしながら多くの場合に一意性が成り立つことが知られている。例えば以下の定理が成り立つ。

定理 1.4 ([CP95])**.** $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形が直線型のとき (i.e., $ABCFG$ 型のとき), 任意の $\lambda \in P^+$ に対し $V_q(\lambda)$ の minimal affinization の同値類は一意である。

上の定理に含まれない場合, すなわち DE 型では実際に minimal affinization の同値類が一意とならない場合がある (DE 型に関して詳しくは [CP96a, CP96b] を参照いただきたい)。しかし, 例えば以下のような特別な $\lambda \in P^+$ に対してはやはり一意性が成り立つ。

命題 1.5. $\mathfrak{g}$ が D_n 型のとき $\lambda \in P^+$ が $\langle h_{n-1}, \lambda\rangle = 0$ または $\langle h_n, \lambda\rangle = 0$ を満たすならば, $V_q(\lambda)$ の minimal affinization の同値類は一意である。ここで h_{n-1}, h_n は spin node に付随する余ルートを表す。

本稿の後半では D 型の minimal affinization についても考察を行うが, その際には上

[*2] 全ての有限次元既約 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群はある (ただ一つの) $V_q(\lambda)$ の affinization となることも知られている。

[*3] 正確な定義は以下の通り: $[V], [W] \in \mathbf{D}_\lambda$ に対し $m_\mu(V), m_\mu(W)$ $(\mu \in P^+)$ で $V_q(\mu)$ に関するそれぞれの重複度を表すとき, 任意の $\mu \in P^+$ に対し

(i) $m_\mu(V) \leq m_\mu(W)$, または (ii) ある $\nu > \mu$ が存在して $m_\nu(V) < m_\nu(W)$ となる,

のいずれかが成り立つならば $[V] \leq [W]$ と定める。

の命題の仮定を満たす場合だけを考えることにする。そのため本稿に登場する minimal affinization (の同値類) は, 常に最高ウェイトだけから定まるものである。

1.3 minimal affinization の例

例 1. 零でない $a \in \mathbb{C}^*$ に対し, 線形写像 $\mathrm{ev}_a \colon \mathbf{L}\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を $\mathrm{ev}_a(x \otimes f) = f(a)x$ と定義すると, これは Lie 代数の準同型となる。この ev_a を **evaluation map** と呼ぶ。

以下 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ と仮定する。このとき Lie 代数の場合と同様に, 任意の $a \in \mathbb{C}(q)^\times$ に対し代数準同型 $\mathrm{ev}_a \colon U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g}) \to U_q(\mathfrak{g})$ が定義できる [Jim86, Section 2] (これもやはり evaluation map と呼ばれる)。このとき既約 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 $V_q(\lambda)$ の引き戻し $\mathrm{ev}_a^*\big(V_q(\lambda)\big)$ は既約 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群となる (**evaluation module** と呼ばれる)。これが $V_q(\lambda)$ の (同値を除いて唯一の) minimal affinization であることは定義から明らかであろう。このように $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ のときには, minimal affinization と evaluation module は同じ概念である。

補足 1.6. ループ代数の場合には evaluation map は全ての型で定義できるが, 量子ループ代数の場合には $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}_{n+1}$ のとき evaluation map は**存在しない**。そのため $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}_{n+1}$ のときには, 上の例とは異なりほとんどの minimal affinization は $U_q(\mathfrak{g})$ 加群として可約となる。またその既約分解を求めるのは一般に簡単な問題ではない*4。

例 2. 改めて $\mathfrak{g}$ を任意の単純 Lie 代数とする。$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $1 \leq i \leq n$ に対し $\lambda = m\varpi_i$ (ϖ_i は基本ウェイト) とおくと, $V_q(\lambda)$ は同値を除いて唯一の affinization をもつ。これらを **Kirillov-Reshetikhin (KR) 加群**と呼ぶ。KR 加群は「T 系を満たす (cf. [KNS09, Nak03, Her06])」,「フェルミ型分解公式を満たす (cf. [HKO$^+$99, HKO$^+$02])」,「結晶基底を持つ (cf. [OS08])」など興味深い性質を数多く持ち, 有限次元既約 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群の中でもとりわけ重要な加群である。

minimal affinization は, 上の例で述べた加群の自然な拡張として定義された概念である。しかしそれが (一般化のための一般化ではなく) 真に興味深い対象であるためには, これらの例を超えた一般の minimal affinization が良い性質を持っていることが不可欠であろう。今のところそのような決定的な結果が得られているとは必ずしも言い難いが, 近年少しずつ一般の minimal affinization の持つ性質も見つかってきている (minuscule 性 [Her07, CH10], 拡大 T 系 [MY12] 等)。また本稿で紹介する Jacobi-Trudi 型指標公式も, 一般の minimal affinization が持つ良い性質の一例と言えるであろう。

*4 そうでなければ本稿の結果はあまり意味のないものになってしまう。

2　minimal affinization の Jacobi-Trudi 型指標公式

2.1　Jacobi-Trudi 公式

まず導入として, 古典的な Jacobi-Trudi 公式

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \det\Big(h_{\lambda_i - i + j}(\mathbf{x})\Big)_{1\le i,j\le n} \tag{2.1}$$

を思い出そう。ここで $\lambda = (\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge 0)$ は分割, すなわち非増加非負整数列を表す。また $s_\lambda(\mathbf{x})$ は Schur 多項式, $h_k(\mathbf{x})$ は k 次完全対称多項式を表す[*5]。

(2.1) から既約 $\mathfrak{sl}_{n+1}$ 加群の指標公式が以下のようにして得られる[*6]。$\mathfrak{sl}_{n+1}$ の支配的整ウェイト $\lambda \in P^+$ に対し, 対応する分割 $(\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n)$ を $\lambda_i = \sum_{i\le k\le n}\langle h_k, \lambda\rangle$ と定める (添え字づけは標準的なものとする)。この分割をやはり λ と表すと, 対応する Schur 関数 $s_\lambda(\mathbf{x})$ は既約 $\mathfrak{sl}_{n+1}$ 加群 $V(\lambda)$ の指標と (適当な同一視のもとで) 一致する[*7]。また $h_k(\mathbf{x})$ は $\mathrm{ch}\, V(k\varpi_1)$ と一致する (ϖ_1 は基本ウェイト)。このことから (2.1) は, 既約 $\mathfrak{sl}_{n+1}$ 加群の指標公式

$$\mathrm{ch}\, V(\lambda) = \det\Big(\mathrm{ch}\, V\big((\lambda_i - i + j)\varpi_1\big)\Big)_{1\le i,j\le n} \tag{2.2}$$

と等価な等式である。

(2.2) は $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ のときに成り立つ式であり, 他の型では一般には成り立たない。しかし左辺の $V(\lambda)$ を minimal affinization に置き換えると, 同様の式が他の型でも成り立つ, というのが次節で述べる主定理の主張である。

2.2　主定理

以下本稿を通して $\mathfrak{g}$ は古典型と仮定する (単純ルートなどの添え字づけは [Kac90, Section 4.8] に従う)。また各 $\lambda \in P^+$ に対し, $V_q(\lambda)$ の minimal affinization を一つ固定し $L_q(\lambda)$ と表す。

定理 2.1 ([Sam14, Nao14]). $\lambda \in P^+$ が $\begin{cases} \langle h_n, \lambda\rangle = 0 & \mathfrak{g}\text{: } BC \text{ 型} \\ \langle h_{n-1}, \lambda\rangle = \langle h_n, \lambda\rangle = 0 & \mathfrak{g}\text{: } D \text{ 型} \end{cases}$ を満たす

[*5] この公式は (2.2) の導出のために述べたにすぎないので, ご存じない方は無視していただいて構わない。
[*6] 通常は $\mathfrak{gl}_n$ を考えるが, 後の話の都合上ここでは $\mathfrak{sl}_{n+1}$ を考えることにする。
[*7] $\mathfrak{sl}_{n+1}$ で話をしているので, 正確には $x_1x_2\cdots x_{n+1} = 1$ という関係式で割ってやる必要がある。

と仮定し, $\lambda_i = \sum_{i\le k\le n}\langle h_k,\lambda\rangle$ $(1\le i\le n)$ とおく。このとき,

$$\operatorname{ch} L_q(\lambda) = \begin{cases} \det\Big(\operatorname{ch} V\big((\lambda_i - i + j)\varpi_1\big)\Big)_{1\le i,j\le n} & \mathfrak{g}\text{: } ABD \text{ 型} \\ \det\Big(\sum_{0\le 2\ell\le\lambda_i - i + j}\operatorname{ch} V\big((\lambda_i - i + j - 2\ell)\varpi_1\big)\Big)_{1\le i,j\le n} & \mathfrak{g}\text{: } C \text{ 型} \end{cases} \tag{2.3}$$

が成り立つ。

任意の $k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対し, $U_q(\mathfrak{g})$ 加群として

$$L_q(k\varpi_1) \cong \begin{cases} V_q(k\varpi_1) & \mathfrak{g}\text{: } ABD \text{ 型} \\ \bigoplus_{0\le 2\ell\le k} V_q\big((k-2\ell)\varpi_1\big) & \mathfrak{g}\text{: } C \text{ 型} \end{cases}$$

が成り立つ。よって (2.3) は, 以下の統一的な形で書くこともできる*8:

$$\operatorname{ch} L_q(\lambda) = \det\Big(\operatorname{ch} L_q\big((\lambda_i - i + j)\varpi_1\big)\Big)_{1\le i,j\le n}.$$

また上の定理から, $L_q(\lambda)$ における既約 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 $V_q(\mu)$ の重複度 $\Big[L_q(\lambda), V_q(\mu)\Big]$ について以下の公式が得られる。

系 2.2 ([NN06, Sam14])**.** $\lambda\in P^+$ が定理 2.1 の仮定を満たすとする。このとき任意の $\mu\in P^+$ に対し,

$$\Big[L_q(\lambda), V_q(\mu)\Big] = \begin{cases} \delta_{\lambda,\mu} & \mathfrak{g}\text{: } A \text{ 型} \\ \sum_\kappa c^\lambda_{2\kappa,\mu} & \mathfrak{g}\text{: } BD \text{ 型} \\ \sum_\kappa c^\lambda_{(2\kappa)',\mu} & \mathfrak{g}\text{: } C \text{ 型} \end{cases}$$

が成り立つ。ここで κ は分割の集合を走る。また $c^\lambda_{\mu,\nu}$ は Littlewood-Richardson 係数 (cf. [Mac98]), κ' は κ の転置を表す。

補足 2.3. (1) 1.3 節の例 1 から, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ のとき任意の $\lambda\in P^+$ に対し $\operatorname{ch} L_q(\lambda) = \operatorname{ch} V_q(\lambda)$ $\big(= \operatorname{ch} V(\lambda)\big)$ が成り立つ。よって A 型のときは, 定理は (2.2) の単なる言いかえに過ぎない。

(2) 定理 (および系) の仮定をもう少し弱めることも出来る。すなわち, B_n 型の場合は $\langle\lambda, h_n\rangle\in 2\mathbb{Z}_{\ge 0}$, D_n 型の場合は $\langle h_{n-1},\lambda\rangle = \langle h_n,\lambda\rangle$ という仮定の下でも定理が成り立つ。ただしこのとき λ_i たちも少し修正する必要がある。

*8 定理 1.1 (iii) より $\operatorname{ch} V_q(\mu) = \operatorname{ch} V(\mu)$ であった。

上の定理と中井・中西による予想との関係について述べておく。[NN06] において, 彼らは minimal affinization の q 指標の行列式による表示を予想として提唱した[*9]。ここで q 指標というのは, $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群の $\left\{k_i^{\pm 1}, h_{i,m} \mid 1 \leq i \leq n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$ に関する一般化同時固有値のデータを与えるものである[*10]。特に q 指標を適当に特殊化することで, 通常の指標が得られる。

彼らの予想した公式を特殊化すると, (2.3) の右辺と等しい式となる。このことは定理 2.1 が, 彼らの予想の状況証拠となる結果であることを意味している。また AB 型の場合には, 既に予想に証明が与えられている。

定理 2.4 ([Her07, Theorem 6.1])**.** $\mathfrak{g}$ が AB 型のとき, 中井・中西の予想は正しい。

予想から定理 2.1 は容易に従うので, AB 型の場合には定理 2.1 はすでに知られていた公式である。一方 CD 型については中井・中西の予想は今のところ未証明であり, 定理 2.1 は新しい結果である[*11]。

3 主定理の証明

3.1 次数付き極限

まず証明において重要な役割を果たす次数付き極限について述べる。$U_{\mathbf{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g}) \subseteq U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ を 1.1 節で定義した部分 $\mathbf{A}$ 代数とする。各 minimal affinization $L_q(\lambda)$ に対し, 零でないウェイト λ のベクトル $v_\lambda \in L_q(\lambda)_\lambda$ を一つ固定し, $L_{\mathbf{A}}(\lambda) := U_{\mathbf{A}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})v_\lambda \subseteq L_q(\lambda)$ とおく。すると同型 (1.1) により $L_1(\lambda) := \mathbb{C} \otimes_{\mathbf{A}} L_{\mathbf{A}}(\lambda)$ は $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ 加群となる (これを $L_q(\lambda)$ の**古典極限**と呼ぶ)。このときある $a \in \mathbb{C}^\times$ が存在して,

$$\mathfrak{g} \otimes (t+a)^N L_1(\lambda) = 0 \quad (N \gg 0)$$

を満たす。この a に対し**カレント代数** $\mathfrak{g}[t] := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t] \subseteq \mathbf{L}\mathfrak{g}$ の自己同型 τ_a を $\tau_a\bigl(x \otimes f(t)\bigr) = x \otimes f(t+a)$ と定め, $\mathfrak{g}[t]$ 加群 $L(\lambda)$ を $L(\lambda) := \tau_a^* L_1(\lambda)$ により定義する。この $L(\lambda)$ を $L_q(\lambda)$ の**次数付き極限**と呼ぶ。このとき定義から容易に以下が示せる。

[*9] 彼らの予想は minimal affinization とは限らない加群に関するものも含んでいる。

[*10] 通常の指標は $\{k_i^{\pm 1}\}$ に関する同時固有値のデータを与えるものであった。よって q 指標は, 加群に関して通常の指標より多くの情報を持っている。

[*11] $\mathfrak{g}$ が ADE 型の場合には, 中島により全ての有限次元既約 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群に対し, その q 指標を与えるアルゴリズムが得られている [Nak04]。しかしこのアルゴリズムはかなり複雑なものであり, これを用いて D 型の場合に中井・中西予想 (または定理 2.1) を証明することは難しいであろうと思われる。

命題 3.1. $\mathrm{ch}\, L_q(\lambda) = \mathrm{ch}\, L_1(\lambda) = \mathrm{ch}\, L(\lambda)$ が成り立つ。

このことから $\mathrm{ch}\, L_q(\lambda)$ を求めるには, $\mathrm{ch}\, L(\lambda)$ が分かれば十分である。この事実を用いて, 「minimal affinization そのものではなく, その次数付き極限を調べる」というのが定理 2.1 の証明の基本アイデアである。

指標が同じというだけであれば古典極限 $L_1(\lambda)$ も同様であるが, いくつかの理由から $L(\lambda)$ の方が $L_1(\lambda)$ に比べ扱いが容易である。特に重要な点として $L(\lambda)$ は $\mathbb{Z}$ 次数付き $\mathfrak{g}[t]$ 加群であり[*12], この次数構造が $L(\lambda)$ を調べる際に様々な点で役に立つ[*13]。他にも $L_1(\lambda)$ は $L_q(\lambda)$ の選び方に依るが $L(\lambda)$ は依らない, $\mathfrak{g}[t]$ は自然にアフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数とみなせる, 等が $L_1(\lambda)$ ではなく $L(\lambda)$ を調べる主な理由である。

3.2 minimal affinization の定義関係式

筆者は [Nao13, Nao14] において $L(\lambda)$ の定義関係式を決定した。この結果は定理 2.1 の証明において重要な役割を果たすので, 本節ではこの結果について述べることにする。

$\mathfrak{g}$ の三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ を固定する。また, 正ルートの集合 Δ_+ の部分集合 Δ_+^1 を以下のように定義する:

$$\Delta_+^1 = \big\{\alpha \in \Delta_+ \mid \alpha = \sum_{1\le i\le n} n_i\alpha_i \text{ with } n_i \le 1\big\}.$$

定理 3.2 ([Nao13, Nao14]). $\lambda \in P^+$ に対し, $M(\lambda)$ をベクトル v から以下の関係式により定義される $\mathfrak{g}[t]$ 加群とする:

$$\mathfrak{n}_+[t]v = 0, \quad (h\otimes t^s)v = \delta_{s0}\langle h,\lambda\rangle v \text{ for } h \in \mathfrak{h}, s \ge 0,$$
$$f_i^{\langle\lambda,h_i\rangle+1}v = 0 \text{ for } 1 \le i \le n, \quad (f_\alpha \otimes t)v = 0 \text{ for } \alpha \in \Delta_+^1.$$

このとき同型 $L(\lambda) \cong M(\lambda)$ が成り立つ。

この定理の証明についても, 概略を述べておきたい。証明のためには, 二つの全射

$$M(\lambda) \twoheadrightarrow L(\lambda), \quad L(\lambda) \twoheadrightarrow M(\lambda)$$

の存在を示せばよい。一つ目を示すには $L(\lambda)$ が $M(\lambda)$ の定義関係式を満たすことを確かめればよく, これはそれほど難しくない。

*12 $\mathfrak{g}[t]$ は $\mathbb{C}[t]$ の次数により, $\mathbb{Z}$ 次数付き Lie 代数の構造を持つ。

*13 KR 加群の場合には, この $\mathbb{Z}$-grading は結晶基底上のエネルギー関数と関連する。詳しくは [Nao12] を参照いただきたい。

一方二つ目の全射の存在を直接示すことは容易ではない。そこで一般化 Demazure 加群 $D(\xi_1,\dots,\xi_n)$ を間にはさんで,

$$L(\lambda) \twoheadrightarrow D(\xi_1,\dots,\xi_n) \twoheadrightarrow M(\lambda)$$

を示すことになる。

ここで一般化 Demazure 加群についてざっくり紹介することにする。$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}c\oplus\mathbb{C}d$ をアフィン Lie 代数とする (cf. [Kac90])。このとき $\mathfrak{g}[t]$ は自然に $\widehat{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数とみなせる。Λ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の支配的整ウェイトとし, $\widehat{V}(\Lambda)$ で既約最高ウェイト $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群を表す。$\widehat{W}$ をアフィン Weyl 群とし, $\xi\in\widehat{W}\Lambda$ に対し 1 次元ウェイト空間 $\widehat{V}(\Lambda)_\xi$ の零でないベクトルを v_ξ と表す。$\Lambda^1,\dots,\Lambda^k$ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の支配的整ウェイトとし, 各 $1\le i\le k$ に対し $\xi_i\in\widehat{W}\Lambda^i$ とするとき, 一般化 Demazure 加群 $D(\xi_1,\dots,\xi_n)$ は

$$D(\xi_1,\dots,\xi_k) = \mathfrak{g}[t](v_{\xi_1}\otimes\cdots\otimes v_{\xi_k}) \subseteq \widehat{V}(\Lambda^1)\otimes\cdots\otimes\widehat{V}(\Lambda^k)$$

と定義される。

$\xi_1,\dots,\xi_n$ を適切に選んだとき, 全射 $L(\lambda)\twoheadrightarrow D(\xi_1,\dots,\xi_n)$ の存在は以下のようにして証明される。簡単のため $\mathfrak{g}$ が B 型であると仮定する*14。まず KR 加群のテンソル積に $L_q(\lambda)$ が埋め込めること, すなわち

$$L_q(\lambda) \hookrightarrow L_q(m_1\varpi_1)\otimes\cdots\otimes L_q(m_n\varpi_n)$$

を示す。ただし $\lambda = \sum_i m_i\varpi_i$ とする。すると $L(\lambda)$ の構成により, 零でない射 $\Phi\colon L(\lambda)\to L(m_1\varpi_1)\otimes\cdots\otimes L(m_n\varpi_n)$ が得られる。また各 $L(m_i\varpi_i)$ に対し, 適切な Λ^i が存在して $L(m_i\varpi_i)\hookrightarrow\widehat{V}(\Lambda^i)$ が示せることから, 単射

$$\iota\colon L(m_1\varpi_1)\otimes\cdots\otimes L(m_n\varpi_n)\hookrightarrow\widehat{V}(\Lambda^1)\otimes\cdots\otimes\widehat{V}(\Lambda^n)$$

が構成できる。このとき $\iota\circ\Phi$ の像が一般化 Demazure 加群 $D(\xi_1,\dots,\xi_n)$ となることが確かめられるので, $L(\lambda)\twoheadrightarrow D(\xi_1,\dots,\xi_n)$ が示せることになる。

一方 $D(\xi_1,\dots,\xi_n)$ が $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群の部分 $\mathfrak{g}[t]$ 加群であることを用いると, ある種のアフィン Weyl 群に関する対称性により, 帰納的にその定義関係式を決定することが出来る。あとはその定義関係式を $M(\lambda)$ の生成元が満たすことを確認することで, もう一つの全射 $D(\xi_1,\dots,\xi_n)\twoheadrightarrow M(\lambda)$ の存在も示すことが出来る。

*14 他の型でも大体同様であるが, $L_q(\lambda)$ を埋め込むテンソル積の選び方を少し修正する必要がある。

3.3 $\mathrm{ch}\, M(\lambda)$ の決定

定理 3.2 により, 定理 2.1 を証明するには $\mathrm{ch}\, M(\lambda)$ を求めればよい。この $M(\lambda)$ については, 筆者が定理 3.2 を証明する以前から既に Chari と Greenstein により研究がなされており, 以下の命題が示されていた。

命題 3.3 ([CG11])**.** $\lambda \in P^+$ が定理 2.1 の仮定を満たすとき,

$$\sum_{(\mu,s)\in\Gamma(\lambda)} (-1)^s \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}} \left(V(\mu), \bigwedge^s \mathfrak{g} \otimes V(\lambda)\right) \mathrm{ch}\, M(\mu) = \mathrm{ch}\, V(\lambda)$$

が成り立つ。ただし $\Gamma(\lambda) = \{(\mu, s) \in P^+ \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \lambda = \mu + \sum_{\alpha \notin \Delta_+^1} n_\alpha \alpha,\ \sum_\alpha n_\alpha = s\}$ とする。

(2.3) の右辺を H_λ と表すことにする。このとき Sam により, 以下の命題が証明された。

命題 3.4 ([Sam14])**.** $\lambda \in P^+$ が 2.1 の仮定を満たすとき,

$$\sum_{(\mu,s)\in\Gamma(\lambda)} (-1)^s \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}} \left(V(\mu), \bigwedge^s \mathfrak{g} \otimes V(\lambda)\right) H_\mu = \mathrm{ch}\, V(\lambda)$$

が成り立つ。

これら二つの命題から $\mathrm{ch}\, M(\lambda) = H_\lambda$ が示せる。よって本節の初めに述べた通り, 定理 2.1 の証明が完了したことになる。

謝辞 第 59 回代数学シンポジウムにおいて講演の機会をくださった世話人の方々, 特に講演を薦めてくださった池田岳先生に心より感謝申し上げます。

参考文献

[CG11] V. Chari and J. Greenstein. Minimal affinizations as projective objects. *J. Geom. Phys.*, 61(3):594–609, 2011.

[CH10] V. Chari and D. Hernandez. Beyond Kirillov-Reshetikhin modules. In *Quantum affine algebras, extended affine Lie algebras, and their applications*, volume 506 of *Contemp. Math.*, pages 49–81. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[Cha95] V. Chari. Minimal affinizations of representations of quantum groups: the rank 2 case. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 31(5):873–911, 1995.

[CP94] V. Chari and A. Pressley. *A guide to quantum groups.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[CP95] V. Chari and A. Pressley. Minimal affinizations of representations of quantum groups: the nonsimply-laced case. *Lett. Math. Phys.*, 35(2):99–114, 1995.

[CP96a] V. Chari and A. Pressley. Minimal affinizations of representations of quantum groups: the irregular case. *Lett. Math. Phys.*, 36(3):247–266, 1996.

[CP96b] V. Chari and A. Pressley. Minimal affinizations of representations of quantum groups: the simply laced case. *J. Algebra*, 184(1):1–30, 1996.

[Her06] D. Hernandez. The Kirillov-Reshetikhin conjecture and solutions of T-systems. *J. Reine Angew. Math.*, 596:63–87, 2006.

[Her07] D. Hernandez. On minimal affinizations of representations of quantum groups. *Comm. Math. Phys.*, 276(1):221–259, 2007.

[HKO+99] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Y. Yamada. Remarks on fermionic formula. In *Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998)*, volume 248 of *Contemp. Math.*, pages 243–291. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[HKO+02] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Z. Tsuboi. Paths, crystals and fermionic formulae. In *MathPhys odyssey, 2001*, volume 23 of *Prog. Math. Phys.*, pages 205–272. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002.

[Jan96] J. C. Jantzen. *Lectures on quantum groups*, volume 6 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[Jim86] M. Jimbo. A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, 11(3):247–252, 1986.

[Kac90] V.G. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras.* Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 1990.

[KNS09] A. Kuniba, T. Nakanishi, and J. Suzuki. T-systems and Y-systems for quantum affinizations of quantum Kac-Moody algebras. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 5:Paper 108, 23, 2009.

[Mac98] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and orthogonal polynomials*, volume 12 of *University Lecture Series.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lectures presented at Rutgers University, New Brunswick, NJ.

[MY12] E. Mukhin and C. A. S. Young. Extended T-systems. *Selecta Math. (N.S.)*, 18(3):591–631, 2012.

[Nak03] H. Nakajima. t-analogs of q-characters of Kirillov-Reshetikhin modules of quantum affine algebras. *Represent. Theory*, 7:259–274 (electronic), 2003.

[Nak04] H. Nakajima. Quiver varieties and t-analogs of q-characters of quantum affine algebras. *Ann. Math.*, 160:1057–1097, 2004.

[Nao12] K. Naoi. Fusion products of Kirillov–Reshetikhin modules and the $X = M$ conjecture. *Adv. Math.*, 231(3-4):1546–1571, 2012.

[Nao13] K. Naoi. Demazure modules and graded limits of minimal affinizations. *Represent. Theory*, 17:524–556, 2013.

[Nao14] K. Naoi. Graded limits of minimal affinizations in type D. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 10:Paper 047, 20, 2014.

[NN06] W. Nakai and T. Nakanishi. Paths, tableaux and q-characters of quantum affine algebras: The C_n case. *J. Phys. A*, 39(9):2083–2115, 2006.

[OS08] M. Okado and A. Schilling. Existence of Kirillov-Reshetikhin crystals for nonexceptional types. *Represent. Theory*, 12:186–207, 2008.

[Sam14] S. Sam. Jacobi–Trudi determinants and characters of minimal affinizations. *Pacific J. Math.*, 272(1):237–244, 2014.