2–連結な種数 3 の超楕円的代数曲線束の非超楕円的変形

村上雅亮[1]
鹿児島大学大学院理工学研究科

1，背景等

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の非特異射影代数曲面 S を考え，その上の相対極小な代数曲線束構造 $f : S \to B$ を考えよう．ここに B は複素数体 $\mathbb{C}$ 上の非特異射影代数曲線である．代数曲線束 $f : S \to B$ は一般ファイバーの種数が g のとき種数 g の代数曲線束であると言い，全ての一般ファイバーが超楕円曲線となるとき超楕円的であると言う．本講演では種数 3 の超楕円的代数曲線束を考え，全てのファイバーが 2–連結である場合[2]にこの代数曲線束が非超楕円的代数曲線束に変形するための判定法 (十分条件) を与える．

主定理を述べるには幾らか記号を用意せねばならないので，まず背景から述べよう．周知の様に代数曲線束の構造は代数曲面の研究において，古くから中心的な役割を果たしてきた．その研究においては様々なアプローチがあるが，相対標準環を通した研究は近年最も重要で活発なものの内の一つである (例えば [1], [7])．しかし相対標準環の大域構造については，局所構造に比べずっと少ない理解しかなされて来なかった．F. Catanese と R. Pignatelli は [5] において，相対標準環の大域構造を用いることにより，種数 2 の代数曲線束と種数 3 の非超楕円的代数曲線束について新しいタイプの構造定理を与えた．この結果は当該論文を含むいくつかの論文で応用されるなど有用であることが判明したので，このアプローチをより発展させるのは面白い問題である．実際，[8] において我々は種数 3 の超楕円的代数曲線束の構造定理を得た．

本講演の主定理はこの [8] の研究の続きである．そもそも超楕円曲線束は本質的には線織曲面の曲線束構造の二重被覆である．この二重被覆としての記述に頼らず相対標準環を用いることの利点の一つは，それが非超楕円的代数曲線束と比較的容易に関連づけられること[3]である．本講演の主定理は，[8] において得た超楕円曲線束を非超楕円的曲線束に関連づける試みを実行したものとなっている．

2，主定理

[1]講演の機会を頂き有り難うございました．オーガナイザーの皆様に感謝申し上げます．

[2]ファイバー F は $F = D + D'$ なる部分曲線 $D > 0$, $D' > 0$ への任意の分解について $DD' \geq 2$ となるとき「2–連結である」と言われる．

[3]これはあくまでも利点の一つに過ぎず，勿論利点はこれだけではない．実際，Catanese と Pignatelli は [5] において，種数 2 の代数曲線束についての彼らの構造定理を用いることにより，長らく不明であった第 1 Chern 数 $c_1^2 = 3$, 幾何種数 $p_g = 1$, 不正則数 $q = 1$ の一般型曲面のモジュライ空間の連結成分の個数 $(= 4)$ を決定することに成功している．種数 2 であれば常に超楕円的となるのだから，このことからも上に述べたものがあくまで利点の一つに過ぎないことは分かるであろう．

それでは主定理を述べよう．以下 $f : S \to B$ は相対極小な種数 3 の超楕円的代数曲線束であるとし，全てのファイバーは 2-連結であるとする．

まず幾つか記号を準備する．$\omega_{S|B}$ を $f : S \to B$ の相対標準層であるとする．すなわち ω_S，ω_B をそれぞれ S, B の標準層とするとき $\omega_{S|B} = \omega_S \otimes f^*(\omega_B)^{\otimes(-1)}$ である．このとき各自然数 n に対して f による $\omega_{S|B}^{\otimes n}$ の順像 $V_n = f_*(\omega_{S|B}^{\otimes n})$ は B 上の局所自由層となる．これらを直和して得られる準連接 $\mathcal{O}_B$-可換代数の層 $\mathcal{R}(f) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} V_n$ が f の相対標準環と呼ばれるものであった．

本稿の仮定のもとでは f が超楕円的としていたので，f の各一般ファイバーは超楕円対合を持つ．これらの超楕円対合が張り合って，S の対合 ι を定める．この ι を f の超楕円対合と呼ぶ．この ι が S の自己同型群の中で生成する部分群 $\langle \iota \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 \subset \mathrm{Aut}(S)$ は曲面 S に作用する．この作用が V_n への作用を誘導し，これが相対標準環への作用を定める．各斉次部分が ι^* に関して固有空間に直和分解するので，V_n^+, V_n^- で，それぞれ固有値 $+1$ 部分，-1 部分を表わすこととする．各 V_n^+, V_n^- の階数は Riemann–Roch の定理により簡単に計算できるが，ここでは

$$\mathrm{rk}\, V_1 = \mathrm{rk}\, V_1^- = 3, \quad \mathrm{rk}\, V_2^+ = 5, \quad \mathrm{rk}\, V_2^- = 1$$

であること，そして特に V_2^- が可逆層であることのみ注意しておく．

さて $S^2(V_1)$ を V_1 の 2 次対象積とするとき，相対標準環の積構造より定まる射 $\sigma_2 : S^2(V_1) \to V_2$ を考える．両辺は共に階数 6 の局所自由層である．また $\bigwedge^2 V_1$ を V_1 の 2 次交代積とするとき，層の射 $\mathfrak{c} : S^2(\bigwedge^2 V_1) \to S^2(S^2(V_1))$

$$(a \wedge b)(c \wedge d) \mapsto (ac)(bd) - (ad)(bc)$$

を考え，$S^2(\sigma_2) \circ \mathfrak{c} : S^2(\bigwedge^2 V_1) \to S^2(V_2)$ を $\mathfrak{c} : S^2(\bigwedge^2 V_1) \to S^2(S^2(V_1))$ と $S^2(\sigma_2) : S^2(S^2(V_1)) \to S^2(V_2)$ の合成射とする．$S^2(\sigma_2) \circ \mathfrak{c}$ は階数 6 の局所自由層から階数 21 の局所自由層への射である．このとき $S^2(\sigma_2) \circ \mathfrak{c} : S^2(\bigwedge^2 V_1) \to S^2(V_2)$ の余格 $\tilde{V}_4 = \mathrm{Cok}(S^2(\sigma_2) \circ \mathfrak{c})$ が階数 15 の局所自由層であることが証明できる．

以上の準備のもと，次が本講演の主定理である．

定理 1. $f : S \to B$ を相対極小な種数 3 の超楕円的代数曲線束であるとし，全てのファイバーは 2–連結であるとする．可逆層 L_4' を $L_4' = (V_2^-)^{\otimes 2}$ で定める．今，次の 3 条件が満たされているとしよう；

1) $\dim \mathrm{Hom}(S^2(V_1), V_2^-) > \dim \mathrm{Hom}(V_2^+, V_2^-)$,
2) $h^1(\tilde{V}_4 \otimes (L_4')^{\otimes(-1)}) = 0$,
3) S の相対極小モデル X は非特異．

このとき $f : S \to B$ の非特異な底空間 T 上の変形族 $\mathfrak{f} : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ であり，一般の $t \in T$ に対して t 上のファイバー $f_t : S_t \to B_t$ が種数 3 の非超楕円的代数曲線束となるものが存在する．

3，証明について

以下定理 1 の証明について少しだけ述べておく．

第一段階．

定理 1 の証明の第一段階は，全てのファイバーが 2–連結であるような種数 3 の超楕円的相対極小代数曲線束 $f : S \to B$ が与えられたとき，Catanese–Pignatelli の種数 3 超楕円束についての結果のアナログとして，$f : S \to B$ の非超楕円的変形族の構造定理をあたえることである．

目的の上で支障がないので，変形族は今回はパラメータ空間が非特異のもののみを考える．また変形族の方もスムースな変形族のみを考える．すなわち代数曲線束 $f : S \to B$ が与えられたとき，非特異代数多様体 T, 参照点 $t_0 \in T$, 曲面 S のスムースな変形族 $\pi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to T$, 曲線 B のスムースな変形族 $\pi_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to T$, 平坦固有射 $\mathfrak{f} : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ の組であり，$\pi_{\mathcal{S}} = \pi_{\mathcal{B}} \circ \mathfrak{f}$ かつ $f_0 = f : S_0 = S \to B_0 = B$ を満たすものをここでは “$f : S \to B$ の変形族” と呼ぶことにする．勿論ここに各閉点 $t \in T$ に対し $S_t = \pi_{\mathcal{S}}^{-1}(t)$, $B_t = \pi_{\mathcal{B}}^{-1}(t)$ であり，$f_t : S_t \to B_t$ は $\mathfrak{f} : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ の t 上への制限である．さらに，変形族という言葉には「全ての $t \in T$ に対して代数曲線束 $f_t : S_t \to B_t$ は相対極小でかつ全てのファイバーが 2–連結である」という条件も込めておくことにする．これは，もし全てのファイバーが 2–連結な種数 3 の超楕円的相対極小代数曲線束 $f : S \to B$ に対してその変形族が与えられれば，パラメータ空間 T を小さなものに置き換えることによりこの条件を満たす様できるので，無害な条件である．また一般の $t \in T$ に対して，$f_t : S_t \to B_t$ が非超楕円的となるとき，この変形族を “非超楕円的変形族” と呼ぶことにする．

まだ説明していない 5-tuple なる言葉を用いて，我々の構造定理は以下のものである:

定理 2. $f : S \to B$ は全てのファイバーが 2–連結である種数 3 の超楕円的相対極小代数曲線束であるとする．T を非特異代数多様体，t_0 をその一点とする．このとき，$f : S \to B$ の (T, t_0) 上の非超楕円的変形族の同型類全体の集合と「許容的な」5-*tuple* の同型類全体の集合の間に自然な全単射が存在する．

この文言の意味を明らかにする為には 5-tuple なる言葉を説明しなければならない．我々の定理における 5-tuple とは，概ね以下のようなものからなる五つ組

$$(\pi_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to T,\, \mathcal{V}_1, \tau,\, \xi,\, \delta)$$

のことである: $\pi_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to T$ は曲線 B のスムースな変形族，$\mathcal{V}_1$ は $\mathcal{B}$ の階数 3 の局所自由層，τ は $\mathcal{B}$ の正因子，ξ, δ はまだ説明しない何か．

この ξ, δ が何であるかを説明するには，超楕円的変形族が与えられたときにどの様に 5–tuple を得るかを見るのが良い．超楕円束 $f : S \to B$ の (T, t_0) 上の非超楕円的変形族 $\mathfrak{f} : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ が与えられたとする．このとき $\mathfrak{f}$ の

相対標準層 $\omega_{\mathcal{S}|\mathcal{B}}$ を $\omega_{\mathcal{S}|\mathcal{B}} = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(K_{\mathcal{S}} - \mathfrak{f}^* K_{\mathcal{B}})$ で定める．ここに $K_{\mathcal{S}}$, $K_{\mathcal{B}}$ はそれぞれ $\mathcal{S}$, $\mathcal{B}$ の標準因子である．また各自然数 n に対して $\mathcal{V}_n = f_*(\omega_{\mathcal{S}|\mathcal{B}}^{\otimes n})$ とおくと $\mathcal{V}_n$ は B 上の局所自由層になることが分かる．普通の代数曲線束の相対標準環の場合と同様，直和 $\mathcal{R}(\mathfrak{f}) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{V}_n$ は次数付き $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$–可換代数の層となるので，これを $\mathfrak{f}$ の相対標準環と呼ぶことにする．

$$\bar{\sigma}_2 : S^2(\mathcal{V}_1) \to \mathcal{V}_2$$

を $\mathcal{R}(\mathfrak{f})$ の積構造から定まる自然な射とするとき，次を示すことが出来る．

補題 1. $\mathcal{B}$ 上に次の 2 条件を満たす正因子 τ が存在する：
1) 余核 $\mathrm{Cok}\,\bar{\sigma}_2$ は可逆 $\mathcal{O}_\tau$–加群,
2) $f_t : S_t \to B_t$ が超楕円的である為の必要十分条件は $B_t \subset \sup \tau$.

以上を見れば非超楕円的変形族が与えられたとき，それに付随する 5-tuple の最初の三つの成分がどうきまるかは明らかであろう．一つ目の成分は非超楕円的変形族にあらわれる $\pi_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to T$ であり，二つ目の成分は相対標準環 $\mathcal{R}(\mathfrak{f})$ の 1 次部分，そして三つ目の成分は補題 1 に現れる正因子 τ である．

だからあとは四つ目の成分 ζ と五つ目の成分 ξ だけ分かれば良い．四つ目の成分 ζ は簡単で，これは $\bar{\sigma}_2 : S^2(\mathcal{V}_1) \to \mathcal{V}_2$ から定まる拡大類

$$0 \to S^2(\mathcal{V}_1) \to \mathcal{V}_2 \to \mathcal{T}_2 \to 0$$

である．より正確には $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{T}_2, S^2(\mathcal{V}_1))$ を $\mathcal{T}_2$ の自己同型群の作用で割った空間の中で上の拡大が定める類のことである．

あとは五つ目の成分 ξ のみ見れば良い．これを見る為に，$\mathcal{T}_2 = \mathrm{Cok}\,\bar{\sigma}_2$ が可逆 $\mathcal{O}(\tau)$–加群であったので $\mathrm{supp}\,\tau$ の外では $\bar{\sigma}_2$ は同型であることに注意する．従って $\bar{\sigma}_2$ より誘導される有理写像 $\bar{\sigma}_2^* : \mathbb{P}(\mathcal{V}_2) - - \to \mathbb{P}(S^2(\mathcal{V}_1))$ は双有利写像である．そこで Veronese embedding $\mathbb{P}(\mathcal{V}_1) \to \mathbb{P}(S^2(\mathcal{V}_1))$ と $\bar{\sigma}_2^*$ の逆有理写像 $(\bar{\sigma}_2^*)^{-1} : \mathbb{P}(S^2(\mathcal{V}_1)) - - \to \mathbb{P}(\mathcal{V}_2)$ の合成 $\mathbb{P}(\mathcal{V}_1) - - \to \mathbb{P}(\mathcal{V}_2)$ を rational Veronese map と呼ぶことにする．この rational Veronese map の像を $\mathcal{W}$ とするとき，次が成立する．

補題 2. $\mathcal{S}$ の標準モデル $\mathcal{X} = \mathcal{P}roj\mathcal{R}(\mathfrak{f})$ は $\mathcal{W}$ の超曲面である．

この補題のもとに ξ が何であるかが説明出来る．ここではきっちりしたことは書かないが，ξ は $\mathcal{W}$ 内での定義方程式にあたる「何か」である．

以上で我々の場合に 5-tuple が何であるかが分かった．しかし以上で見たのは非超楕円的変形族が与えられた時にそれに対し 5-tuple をどう付随させるかという部分である．実際にはまずこの「付随する 5-tuple」の受け皿となる様に抽象的に 5-tuple の概念を定める．そしてその抽象的に定義された 5-tuple に「許容性 (admissibility)」なる概念を導入し,「非超楕円的変形族に付随する 5-tuple が許容的であること」，逆に「許容的な 5-tuple に対し，必

ずある非超楕円的変形族が存在して，この 5-tuple はその非超楕円的変形族に付随するものとして実現されること」，そして「許容的な 5-tuple に対して対応する非超楕円的変形族の同型類が唯一つに定まること」を示したのが定理 2 である．

第二段階.

証明の第二段階は定理 1 の三つの条件を満たす $f : S \to B$ が与えられたときこの三つの条件を用いてパラメータ空間 (T, t_0) とその上の許容的 5-tuple を構成することである．この部分は本稿では説明しないが，以下の注意だけしておく．

定理 1 に於いて条件 1) は拡大

$$0 \to S^2(\mathcal{V}_1) \to \mathcal{V}_2 \to \mathcal{T}_2 \to 0$$

を構成できる様するための，すなわち 5-tuple の四つ目の成分 ζ を得る為の，条件である．一方条件 2) は曲面 S の標準モデル X のある空間の中での方程式が変形族 $\mathcal{S}$ の標準モデル $\mathcal{X}$ の $\mathcal{W}$ の中での方程式に伸びる様する為の，すなわち 5-tuple の五つ目の成分 ξ を得る為の，条件である．最後の条件 3) は本質的な条件ではなく，定理の形をもう少し精密な形に書き換えれば実質的に不要なものである．

4，応用

最後に応用について述べて本稿を終える．定理 1 を用いて次の様なことが出来た: 第 1 Chern 数 $c_1^2 = 8$, 幾何種数 $p_g = 4$, 不正則数 $q = 0$ の一般型曲面の 32 次元の族を構成し，この族がモジュライ空間の中でなす stratum を $M_0^\sharp$ と置く時，Bauer-Pignatelli [4] に出てくる 28 次元の stratum M_0 がモジュライ空間のなかで $M_0^\sharp$ の境界上にあることを示すことができた．特に我々の構成した第 1 Chern 数 $c_1^2 = 8$, 幾何種数 $p_g = 4$, 不正則数 $q = 0$ の一般型曲面は Bauer-Pignatelli の stratum M_0 のものと可微分同相である．

方法は，我々の $M_0^\sharp$ の一般の点に対応する曲面は種数 3 の非超楕円曲線束構造を持ち，一方 Bauer–Pignatelli の M_0 の一般の点に対応する曲面は種数 3 の超楕円曲線束構造を持つので，この Bauer–Pignatelli の一般の点に対応する曲面の超楕円曲線束を我々の定理 1 を用いて非超楕円曲線束に変形し，この変形で得られた曲面が stratum $M_0^\sharp$ の点に対応することを証明する，というものである．

この様に我々の主定理はモジュライ空間の strata を張り合わせることに用いることが出来る．実際，本稿の最初では我々の主定理の背景を Catanese–Pigantelli のアプローチの一般化の仕事の続きであると述べたが，実は我々の主定理は元々モジュライ空間の strata を張り合わせてモジュライ空間の連結成分の個数を調べる為の道具を得ることを企図して研究したものでもある．

幾何種数 $p_g = 4$ は標準像が曲面になりうる最小の幾何種数の場合であり，そのため標準写像の双有理性に関連して Enriquess の頃から研究されて

来た．現在では $c_1^2 \leq 7$ まで曲面の完全な分類があり，曲面の分類という意味では $c_1^2 = 8$ が次の目標である．しかし実は $c_1^2 = 6, 7$ の場合もモジュライ空間の連結性分の個数は解決されておらず，これらを解決するのは興味深い問題である．$c_1^2 = 6$ の問題については Horikawa [6] がモジュライ空間の連結成分の個数が高々 3 であることを示して以来，漸く [3] において高々 2 であることが示された．一方 $c_1^2 = 7$ の場合については I. Bauer が [2] において曲面を完全に分類すると同時にモジュライ空間の連結成分が高々 2 であることを証明している．この $c_1^2 = 7$ の場合一方の stratum の点に対応する曲面に種数 3 の超楕円曲線束が入り，もう片方の stratum に対応する曲面に種数 3 の非超楕円曲線束構造が入る．そこで定理 1 より精密な判定法を作って，$c_1^2 = 7$ の場合にモジュライ空間の連結性を示すということが考えられる．実は本当はこれやりたいことなのであるが，今回の講演では現時点で出来ているところまでの結果で講演した．すなわちまず第一段階として試みに荒い定理を作ってみたのが定理 1 であり，この定理を用いて $c_1^2 = 7$ の場合より簡単な $c_1^2 = 8$ の場合で試してみたのが上に述べた応用である．

References

[1] Ashikaga, T., Konno, K. Global and local properties of pencils of algebraic curves, Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka), *Adv. Stud. Pure Math.,36, Math. Soc. Japan, Tokyo*, (2002), 1–49.

[2] Bauer, I. Surfaces with $K^2 = 7$ and $p_g = 4$, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **152** (2001), no. 721.

[3] Bauer, I., Catanese, F., Pignatelli, R. The moduli space of surfaces with $K^2 = 6$ and $p_g = 4$, *Math. Ann.*, **336** (2006), no. 2, 421–438.

[4] Bauer, I., Pignatelli, R. Surfaces with $K^2 = 8$, $p_g = 4$ and canonical involution, *Osaka J. Math.*, **46** (2009), no. 3, 799–820.

[5] Catanese, F., Pignatelli, R. Fibrations of low genus, I, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **39** (2006), 1011–1049.

[6] Horikawa, E. Algebraic surfaces of general type with small c_1^2. III, *Invent. Math.*, **47** (1978), no. 3, 209–248.

[7] Konno, K. 1-2-3 theorem for curves on algebraic surfaces, *J. Reine. Angew. Math.*, **533** (2001), 171–205.

[8] Murakami, M. Notes on hyperelliptic fibrations of genus 3, I, preprint.