頂点作用素代数の多変数型トレイス関数と
モジュラー不変性

宮本雅彦（筑波大学数理物質系）

1 序文

ここで発表する内容は、学振特別研究員として筑波大学に 1 年間滞在した Matthew Krauel 氏との共同研究 [6] である。

頂点作用素代数 (VOA) の概念は、モンスター単純群の既約表現の次数と楕円モジュラー関数 $J(\tau)$ の係数との神秘的な関係を説明するために Borcherds によって導入されたものである [2]。これは現在は、リーマン面上の共形場理論の（対となっている片方の）カイラル代数の代数版と理解されており、それゆえ、モジュラー不変の性質を持つと考えられている。実際、いくつかの例において、既約加群 $W = \oplus_{n=0}^{\infty} W_{r+n}$ の指標と呼ばれる関数 $Z_W(\mathbf{1},\tau) := \sum_{n=0}^{\infty} \dim W_{r+n} q^{r+n-c/24}$ $(q = e^{2\pi i\tau})$ の張る空間が直接計算によりモジュラー不変性を持つことが観察されていた。VOA の公理を使った一般的な証明は、1996 年に Zhu [9] によって与えられている。そこでは、正規 VOA において、指標だけではなく、既約加群上のトレイス関数族の張る空間が $SL_2(\mathbb{Z})$-不変性を持つことを示した。

この講演では、Zhu の結果を拡張して、多変数型のトレイス関数を考え、そのモジュラー不変性を証明する。その応用として、ジーゲルテータ級数の変換公式を統一的に求める。

頂点作用素代数の正確な定義は少し長いので、ここでは必要な事に絞って簡単な説明をしておこう。ヴィラソロ代数

$$Vir = (\oplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L(n)) \oplus \mathbb{C}C$$

とは、関係式

$$[Vir, C] = 0, [L(n), L(m)] = (n-m)L(n+m) + \delta_{n+m,0}\frac{n^3-n}{12}C$$

を満たすリー代数であり、ループ代数 $\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}x^n\frac{d}{dx}$ の中心拡大である。ヴィラソロ代数の表現で、C が $c \in \mathbb{C}$ 倍として作用するとき、c をその表現における中心電荷と呼ぶ。

VOA とはこのヴィラソロ代数を拡張したものと考えてよい。ただし、もはやリー代数ではなく、普遍包絡環に近いものであるが、結合代数ではない。VOA の外見は、次数付きベクトル空間 $V = \oplus_{n=0}^{\infty} V_n$、線形写像 $Y(\cdot, z) : V \to \mathrm{End}(V)[[z^{-1}, z]]$、 そして真空とヴィラソロ元と呼ばれる 2 つの特別な元 $\mathbf{1} \in V_0$, $\omega \in V_2$ からなる 4 つ組 $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ （通常は簡単

に V と書く）であるが、これらは、後で説明する局所可換などのいくつかの条件を満す。$v \in V_n$ のとき、v のウエイトを n と言い、$\mathrm{wt}(v) = n$ で表す。$v \in V$ の線形写像 $Y(\cdot, z)$ による像 $Y(v,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$ は v の頂点作用素 (vertex operator) と呼ばれる。各整数 n に対して、z^{-n-1} の係数 $v_n \in \mathrm{End}(V)$ を利用して、V の中に、$v \times_n u = v_n(u)$ という n-積を作り出すことができる。以下 $v_n(u)$ を $v_n u$ と記す。すべての整数に対して積が定義できるので、V は無限個の積を持つ代数となる。これが頂点作用素代数 (vertex operator algebra) である。重要な性質は、$v, u \in V$ の頂点作用素が以下の交換関係（局所可換）と結合関係

$$\begin{aligned}&[v_n, u_m] = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} (v_j u)_{n+m-j} \\ &(v_n u)_m = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} (-1)^j \{v_{n-j} u_{m+j} - (-1)^n u_{n+m-j} v_j\}\end{aligned}$$

を満たすことである。右辺は一見無限和のように見えるが、VOA やその表現には常に "下に有界"(j が十分大きいと $v_j u = 0$) という性質を要求する。この性質がリー代数との大きな違いであり、VOA に難しさと、独自性を与えている。なぜ、"j が十分大" なのに下に有界と言う理由は、$\mathrm{wt}(v_j u) = \mathrm{wt}(v) + \mathrm{wt}(u) - j - 1$ という性質を持っているからである。

ヴィラソロ元 $\omega \in V_2$ は $Y(\omega, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n) z^{-n-2}$ の係数 $L(n) := \omega_{n+1}$ がヴィラソロ代数の関係式を満たしているものであり、このヴィラソロ代数の中心電荷 c を VOA の中心電荷 (central charge) と呼ぶ。さらに、$L(0)$ の固有値がウエイトを与え、微分も $Y(L(-1)v, z) = \frac{d}{dz} Y(v,z)$ によって与えられているという条件も仮定する。真空 $\mathbf{1} \in V_0$ は自明な作用 $Y(\mathbf{1}, z) = 1_V$ を持つ元である。ここでは、$V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$ を満たしている CFT-タイプと呼ばれる VOA だけを扱う。VOA の詳細については、[5] を参照してほしい。

VOA は一応代数なので、加群も同じような形で定義される。即ち、W が VOA V の加群であるとは、加群上の頂点作用素

$$Y^W(\cdot, z) : v \in V \mapsto Y^W(v,z) = \sum_{n\in Z} v_n^W z^{-n-1} \in \mathrm{End}(W)[[z^{-1}, z]]$$

が与えられ、V と同じような条件を満たすことである。加群に対しても $v \in V_n$ なら、$o(v) := v^W_{\mathrm{wt}(v)-1}$ は次数を保つ作用であり、$L(0) := o(\omega)$ の固有値が W の次数を与えている。

この講演では、V のすべての加群が有限種類の既約加群（同型類）の直和となっていると仮定する。このような VOA を正規と呼ぶ。このとき、既約加群 W はある有理数（共形ウエイト) r があって、

$$W = \oplus_{n=0}^{\infty} W_{r+n}$$

と次数空間の直和に分解する。斉次元のウエイトの差は整数である。

先に述べたように、Zhu は、W の指標 $\sum_{n=0}^{\infty} \dim W_{r+n} q^{r+n-c/24}$ だけではなく、すべて

の $v \in V$ に対するトレイス関数

$$Z_W(v,\tau) = \mathrm{Tr}_W o(v) q^{L(0)-c/24}$$

の族を考えた。利点は、異なる既約加群に対して、同じ指標となることがあっても、W 上のトレイス関数の族として考えると、一次独立となっており、トレイス関数から既約加群 W を再構成できるのである。また、

$$Z_W(\omega - \frac{c}{24}\mathbf{1}, \tau) = 2\pi i \frac{d}{d\tau} Z_W(\mathbf{1}, \tau)$$

のように微分も扱うことができる。Zhu はこのトレイス関数の族を使って、正規 VOA という条件だけで（当初はいくつかの条件も付けていたが、現在では必要ない）一般論としてトレイス関数の族の張る空間のモジュラー不変性を証明した。即ち、$W^1, \ldots, W^k$ を既約 V-加群（の同型類）全体の集合とすると、トレイス関数

$$Z_j(v,\tau) = \mathrm{Tr}_{W^j} o(v) q^{L(0)-c/24}$$

は上半平面上 $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ の関数として解析関数に絶対収束し、$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、$S(\sigma)_{hj} \in GL_k(\mathbb{C})$ が存在して、すべての $v \in V$ に対して、

$$\left(\frac{1}{e\tau + f}\right)^{\mathrm{wt}[v]} Z_h(v, \frac{a\tau + b}{e\tau + f}) = \sum_{j=1}^{k} S(\sigma)_{hj} Z_j(v,\tau)$$

が成り立つのである。$\mathrm{wt}[v]$ は 新しい頂点作用素 $Y[v,z] := Y(v, e^{2\pi iz} - 1)e^{w\pi iz\mathrm{wt}(v)}$ と新ヴィラソロ元 $\widetilde{\omega} = 2\pi i(\omega - \frac{c}{24}\mathbf{1})$ による新しい VOA $(V, Y[,], \widetilde{\omega}, \mathbf{1})$ によって与えられるウエイトである。wt[] と wt() の違いの説明は長くなるので、あまり違いを気にしないことにする。

VOA のモジュラー不変性の結果はいくつかの形で拡張されている。例えば、有限自己同型との関連から、加群だけでなくツイスト加群までも含めたモジュラー不変性 [4] や有限生成加群はすべて $\mathbb{N}$-次数付け可能であるという条件で、ある種のトレイス関数を導入することでモジュラー不変性が証明されている [7]。

2　多変数型トレイス関数

この拡張を考えたきっかけは、トレイス関数を $\tau \in \mathbb{C}$ 上の関数と見ず、VOA のウエイト 2 の空間の一次元部分代数 $\mathbb{C}\omega$ 上の関数と考えたことである。$(V_2, \times_1)$ は代数であり、$v \in V_2$ に対して、$\omega_1 v = v_1 \omega = 2v$ なので、$\omega/2$ は単位元と同じであり、$\mathbb{C}\omega/2$ は $\mathbb{C}$ と同型

な可換代数である。その観点から、$(V_2, \times_1)$ のより広い可換部分代数を変数領域とするトレイス関数が定義できると考えた。

最初の拡張は、半単純可換代数であり、1 の冪等元分解を考えることである。V のウエイト 2 の空間で考えると、互いに直交した共形元 $e^j \in V_2$ $(j = 1, \ldots, g)$ があって、

$$\omega = e^1 + \cdots + e^g$$

となっていることを意味する。ここで、共形元とは、それが生成する部分頂点作用素代数のヴィラソロ元となっているものであり、$e^j/2$ は $(V_2, \times_1)$ において冪等元である。c_j で e^j の中心電荷を表し、$\widetilde{e^j} = e^j - \frac{c_j}{24}\mathbf{1}$ と置く。これを使って既約加群 W^h 上の多変数トレイス関数を

$$Z_h(v : \tau_1, \ldots, \tau_g) := \mathrm{Tr}_{W^h} o(v) e^{o(\sum_{j=1}^{g} 2\pi i \tau_j \widetilde{e^j})} \tag{2.1}$$

と定義する。変数領域は、$(V_{[2]}, \times_{[1]})$ の可換部分代数 $\mathbb{C}\tilde{e}^1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\tilde{e}^g$ の中の上半空間

$$\sum_{j=1}^{g} \tau_j \tilde{e}^j \in \mathcal{H}\tilde{e}^1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}\tilde{e}^g \subseteq V_{[2]}$$

あり、$\sigma \in SL(2, \mathbb{Z})$ の作用は、

$$(\tau_1 \tilde{e}^1, \ldots, \tau_g \tilde{e}^g) \mapsto (\frac{a\tau_1 + b}{e\tau_1 + f}\tilde{e}^1, \ldots, \frac{a\tau_g + b}{e\tau_g + f}\tilde{e}^g)$$

である。この設定で、次のモジュラー不変性を得る。

Theorem 1 V を正規 *VOA* とし、$\omega = \sum_{j=1}^{g} e^j \in V_2$ を直交共形元への分解とする。$v \in V$ をすべての e^j に関して、$\mathrm{wt}_j[]$-斉次元とし、すべての j に対して、$\mathrm{wt}_j[w] \le \mathrm{wt}_j[v]$ となる $w \in V$ に対しては、$Z_h(w : \tau_1, \ldots, \tau_g)$ が $\mathcal{H}^{\times g}$ 上で解析関数に絶対収束すると仮定する。このとき、$(\tau_1, \ldots, \tau_g) \in \mathcal{H}^{\oplus g}$ と $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、

$$\prod_{p=1}^{g} (e\tau_p + f)^{-\mathrm{wt}_p[v]} Z_\ell \left(v : \frac{a\tau_1 + b}{e\tau_1 + f}, \ldots, \frac{a\tau_g + b}{e\tau_g + f} \right) = \sum_{h=1}^{r} S(\sigma)_{\ell h} Z_h \left(o(v) : \tau_1, \ldots, \tau_g \right)$$

が成り立つ。ここで、$S(\sigma)_{ij}$ は以前に述べた *Zhu* 理論で出てくる行列である。

注意　各共形元 e^j に対しては、正規条件を仮定していないので、[8] で扱っている Zhu 理論の直和型ではない。

3　ジョルダン代数

変数領域である可換代数をさらに拡張する。$(V_2, \times_1)$ は代数となっているが、一般には結合法則も可換性も満たしているわけではない。$(V_2, \times_1)$ の部分代数 $\mathcal{G}$ が Griess 部分代数であるとは、$u, v \in \mathcal{G}$ に対して $u_2 v = 0$ となるものを言う。このとき、$\mathcal{G}$ は可換代数となる。一般的に、$u, v \in V_2$ なら、$u_1 v \in V_1$ となるので、$V_1 = 0$ の場合には、V_2 自体が Griess 代数となる。有名な例は、ムーンシャイン VOA $V^\natural$ である。

ウエイト 1 の元 $u \in V_1$ があれば、$L(-1)u \in V_2$ であり、$e^{2\pi i o(L(-1)u)z}$ を付け加えると、ヤコビ形式として扱うことが出来ることを注意しておく。ここでは、それを考えず、Griess 部分代数だけを考えることにする。

$(V_2, \times_1)$ のグライス部分代数 $\mathcal{G}$ で、すべての元が直交冪等元達の線形和となっているようなものや、またはそれを完備化したものが全体となるものを考える。例えば、B_g 型のジョルダン代数、即ち、g 次対称複素行列全体の空間 $\mathrm{Sym}_g(\mathbb{C})$ はこの条件を満たしている。ここでの積は $A \times B = AB + BA$ である。頂点作用素代数の立場から言うと、$(V_2, \times_1)$ の部分代数 $\mathcal{G}$ および線形写像 $\mu : \mathrm{Sym}_g(\mathbb{C}) \to \mathcal{G}$ があって、μ が左のジョルダン代数と右の $(\mathcal{G}, \times_1)$ との間の代数同型を与えていることである。しかも、単位行列 I_g の像は $\mu(I_g) = \omega$ となることも仮定する。($I_g A + A I_g = 2A$ なので、$v \in V_2$ に対する $\omega_1 v = 2v$ に対応)。

この設定で、$A = (\tau_{ij}) \in \mathcal{H}_g$ に対して、多変数トレイス関数

$$Z_\ell\,(v : A) := \mathrm{Tr}_{W^\ell} o(v) e^{o\left(2\pi i\left(\mu(A) - \frac{\mathrm{tr}(A)c}{24g}\mathbf{1}\right)\right)}, \tag{3.1}$$

を定義する。ここで、$\mathcal{H}_g = \{A + Bi \mid A, B \in \mathrm{Sym}_g(\mathbb{R}), B$ は正定値 $\}$ はジーゲル上半空間である。$\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の $\mathcal{H}_g$ への作用は、$\sigma(Z) = (aZ + bI_g)(eZ + fI_g)^{-1}$ である。この設定でのモジュラー不変性を紹介しておこう。元を直交冪等元の線形和に表示した場合の直交冪等元は、もともとの $\mu(Z)$ に依存するので、$v \in V$ を Z に依存した直交共形元による多重ウエイトの斉次元に分解するのは非常に複雑である。それゆえ、簡単な場合のみを述べる。

Theorem 2 $Z_j\,(\mathbf{1} : A)$ はすべて $\mathcal{H}_g$ 上で解析関数に絶対収束すると仮定する。このとき、

$$Z_j\left(\mathbf{1} : (aA + bI_g)(eA + fI_g)^{-1}\right) = \sum_{h=1}^{r} S(\sigma)_{jh} Z_h\,(\mathbf{1} : A)\,,$$

となる。ここでも、$S(\sigma)_{jh}$ は *Zhu* 理論で与えられた行列である。 ∎

定理でも述べているが、多変数を考えているにも関わらず、モジュラー変換式の係数は一変数での係数と全く同じであることを強調しておく。

タイプ B_g のジョルダン代数を含む VOA の例は多い。例えば、g 次元ベクトル空間から構成される中心電荷 g のフリーボゾン型と呼ばれる VOA $M^g(1)$ は、次の節で示すように、B_g 型のジョルダン代数を含んでいる。また、有名なムーンシャイン頂点作用素 $V^\natural$ は B_{24} 型のジョルダン代数を含んでいる中心電荷 24 の正規 VOA である。Ashihara-Miyamoto[1] では、任意の $c \in \mathbb{C}$ と $g \in \mathbb{N}$ に対して、中心電荷 c で、$(V_2, \times_1)$ 自身が B_g 型のジョルダン代数となるものを構成している。

4　ジーゲルテーター級数とモジュラー変換

上の定理の応用として、ジーゲルテータ級数のシンプレクティック群による変換公式を格子 VOA の立場から見ていこう。その為に、格子 VOA について説明する。

4.1　格子 VOA の構造

以下、L をランク g の正定値偶格子とする。g-次元内積空間 $\mathbb{C}L := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ からフリーボゾン型 VOA $M^g(1)$ を以下のように構成する。まず、$\mathbb{C}L$ の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を利用して、アフィンリー代数

$$\widehat{\mathbb{C}L} := \left(\oplus_{j=1}^{g} \oplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} a_j(n) \right) \oplus \mathbb{C}$$

を作る。ここで、$\{a_j \mid j = 1, \ldots, g\}$ は $\mathbb{C}L$ の正規直交基底であり、リー積は $[a_j(n), a_k(m)] = \delta_{n+m,0} n \langle a_j, a_k \rangle$ で定義されている。$\widehat{\mathbb{C}L}$ は基底の取り方に依存しない。部分代数 $\widehat{\mathbb{C}L}_{\geq 0} := \left(\oplus_{j=1}^{g} \oplus_{n \geq 0} \mathbb{C} a_j(n) \right) \oplus \mathbb{C}$ を取り、各 $\alpha \in \mathbb{C}L$ に対して、一次元 $\widehat{\mathbb{C}L}_{\geq 0}$-加群 $\mathbb{C}e^\alpha$ を

$$n > 0 \text{ に対して } a(n)e^\alpha = 0, \qquad a(0)e^\alpha = \langle a, \alpha \rangle e^\alpha \tag{4.1}$$

で定義し、その誘導加群

$$M^g(1) \otimes e^\alpha := U(\widehat{\mathbb{C}L}) \otimes_{U(\widehat{\mathbb{C}L}_{\geq 0})} \mathbb{C}e^\alpha,$$

を考える。ここで、$U(R)$ は R の普遍包絡環を表す。これらの誘導加群のうち、$M^g(1) \otimes e^0$ は中心電荷 g の VOA 構造を持つことがわかる。簡単の為に、以下 $M^g(1) \otimes e^0$ を $M^g(1)$ と表記する。頂点作用素の例としては

$$\begin{aligned} &Y(a(-1) \otimes e^0, z) = \textstyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} (a(n) \otimes 1) z^{-n-1}, \\ &Y(a(-1)b(-1) \otimes e^0, z) = \sum_{m \in Z, n \in \mathbb{N}} a(-1-n)b(m+n) \otimes 1 + b(-1+m-n)a(n) \otimes 1) z^{-m-1}. \end{aligned}$$

等がある。$\mathbf{1} := 1 \otimes e^0$ が真空であり、$\omega := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{g} a_i(-1)a_i(-1) \otimes e^0$ がヴィラソロ元である。これらを $M^g(1) \otimes e^\alpha$ に作用させることで、$M^g(1) \otimes e^\alpha$ は $M^g(1)$-加群となる。

$\alpha \in L$ に関する誘導加群を集めた

$$V_L = \bigoplus_{\alpha \in L} M^g(1) \otimes e^{\alpha}$$

は中心電荷 g の VOA の構造を持つ。これが格子 VOA である。

V_L は中心電荷 g の正規 VOA であり、既約加群を $W^1, \ldots, W^k$ と並べる。各既約加群 W^j は、$\langle \beta_j, L\rangle \subseteq \mathbb{Z}$ となる $\beta_j \in \mathbb{Q}L$ を使って、$W^j = V_{L+\beta_j} = \oplus_{\alpha\in L} M^g(1) \otimes e^{\alpha+\beta_j}$ と表される [3]。各 W^j に対して、

$$Z_j(v, z) = \mathrm{Tr}_{W^j} o(v) e^{2\pi i\tau(L(0)-\frac{g}{24})}$$

と置く。すると、Zhu の理論により、$S = (s_{ij}) \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ があって、

$$(\frac{1}{\tau})^{\mathrm{wt}[v]} Z_j(v, -1/\tau) = \sum_{h=1}^{k} s_{jh} Z_h(v, \tau) \tag{4.2}$$

となる。$M^g(1)$ の指標は $(1/\eta(\tau))^g$ なので、$V_{L+\beta_j}$ の指標は $\theta_{L+\beta_j}(\tau)/\eta(\tau)^g$ である。ここで、$\theta_{L+\beta_j}(\tau)$ は格子（または剰余類） $L+\beta_j$ に関するテーター級数である。

次に、$(M^g(1))_2$ の中に B_g 型のジョルダン代数が含まれていることを紹介する。$\mathbb{R}L$ の直交基底 $\{a_i \mid i = 1, \ldots, g\}$ を使って、$\omega^{ij} = \frac{1}{2} a_i(-1)a_j(-1) \otimes e^0 \in (M^g(1))_2$ と置くと、$\mu(E_{ij} + E_{ji}) = \omega^{ij} + \omega^{ji}$ で定義される

$$\mu : \mathrm{Sym}_g(\mathbb{C}) \to (M^g(1))_2$$

は（中への）代数同型である。ここで、E_{ij} は (i, j) 成分が 1 で他は 0 である基本行列を表す。しかも、$\{\omega^{jj} \mid j = 1, \ldots, g\}$ は互いに直交した中心電荷 1 の共形元であり、 $\omega = \sum_{i=1}^{g} \omega^{ii}$ となっている。

4.2　ジーゲルテーター級数

上の構成から、$A = (\tau_{ij}) \in \mathcal{H}_g$ と V_L-加群 W^j に対して、その指標

$$Z_j(\mathbf{1} : A) = \mathrm{Tr}_{W^j} e^{o\left(2\pi i\left(\mu(A)-\frac{\mathrm{tr}(A)}{24}\right)\right)}$$

を考える。ここで、$\mu(A) = \sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g} \tau_{ij}\omega^{ij} \in (M^g(1) \otimes e^0)_2$ である。V_L は正規なので、定理の結果が成り立つ。次にジーゲルテータ級数部分を取り出す為に、$A \in \mathcal{H}_g$ に対して、A の固有値 $\{\mu_1, \ldots, \mu_g\}$ (重複を許す）を使って

$$\gamma_j(A) = Z_j(\mathbf{1} : A) \prod_{i=1}^{g} \eta(\mu_i)$$

を定義する。$A \in \mathcal{H}_g$ なので、$\mu_i \in \mathcal{H}$ である. すると、次が成り立つ。

Proposition 3 $Z_j(\mathbf{1}:A)$ は $\mathcal{H}_g$ 上の解析関数に絶対収束し、$\gamma_j(\mathbf{1}:A)$ は 剰余類 $L+\beta_j$ と直交基底 $\{a^j : j=1,\dots,g\}$ で定義されるジーゲルテータ級数であり、

$$\left(-i\frac{1}{\det(A)}\right)^{g/2}\gamma_j(-A^{-1})=\sum_{h=1}^{r}s_{jh}\gamma_h(A)$$

となる。 ここの (s_{jh}) は *Zhu* 理論 *(4.2)* で出てきたものである。

シンプレクティック群 $Sp(g)$ は、

$$S:A\to -A^{-1},\quad T_i:A\to A+E_{ii},\quad T_{ij}:A\to A+E_{ij}+E_{ji}\quad (1\le i<j\le g)$$

で生成されているが、変換 T_i と T_{ij} による変換はスカラー倍となっており、簡単に分かる。それゆえ一番難しい部分は、$S:A\to -A^{-1}$ である。上の定理は、この部分が Zhu 理論の $S=(s_{ij})$ とエータ級数の変換公式で与えられることを示している。

References

[1] T. Ashihara, M. Miyamoto, Deformation of central charges, vertex operator algebras whose Griess algebras are Jordan algebras. J. Algebra **321** (2009), no.6, 1593-1599.

[2] R. E. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **83**, (1986), 3068-3071.

[3] C. Dong, *Vertex algebras associated with even lattices*, J. Algebra 161 (1993), no. 1, 245-265.

[4] C. Dong, H. Li, G. Mason, *Modular-invariance of trace functions in orbifold theory and generalized Moonshine*, Comm. Math. Phys. 214 (2000), no. 1, 1-56.

[5] I. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, "Vertex Operator Algebras and the Monster", Pure and Applied Math., Vol. 134, Academic Press, 1988.

[6] M. Krauel and M. Miyamoto, *A modular invariance property of multivariable trace functions for regular vertex operator algebras*, preprint.

[7] M. Miyamoto, Modular invariance of vertex operator algebras satisfying C_2-cofiniteness, Duke Math. J. **122** (2004) no.1, 51-91.

[8] M. Miyamoto, *Modular invariance of trace functions on VOAs in many variables*, Proceedings on Moonshine and related topics (Montreal, QC, 1999), 131-137, CRM Proc. Lecture Notes, 30, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[9] Y. Zhu, *Modular invariance of characters of vertex operator algebras*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 237-302.