Heegner cycle の p-進高さ

小林 真一
東北大学大学院理学研究科

1 p-進 Gross-Zagier 公式

まずは研究動機として Gross-Zagier 公式について述べたい．整数論の中心的課題として代数多様体や保型形式などに付随する L-関数の特殊値と数論的不変量を結びつける特殊値公式がある．古くは類数公式, その楕円曲線版である Birch and Swinnerton-Dyer 予想, さらにそれを一般化した Beilinson-Bloch-Kato 予想などがある．Gross-Zagier 公式もこれらの予想と深く関わる公式である．わかりやすくするために楕円曲線の言葉で述べておく．有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線 E と Heegner 条件をみたす虚二次体 K に対し, Heegner 点という $E(K)$ の点を構成する方法がある．Gross-Zagier 公式は

$$L'(E/K, 1) = (\text{簡単な因子} \neq 0) \times (E/K \text{ の周期}) \times (\text{Heegner 点の高さ})$$

というものである．ここで $L(E/K, s)$ は E の K 上の Hasse-Weil L-関数である．K の選択は自由度が大きく, K をうまく選ぶと階数 1 以下の場合の $\mathbb{Q}$ 上の BSD 予想に応用がある．またこの公式からいつ Heegner 点が無限位数の元を定めるかがわかる．

上では楕円曲線の言葉で Gross-Zagier 公式を述べたが, この公式は実際は重さ 2, $\Gamma_0(N)$ の楕円型保型形式に関する公式である．そこでただちに考えられる一般化は, 保型形式の重さを 2 から一般の偶数 $k \geq 2$ にしたらどうなるかである．このとき Heegner 点のかわりに現れる数論幾何的対象が Heegner cycle である．これは $k-1$ 次元の久賀-佐藤多様体の余次元 $k/2$ の代数的 cycle で K の Hilbert 類体上定義されるものである．[1] 一般の重さの楕円型保型形式に関する Gross-Zagier 公式は, 重さ 2 のときの約 10 年後に S. Zhang により示された．難しさは “点” ではない高次元 cycle に関する高さ理論にある．Zhang は Arakelov 交叉理論を使うことでこの問題に取り組んでいる．Gross-Zagier 公式の他の一般化として Hilbert 保

[1] この cycle が候補であることは, 早くも Gross-Zagier のオリジナルの論文の中で, Deligne による示唆があったと述べられている．

型形式を考えるなど, Zhang らによるさらなる一般化の研究も進んでいるがここではこれ以上述べない. (cf. [23].)

次に Gross-Zagier 公式の p-進版について述べる. Bertolini-Darmon らによる p-進化もあるが我々は Perrin-Riou による p-進化の流れに従う. これは純粋にアナロジーを辿ったもので, L-関数のかわりに p-進 L-関数を使い, p-進 L-関数の微分値と Heegner 点や Heegner cycle の p-進高さを結びつけるものである. [2] ここでは公式を少し正確に述べておく.

$f=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f)q^n$ を $\Gamma_0(N)$ の重さ $k\in 2\mathbb{N}$ の正規固有カスプ新形式とする. K を虚二次体, 判別式を d_K, ϵ を $K/\mathbb{Q}$ に伴う 2 次の Dirichlet 指標とする. このとき

$$L(f/K,s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(f)}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(f)\epsilon(n)}{n^s}$$

とおく. ここで次の Heegner 条件を考える.

「ℓ が N の素因子 $\Longrightarrow$ イデアル (ℓ) は $\mathcal{O}_K$ で 2 つの異なる素イデアルに分解」

この条件から得られる重要な帰結は次の 2 つである.

- $L(f/K,s)$ の関数等式の符号は -1. とくに $L(f/K,k/2)=0$.
- Heegner cycle $z_H\in \mathrm{CH}^{k/2}(\mathrm{KS}_{k-1}/H)_0$ が構成できる. ここで KS_{k-1} は $k-1$ 次元の久賀-佐藤多様体, H は K の Hilbert 類体. $k=2$ のときは KS_{k-1} はモジュラー曲線で Heegner cycle は Heegner 点である. 詳しくは §2 で説明する.

p-進 L-関数について簡単に思い出しておく. 埋め込み $\overline{\mathbb{Q}}\hookrightarrow\mathbb{C}_p$ を固定する. $p\nmid N$ で f の p-Euler 因子 $X^2-a_p(f)X+p^{k-1}=0$ の根を α,β とし, $|\alpha|_p\geq|\beta|_p$ となるように名前をつけておく. $a_p(f)$ が p-進単数であるとき, p を ordinary というが, このときは α は unit root である. f の円分 p-進 L-関数 $\mathscr{L}_p(f,\alpha,s)$ は $\mathbb{C}_p$ に値をもつ変数 $s\in\mathbb{Z}_p$ の p-進解析関数である. 円分というのは, この関数は p-冪導手の Dirichlet 指標 χ でひねった複素 L-関数の値 $L(f,\chi,i)$ $(1\leq i\leq k-1)$ たちを補間することで作られるという意味である. $L(f,\chi,i)$ は適当な周期で割ると代数的数になっていることに注意しておく. f の K 上の円分 p-進 L-関数 $\mathscr{L}_p(f/K,\alpha,s)$ は $\mathscr{L}_p(f,\alpha,s)$ と $\mathscr{L}_p(f\otimes\epsilon,\epsilon(p)\alpha,s)$ の積として定義される. [3]

[2] Bertolini-Darmon のものは微分値ではなく値そのものであったり, 高さというよりは Abel-Jacobi 写像による Heegner 点の像を考えていたりするが, 反円分拡大という Heegner 点のシステムが住んでいる方向を直接みており, 高さではなく有理点自身を求めることに利用できるなどの長所がある.

[3] 正確には複素周期からくるちょっとした修正が必要. p-進 L-関数は複素周期の取り方に依存し, isogeny 不変性などが成り立たない.

p-進 Gross-Zagier 公式 (予想)： $p \nmid N$ とする.

$$\mathscr{L}_p'(f/K,\alpha,k/2) = u^{-2}(4|d_K|)^{1-\frac{k}{2}}\left(1-\frac{p^{\frac{k}{2}-1}}{\alpha}\right)^2\left(1-\frac{p^{\frac{k}{2}-1}}{\epsilon(p)\alpha}\right)^2 \langle \mathfrak{z}_K^{(k)}, \mathfrak{z}_K^{(k)}\rangle_{p,f/K,\alpha}.$$

ここで $\mathfrak{z}_K^{(k)}$ は Heegner cycle を K 上に trace したもの. $\langle\ ,\ \rangle_{p,f/K,\alpha}$ は f/K に対応する円分 p-進高さ対で, α-固有空間による Hodge filtration の splitting に付随するもの. また $u := \sharp\mathcal{O}_K^\times/2$ である.

p-進高さや Heegner cycle については次節以降で説明する. ここでは上が解けている場合を簡単にまとめておく. 解けている場合も正確には細かい条件があるが省略する.

- $k=2$, p が good ordinary で K で split のとき. B. Perrin-Riou [19], (1987).
- $k>2$, p が good ordinary で K で split のとき. J. Nekovář [16], (1995).
- $k=2$, p が good non-ordinary[4] のとき. S. Kobayashi [11], (2013).

ちなみに実数値の場合は $k=2$ のとき Gross-Zagier [9], (1987), $k>2$ のとき Zhang [24], (1997) で $k>2$ のときは p-進の方が先に証明されている. 現在は $k>2$, p が good non-ordinary で K で split のときを研究中であり, 今回の講演はこの研究の内容の一部の紹介である. p が K で split するという条件は, 証明の中で極めて重要な役割を果たす. しかし p-進高さの非自明性があるときは, $\mathbb{Q}$ 上の BSD 予想と結びつけることで最終的には取ることができる. ($k=2$ で non-ordinary の場合はこれに該当.) ただこれは p が K で inert する場合の現象を何ひとつ解明するものではない. この場合はモジュラー曲線を $\mathbb{Z}_p$ 上で考えたとき, Heegner 点が定めるセクションが supersingular point と交わっていることに注意する. p-進 Gross-Zagier 公式の証明の概略, 方針等については [10] を参照してほしい. それらは大筋においてはすべての場合に共通である. p が ordinary のときは円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大以外の K の $\mathbb{Z}_p$-拡大に対しても p-進 Gross-Zagier 公式が示されていることにも注意しておく. [5]

p-進 L-関数について少し補足しておく. 一般に p-進 L-関数を定義するためには, 考えているモチーフのみならず $\mathbb{Z}_p$-拡大と p-進 de Rham 実現の Hodge filtration の splitting を選ぶ必要ある. (カスプ形式 f に対しては, f に付随する p-進表現 V_f に対し $D_{\mathrm{dR}}(V_f)$ の Hodge filtration F^0 の $\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間としての splitting.) 例えば楕円曲線 E の p-進 L-関数といっ

[4] f が楕円曲線に付随するときは, その楕円曲線が p で supersingular reduction をもつことと同値であるが, 保型形式を考えているときは supersingular という用語は適切ではないように思う.

[5] ただし反円分拡大のときは同じ設定だと $0=0$ という自明な式になってしまう.

ても, どういう $\mathbb{Z}_p$-拡大に付随するものかで性質はまったく異なる. K_∞ を K の $\mathbb{Z}_p$-拡大とすると, K_∞/K に付随する E の p-進 L-関数の λ-不変量はアーベル群 $E(K_\infty)$ と強いつながりがある. この群は当然考えている K_∞ によって性質が異なる. 例えば円分なら (無限次代数体だが) 有限生成アーベル群, 一方反円分なら階数は無限 [6] である. 有限生成だったとしてもその階数は考えている K_∞ で異なる. このように p-進 L-関数は Hasse-Weil L-関数の単純な類似物というわけではない. [7] 一方 Hodge filtration の splitting はモチーフの p-進的 deformation のしやすさと関わっており, その取り方によって関数の p-進的な挙動の複雑さが異なってくる. p が ordinary ならば splitting として unit root 空間がとれ, そのときは非常にきれいな deformation が得られる. p が non-ordinary のときも splitting としてフロベニウスの固有空間をとると変形の様子が見やすい. $\mathscr{L}_p(f, \alpha, s)$ の α は α-固有空間による splitting に対応している. しかし non-ordinary の場合, 固有空間による splitting は functorial ではないので ordinary のときのように必ずしもよいものとはいえない. p-進 L-関数を $\mathbb{C}_p$ に値をもつ関数としてではなく, 適当な p-進 de Rham cohomology に値をもつベクトル値関数として捉えるより本質的な定式化もある. その場合は Hodge filtration の splitting を選ぶ必要はない. ただ Gross-Zagier 公式のような計算による証明を行う場合は, ベクトル値ではなく $\mathbb{C}_p$ に値をもつ関数と考える方が都合がよいと思われる.

2 Heegner 点と Heegner cycle

ここでは Heegner 点と Heegner cycle を簡単に説明する. (cf. [7].) Heegner 点とは大雑把にいえばモジュラー曲線の CM 点のことである. つまりモジュラー曲線は楕円曲線のモジュライになっており, CM 楕円曲線に対応する点が Heegner 点である. 例えばレベル 1 のモジュラー曲線 $X(1)$ は, j-関数によりリーマン球面になっており, CM 楕円曲線の j-不変量が与えるリーマン球面上の点が Heegner 点である. singular moduli という言い方もできるかもしれない. よく知られているように CM 楕円曲線の j-不変量は代数的 (整) 数になっているので, Heegner 点はモジュラー曲線の代数的な点を定める.

BSD 予想と関連して面白いのは, 志村谷山予想の解決により, 有理数体上定義された楕円曲線 E はその導手を N とすると, モジュラー曲線 $X_0(N)$ から定数でない射 $X_0(N) \to E$ が存在することである. これより $X_0(N)$ の有理点が見つかると, この射による像として E の有理点を構成できる. 例えば虚二次体 K が Heegner 条件をみたすとする. このとき $\mathcal{O}_K$ の

[6] 具体的には p-冪導手の Heegner 点のシステムを含んでいる.

[7] 虚二次体には $\mathbb{Z}_p$-拡大が無限に存在するが, Gross-Zagier 公式の観点からいうと反円分拡大のときだけ特異な現象が起こり, それ以外の拡大でおこる現象は本質的に同じように思われる.

中で $(N)=\mathcal{N}\mathcal{N}^*$, $\mathcal{O}_K/\mathcal{N}\cong\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ となるよう素イデアル分解できる. (もちろんこのような分解の仕方は一意ではない.) このとき自然な射影

$$\mathbb{C}/\mathcal{O}_K \longrightarrow \mathbb{C}/\mathcal{N}^{-1}$$

は $\mathcal{O}_K$ を準同型環とする CM 楕円曲線間の位数 N の cyclic isogeny となる. これよりこの isogeny が $X_0(N)$ の CM 点を定めるが, この場合 K の Hilbert 類体を H とすると $X_0(N)$ の H-有理点となる. よってこの Heegner 点から $E(H)$ の点が構成され, K や $\mathbb{Q}$ まで trace を取れば $E(K)$ や $E(\mathbb{Q})$ の点を構成できる. このようにしてできる楕円曲線の点を Heegner 点ということも多い.

Euler 系の議論や岩澤理論的議論のためには, 一つの Heegner 点を考えるだけでなく, Heegner 点のシステムを考えることが重要である. K の order $\mathcal{O}$ を考える. これは K の格子で部分環になっているものである. $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}_K$ に指数有限で含まれ, その指数 c は導手といわれる. 上の Heegner 点の議論において $\mathcal{O}_K$ を $\mathcal{O}$ の可逆イデアルに置き換えても同様の話ができる. そのようにしてできる Heegner 点を導手 c の Heegner 点という. モジュライ解釈では $\operatorname{End}E=\mathcal{O}$ となる CM 楕円曲線に対応する. 導手 c の Heegner 点は導手 c の ring class field H_c 上定義される. つまり $X_0(N)(H_c)$ の点を定める. ring class field は $\mathrm{Gal}(H_c/K)\cong\operatorname{Pic}\mathcal{O}$ となる体で, 具体的には j-関数を使って $K(j(\mathbb{C}/\mathcal{O}))$ として構成される. また K の反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大は $\cup_n H_{p^n}$ に含まれる. このようにして大量の Heegner 点ができるが, これらは体 H_c のノルムに関して Euler 因子と関連する特別な関係式で結ばれている. つまり Euler システムをなす. p-進高さの計算でも, 知りたいのは $c=1$ の Heegner 点であるが, それを計算するためにこのノルムシステムが重要な役割を果たす.

次に Heegner cycle について説明する. 簡単のため $\mathbb{Q}$-scheme の圏で考えることにする. まずは久賀-佐藤多様体を思い出す. $f:\mathcal{E}\to Y(N)$ を full level 構造の普遍楕円曲線, $\overline{\mathcal{E}}\to X(N)$ を一般普遍楕円曲線とする. また包含写像を $j:Y(N)\to X(N)$ と書く. k を 2 以上の偶数とし $X(N)$ 上のファイバー積

$$\overline{\mathcal{E}}^{(k-2)}:=\overline{\mathcal{E}}\times_{X(N)}\cdots\times_{X(N)}\overline{\mathcal{E}} \qquad (k-2\text{ 個})$$

は, $k\geq 4$ ならば $X(N)$ のカスプのファイバー上に特異点をもつ. これを Deligne による標準的特異点解消を行ってできるのものが久賀-佐藤多様体 KS_{k-1} である. [8] "標準的" 特異点解消は次で説明するよい性質をもつ. まず自然に

$$\mathcal{E}^{(k-2)}:=\mathcal{E}\times_{Y(N)}\cdots\times_{Y(N)}\mathcal{E}\subset\mathrm{KS}_{k-1}$$

[8] index は次元に合わせることにした.

となっている. 次に $\Gamma = ((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \rtimes \{\pm 1\})^{k-2} \rtimes \mathfrak{S}_{k-2}$ とおくと, この群は $\mathcal{E}^{(k-2)}$ にレベル構造による平行移動や -1 倍, 成分の置換によって自然に作用している. そしてこの作用が KS_{k-1} に自然に延びる. また指標 $\Gamma \to \{\pm 1\}$ を $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ を 1 に, $\{\pm 1\}$ は恒等写像で, $\mathfrak{S}_{k-2}$ は符号指標で送ることにより定義する. この指標に対応する射影子 $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2N(k-2)!}][\Gamma]$ を考える. このとき久賀-佐藤多様体のコホモロジーの ε-部分が保型形式に付随するモチーフとなる. 例えばエタールコホモロジーの同型

$$V_p := H^1_{et}(X(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, j_* Sym^{k-2}(R^1 f_* \mathbb{Q}_p)) \cong \varepsilon H^{k-1}_{et}((\mathrm{KS}_{k-1})_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p) = \varepsilon H^*_{et}((\mathrm{KS}_{k-1})_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p)$$

がある. 最後の等式では $k > 2$ と仮定する. これを Hecke 作用素でカスプ形式 f に対応する部分を切り取れば f の Galois 表現ができる. また Hodge 構造をみるとカスプ形式の空間が現れる. (本質的に Eichler-Shimura 同型.)

さて Heegner 条件を満たす虚二次体 K を固定し, τ を $X_0(N)$ の導手 c の Heegner 点とする. 便宜的に自然な有限射 $X(N) \to X_0(N)$ による τ の逆像をひとつ取り, それもまた τ と書く事にする. E_τ を τ に対応する H_c 上の CM 楕円曲線とする. このとき $c\sqrt{d_K} \in \mathrm{End}_K E_\tau$ であり, そのグラフ $\Gamma_\tau \subset E_\tau \times_{H_c} E_\tau$ を考える. Heegner cycle Z_τ は次で定義される KS_{k-1} の cycle である.

$$Z_\tau := \Gamma_\tau \times \cdots \times \Gamma_\tau \subset E_\tau \times \cdots \times E_\tau \subset \mathcal{E} \times_{Y(N)} \cdots \times_{Y(N)} \mathcal{E} \subset \mathrm{KS}_{k-1}$$

(ファイバー積は最初は $\frac{k}{2} - 1$ 個, 次は $k-2$ 個で H_c 上. τ は $\mathrm{Spec}\, H_c \to Y(N)$ を定め, E_τ はこれによる $\mathcal{E}$ の引き戻しになっている.) また $k > 2$ ならば $\varepsilon H^k(\mathrm{KS}_{k-1}) = 0$ より, $\varepsilon Z_\tau \in CH^{\frac{k}{2}}(\mathrm{KS}_{k-1})_0 \otimes \mathbb{Q}$ がわかる. (下つき 0 は cycle map の核, つまり 0 にホモロジー同値.) そして p-進 étale Abel-Jacobi 写像の像として $H^1(H_c, V_p(\frac{k}{2}))$ の元が定まるが, 実は Block-Kato Selmer 群 $H^1_{\mathrm{f}}(H_c, V_p(\frac{k}{2}))$ の元になっていることが知られている. ($p \nmid N$ と仮定している.) Heegner cycle は Heegner 点と同様に Euler システムを形成する. (cf. [17])

3 p-進高さ関数

F を代数体 ($\mathbb{Q}$ の有限次拡大) とする. F 上定義されたアーベル多様体 A に対しては実数に値を持つ Néron-Tate の高さ対

$$\langle\ ,\ \rangle :\ A^\vee(F) \times A(F) \longrightarrow \mathbb{R}$$

があり, 非退化性などのよい性質を持っていることが知られている. ここで $A^\vee$ は A の双対アーベル多様体である. 1980 年代に実数ではなく p-進数に値をもつ p-進高さ対

$$\langle\ ,\ \rangle :\ A^\vee(F) \times A(F) \longrightarrow \mathbb{Q}_p$$

が, Néron [18], Schneider [21], Mazur-Tate [14], Zarhin [25] らによって研究された. また代数曲線に対しては Coleman-Gross [6] の仕事がある.

実数値のときにはない p-進値高さ関数の大きな特徴は次の 2 つである.

- p-進対数関数, すなわちイデール類群からの準同型 $\mathbb{A}_F^\times/F^\times \to \mathbb{Z}_p$ の取り方に依存.
- Hodge filtration の splitting の選び方に依存.

つまりこれらの選び方を変えると異なる高さ関数が生まれるので, p-進高さ関数は多様体に対して複数存在することになる. [9] 最初の選択は類体論により F の $\mathbb{Z}_p$-拡大を考えることと本質的に同値である. よってこれらは p-進 L-関数を定義するための情報と一致しており, p-進 L-関数の特殊値公式 (p-進 Birch and Swinnerton-Dyer 予想など) に関する予想とつじつまがあっている. p-進では高さ関数が一意に定まらない理由は, $\mathbb{Q}_p$ には $\mathbb{Z}_p$ などコンパクトな部分群が複数 (無限個) あるからと言えるかもしれない. Néron-Tate 高さの理論では, 素朴には生じる有界関数の曖昧さを, 群演算との両立性を要求することで取り除いている. また無限遠点における局所高さの一意性は非自明な連続準同型 $A(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ が存在しないことに依拠している.

次に p-進高さ関数の一般化について述べる. 一般のモチーフや高次元 cycle に対して, 高さ関数を幾何学的に構成しその性質を研究するのは困難なことが多い. しかしながら p-進には p-進 Galois 表現という比較的扱いやすい対象があり, Bloch-Kato の理論 [3] により "有理点" を p-進 Galois 表現の言葉で表すことも可能になっている. Nekovář は Zarhin らのアーベル多様体における p-進高さの理論を Bloch-Kato の用語で書き直すことにより, 一般の (幾何学的に生じると予想される) p-進 Galois 表現 V に対し, p-進高さ対

$$\langle\ ,\ \rangle_p :\ H^1_{\mathrm{f}}(F, V^*(1)) \times H^1_{\mathrm{f}}(F, V) \ \longrightarrow\ \mathbb{Q}_p$$

を定義した. H^1_{f} は Block-Kato の Selmer 群であり, Tate-Shafarvich 群の p-part の有限性を認めると, アーベル多様体のときは有理点の集合 $A(F) \otimes \mathbb{Q}_p$ と自然に同型になる. $V^*(1)$ は V の Kummer 双対であり, V がアーベル多様体の Tate 加群ならその双対アーベル多様体の Tate 加群に相当する. このペアリングはやはり対数関数の取り方と Hodge filtration の splitting の選び方に依存する. Heegner cycle の p-進高さは $V = V_p(k/2)$ とし, εZ_τ の p-進 étale Abel-Jacobi 像として定まる H^1_{f} の元の高さとして定義される. この場合 canonical に $V^*(1) \cong V$ となっていることに注意する.

これまでは主に大域高さについて話をしてきたが, 高さ関数の深い性質を調べるときには, 大域高さを局所高さの和として書き, 各々の局所項を計算することになる. とくに p 上の素

[9] Mazur-Tate [14] は論文のタイトルで, canonical なのに複数形を使っていることに注意している.

点における p-進局所高さが重要であるので, これについて少し述べる. まず実数値対応物として代数曲線 (リーマン面) の無限素点における実数値局所高さ関数を考えてみよう. 局所高さは Weil 関数などを用いて明示的に構成されることが多いが, p-進化のためにはより理論的な見方が必要である. X をリーマン面, 簡単のため divisor $D_1 = [P] - [Q]$, $D_2 = [R] - [S]$ で P, Q, R, S はすべて異なるものを考える. このとき D_1 と D_2 の無限素点における実数値局所高さは

$$\int_S^R \omega_{PQ}$$

の実部で与えられる. ここで ω_{PQ} は P, Q でのみ一位の極をもつ第三種微分形式[10] で P, Q での留数がそれぞれ 1, -1 となるものである. ただしこの条件だけからは ω_{PQ} が一意に定まらないので次のように Hodge filtration の splitting の情報も付け加える.

第三種微分形式は de Rham cohomology $H^1_{\mathrm{dR}}(X - \{P, Q\})$ の Hodge filtration F^1 の元と思えるが, 写像 $\Psi : F^1 H^1_{\mathrm{dR}}(X - \{P, Q\}) \to H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ で第一種微分の空間 $F^1 H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ 上では恒等的になっているものがある. この Ψ は本質的に混合 Hodge 構造を使って作られる. ここで複素共役が -1 倍で作用する $H^1_{\mathrm{dR}}(X) = H^1_{\mathrm{Betti}}(X) \otimes \mathbb{C}$ の実部分ベクトル空間を W とするとき, ω_{PQ} に $\Psi(\omega_{PQ}) \in W$ という条件をつける. このとき ω_{PQ} は一意に定まり, 積分の実部は道の取り方によらず well-defined になる. この構成は実混合 Hodge 構造の Deligne の canonical splitting と対応している. (cf. [8]). 楕円曲線 (複素トーラス)E のときに具体的に書くなら, ω_{PQ} は

$$\left(\zeta^*(z - P) - \zeta^*(z - Q) + \frac{\overline{P} - \overline{Q}}{a(E)} \pi \right) dz$$

である. 実際これは第三種微分形式で純虚数周期を持っている. ここで $a(E)$ は E の基本領域の面積, $\zeta^*(z)dz$ は因子 [0] に付随する正規 (被約) テータ関数 $\theta(z)$ の対数微分である. ($d\zeta^*(z) \in H^{0,1}(X)$.) ここで $\hat{\theta}(z) = \exp(-\frac{\pi z \bar{z}}{a(E)})\theta(z) = \exp(-\frac{z\eta(z)}{2})\sigma(z)$ とおく. ($\sigma(z)$ は Weierstrass σ-関数.) このとき無限素点における局所高さは,

$$\log \left| \frac{\hat{\theta}(R - P)\, \hat{\theta}(S - Q)}{\hat{\theta}(R - Q)\, \hat{\theta}(S - P)} \right|$$

で表される. ([13, Chapter 13], [22, Chapter VI].)

代数曲線のときこの構成の p-進類似を辿ったものが Coleman-Gross の p-進 (局所) 高さである. (大域高さは局所高さの和として定義する.) 積分は p-進の Coleman 積分に置き換える. 留数をもつ第三種微分形式を積分するために p-進対数関数の指定と, 上の W の代わりとして Hodge filtration の splitting の選び方 (フロベニウスの固有空間など) に任意性が生まれる.

[10] 高々一意の極をもつ有理型微分形式. さらに留数が整数という条件をつけることもある.

Ψ の類似物の構成として Coleman-Gross では rigid 幾何的類似を辿るが, Besser [1] によりフロベニウス構造を使ったより本質的な構成も与えれている．Heegner cycle に適用するためには, 代数曲線の局所系つきコホモロジーを考える必要がある．より正確には, higher weight の保型形式を扱うときは, カスプで退化しているような locally free でない係数を扱うので少し厄介である．(しかも Hodge 構造の変形を扱う必要もある.) p-進では overconvergent F-isocrystal が局所系の類似ではあるが, やはり保型形式への応用のためには退化する係数を扱う必要がある．今回は p-進 Gross-Zagier 公式の証明のために必要最低限の ad hoc な扱いですませて, 係数付き Coleman-Gross の p-進局所高さの一般論を建設することはしなかった．(実数値のときは Brylinski [4] によって行われている.) これは今後の課題だろう．阿部さんの講演とも関連していると思われる．

リーマン面のときの局所高さ理論が混合 Hodge 構造と密接に関わることはすでに述べた通りである．局所高さは第三種微分形式の積分であるが, 第一種 (正則) 微分形式の場合は, この種の積分は所謂 Abel-Jacobi 写像である．Carlson により Abel-Jacobi 写像は混合 Hodge 構造の extension を使って解釈されているが, 局所高さも Scholl により混合 Hodge 構造の mixed extension (SGA 7/I, IX.9.3 の extension panachée) を使って解釈されている．先ほどのリーマン面の例では mixed extension は部分コンパクト台つきコホモロジー $H^1(X-P;Q)$ と Gysin 列などを使って作られる．このようなことから適切なコホモロジー論があれば局所高さの理論は建設できる．(実際 Motivic な局所高さが Scholl によって定義されている.) Fontaine や Bloch-Kato の言語により, p-進 Galois 表現 (étale cohomology) の mixed extension を使って定義されるものが, Nekovář の p-進 (局所) 高さ理論である．(例えば Ψ に相当するものは単にフロベニウスの weight に注目した Dieudonné 加群の splitting として構成される.)

今, Coleman-Gross 型と Nekovář の 2 つの p-進局所高さの構成について説明したが, メリットとディメリットは次の通りである．まず Nekovář の方法のメリットは p-進 Galois 表現の一般論を形式的に利用するだけですむので, 一般的枠組の中で強い制約もなく展開でき, 基本性質を示すことも容易である．とくに局所と大域の相性がよく, 高さ対の積公式が自然に成り立つ．つまり大域高さが Abel-Jacobi 像を経由する．(例えばリーマン面の場合, 局所高さは因子類ではなく因子そのものに依存して定義されるので, Abel-Jacobi 像を経由するものではない.) これは Gross-Zagier 公式の証明において極めて本質的な性質である．これがないと Heegner cycle の height から p-進保型形式を作れなくなる．ディメリットは Galois 表現的であるため, p-進特有の深い性質を導きにくく計算にも向いていないところである．また $\mathbb{Z}_p$-拡大に関する整構造の分析ができない．Coleman-Gross 型のメリットは p-進解析的で rigid cohomology などとの相性が良い．したがって Katz の p-進保型形式論や Coleman の

p-進保型形式関連の仕事との相性がよい．p-進的な数値計算もしやすく，最近は (定数係数のときは) コンピュータプログラムもこの構成に基づいて書かれている．ディメリットは大域高さの理論ができないことである．もちろん局所項の和として大域高さを定義することはできるが，Abel-Jacobi 像を経由するかという根本的な問題が解決できない．(定数係数のときはアーベルの定理により解決できる.) また $\mathbb{Z}_p$-拡大に関する整構造の分析もできない．p-進 Hodge 理論の比較定理 (部分コンパクト台つき) を認めるとこの２つの高さを比較できるので，長所を生かし欠点を補いあうこともできるが，共通の問題点は，$\mathbb{Z}_p$-拡大に関する整構造を分析できないところである．p-進高さは $\mathbb{Z}_p$-拡大の性質に依存するはずなのに，両者の構成には $\mathbb{Z}_p$-拡大が本質的に現れない．対数関数の選択として表面的に登場するのみである．この欠点を補う第三の構成法がある．それはアーベル多様体の通常素点の場合の Schneider [21] による構成に端を発するノルム構成法である．この構成法では，$\mathbb{Z}_p$-拡大はこの方向に p-進高さ関数の定義域を動かしたときの挙動と結びつく形で登場する．岩澤理論的構成法である．Heegner cycle の p-進高さの計算はこの三種類の構成法をすべて駆使して行うのであるが，ノルム構成法に基づく部分が最も深いところであるので，この構成法についてもう少しだけ説明する．ノルム構成法は，アーベル多様体のときは ordinary なら [21], non-ordinary なら [12], 一般のガロワ表現に対しては，今回 Perrin-Riou の理論を使うことで一般化した．

ノルム構成法においては，計算したい cycle を，ある種のノルム系の構成要素として捉えることが胆である．そしてそのノルム系がある冪級数で補間されることを示し，その冪級数を使って高さを構成 (計算) するという方法である．Coleman 冪級数論的構成法と言ってもよい．Coleman 冪級数論は explicit reciprocity law と絡んで発展したわけであるが，そこでも計算したい量を冪級数で補間し，その冪級数の対数微分などを使って reciprocity law を計算していた．例えば楕円単数に関しては楕円単数のシステム (Euler 系) があり，ほとんど定義から，それを補間する Coleman 冪級数はテータ関数 (本質的に Weierstrass σ-関数) の形式冪級数展開である．そのテータ関数の log が実質的に局所高さ関数であることから，高さ関数と Coleman 冪級数論とのつながりを感じてもらえるだろうか.

Heegner cycle のノルム構成による高さの計算に関して説明する．前節でみたように Heegner cycle はある種のノルム系をなしているので，それを補間する “Coleman 冪級数” を見つけることが高さの計算の鍵となる．[11] ordinary のときはこれは本質的に通常の Coleman 冪級数論で事足りる．non-ordinary のときも，重さが 2 ならば，通常の Coleman 冪級数論を拡張させることでそれほど困難なく行われる．higher weight のときの困難さはここの部分にある．これまでにできている場合は，基本的に形式群の理論を使って示されており，補間は素朴な

[11] 正確にはこれは Abel-Jacobi 像を計算する鍵である．局所高さの場合は，二つの Heegner cycle が絡み合う mixed な状況でこの問題を考える必要がある．

冪級数論から大きく逸脱するものではない．それに対し cycle の補間は, H^1_{f} の元という p-進 etale Abel-Jacobi 写像と Fontaine の言語を使って抽象的にできる元を扱わねばならず, 具体的に計算するのが非常に困難である．しかも補間のためにはある種の合同式が必要なので integral な p-進 Hodge 理論も必要となる．また non-ordinary のときは一般に $k-1$ 個の twist $s=1,\ldots,k-1$ 上の合同式が必要になるが, $s=k/2$ 上にしか Heegner cycle が存在しない．今回は cycle を補間する Coleman 冪級数論の一般論の建設はあきらめ, 欲しい冪級数を直接構成する手段を取った．Perrin-Riou の理論 [20] より冪級数が与えられると (局所的な)H^1_{f} の元のシステムを構成できることが知られている．Serre-Tate の local moduli の理論, Katz の p-進保型形式の理論, Bertollini-Darmon-Prasanna, Castella の p-進 Abel-Jacobi 像の Coleman 積分を使った計算を組み合わせることで, Heegner cycle のシステムを生み出す冪級数を構成できる．講演ではもう少し詳しい説明を行ったが, ここでは詳細は差し控えさせていただく．論文が完成したらどこかで解説させていただければ幸いである．

参考文献

[1] Besser, A.: The p-adic height pairings of Coleman-Gross and of Nekovář, Number theory, 13–25, CRM Proc. Lecture Notes, 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[2] Bertolini, M., Darmon, H., Prasanna, K.: Generalized Heegner cycles and p-adic Rankin L-series. With an appendix by Brian Conrad. Duke Math. J. 162 (2013), no. 6, 1033–1148.

[3] Bloch, S., Kato, K.: L-functions and Tamagawa numbers of motives. The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 333–400, Progr. Math., 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[4] Brylinski, J-L.: Heights for local systems on curves. Duke Math. J. 59 (1989), no. 1, 1–26.

[5] Coleman, R., Gross, B.: p-adic heights on curves. Algebraic number theory, 73–81, Adv. Stud. Pure Math., 17, Academic Press, Boston, MA, 1989.

[6] Gross, B.: Heegner points on $X_0(N)$. Modular forms (Durham, 1983), 87–105, Ellis Horwood Ser. Math. Appl.: Statist. Oper. Res., Horwood, Chichester, 1984.

[7] Gross, B.: Local heights on curves. Arithmetic geometry (Storrs, Conn., 1984), 327–339, Springer, New York, 1986.

[8] Gross, B., Zagier, D.: Heegner points and derivatives of L-series. Invent. Math. 84 (1986), no. 2, 225–320.

[9] Kobayashi, S.: On the p-adic Gross-Zagier formula for elliptic curves at supersingular primes. Algebraic number theory and related topics 2010, 61–79, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B32, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2012.

[10] Kobayashi, S.: The p-adic Gross-Zagier formula for elliptic curves at supersingular primes. Invent. Math. 191 (2013), no. 3, 527–629.

[11] Kobayashi, S.: The p-adic height pairing on abelian varieties at non-ordinary primes, To appear in Iwasawa Theory 2012, Contributions in Mathematical and Computational Sciences, Vol. 7, Bouganis, Thanasis, Venjakob, Otmar (Eds.) 2014, XII, 483p, Springer.

[12] Lang, S.: Fundamentals of Diophantine geometry. Springer-Verlag, New York, 1983. xviii+370 pp.

[13] Mazur, B., Tate, J.: Canonical height pairings via biextensions. Arithmetic and geometry, Vol. I, 195–237, Progr. Math., 35, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[14] Nekovář, J.: On p-adic height pairings, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1990–91, 127–202, Progr. Math., 108, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.

[15] Nekovář, J.: On the p-adic height of Heegner cycles. Math. Ann. 302 (1995), no. 4, 609–686.

[16] Nekovář, J.: Kolyvagin's method for Chow groups of Kuga-Sato varieties. Invent. Math. 107 (1992), no. 1, 99–125.

[17] Néron, A.: Fonctions thêta p-adiques et hauteurs p-adiques. Seminar on Number Theory, Paris 1980-81 (Paris, 1980/1981), pp. 149–174, Progr. Math., 22, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1982.

[18] Perrin-Riou, B.: Points de Heegner et dérivées de fonctions L p-adiques. Invent. Math. 89 (1987), no. 3, 455–510.

[19] Perrin-Riou, B.: Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, Invent. Math. 115 (1994), 81–149.

[20] Schneider, P.: p-adic height pairings. I. Invent. Math. 69 (1982), no. 3, 401–409.

[21] Silverman, J.: Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves. Graduate Texts in Mathematics, 151. Springer-Verlag, New York, 1994. xiv+525 pp.

[22] Yuan, X., Zhang, S-W., Zhang, W.: The Gross-Zagier formula on Shimura curves. Annals of Mathematics Studies, 184. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2013. x+256 pp.

[23] Zhang, S-W.: Heights of Heegner cycles and derivatives of L-series. Invent. Math. 130 (1997), no. 1, 99–152.

[24] Zarhin, Y. G.: p-adic heights on abelian varieties. Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1987–88, 317–341, Progr. Math., 81, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.