

# Rudvalis 群の周辺

北詰 正顕 (Masaaki Kitazume)

千葉大学大学院理学研究科

## 0 はじめに

本稿では、千吉良直紀氏（熊本大学大学院自然科学研究科）との共同研究に基づき、Rudvalis の単純群  $Ru$  に関する研究結果（あるいは、途中経過）について述べたいと思う。

話のきっかけは、ちょうど6年前の第53回代数学シンポジウム [15] において「散在型単純群の周辺」というタイトルで話したとき、その準備の過程で、

定理 1.  $Ru$  の 4060 次の置換表現によって不変な、長さ 4060 の自己双対符号が存在する。という事実に気づき、シンポジウムの講演でアナウンスしたことにある。

このような計算は、最終的には計算機（ソフトウェア Magma [2]）を用いている。Magma は、群や組合せ構造を扱うことのできるシステムであり、具体的な群の置換表現をデータベースとして持っているため、それを呼び出して、さまざまな計算が行えるのである。我々は、この結果を知って、これを数学的に理解・説明するために、あらためて、 $Ru$  の 4060 次の置換表現について勉強を始めたのである。その一端は、いくつかの講演記録に残っている ([16], [14])。

上記の結果で、一番の懸案だったのは、符号を構成するために理論的に説明出来る部分に、あるひとつの生成元を付け加えるのであるが、その生成元の記述・特徴付けがうまくできないということであった。今回のテーマは、Rudvalis 群の勉強において、これまで難解だった Conway の論文 [7] を読み解く内に、その副産物としてこの生成元の特徴付けをすることができた、という話である。

## 1 Rudvalis 群の周辺の単純群

まず、入門講義として、有限単純群の分類定理を振り返りながら、これからの話に登場する  $Ru$  に関連する群の紹介から始めたい。

「有限単純群の分類定理」によれば、有限単純群は、次のいずれかに分類される。

(0) 素数位数の巡回群

(1) 5 次以上の交代群  $A_n$  ( $n \geq 5$ )

(2) Lie 型の単純群

$$A_n(q), B_n(q), C_n(q), D_n(q), E_6(q), E_7(q), E_8(q), F_4(q), G_2(q) \\ {}^2A_n(q), {}^2B_n(q), {}^2D_n(q), {}^3D_4(q), {}^2E_6(q), {}^2F_4(q), {}^2G_2(q)$$

(3) 26 個の散在型単純群

$$M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_1, J_2, J_3, J_4, HS, Suz, McL, He, \\ Ru, Ly, ON, Co_1, Co_2, Co_3, F_{22}, F_{23}, F'_{24}, H, Th, BM, M.$$

散在型単純群については、それが位数最大の散在型単純群である Monster  $M$  に含まれるか (正確に言えば、部分群の剰余群として含まれるか) 否かによって、2 つのグループに大別される。結論だけ述べると、26 個のうち 20 個は Monster に含まれ、

$$J_1, J_3, J_4, Ru, Ly, ON$$

の 6 個が含まれていない。Griess [10] では、前者を "Happy family" と呼び、後者については "Pariahs" と名付けている。この言葉の意味については、辞書でも調べてもらうことにして、あまりよろしいと思えない命名である。しかし、すぐに廃れてしまったわけでもなく、Web page [1] でも相変わらず使われているようである。何が Happy かというと、確かに Mathieu 群や Conway 群などは、Golay 符号や Leech 格子といった数学的な背景も豊富にあり、沢山の研究がなされている。Monster と moonshine VOA の研究は、近年ますます盛んである。ここでは、Monster と Conway 群、Mathieu 群の関連 (それは VOA と Leech 格子、Golay 符号の関連に起因する) が重要な要素として存在する。比べて Pariahs の群達は、他の群との関連に乏しく、数学的な背景がしっかりと捉えられないものが多く、研究も進んでいないのが実情である。それ故の命名と思われるが、しかし Happy family の中でも、うまく捉えられず研究の進んでいない群はいくつかある。

\* \* \*

さて、本稿の主旨は、その Pariahs のひとつの Rudvalis 群である。この群は Pariahs の中では、関連する群も比較的多い。ではあるのだが、ここに現れる群は、なかなか「くせもの」揃いなのである。

このことを明確にするために、冒頭のカテゴリカル定理の結果について、もう一度振り返ることにする。まず、(0) の素数位数の単純群は、アーベル群であり以降の (1)–(3) とは明確に区別される。また、(3) の散在型単純群は (1), (2) に含まれないものというのが定義であるから、これも明確に区別される。しかし、(1) と (2) については排他的な分類にはなっ

ていない。実際，次のような同型対応が存在する。

$$\begin{aligned} A_5 &\cong L_2(4) \cong L_2(5), & L_2(7) &\cong L_3(2), \\ A_6 &\cong L_2(9) \cong S_4(2)', & L_2(8) &\cong {}^2G_2(3)', \\ & A_8 \cong L_4(2), & U_3(3) &\cong G_2(2)', \\ & U_4(2) &\cong S_4(3). \end{aligned}$$

このうち，交換子群を表す記号  $'$  の付いたものは，Lie 型の群の一般論で構成された段階では単純群にならず，交換子群にして（上記の場合，どれも指数が 2 下がる）初めて単純群になるという例外的な Lie 型の群と言える。ただし，右辺の見方をすれば，立派な（標準的な）Lie 型の群である。このような群は，もうひとつ存在する。それは，例外的な Lie 型の群で他の群との同型対応もない群で，Tits 群 [11] と呼ばれるものである。

$$T = {}^2F_4(2)'$$

先にも触れた Web page [1] では，Tits 群  $T$  が Sporadic groups の中に掲載されていたりする。実際，Tits 群は標準的な Lie 型の群ではないから，一般的な構成法から Lie 型の群の性質を述べようとするならば，別個に取り扱わなくてはならない。

本稿で扱う， $Ru$  と関連する群とは，以上の中の次の 3 つである。

$$A_6 \cong L_2(9) \cong S_4(2)', \quad U_3(3) \cong G_2(2)', \quad T = {}^2F_4(2)'$$

筆者にとっては，Tits 群  $T$  が最も難しい存在であるが，最初の 2 つもなかなかのくせ者なのである。特に， $A_6$  は交代群の中で唯一「自己同型群が対称群より大きくなる」という性質を持っていて，例外的な現象を記述する場合に，いろいろな形で登場する群でもある。

## 2 28 次元の複素格子

冒頭にも書いた，Rudvalis 群  $Ru$  の勉強は，この群（正確には，位数 4 の中心を持つ  $4.Ru$  という形の群）が作用する， $\mathbb{Z}[i](i = \sqrt{-1})$  上 28 次元の複素格子の勉強から始まる。ここでは，ATLAS [6] の記述，および，R. A. Wilson による [12], [13] が参考文献となるが，この勉強をまとめたものが RIMS 講究録 [16] に残っているので，詳しいことはこれを参照いただくことにして，ここでは要点のみをまとめておく。また [14] も参照されたい。

### 2.1 28 次元の基底

まず，複素格子が存在する 28 次元の空間の基底を， $U_3(3) \cong G_2(2)'$  の 28 次の置換表現を用いて記述することから始める。

ユニタリ群  $U_3(3)$  が作用する, 9元体 (素体に1の原始4乗根  $i$  を付け加えた体)

$$\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[i] = \{ x + yi \mid x, y \in \mathbb{F}_3 = \{0, 1, -1\} \}.$$

上の3次元のユニタリ空間  $V$  を考える。ユニタリ計量を指定する必要はないが, 例えば,  $V = \mathbb{F}_9^3$  (数ベクトル空間) として, 計量を

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3$$

と定める。ユニタリ群  $U_3(3)(= SU_3(3))$  は, 3次のユニタリ行列で行列式が1のもの全体と定義する。このとき  $U_3(3)$  は単純群であり, 9元体の自己同型から定まる位数2の外部自己同型を付け加えた群  $\Gamma U_3(3) = U_3(3) : 2$  が  $G_2(2)$  と(例外的な)同型になる。

$V$  の isotropic(長さ0), non-isotropic(長さが非0) vector の全体をそれぞれ  $\Omega, \Gamma$  と表し, (定数倍を無視して) 生成する1次元部分空間(これを  $[v] = \mathbb{F}_9 v$  と表す)の全体を  $\Omega^*, \Gamma^*$  と表すことにする。

$$\begin{aligned} \Omega &= \{ v \in V \setminus \{0\} \mid (v, v) = 0 \}, & \Omega^* &= \{ [v] \mid v \in \Omega \} \\ \Gamma &= \{ v \in V \mid (v, v) \neq 0 \}, & \Gamma^* &= \{ [v] \mid v \in \Gamma \} \end{aligned}$$

よく知られた性質であるが,  $U_3(3)$  は28点集合  $\Omega^*$  に2重可移に作用する。

$U_3(3)$  が作用する  $\Omega$  のベクトルを用いて, 28次元空間  $\mathbb{C}^{28}$  の正規直交基底を  $e_v (v \in \Omega)$  と定める。ただし,  $V$  における定数倍について,

$$e_{cv} = c^2 e_v$$

と定めることとする。ここで, 定数  $c$  は, 左辺においては  $\mathbb{F}_9 \setminus \{0\}$  の元を表し, 右辺においては複素数 ( $\pm 1, \pm i$ ) を表していると約束する。従って  $\Omega^*$  と  $\mathbb{C}e_v$  たちが1対1に対応して, 28個のベクトルが与えられたことになる。

## 2.2 short vectors

次に, この28次元空間のノルム(長さの平方)が4であるベクトルを天下りで提示することにする。定数倍をのぞいて合計4060個になるベクトルは, 3つのタイプに分かれており, 28次元格子の最小ノルムのベクトルの集合を与えるものである。

(1)  $\Omega^*$  の異なる2元  $[a], [b]$  に対し, 2次元部分空間  $\langle a, b \rangle$  は(2重可移性から, これらの取り方によらず)  $\Omega^*$  の元(1次元部分空間)をちょうど4つ含んでいる。定数倍を調整して  $(a, b) = i$  (または  $-i$ ) としておけば,  $[a], [b], [a+b], [a-b]$  の4つである。この  $\Omega^*$  の4点部分集合を hyperbolic line と呼ぶことにする。hyperbolic line は全部で  $63(= (28 \times 27)/(4 \times 3))$  個である。なお,  $\langle a, b \rangle$  の直交補空間は, non-isotropic vector ( $x$  とおく) で生成され,  $\langle a, b \rangle = \langle x \rangle^\perp$  となることを注意しておく。

さて，ここで与える第一のタイプのノルム4のベクトルは，

$$e_a + e_b + e_{a+b} + e_{a-b} \quad (a, b, a+b, a-b \in \Omega)$$

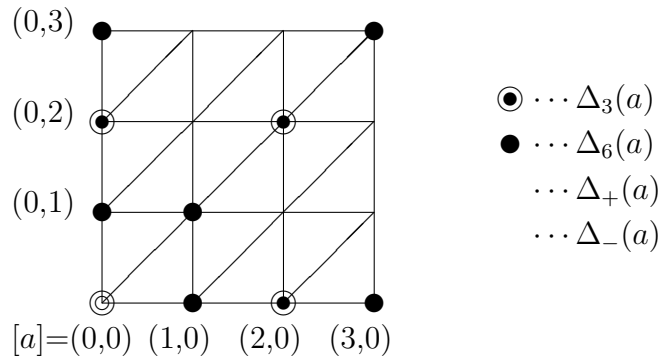
と表されるものと，その偶数個の符号変化をとったものである。その総数は，全体の定数倍（ $\pm 1, \pm i$  倍）を除いて  $63 \times 4$  となる。

(2) 次に， $V$  の直交基底（ただし，定数倍は無視）

$$E = \{[x_1], [x_2], [x_3]\}, \quad ((x_i, x_j) = 0 \ (i \neq j), V = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle)$$

をとる。計量の性質から， $[x_i] \in \Gamma^*$  (non-isotropic) である。

このとき，各  $x_i$  に対応する（前述の）hyperbolic line を考えると，そこに共通部分はなく，和集合として12点集合ができる。その  $\Omega^*$  における補集合として得られる16点集合を  $\delta(E)$  と表すことにする。ここには12本の hyperbolic line が含まれているが，これによって  $\delta(E)$  にはグラフの構造が入る。すなわち，16点集合  $\delta(E)$  の2点が， $\delta(E)$  の部分集合であるような hyperbolic line に含まれるとき，この2点が隣接しているとしてグラフの構造を入れるのである。これが（有名な）Shrikhande graph と呼ばれるグラフと同型になる。このグラフの（ひとつの）定義は， $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  を点集合として， $(i, j)$  の隣接点を  $(i, k), (k, j), (i+k, j+k)$  ( $k \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ) とするものである。



さて， $[a]$  を  $\delta(E)$  の1点として， $[a]$  が  $(0,0)$  に対応させるとき，

$$\Delta_3(a) = \{(2,0), (0,2), (2,2)\},$$

$$\Delta_6(a) = \{(1,0), (3,0), (0,1), (0,3), (1,1), (3,3)\},$$

$$\Delta_+(a) = \{(1,2), (1,3), (2,3)\},$$

$$\Delta_-(a) = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$$

とおく。 $\Delta_3(a), \Delta_6(a)$  は， $[a]$  の隣接点の集合で，その固定部分群による軌道になっている。また， $\Delta_+(a), \Delta_-(a)$  は， $[a]$  の非隣接点の集合で，その固定部分群の（非原始的な）作用における非原始域になっている。

以上の準備の下で，2つめのタイプのノルム4のベクトルを

$$e_a + \sum_{b \in \Delta_3(a)} e_b + (-i) \sum_{b \in \Delta_6(a)} e_b \pm \left( \sum_{b \in \Delta_+(a)} e_b - \sum_{b \in \Delta_-(a)} e_b \right)$$

と定義する。ベクトルの総数は，直交基底の個数 (63) に， $\delta(E)$  の1点の決め方 (16) と符号 ( $\pm$ ) の2通りをかけて， $63 \times 16 \times 2$  となる。

(3) 最後の3つめのタイプのベクトルは， $[a] \in \Omega^*$  をひとつ取ると，ひとつ決まるものである。

$$f_a = \frac{1}{2+2i} \left\{ (1-2i)e_a + \sum_{[b] \in \Omega^*, (a,b)=1} e_b \right\}$$

さらに，(2) で述べた  $\delta(E)$  という部分集合以外のみを  $-1$  倍することを許す (すなわち  $[c] \notin \delta(E)$  のとき， $e_c$  を  $-e_c$  に変える) ことにして，それを  $f_a^E$  と書くことにする。この符号変化は 63 通りであるから，最初のもの合わせれば，ここで与えたベクトルの総数は， $28 \times 64$  ということになる。

以上で，定数倍 ( $\pm 1, \pm i$  倍) を除いて，

$$4060 = 63 \times 4 + 63 \times 16 \times 2 + 28 \times 64$$

個のベクトル (ノルムはすべて4) が与えられた。

命題 2. ここで与えた short vector が生成する  $\mathbb{Z}[i]$  上の格子  $L$  は，ランク 56 の実格子として even unimodular であり，その theta series は

$$\Theta_L(q) = 1 + 0 \cdot q + (4060 \times 4)q^2 + \dots$$

となる。すなわち，ここで与えたベクトルと，それを  $\pm 1, \pm i$  倍した  $4060 \times 4$  個が，最小ノルム (=4) のベクトルの全体を与えている。

なお

$$\Theta_L(q) = E_4^7 - 1680E_4^4\Delta + 364000E_4\Delta^2 \quad \left( \Delta = \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728} \right)$$

である [14]。

### 3 $U_3(3)$ と $G_2(2)$

前節のベクトルの定義においては，ユニタリ群  $U_3(3)$  の働くユニタリ空間における，isotropic vector, non-isotropic vector, 直交基底，などが関わっていた。(すでに注意した

ように, non-isotropic vector を考えることと, hyperbolic line を考えることは同等のことである。)

このうち, isotropic vector は「ランク 1 の Lie 型の群」としての  $U_3(3)$  にとって本質的に重要である。すなわち, isotropic vector の固定部分群は,  $U_3(3)$  の唯一の極大 parabolic 部分群を与える。一方, non-isotropic vector と直交基底は,  $U_3(3) : 2$  を  $G_2(2)$  と見たときの「ランク 2 の Lie 型の群」として重要なものなのである。すなわち, 直交基底  $\{[x_1], [x_2], [x_3]\}$  全体を  $\mathcal{P}$  とするとき,

$(\mathcal{P}, \Gamma^*)$  は generalized hexagon である。

正確な言葉の定義は省略するが,  $\mathcal{P} \cup \Gamma^*$  から 2 つの元を任意に取るとき, それらが ( $\mathcal{P}$  の元を頂点,  $\Gamma^*$  の元を辺とみて) 必ず六角形に含まれているというのである。

さて, 特に,  $\mathcal{P}$  の 2 点を結ぶ辺の最小個数で距離を定義すると, 2 点間の距離は高々 3 であるが, 距離が 3 のときに成り立つ次の性質が, 後に重要となる。

補題 3.  $D, E \in \mathcal{P}$  が距離 3 であるとする。このとき, 次が成り立つ。

- (1)  $\delta(D) \cap \delta(E)$  は, 1 点を共有する 3 本の hyperbolic line の和集合である。
- (2)  $\delta(D) \cap \delta(E)$  を含むもうひとつの  $F \in \mathcal{P}$  が存在する。(  $F$  と  $D, E$  との距離も 3 になる。)

## 4 ランク 3 グラフ

### 4.1 ランク 3 グラフと short vector

歴史的に見ると, Rudvalis 群はグラフの自己同型群として構成された [8]。そのグラフは, ランク 3 の置換表現 (1 点の固定部分群の orbit の個数が 3 であるような置換表現) を用いて作られるもので, パラメータ (4060, 1755, 730, 780) の strongly regular graph になる。すなわち, 1 点の隣接点の個数が 1755 個で, 2 点に共通する隣接点の個数が, 2 点が隣接するとき 730 個, 隣接しないとき 780 個である。この置換表現の 1 点の固定部分群が  ${}^2F_4(2)$  であり, 交換子を取らないと単純群 (Tits 群) にならないという, 例外型な Lie 型の群である。

この置換表現は, 2 節で与えた short vector への置換表現として与えられる。すなわち, 記号  $\Lambda$  で定数倍を同一視したときの 4060 個の short vector 全体の集合を表すことにすれば, 次が成り立つのである。

命題 4.  $\Lambda$  を点集合として, その内積が 0 であるときに辺で結ばれるとしてグラフを定義すれば, パラメータ (4060, 1755, 730, 780) の strongly regular graph になり, その自己同型群は Rudvalis 群である。

## 4.2 Hoffman-Singleton graph

このグラフを，複素格子  $L$  とは独立に構成した Coolsaet の結果 [9] がある。それは，グラフを Hoffman-Singleton グラフと呼ばれる，パラメータ  $(50, 7, 0, 1)$  の strongly regular graph を用いて記述したものである。Hoffman-Singleton グラフは，ユニタリ群  $U_3(5) : 2$  を自己同型群に持つグラフであるが，Lie 型の群として記述できるものでなく，きわめて例外的なグラフである。1 辺の固定部分群が， $\text{Aut}(A_6) \cong A_6.2^2$  という群で，冒頭に述べた，例外的な同型を持つ，例外的な Lie 型の群のひとつになっている。以下， $HoS$  と略記することにしよう。

Coolsaet の結果を簡単に述べておく。Rudvalis 群のグラフの 4060 個の頂点が，下記のように， $HoS$  の言葉を用いて記述できるというものである。

まず， $HoS$  には 175 個の辺 (edge) が存在する。次に， $HoS$  において一つの頂点から辺を伝って一週する最短経路を考えると，5 角形 (pentagon) ができる。これが，1260 個存在する。最後に，このような pentagon をふたつ組み合わせると Petersen graph と呼ばれる，パラメータ  $(10, 3, 0, 1)$  の strongly regular graph ができるのだが，その中に，互いに接しない 3 つの辺を取ることができる。これを hexad と呼んでいて，全部で 2625 個存在する。以上の edge, pentagon, hexad を合わせた  $175 + 1260 + 2625 = 4060$  個の対象が，Rudvalis 群のグラフの頂点に対応している。さらに，ここに 2 点間の関係 (辺) を定義するのであるが，ここでは省略する。また，ここで構成したグラフが Rudvalis 群のグラフであることの証明は，これがランク 3 グラフであることを示した上で，有限単純群の分類定理 (正確には，そこから得られるランク 3 の置換群の分類定理) を使う。

さて，Coolsaet の結果の元となる  $HoS$  との関係は，Conway [7] による次のような観察が発端である。

命題 5. ([7]) 互いの内積が 1 であるような 7 つの short vector の集合 (これを heptad と呼ぶ) を 50 組取ることができて，2 つの集合の共通部分が 0 か 1 となる。共通部分が 1 個であるときに，辺で結ばれるというグラフを作ると， $HoS$  と同型なグラフができて，その自己同型群  $U_3(5) : 2$  は Rudvalis 群の部分群となる。

この記述を最初に読んだとき (ずっと昔の話であるが) には，このようなことを，どのように確認すれば良いのか，さっぱり見当もつかなかった。格子  $L$  (特に short vector) に関する理解が進み，様々な計算 (実際の計算は計算機 (Magma) に任せるとしても) を行うことができるようになって，ようやく，いろいろなことが確認できるようになったのである。次に述べる， $U_3(3)$  の言葉を用いて heptad を具体的に与えるという結果は，我々の勉強のささやかな成果の一つである。

前節の最後に述べた，3 つの直交基底  $D, E, F$  (距離 3) をとる。 $\delta(D) \cap \delta(E)$  は，1 点を共有する 3 本の hyperbolic line の和集合であるので，これを

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}, \{e_1, e_5, e_6, e_7\}, \{e_1, e_8, e_9, e_{10}\}$$



とおくことにする。このとき，次が成り立つ。

命題 6. 7つの short vector

$$-e_1 + e_2 + e_3 + e_4, -e_1 + e_5 + e_6 + e_7, -e_1 + e_8 + e_9 + e_{10}, f_1, f_1^D, f_1^E, f_1^F$$

は heptad である。

### 4.3 generalized octagon

上述の Coolsaet の結果においては，最終段階を分類定理に頼っているため，グラフの構造に深く立ち入ることはしていないと思われる。実際には，グラフの1点の隣接点全体には  ${}^2F_4(2)$  が作用し，そこには (ランク 2 の Lie 型の群として) generalized octagon の構造が入る。具体的な定義としては short vector  $v$  をひとつ固定したとき， $v$  と直交する short vector  $u_1, u_2, u_3$  で

$$v \equiv u_1 + u_2 + u_3 \pmod{(1+i)L}$$

が成り立つときに  $\{u_1, u_2, u_3\}$  を line と定義するのである。例えば， $v = e_a + e_b + e_{a+b} + e_{a-b}$  であるとき， $u_1, u_2, u_3$  として， $v$  の符号を変化させたもの (3通り) を取れば良い。しかし，このような定義をしても，これが generalized octagon であることや， ${}^2F_4(2)$  が作用するものであることを示すことは難しいように思われる。

次のような観察が，この部分の進展に寄与できるのではないかと考えている。それは，上記のように heptad を作るできるようになったことの副産物のひとつであり，再び例外的な群  $A_6$  を登場させるものでもある。

命題 7.  $HoS$  において，ひとつの辺 (edge) を含む heptad は 45 個存在する。この 45 個の short vector は，最初にとった edge に対応する点の隣接点における sub-octagon をなす。

この sub-octagon とは  $\text{Aut}(A_6) \cong A_6 \cdot 2^2$  が作用するもので，点集合として 45 個の  $2^2$  型の置換  $((i j)(k l))$  をとり，互いに可換な 3 つの置換の集合を直線として定義するのである。このとき，直線には 2 つのタイプ

$$\{(1 2)(3 4), (3 4)(5 6), (1 2)(5 6)\}, \quad \{(1 2)(3 4), (1 3)(2 4), (1 4)(2 3)\}$$

があって，この 2 つのタイプは  $S_6$  では互いに移ることはなく，その外部自己同型で移るという性質のものである。

このような sub-octagon の存在から  ${}^2F_4(2)$  が作用する generalized octagon を特徴付けるというプレプリント [3] が発表されており，Rudvalis 群の特徴付けに一役買える観察になるだろうと思う。

## 5 $Ru$ が作用する自己直交符号

最後に，冒頭に述べた自己直交符号について述べる。まず，Chigira-Harada-Kitazume [5] による結果の紹介から始める。

$(G, \Omega)$  を次数  $n(= |\Omega|)$  の置換群とする。 $\Omega$  の部分集合全体  $\mathcal{P}(\Omega)$  は，対称差を考えることで，2元体上の  $n$  次元ベクトル空間と見なされ， $G$  は自然にここに作用する。このとき， $G$  の位数 2 の元  $\sigma$  の固定点  $Fix(\sigma)$  の生成する符号（部分ベクトル空間）を  $F(G, \Omega)$ ，その直交補空間を  $C(G, \Omega)$  と表す。

$$F(G, \Omega) := \langle Fix(\sigma) \mid \sigma \in I(G) \rangle, \quad C(G, \Omega) := F(G, \Omega)^\perp$$

置換表現が特定されている場合には，次数  $n$  だけを書いて， $F(G, n), C(G, n)$  と表すことにする。

定理 8 ([5]).  $C$  を  $G$  の  $\Omega$  への作用で不変な，長さ  $n$  の自己直交符号 ( $C \subset C^\perp$ ) とするとき，

$$C \subset C(G, \Omega)$$

が成り立つ。

さらに， $C$  が自己双対 ( $C = C^\perp$ ) ならば， $F(G, \Omega)$  は自己直交で

$$F(G, \Omega) \subset C \subset C(G, \Omega)$$

が成立する。

この定理の後半の条件をみたら原始置換群は，実は，限られた場合にすぎない。次の定理は，散在型単純群に限って述べたものであるが，一般の単純群で調べても，めぼしい例が増えることはない。

定理 9. 散在型単純群  $G$  に対し，次数 10080 以下 の原始置換表現について， $F(G, n)$  が 0 でなく，かつ自己直交となるのは，以下のいずれかに限る。

$$\begin{aligned} G &= M_{12}, & n &= 144, 220, \\ G &= M_{22}, & n &= 22, 330, 672, \\ G &= M_{24}, & n &= 24, 2024, \\ G &= J_2, & n &= 100, 10080, \\ G &= Ru, & n &= 4060. \end{aligned}$$

このうち， $(M_{12}, 144), (M_{22}, 672)$  については実際には自己双対符号は存在しないことが示される。また， $(M_{24}, 2024), C(J_2, 10080)$  については，そのチェックをしていない。残りの場合については， $G$ -不変な自己双対符号の分類が可能であり， $(M_{22}, 22), (M_{22}, 330)$ ,

$(M_{24}, 24)$  については一意的で、残る  $(J_2, 100)$ ([4]),  $(M_{12}, 220)$ ,  $(Ru, 4060)$  の場合は3つ存在する。

そこで、Rudvalis 群の場合に、それがどのような符号かを調べようと思い、まずその生成系をとらえようと思ったわけである。Magma による計算で  $F(Ru, 4060)$  が 2029 次元であることはわかっていた。従って、あと一つの生成元を求めればよい。問題は、それを数学的にどう記述するかということである。

前節と同様に、Rudvalis 群のグラフを  $HoS$  を用いて記述したものを用いる。グラフの点集合は、定数倍を除いた short vector の集合であり、そこへの 4060 次の置換表現について、その作用で不変な自己双対符号を考える。

命題 10.  $HoS$  において、ひとつの点を含む pentagon は 126 個存在する。この 126 個の short vector の集合と、 $F(Ru, 4060)$  とで生成される符号は、 $Ru$ -不変な自己双対符号を与える。

あと2つの自己双対符号があるのだが、その生成系については、未だうまい記述が見つかっていない。

## 参考文献

- [1] R. Abbott, J. Bray, S. Linton, S. Nickerson, S. Norton, R. Parker, I. Suleiman, J. Tripp, P. Walsh and R. Wilson, “ATLAS of Finite Group Representations - Version 3”, published electronically at <http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/>.
- [2] W. Bosma and J. Cannon, Handbook of Magma Functions, Department of Mathematics, University of Sydney, Available online at <http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/>.
- [3] B. De Bruyn, The uniqueness of a certain generalized octagon of order  $(2,4)$ , preprint.
- [4] N. Chigira, M. Harada and M. Kitazume, Some Self-Dual Codes Invariant under the Hall–Janko Group, *J. Algebra*, **316** (2007), 578–590.
- [5] N. Chigira, M. Harada and M. Kitazume, Finite permutation groups and self-orthogonal codes, *J. Algebra*, **309** (2007), 610–621.
- [6] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker and R. A. Wilson, ATLAS of Finite Groups, Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [7] J. H. Conway, A quaternionic construction for the Rudvalis group, in ” Topics in group theory and computation” (Proc. Summer School, University Coll., Galway, 1973), 69–81. Academic Press, London, 1977.

- [8] J. H. Conway, D. B. Wales, Construction of the Rudvalis group of order 145, 926, 144, 000, *J. Algebra* 27 (1973), 538–548.
- [9] K. Coolsaet, A construction of the simple group of Rudvalis from the group  $U_3(5)$ , *J. Group Theory* 1 (1998), 143–163.
- [10] R.L.Griess, The Friendly Giant, *Invent. Math.* 69 (1982), 1–102.
- [11] J. Tits, Le groupe de Janko d’ordre 604,800, *Theory of Finite Groups* (R. Brauer and C. Sah eds.), 91–95, Benjamin, New York-Amsterdam, 1969.
- [12] R. A. Wilson, The Geometry and Maximal Subgroups of the Simple Groups of A. Rudvalis and J. Tits, *Proc. London Math. Soc.* 48 (1984), 533–563.
- [13] R. A. Wilson, *The finite simple groups*, Springer, 2009.
- [14] 千吉良直紀, Rudvalis 群と格子, 第 57 回代数学シンポジウム報告集, 2012.
- [15] 北詰正顕, 散在型単純群の周辺, 第 53 回代数学シンポジウム報告集, 2008.
- [16] 北詰正顕, Rudvalis 群に対する複素格子について, RIMS 講究録 1811 「有限群とその表現, 頂点作用素代数, 組合せ論の研究」2012 年 3 月.