代数・数論力学系について

川口　周

本稿では，代数・数論力学系の話題から，筆者が興味深いと思う力学系次数と等分布定理の 2 つの話題を取り上げています．筆者自身の結果（J. H. Silverman の共同研究に基づく）は，力学系次数では 2.3 節に関するものです．等分布定理では注意 3.13(5) と注意 3.16 に挙げたものぐらいです．

代数学シンポジウムでは，午前の一般向け講演ということもあり，背景となる事柄や関連する多くの数学者の結果を紹介し，力学系次数と等分布定理の大まかなところを捉えて頂けるように努めました．本稿は講演時のスライドをもとに作成しており，講演と同様に細部はかなり省略されています．末尾に参考文献を多く挙げましたので，詳細についてはそちらをご覧下さい．

代数学シンポジウムで講演の機会をあたえてくださった組織委員の皆様，特に，プログラム責任者（代数幾何）の松下大介氏と稲場道明氏に感謝します．1 節以下では,「だ・である」調に変えます．

目次

1　はじめに

k を体とし，X を k 上で定義された滑らかな射影代数多様体，$f : X \to X$ を X からそれ自身への射（または，X からそれ自身への支配的な有理写像 $f : X \dashrightarrow X$）とする．

例えば，X が $\mathbb{C}$ 上の射影平面 $\mathbb{P}^2$ で f が双有理写像のときは f は Cremona 変換であり，Noether の

2014 年 10 月 31 日

〒606-8502 京都市左京区北白川追分町　京都大学大学院理学研究科数学教室
kawaguch(())math.kyoto-u.ac.jp

定理など古くから深い研究がされている．また，例えば，X が $K3$ 曲面で f が同型射のときも自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ の性質など深い研究がされている．

(A) 一方で，力学系というときは，f の反復合成に関する性質を調べる．例えば，$P \in X(k)$ に対して，P が f に関する周期点になるか，P が f に関する固定点のときは P の近傍で f はどのように振る舞うかなどを考える．あるいは，P の前軌道 $O_f(P) = \{P, f(P), f(f(P)), \ldots\}$ が無限集合のとき，$O_f(P)$ は X の中でどう分布しているか（例えば，$k = \mathbb{C}$ のときは Euclid 位相に関して稠密かなど）などを考える．

(B) また，代数力学系，数論力学系というときには，基礎体 k は $\mathbb{C}$ に限らず，非アルキメデス付値体や代数体を考えることも多い．

(A) に関して，一般にコンパクト位相空間 X からそれ自身への連続写像 $f : X \to X$ に対して，位相的エントロピー $h_{top}(f)$ という 0 以上の量が定まる（定義 2.5 参照）．Cantat は，コンパクト複素曲面の同型射に対して，力学系の量である位相的エントロピーという観点から次の結果を示した．

定理 1.1 (Cantat [16], [17])**.** X をコンパクト複素曲面とする．このとき，正の位相的エントロピーをもつ同型射 $f : X \to X$ が存在することと，X が次のいずれかであることは同値である．（特に，X は Kähler になる．）

- X は $K3$ 曲面かそれの blow-up,
- X は Enriques 曲面かそれの blow-up,
- X は Abel 曲面かそれの blow-up,
- X は有理曲面.

同じく，(A) に関して，$f : X \to X$ をコンパクト Kähler 曲面の同型射とする．McMullen は固定点 P の回りで無理数回転をしているような円板（Siegel 円板）が存在するかという観点から，次の定理を証明した．定理を述べるために，まず，Siegel 円板の定義を述べる．

定義 1.2 (無理数回転，Siegel 円板)**.** (1) $\mathbb{C}^2$ の線形変換 $F(z_1, z_2) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2)$ が**無理数回転**（irrational rotation）とは，$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ で，任意の $(i,j) \neq (0,0) \in \mathbb{Z}^2$ に対して $\lambda_1^i \lambda_2^j \neq 1$ のときにいう．

(2) $f : X \to X$ を，コンパクト Kähler 曲面の同型射とする．領域 $U \subset X$ が ***Siegel* 円板**（Siegel disk）であるとは，U と単位開円板 $\Delta^2 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ の間の双正則写像が存在して，この双正則写像を通じて，$f|_U$ が 無理数回転の $F|_{\Delta^2}$ と共役になるときにいう．

定理 1.3 (McMullen [51], [52])**.** (1) $K3$ 曲面の自己同型射で，Siegel 円板をもつものが存在する．

(2) 有理曲面の自己同型射で，Siegel 円板をもつものが存在する．

定理 1.1, 定理 1.3 はいずれもコンパクト複素曲面の同型射に関する定理である．これらの定理を代数力学系の定理といっていいのかどうか分からないが，いずれにしても，f の反復合成に関する性質を調べている点で力学系と代数幾何の双方に関連している．

(B) に関しては，例えば，X が代数体 K 上で定義されていて，P が X の代数的点で f に関する周期点のとき，P の K 上での共役全体からなる集合 $G(P)$（Galois 軌跡）がどう分布しているかなどが調べられてい

る（等分布定理）．等分布定理は数論力学系の深い定理であり，3 節で紹介したい．

2　力学系次数

この節では，代数・数論力学系の話題から力学系次数について紹介する．非常におおざっぱにいうと，力学系次数は写像 f を反復合成した写像の「次数」の増大度を測る量である．力学系次数は複素力学系と可積分系の研究者によって調べられてきた．

2.1 節で力学系次数の定義とその基本的な性質を紹介し，2.2 節で位相的エントロピーの定義をして，位相的エントロピーと力学系次数の関係を与える Gromov [29], Yomdin [61] と Dinh–Sibony [21] の定理を紹介する．2.3 節では，f が代数体上に定義されているときに，力学系次数と算術的次数との関係を述べる．筆者自身の結果は 2.3 節に関するものである．

2.1　力学系次数の定義と性質

力学系次数（dynamical degree）は，複素力学系と可積分系の 2 つの視点から導入された．力学系次数の定義を述べる前に文献をいくつか挙げよう．

(1) 複素力学系の視点から
- 1989 年に出版された [27] で，Friedland–Milnor はアフィン平面の多項式自己同型写像について，1 次力学系次数を調べた．
- 1997 年に出版された [53] で，Russakovskii–Shiffman は N 次元射影空間からそれ自身への支配的な有理写像について，p 次力学系次数を導入した（$0 \le p \le N$）．
- 力学系次数に関する論文は非常に多く出版されている．そのごく一部を挙げると，例えば，Bedford–Kim [5], [6], [7], [8], Boucksom–Favre–Jonsson [14], Diller–Favre [20], Dinh–Sibony [21], Favre–Jonsson [24], Guedj [28], Takenawa [57], [58] などがある．注意 2.4 にあげる文献も参照されたい．また，Hasselblatt–Propp による monomial map の力学系次数に関するサーベイ [30] はまとまっていて読みやすい．

(2) 可積分系の視点から
1999 年に出版された [10] で，Bellon–Viallet は Russakovskii–Shiffman とは独立に，1 次力学系次数の対数をとった量を考え，この量を**代数的エントロピー** (algebraic entropy) とよんだ．可積分系の代数的エントロピーについての論文には，例えば，Bellon [9], Hientarinat–Viallet [31], [32], Lafortune–Ramani–Grammaticos–Ohta–Tamizhamani [43] などがある．

以下で，力学的次数を定義しよう．本稿では，$\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体 X を考える．なお，Dinh–Nguyên [22], Dinh–Nguyên–Truong [23] により，力学的次数は双有理不変量（注意 2.8 参照）であることが知られているので，X が滑らかでない場合にも力学的次数は定義される．

定義 2.1 (p 次力学系次数)**.** X は $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体とし，ω を X 上の Kähler 形式とする．$f : X \dashrightarrow X$ は X からそれ自身への支配的な有理写像とする．f の不定集合を I_f で表す．また，f^n で f の n 回合成写像を表す．$p \in \mathbb{Z}$, $0 \le p \le \dim X$ とする．

(1) $f|_{(X \setminus I_f)} : (X \setminus I_f) \to X$ のグラフの $X \times X$ における閉包を Γ_f で表し，$\widetilde{\Gamma}_f$ を Γ_f の特異点

解消とする．$\pi_1 : \widetilde{\Gamma}_f \to X$ を第 1 成分への射影，$\pi_2 : \widetilde{\Gamma}_f \to X$ を第 2 成分への射影とする．$f^*(\omega^p) := (\pi_1)_*(\pi_2^*(\omega^p))$ とおく．ここで，$f^*(\omega^p)$ は C^∞ 形式 $\pi_2^*(\omega^p)$ をカレントとみて，π_1 で押し出した X 上の (p,p)-カレントである．そして，

$$d_p(f) := \int_X f^*(\omega^p) \wedge \omega^{\dim X - p}$$

と定める．

(2) X, f は上の通りとする．

$$\lambda_p(f) := \lim_{n\to\infty} d_p(f^n)^{1/n} \tag{2.1}$$

と定める．$\lambda_p(f)$ を f の p **次力学系次数**（p-th dynamical degree）という．

注意 2.2. 容易にわかるように，p 次力学系次数 $\lambda_p(f)$ は Kähler form ω の取り方によらない．したがって，p 次力学系次数は (X, f) から定まる量である．[21] により，$\lambda_p(f)$ の定義 (2.1) の右辺の極限は存在する．

上と同様に，X は $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体，$f : X \dashrightarrow X$ は X からそれ自身への支配的な有理写像とする．ω を X の Kähler form とする．以下で，0 次力学系次数，d 次力学系次数（$d = \dim X$），1 次力学系次数についてもう少し詳しく見よう．

0 次力学系次数

$d_0(f^n) = \int_X \omega^{\dim X} > 0$ （n に無関係）だから

$$\lambda_0(f) := \lim_{n\to\infty} d_0(f^n)^{1/n} = 1$$

となる．したがって，0 次力学系次数は常に 1 である．

d 次力学系次数（$d = \dim X$）

X の一般の点の f による逆像の個数を**位相的次数**（topological degree）といい，$e(f)$ で表す．このとき，$e(f^n) = e(f)^n$ である．

$$d_{\dim X}(f^n) = \int_X (f^n)^*(\omega^{\dim X}) = e(f^n) \cdot \int_X \omega^{\dim X} = e(f)^n \cdot \int_X \omega^{\dim X}$$

だから，

$$\lambda_{\dim X}(f) := \lim_{n\to\infty} d_{\dim X}(f^n)^{1/n} = e(f)$$

となる．したがって，d 次力学系次数（$d = \dim X$）は f の位相的次数に他ならない．

1 次力学系次数

$X = \mathbb{P}^N$ として，1 次力学系次数の例をあげよう．

$\mathbb{P}^N$ を $\mathbb{C}$ 上の N 次元射影空間，$f : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ は $\mathbb{P}^N$ からそれ自身への支配的な有理写像とする．ω_{FS} は $\mathbb{P}^N$ の Fubini-Study 計量とする．

このとき，斉次多項式 $F_0, \ldots, F_N \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]$ で，$\mathrm{GCD}(F_0, \ldots, F_N) = 1$ であるものを用いて $f = (F_0 : F_1 : \cdots : F_N)$ と表せる．$\mathrm{algdeg}(f) := \deg(F_i)$ とおけば，

$$d_1(f) := \int_{\mathbb{P}^N} f^*(\omega_{FS}) \wedge (\omega_{FS}^{N-1}) = \mathrm{algdeg}(f)$$

となる．よって，第 1 次力学系次数は $\lambda_1(f) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{algdeg}(f^n)^{1/n}$ で与えられる．

例 2.3. (1) $N = 2$ とする．$f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$（$\mathrm{algdeg}(f) = 2$）を

$$f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2)$$

で定める．このとき，$f^n(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0^{2^n} : x_1^{2^n} : x_2^{2^n})$ であるから，$\mathrm{algdeg}(f^n) = 2^n$ である．
よって，f の第 1 次力学系次数は，$\lambda_1(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{algdeg}(f^n)^{1/n} = 2$ になる．

(2) $N = 2$ とする．$g : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$（$\mathrm{algdeg}(g) = 2$）を

$$g : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1x_2 : x_0x_1 : x_2^2)$$

で定める．このとき，$g^2(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0x_1x_2^2 : x_0x_1^2x_2 : x_2^4) = (x_0x_1x_2 : x_0x_1^2 : x_2^3)$ であるから，$\mathrm{algdeg}(g^2) = 3$ となる．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を Fibonacci 数列，すなわち，漸化式 $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ で定まる数列とおく．すると，

$$g^n(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0^{a_{n-1}} x_1^{a_n} x_2^{a_{n-1}} : x_0^{a_n} x_1^{a_{n+1}} : x_2^{a_{n+2}})$$

であるから，$\mathrm{algdeg}(g^n) = a_{n+2}$ である．
よって，g の第 1 次力学系次数は $\lambda_1(g) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{algdeg}(g^n)^{1/n} = (1 + \sqrt{5})/2$（黄金比） になる．

力学系次数について，いくつか補足したい．

注意 2.4. (1) Bellon–Viallet [10] は，1 次力学系次数 $\lambda_1(f)$ は常に**代数的整数**であると予想している．この予想は，いくつかの場合に正しいことが示されているが，一般には未解決である（と思う）．さらに，任意の $1 \le p \le \dim X$ について，p 次力学系次数も，知られている場合はすべて代数的整数になっている（と思う）．

(2) X を有理曲面とし，$f : X \dashrightarrow X$ を双有理な射（つまり不定集合 I_f が空集合）で位相的エントロピーが正とする．[52] において McMullen は，$\lambda_1(f)$ が Lehmer 数以上であることを示している．また，上原 [59] は，Weyl 群から定まる任意の Salem 数 λ について，適当な有理曲面と双有理な射 $f : X \dashrightarrow X$ が存在して，$\lambda_1(f) = \lambda$ となることを示している．

(3) $\dim X \ge 3$ とする．このとき，$p \ne 0, 1, \dim X$ について，$\lambda_p(f)$ の値（例えば $\lambda_2(f)$ など）は，あまり知られていない（と思う）．もちろん，$X = \mathbb{P}^N$ で f が射（つまり，f の不定集合 I_f が空集合）のときは，$d = \mathrm{algdeg}(f)$ とおくと，定義から $\lambda_p(f) = d^p$ （$0 \le p \le N$）が成り立つ．そこで，f は射でないか，X は射影空間でないと仮定する．このとき，以下は知られている．

- $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体 X と支配的な有理写像 $f : X \dashrightarrow X$ に対して，$\lambda_{p-1}(f)\lambda_{p+1}(f) \le \lambda_p(f)^2$（ $1 \le p \le \dim X - 1$ ）が成立する（Guedj [28]）．
- f が $\mathbb{P}^N$ の monomial map の場合は $\lambda_p(f)$ は具体的に求まる（Favre–Wulcan [26], Lin [45], [46]）．
- ハイパーケーラー多様体 X の自己同型射 $f : X \to X$ について，p 次力学系次数 $\lambda_p(f)$ は Salem 数か 1（特に代数的整数） である（Oguiso [47]）．

2.2 力学系次数と位相的エントロピーの関係

X は $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体，$f : X \dashrightarrow X$ は X からそれ自身への支配的な有理写像とする．I_f で f の不定集合を表し，$\Omega_f := X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(I_f)$ とおく．

位相的エントロピー（topological entropy）の定義をしよう．ω を X の Kähler 計量とし，ω から X に距離 $\mathrm{dist} : X \times X \to \mathbb{R}$ を入れる．

$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $\varepsilon > 0$ について，Ω_f の部分集合 F が (n, ε)-**分離的**（ (n,ε)-separated） というのを，

$$\text{任意の } x, y \in F \, (x \neq y) \text{ について } \max_{0\leq i\leq n-1} \mathrm{dist}(f^i(x), f^i(y)) \geq \varepsilon$$

によって定める．

定義 2.5 (位相的エントロピー)**.** X, f は上の通りとする．このとき，f の位相的エントロピーは,

$$h_{top}(f) := \sup_{\varepsilon>0} \left(\limsup_{n\to\infty} \log \frac{1}{n} \log \max \{\#F \mid F \text{ は } \Omega_f \text{ の } (n,\varepsilon)\text{-分離的な部分集合 }\} \right) \tag{2.2}$$

で定義される．

位相的エントロピーと力学系次数の間には次のような等式がある．

定理 2.6 (Gromov [29], Yomdin [61])**.** $f : X \to X$ を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体 X からそれ自身への全射な**射**（つまり，f の不定集合 I_f は空集合）とする．このとき

$$h_{top}(f) = \max_{0\leq p\leq \dim X} \log \lambda_p(f)$$

が成り立つ．

Gromov, Yomdin の定理は，f が射のとき，位相的エントロピーが力学系次数によって捉えられることを示している．p 次力学系次数は，f の (p, p) コホモロジー $H^{p,p}(X)$ への作用として捉えることができる．実際，一般に $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間 V の線形変換 $\varphi : V \to V$ について，φ の**スペクトル半径**（spectral radius）を $\rho(\varphi) = \max\{|\alpha| \mid \alpha \text{ は } \varphi \text{ の固有値 }\}$ で定める．このとき，$\lambda_p(f) = \rho\left(f^*|_{H^{p,p}(X)}\right)$ となるから，$h_{top}(f) = \max_{0\leq p\leq \dim X} \log \rho\left(f^*|_{H^{p,p}(X)}\right)$ となる．

f が射と限らない支配的な有理写像のときは, 位相的エントロピーと力学系次数の間には不等式が存在する．

定理 2.7 (Dinh–Sibony [21])**.** $f : X \dashrightarrow X$ を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体 X からそれ自身への支配的な**有理写像**とする．このとき

$$h_{top}(f) \leq \max_{0\leq p\leq \dim X} \log \lambda_p(f) \tag{2.3}$$

が成り立つ．

注意 2.8. 一般には，有理写像のときは (2.3) において等号は成り立たない．実際，力学系次数は双有理不変量である（つまり，X と Y が双有理で，f を Y から Y への有理写像とみなしたときの写像を g とすれば，$\lambda_p(f) = \lambda_p(g)$ が成り立つ）ことが，Dinh–Nguyên [22], Dinh–Nguyên–Truong [23] の結果から従う．一方，$h_{top}(f)$ は双有理不変量ではないことが知られている．筆者は小木曽啓示氏からこのことを教えていただいた．

2.3 1 次力学系次数と算術的次数

2.1 節では力学系次数を，2.2 節では力学系次数と位相的エントロピーの関係を紹介した．この小節では，1 次力学系次数への数論的なアプローチについて紹介したい．

K を代数体（つまり，$\mathbb{Q}$ 上の有限次拡大体），$\overline{K}$ を K の代数閉包，X を K 上の滑らかな射影代数多様体，L を X 上の直線束とする．このとき，L に付随する**高さ関数**（height function）

$$h_L : X(\overline{K}) \to \mathbb{R} \tag{2.4}$$

を定めることができる．

h_L は L から一意には決まらないが, h'_L を L に付随する別の高さ関数とすれば, $\sup_{P \in X(\overline{K})} |h_L(P) - h'_L(P)| < +\infty$ が成り立つ．すなわち，$X(\overline{K})$ 上の有界関数を法とすれば，h_L は L から一意に定まる．

h_L の定義など高さ関数の一般論については，[44], [33] や [13] などを参照してほしい．（数論力学系の教科書には [55] がある．）

本稿では，naive 高さ h_{naive} とよばれる射影空間 $\mathbb{P}^N$ 上の高さを定義しよう．以下の例 2.13，例 2.14 で 1 次力学系次数と算術的次数の関係をみるが，その例では有理点の h_{naive} 高さ（定義 2.9）しか使わない．

定義 2.9 (有理点の naive 高さ)**.** $\mathbb{P}^N$ を $\mathbb{Q}$ 上の N 次元射影空間とする．$P \in \mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ とし，$P = (x_0 : x_1 : \cdots : x_N)$ を $x_i \in \mathbb{Z}$ かつ $\mathrm{GCD}(x_0, \ldots, x_N) = 1$ と書く．このとき，

$$h_{naive}(P) := \log \max\{|x_0|, \ldots, |x_N|\}$$

で定める．

例えば，$\mathbb{P}^2$ の有理点 $(1/2 : 1/3 : 1)$ の naive 高さは $h_{naive}((1/2 : 1/3 : 1)) = h_{naive}((3 : 2 : 6)) = \log 6$ である．

注意 2.10. (1) 一般に，K を代数体とするとき，代数的点 $P \in \mathbb{P}^N(K)$ に対して，その naive 高さ $h_{naive}(P)$ が定まる．3.1 節でもう少し詳しく述べるが，M_K を K の素点からなる集合，$|\cdot|_v$ を v に付随する（正規化された）v-進ノルムとするとき，

$$h_{naive}(P) := \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_K} \log \max\{|x_0|_v, \ldots, |x_N|_v\}$$

で与えられる．

(2) $h_{naive} : \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ は，$\mathbb{P}^N(1)$ の豊富な直線束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ に付随する高さ関数である．

(3) 一般に，L を代数体 K 上の滑らかな射影代数多様体 X 上の**豊富な**直線束とし，$h_L : X(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ を L に付随する高さ関数とする．$h_L(P)$ は代数的点 $P \in X(\overline{K})$ の「**算術的な大きさ**（arithmetic size)」，「**算術的な複雑さ**（arithmetic complexity)」を測る量と考えられる．

X は代数体 K 上の滑らかな射影代数多様体，$f : X \dashrightarrow X$ は X からそれ自身への支配的な有理写像，I_f を f の不定集合とする．

$$X_f(\overline{K}) := \{P \in X(\overline{K}) \mid f^n(P) \notin I_f \text{ (for all } n \geq 0)\}$$

とおく．$X_f(\overline{K})$ は無限集合である（[1]）

力学系次数では，写像の反復合成に関する「次数」の増大度を測っていた．以下では，写像の反復合成に関する代数的点の「高さ」の増大度を測ろう．

定義 2.11 (算術的次数)**.** L を X 上の**豊富な**因子とする．このとき，$X(\overline{K})$ 上で $h_L \geq 1$ となるように h_L をとることができる．$P \in X_f(\overline{K})$ に対して

$$\overline{\alpha}_f(P) := \limsup_{n\to\infty} h_L\left(f^n(P)\right)^{1/n}$$

と定め，f の P での**算術的次数**（arithmetic degree）という．

注意 2.12. $\overline{\alpha}_f(P)$ は，P の f による反復合成に関する高さの増大度を測る量である．$\overline{\alpha}_f(P)$ は L と h_L の取り方によらないことが容易にわかる．したがって，$\overline{\alpha}_f(P)$ は，(X,f) と $P \in X_f(\overline{K})$ から決まる量である．

1 次力学系次数のときに使った例 2.3 を用いて，1 次力学系次数と算術的次数を比較しよう．

例 2.13. 例 2.3(1) のように，$f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ を 2 乗射

$$f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2)$$

とする．$L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2(1)}$ とし，h_L として $h_{naive} + 1$ をとる（$\mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{Q}})$ 上で $h_L \geq 1$ としたいため）．

(1) $P = (1:1:1)$ ととる．$f^n(P) = (1:1:1)$ であり，$h_L(f^n(P)) = h_{naive}(f^n(P)) + 1 = 1$ である．よって，$\overline{\alpha}_f(P) := \limsup_{n\to\infty} h_L\left(f^n(P)\right)^{1/n} = 1$ となる．

(2) $Q = (1:3:1)$ ととる．$f^n(Q) = (1:3^{2^n}:1)$ であり，$h_L(f^n(Q)) = h_{naive}(f^n(Q)) + 1 = \log(3^{2^n}) + 1 = 2^n \log 3 + 1$ である．よって，$\overline{\alpha}_f(Q) := \limsup_{n\to\infty} h_L\left(f^n(Q)\right)^{1/n} = 2$ となる．

例 2.3(1) でみたように，f の 1 次力学系次数は $\lambda_1(f) = 2$ であった．したがって，$\overline{\alpha}_f(P) \leq \lambda_1(f)$, $\overline{\alpha}_f(Q) \leq \lambda_1(f)$ が成り立っている．

例 2.14. 例 2.3(2) のように，$g : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ を

$$f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1x_2 : x_0x_1 : x_2^2)$$

で定める．$L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2(1)}$ とし，h_L として $h_{naive} + 1$ をとる．

(1) $P = (1:1:1)$ ととる．$g^n(P) = (1:1:1)$ であり，$h_L(g^n(P)) = h_{naive}(g^n(P)) + 1 = 1$ である．よって，$\overline{\alpha}_g(P) := \limsup_{n\to\infty} h_L\left(g^n(P)\right)^{1/n} = 1$ となる．

(2) $Q = (1:3:1)$ ととる．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を例 2.3(2) のように Fibonacci 数列とする．$g^n(Q) = (3^{a_{n-1}} : 3^{a_n} : 1)$ であり，$h_L(g^n(Q)) = h_{naive}(g^n(Q)) + 1 = a_n \log(3) + 1$ である．よって，$\overline{\alpha}_g(Q) := \limsup_{n\to\infty} h_L\left(g^n(Q)\right)^{1/n} = (1+\sqrt{5})/2$（黄金比）となる．

例 2.3(2) でみたように，g の 1 次力学系次数は $\lambda_1(g) = (1+\sqrt{5})/2$ であった．したがって，$\overline{\alpha}_g(P) \leq \lambda_1(g)$, $\overline{\alpha}_g(Q) \leq \lambda_1(g)$ が成り立っている．

例 2.13, 例 2.14 では，いずれも算術的次数は第 1 力学系次数を超えなかった．これは一般に成り立つ．

定理 2.15 ([40])**.** $f : X \dashrightarrow X$ を，代数体 K 上の滑らかな射影代数多様体 X からそれ自身への支配的な有理写像とする．このとき，任意の $P \in X_f(\overline{K})$ に対して，

$$\overline{\alpha}_f(P) \leq \lambda_1(f)$$

が成り立つ．

算術的次数の性質をより詳しく調べよう．X を代数体 K 上の滑らかな射影代数多様体，$f: X \dashrightarrow X$ を X からそれ自身への支配的な有理写像とする．補助的に，X 上の豊富な直線束 L と，高さ関数 $h_L \geq 1$ をとる．

予想 2.16 ([54], [40])**.** (1) 任意の $P \in X_f(\overline{K})$ に対し，$\alpha_f(P) := \lim_{n\to\infty} h_L(f^n(P))$ が存在する．（つまり，$\limsup$ でなく $\lim$ が存在する．）

(2) 任意の $P \in X_f(\overline{K})$ に対し，$\alpha_f(P)$ は 代数的整数である．

(3) 与えられた (X, f) に対し，$\{\alpha_f(P) \mid P \in X_f(\overline{K})\}$ は有限集合である．

(4) $P \in X_f(\overline{K})$ は，前軌道 $O_f(P) := \{P, f(P), f^2(P), \ldots\}$ が X で Zariski 稠密であるような点とする．このとき，$\alpha_f(P) = \lambda_1(f)$ が成り立つ．

注意 2.17. 予想 2.16(1) の $\limsup$ が $\lim$ に置き換えられるということには意味がある．実際，予想 2.16(1) が成り立てば，算術的次数 $\alpha_f(x)$ は x の前軌道 $O_f(x)$ の**算術的な大きさ**を測っていることが分かる．正確に述べると，

$$\lim_{B\to\infty} \frac{\#\{y \in O_f(x) \mid h_L(y) \leq B\}}{\log B} = \frac{1}{\log \alpha_f(x)}$$

が成り立つことが分かる（$\alpha_f(x) = 1$ のときは右辺は ∞ として正しい）．予想 2.16(2) は，第 1 力学系次数における Bellon–Viallet の予想（注意 2.4(2) 参照）の算術的次数版と思える．

予想 2.16 はいくつかの場合に正しい．

定理 2.18 (Silverman [54])**.** $f: \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ を，代数体 K 上の射影空間からそれ自身への monomial map とする．このとき，予想の (1)(2)(3)(4) は正しい．

定理 2.19 (K.–Silverman [41], [42])**.** $f: X \to X$ を，代数体 K 上の滑らかな射影代数多様体 X からそれ自身への全射な**射**（つまり，不定集合 I_f が空集合）とする．

(1) このとき，予想の (1)(2)(3) は正しい．

(2) 次のときは，予想 (4) も正しい．

  (a) ある豊富な直線束 L が存在して，ある正の整数 $d \geq 2$ について $f^*(L) \cong L^{\otimes d}$ となる．（**偏極付き力学系**という．定義 3.6 参照．）

  (b) $\dim X = 2$ で f は同型射である．

  (c) X はアーベル多様体，f は群の準同型写像である．

注意 2.20. (1) 定理 2.19 で (a) の場合は Call–Silverman [15] の結果から従う．定理 2.19 で (b) の場合は [37] の結果から従う．

(2) 定理 2.19(1) では，Call–Silverman [15] の標準的高さ関数の理論を，ジョルダンブロックに対する標準的高さ関数に拡張して示す．また，定理 2.19(c) の証明は，ネフな $\mathbb{R}$-因子に対する アーベル多様体の Néron–Tate の高さ関数の性質を調べることによって得られる．

(3) "**正則な**" 多項式同型 $f: \mathbb{A}^N \to \mathbb{A}^N$ を，射影空間に拡張した双有理写像 $f: \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ についても，[35], [38] の結果を使うと予想の (1)(2)(3)(4) が正しいことが分かる（[41] 参照）．

3　等分布定理

数論力学系の深い結果は，**等分布定理**（equidistribution theorem）を使って得られるものが多い．等分布定理は，Yuan [62] によって，非常に一般的な設定で証明された（関連する結果については，注意 3.13 を参照されたい）．

3.1 節で Yuan [62] の結果を紹介し，3.2 節以下で等分布定理の数論力学系への応用を紹介する．具体的には，3.2 節で Yuan [62] による偏極付き力学系への応用を，3.3 節で Yuan-Zhang [63] による 2 つの偏極付き力学系への応用を，3.4 節で DeMarco–Wang–Ye [19] による楕円曲線の数論の定理への応用を紹介する．なお，筆者自身の等分布定理に関連する結果はあまりなく，注意 3.13(5) と注意 3.16 に書いたものぐらいである．

3.1　等分布定理

Yuan [62] による等分布定理を紹介するために，記号の設定をしよう．

K は代数体（すなわち，$\mathbb{Q}$ 上の有限次拡大体）とする．O_K で K の整数環を表す．$M_K^{fin} = \mathrm{Spec}(O_K)\setminus\{0\}$，$M_K^{\infty} = \{v : K \hookrightarrow \mathbb{C} \mid \text{体の埋込み}\}$ とおき，$M_K = M_K^{fin} \cup M_K^{\infty}$ とおく．M_K の元 v を K の素点とよぶことにする（$v \in M_K^{\infty}$ が実のときは，通常の呼び方と少し違うことに注意されたい）．$v \in M_K^{fin}$ のとき v を**非アルキメデス的**，$v \in M_K^{\infty}$ のとき v を**アルキメデス的**とよぶ．$v \in M_K$ に対し，K_v を K の v-進ノルム $|\cdot|_v$ による完備化を表し，$\mathbb{C}_v$ で K_v の代数閉包の完備化を表す．

X を代数体 K 上に定義された滑らかな射影代数多様体とし，L を X 上の直線束とする．K の素点 v に対して，$X_{\mathbb{C}_v} := X \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(\mathbb{C}_v)$，$L_{\mathbb{C}_v} := L \otimes_K \mathbb{C}_v$ とおく．

$X_{\mathbb{C}_v}^{\mathrm{an}}$ で $X_{\mathbb{C}_v}$ に付随する**解析空間**（analytic space）を表す．v がアルキメデス的のときは，$X_{\mathbb{C}_v}^{\mathrm{an}}$ は通常の複素解析空間 $X_v(\mathbb{C})$ である．v が非アルキメデス的のときは，$X_{\mathbb{C}_v}^{\mathrm{an}}$ は集合としては

$$X_{\mathbb{C}_v}^{\mathrm{an}} := \{(x, |\cdot|) \mid x \in X_{\mathbb{C}_v},\ |\cdot| \text{ は剰余体 } \kappa(x) \text{ のノルムで，} \mathbb{C}_v \text{ のノルムを拡張}\}$$

で与えられる $X_{\mathbb{C}_v}$ に付随する *Berkovich* 空間である（[11] 参照）．v がアルキメデス的のときも，非アルキメデス的のときも，$X_{\mathbb{C}_v}^{\mathrm{an}}$ はコンパクトハウスドルフ空間になる．

$x \in X(\mathbb{C}_v)$ に対して，$\|\cdot\|_v(x)$ は $L_{\mathbb{C}_v}(x)$ の $\mathbb{C}_v$-ノルムとする．このとき，$\|\cdot\|_v := \{\|\cdot\|_v(x)\}_{x \in X(\mathbb{C}_v)}$ とおく．

X 上の直線束 L と各素点 $v \in M_K$ 上の計量 $\|\cdot\|_v$ の組 $\overline{L} := (L, \{\|\cdot\|_v\}_{v \in M_K})$ を，**アデール計量付き直線束**という．（正確には，計量は連続であるなどの仮定を入れる．詳しくは，Zhang [66] などを参照されたい．）

さらに，L が**豊富**なときには，アデール計量付き直線束 $\overline{L}$ が**半正である**（semipositive）ということが定義できる．詳しくは，Zhang [66] などを参照されたい．おおざっぱにいえば，$\overline{L}$ が半正であるとは，$v \in M_K$ がアルキメデス的なときには，$\|\cdot\|_v$ は $L_{\mathbb{C}_v}$ の C^{∞} な正の計量の一様収束極限として表されることを要請する．$v \in M_K$ が非アルキメデス的なときには，$\|\cdot\|_v$ は (X, L) の K_v の整数環上のモデルから決まる計量の一様収束極限として表されることを仮定し，さらに，$\mathrm{Spec}(O_K)$ の Zariski 開集合 $U \neq \emptyset$ が存在して，任意の $v \in U$ 上では $\|\cdot\|_v$ は (X, L) の U 上のモデルから決まる計量であることを要請する．

以下では，X は代数体 K 上に定義された滑らかな射影代数多様体とし，L は X 上の**豊富な**直線束とする．$\overline{L} := (L, \{\|\cdot\|_v\}_{v \in M_K})$ は X 上のアデール計量付き直線束で**半正**であると仮定する．

定義 3.1 (Galois 軌跡). $x \in X(\overline{K})$ に対して，x の *Galois* **軌跡**（Galois orbit）を，

$$G(x) := \{\sigma(x) \in X(\overline{K}) \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\}$$

で定める．

定義 3.2 (高さ関数). アデール計量付き直線束 $\overline{L}$ に付随する高さ関数

$$h_{\overline{L}} : X(\overline{K}) \to \mathbb{R}$$

を，$x \in X(\overline{K})$ に対して，

$$h_{\overline{L}}(x) = \frac{1}{\#G(x)} \sum_{v:\text{素点}} \sum_{z \in G(x)} (-\log \|s\|_v(z)) \tag{3.5}$$

で定める．ただし，s は $G(x)$ 上で 0 にならない L の任意の有理切断であり，積公式から $h_{\overline{L}}(x)$ は s の取り方によらずに決まる．

注意 3.3. $h_{\overline{L}}$ は 2.3 節 で述べた L に付随する高さ関数である．すなわち，h_L を L に付随する高さ関数（の 1 つ）とすれば，$\sup_{x \in X(\overline{K})} |h_L(x) - h_{\overline{L}}(x)| < +\infty$ が成り立つ．$\overline{L}$ は計量が入っているので，有界関数を法にすることなく，$h_{\overline{L}}$ は $\overline{L}$ から一意的に決まっている．

さらに，次も定義される．

$\overline{L}$ をアデール計量付き直線束とするとき，各素点 v に対して，$X_{\mathbb{C}_v}^{\mathrm{an}}$ 上の確率測度

$$d\mu_v = \frac{c_1(\overline{L}, \|\cdot\|_v)^{\dim X}}{\deg_L(X)}$$

が定まる．これを，*Monge–Ampère* **測度**（Chambert-Loir 測度）という．$d\mu_v$ の構成については，Chambert-Loir [18] を参照されたい．

Y を $X_{\overline{K}}$ の部分多様体とする．s を L の有理切断で，Y と $\mathrm{div}\, s$ が固有に交わるものとする．このとき，Y に関する次元に関する帰納法で，

$$h_{\overline{L}}(Y) = h_{\overline{L}}(Y \cdot \mathrm{div}) - \sum_{v \in M_K} \int_{X_v^{\mathrm{an}}} \log \|s\|_v \, c_1 \left(\overline{L}, \|\cdot\|_v\right)^{\dim Y} \wedge \delta_Y$$

によって，Y の高さ $h_{\overline{L}}(Y) \in \mathbb{R}$ を定めることができる（例えば，[64] を参照されたい）．

定義 3.4 (高さの小さい点からなる生成的な点列). $X, \overline{L}$ は上の通りとする．$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset X(\overline{K})$ が**高さの小さい点からなる生成的な**点列（generic sequence of small height）であるとは，次の 2 条件を満たすときにいう．

(i) $\lim_{m \to \infty} h_{\overline{L}}(x_m) = h_{\overline{L}}(X)$ が成り立つ．
(ii) 任意の $X_{\overline{K}}$ の真の部分多様体 Y に対して，ある m_0 が存在して，任意の $m \geq m_0$ に対して $x_m \notin Y$ となる．

$x \in X(\overline{K})$ とする．K の各素点 v に対して，$G(x) = \{\sigma(x) \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\}$ は $X_{\mathbb{C}_v}^{\mathrm{an}}$ の有限集合とみなすことができる．そこで，

$$\mu_{v,x} := \frac{1}{\#G(x)} \sum_{z \in G(x)} \delta_z \quad (\delta_z \text{ は Dirac 測度})$$

とおく．$\mu_{v,x}$ は $X_{\mathbb{C}_v}^{\mathrm{an}}$ 上の確率測度を定める．

以上の準備のもとに，（ようやく）Yuan [62] による等分布定理を述べることができる．

定理 3.5 (Yuan [62], 等分布定理)**.** K を代数体, X を K 上に定義された滑らかな射影代数多様体，L を X 上の豊富な直線束とする．$\overline{L} := (L, \{\|\cdot\|_v\}_{v\,\in\,M_K})$ は，X 上の半正なアデール計量計量付き直線束とする．$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset X(\overline{K})$ を高さの小さい点からなる生成的な点列とする．このとき，K の各素点 v に対して，$X_{\mathbb{C}_v}^{\mathrm{an}}$ 上で，$\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ の Galois 軌道に付随する確率測度 μ_{v,x_m} は Monge–Ampère 測度 $d\mu_v = \frac{c_1(\overline{L},\|\cdot\|_v)^{\dim X}}{\deg_L(X)}$ に弱収束する．

3.2　偏極付き力学系への応用

Yuan [62] によって与えられた，等分布定理の偏極付き力学系への応用を紹介しよう．

定義 3.6 ([64] 参照)**.** X を滑らかな射影代数多様体, $f : X \to X$ を X からそれ自身への射とする．X 上の**豊富な**直線束 L が存在して，ある整数 $d \geq 2$ に対して $f^*L \cong L^{\otimes d}$ となるとき，(X, f, L) を **偏極付き力学系**（polarized dynamical system）という．

例 3.7. (1) A をアーベル多様体，$[2] : A \to A$ を $[2]$-倍射とする．L を豊富で対称な（すなわち，$[-1]^*L \cong L$ である）直線束とすれば，$[2]^*L \cong L^{\otimes 4}$ となるから，$(A, [2], L)$ は偏極付き力学系である．
(2) $f : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ を次数が 2 以上の射とするとき，$(\mathbb{P}^N, f, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$ は偏極付き力学系である．

さて，K は代数体とし，K 上の**偏極付き力学系** (X, f, L) を考える．すなわち，X は K 上に定義された滑らかな射影代数多様体で，$f; X \to X$ は X からそれ自身への射であり，L は X 上の豊富な直線束で，ある整数 $d \geq 2$ が存在して，同型 $\varphi : f^*L \cong L^{\otimes d}$ が存在するとする．

点 $x \in X(\overline{K})$ は，$f^n(x) = f^m(x)$ となる $0 \leq m < n$ が存在するとき，f に関する**前周期点**（preperiodic point）であるという．また，$f^m(x) = x$ となる $0 < m$ が存在するとき，f に関する**周期点**（periodic point）であるという．ここでは，前周期点を主に考え，

$$\mathrm{Prep}(f) := \{x \in X(\overline{K}) \mid x \text{ は } f \text{ に関する前周期点 }\} \tag{3.6}$$

とおく．このとき，次が成立する．

命題 3.8 (Zhang [66])**.** (1) 各素点 $v \in M_K$ に対して，$\varphi_{\mathbb{C}_v} : f^*L_{\mathbb{C}_v} \cong L_{\mathbb{C}_v}^{\otimes d}$ 計量同型になる $L_{\mathbb{C}_v}$ の計量 $\|\cdot\|_{v,can}$ が唯一存在する．
(2) (1) の計量で，$\overline{L}^{can} := (L, \{\|\cdot\|_{v,can}\}_{v \in M_K})$ は **半正な**アーデル計量付き直線束になる．
(3) $\widehat{h}_f := h_{\overline{L}^{can}}$ とおくと（式 (3.5) 参照)，$\widehat{h}_f$ に関する高さが 0 である点全体のなす集合は，f に関する前周期点全体のなす集合に一致する．すなわち，

$$\{x \in X(\overline{K}) \mid \widehat{h}_f(x) = 0\} = \mathrm{Prep}(f)$$

が成り立つ．
(4) X 自身の $\widehat{h}_f$ に関する高さは 0 である．すなわち，$\widehat{h}_f(X) = 0$ が成り立つ．

定義 3.9. $\widehat{h}_f := h_{\overline{L}^{can}}$ を 偏極付き力学系 (X, f, L) から定まる **標準的高さ関数** (canonical height function) とよぶ．

命題 3.8 を用いて，偏極付き力学系 (X,f,L) に Yuan の定理 3.5 を適用すると，次の系が得られる．

定理 3.10 (Yuan [62], 偏極付き力学系の等分布定理)**.** (X,f,L) を 代数体 K 上の偏極付き力学系とする．$\overline{L}^{can} := (L, \{\|\cdot\|_{v,can}\}_{v\in M_K})$ を偏極付き力学系から定まるアーデル計量付き直線束とし，$\widehat{h}_f := h_{\overline{L}^{can}} : X(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ を標準的高さ関数とする．$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset X(\overline{K})$ は生成的な点列で，$\lim_{m\to\infty} \widehat{h}_f(x_m) = 0$ を満たすとする．このとき，K の各素点 $v \in M_K$ に対して，$X_{\mathbb{C}_v}^{\mathrm{an}}$ 上で，$\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ の Galois 軌道に付随する確率測度 μ_{v,x_m} は Monge–Ampère 測度 $d\mu_{v,can} = \frac{c_1(L,\|\cdot\|_v^{can})^{\dim X}}{\deg_L(X)}$ に弱収束する．

この定理を，例 3.7 の偏極付き力学系に適用してみよう．

例 3.11 (cf. Szpiro–Ullmo–Zhang [56])**.** A を代数体 K 上に定義されたアーベル多様体，L を豊富で対称な直線束とする．例 3.7 で述べたように，このとき，$(A,[2],L)$ は偏極付き力学系になる．$(A,[2],L)$ に関する標準的高さは，（L に付随する）Néron–Tate の高さ $\widehat{h}_{NT}$ に等しい．また，[2]-倍射に関する $\overline{K}$-前周期点は，A の**捻れ点**（torsion point）に他ならない．

v を K のアルキメデス的な付値とする．$\mathbb{C}_v$ を複素数体 $\mathbb{C}$ で表し，v によって K は $\mathbb{C}$ に埋め込まれているとみなす．このとき，Monge–Ampère 測度 $d\mu_{v,can}$ はアーベル多様体 $A(\mathbb{C})$ の正規化された Haar 測度に他ならない．$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset A(\overline{K})$ は生成的な点列で，$\lim_{m\to\infty} \widehat{h}_{NT}(x_m) = 0$ を満たすとする．このとき，定理 3.10 は，$\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ の Galois 軌道に付随する確率測度 μ_{v,x_m} が，$A(\mathbb{C})$ の正規化された Haar 測度に弱収束することを示している．

例えば，A の捻れ点 $x \in A(\overline{K})$ は $\widehat{h}_{NT}(x) = 0$ を満たすので，非常におおざっぱにいえば，十分に一般の捻れ点 x を考えると，x の K 上の共役点全体は $A(\mathbb{C})$ 上でほぼ等分布していることが分かる．

例 3.12 (cf. Bilu [12])**.** K は代数体とする．$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ を 2 乗射 $(x_0 : x_1) \mapsto (x_0^2 : x_1^2)$ とする．このとき，$f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ となるから，$(\mathbb{P}^1, f, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ は偏極付き力学系である．このとき，$(\mathbb{P}^1, f, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ に関する標準的高さは，naive 高さ h_{naive} に他ならない（定義 2.9 参照）．また，$\mathbb{P}^1(\overline{K}) = \overline{K} \cup \{\infty\}$ とみるとき，Kronecker の定理より $\mathrm{Prep}(f) = \{x \in \overline{K} \mid x \text{ は 1 のべき根 }\} \cup \{0, \infty\}$ である．

$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{P}^1(\overline{K})$ は生成的な点列で，$\lim_{m\to\infty} \widehat{h}_{naive}(x_m) = 0$ を満たすとする．例えば，相異なる 1 のベキ根からなる点列 $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ はこのような点列である．

(1) v を K のアルキメデス的な付値とする．$\mathbb{C}_v$ を複素数体 $\mathbb{C}$ で表し，v によって K は $\mathbb{C}$ に埋め込まれているとみなす．このとき，Monge–Ampère 測度 $d\mu_{v,can}$ は単位円周 $\{z = e^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le 2\pi\}$ 上の正規化された Haar 測度 $\frac{d\theta}{2\pi}$ に他ならない．したがって，定理 3.10 は，$\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ の Galois 軌道に付随する確率測度 μ_{v,x_m} が，単位円周上の正規化された Haar 測度 $\frac{d\theta}{2\pi}$ に弱収束することを示している．

    例えば，$K = \mathbb{Q}$ とし，x_m を 1 の原始 m 乗根としよう．このとき，x_m の $\mathbb{Q}$ 上の共役点は

$$G(x_m) = \left\{ \exp\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \in \mathbb{C} \;\middle|\; 1 \le k \le m,\, \mathrm{GCD}(k,m) = 1 \right\}$$

    で与えられる．そして $m \to \infty$ のとき，$G(x_m)$ は，単位円周 $\{|z| = 1\}$ 上に（Haar 測度に関して，弱収束の意味で）等分布している．

(2) v が非アルキメデス的な付値とする．このとき，Monge–Ampère 測度 $d\mu_{v,can}$ は単位円板 $\{|z|_v \le 1\}$ に対応する Berkovich 空間 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_v}^{1\mathrm{an}}$ の 1 点（Gauss 点）に台をもつ Dirac 測度になる．したがって，定理 3.10 は，$\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ の Galois 軌道に付随する確率測度 μ_{v,x_m} が，$\mathbb{P}_{\mathbb{C}_v}^{1\mathrm{an}}$ の Gauss 点に台をもつ Dirac 測度に弱収束することを示している．

注意 3.13. (1) v がアルキメデス的のとき，アーベル多様体上の等分布定理は Szpiro–Ullmo–Zhang [56] によって Arakelov 幾何を使ってはじめて証明された（例 3.11 参照）．Ullmo [60] と Zhang [65] は，このアーベル多様体上の等分布定理を使って，Bogomolov 予想の証明を与えた．

(2) 例 3.12 は，アーベル多様体上の等分布定理の $\mathbb{G}_m$ 版とみなせる．v がアルキメデス的のとき，$\mathbb{G}_m^N$ 上の等分布定理は Bilu [12] によって証明された．

(3) 次元が 1 のときの，定理 3.5 にあたる等分布定理は，Baker–Rumely [4], Chambert-Loir [18], Favre–Rivera-Letilier [25] によって証明された．それ以前に，Autissier [2], Baker–Hsia [3] も関連する結果を証明している．奥山 [48] も参照されたい．

(4) Yuan の定理 3.5 は，Arakelov 幾何を使って等分布定理を非常に一般的な設定で証明している．ただし，次元が 1 のときは，定式化が異なり証明も違うので，[4] や [25] の結果を完全には含んでいない．

(5) 筆者自身の等分布定理に関連する結果はあまりないが, $N \geq 2$ のとき, 偏極付き力学系 $(\mathbb{P}^N, f, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$ について等分布定理が成り立つか分かっていなかった時期に，[34] で，v がアルキメデス的のとき，高次元の Lattè 写像という $\mathbb{P}^N$ の特別な射 f については等分布定理が成り立つことを指摘した（[56] の結果から従う）．また，[36] では Yuan の定理 3.10 を利用した．

3.3 2 つの偏極付き力学系への応用

この小節では，Yuan–Zhang [63] による 2 つの偏極付き力学系への等分布定理の応用を紹介したい．

定理 3.14 (Yuan–Zhang's unlikely intersection [63])**.** X は代数体 K 上の滑らかな射影多様体で，L は X 上の**豊富な**直線束とする．$f : X \to X$ と $g : X \to X$ はともに，(X, L) に関して偏極付き力学系になっているとする（すなわち，ある整数 $d_f \geq 2$ と $d_g \geq 2$ が存在して，$f^*L \cong L^{\otimes d_f}$, $g^*L \cong L^{\otimes d_g}$ が成り立つとする）．このとき，次は同値になる．

(i) $\mathrm{Prep}(f) \cap \mathrm{Prep}(g)$ は X でザリスキー稠密である．（ここで，$\mathrm{Prep}(f)$ は f に関する前周期点全体のなす集合である．(3.6) 参照．）

(ii) $\mathrm{Prep}(f) = \mathrm{Prep}(g)$ が成り立つ．

(iii) 標準的高さ関数 $\widehat{h}_f$ と $\widehat{h}_g$ は $X(\overline{K})$ 上で一致する．（$\widehat{h}_f$ の定義は定義 3.9 参照．）

定理 3.14 を，$\mathbb{P}^1$ の 2 乗射を用いて例示してみよう．

例 3.15. K は代数体で，$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ は 2 乗射 $(x_0 : x_1) \mapsto (x_0^2 : x_1^2)$ とする．例 3.12 で説明したように，このとき，$\widehat{h}_f$ は naive 高さ h_{naive} と一致し，$\mathrm{Prep}(f) = \{x \in \overline{K} \mid x \text{ は } 1 \text{ のべき根 }\} \cup \{0, \infty\}$ である．

$g : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ を次数が $d \geq 2$ 以上の射とする．このとき，定理 3.14 は次の 3 つの条件が同値であることを示している．

(i) $\mathrm{Prep}(g)$ は 1 のべき根を無数に含む．

(ii) $\mathrm{Prep}(g) = \{x \in \overline{K} \mid x \text{ は } 1 \text{ のべき根 }\} \cup \{0, \infty\}$ である．

(iii) $\widehat{h}_g$ は naive 高さ h_{naive} と一致する．

さらに，このときは，(i)(ii)(iii) は以下の条件とも同値になる（[39] 参照）．

(iv) 1 のべき根 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in K$ が存在して, g は $g(x_0 : x_1) = (\varepsilon_1 x_0^d : \varepsilon_1 x_1^d)$ または　$g(x_0 : x_1) = (\varepsilon_1 x_1^d : \varepsilon_1 x_0^d)$

と表される．

Yuan–Zhang による定理 3.14 の証明の概略を見てみよう．まず，$x \in X(\overline{K})$ について，命題 3.8(3) より $\widehat{h}_f(x) = 0$ であることと $x \in \mathrm{Prep}(f)$ であることが同値であるから，

$$\text{(iii)} \Longrightarrow \text{(ii)} \Longrightarrow \text{(i)}$$

は明らかである．そこで，「(i) $\Longrightarrow$ (iii)」 を示せばよい．(i) が成り立つとき，生成的な点列で $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset X(\overline{K})$ で，$\lim_{m\to\infty} \widehat{h}_f(x_m) = 0$ かつ $\lim_{m\to\infty} \widehat{h}_g(x_m) = 0$ を満たすものがとれる．よって，等分布定理 3.10 を使うと，K の各素点 v に対して，f と g の Monge–Ampère 測度 $\frac{c_1(L, \|\cdot\|_{f,v}^{can})^{\dim X}}{\deg_L(X)}$ と $\frac{c_1(L, \|\cdot\|_{f,v}^{can})^{\dim X}}{\deg_L(X)}$ が一致することが分かる．ここで，算術的 Hodge 指数定理を用いると，$c_1(L, \|\cdot\|_{f,v}^{can})$ と $c_1(L, \|\cdot\|_{g,v}^{can})$ が一致することが分かる．これから，各素点 v に対して，$\|\cdot\|_{f,v}^{can}$ と $\|\cdot\|_{g,v}^{can}$ が定数倍の違いしかないことが分かる．すると，素点 v をわたった和を考えることで，標準的高さ $\widehat{h}_f$ と $\widehat{h}_g$ が一致して（式 (3.5) 参照)，(iii) が成り立つ．

注意 3.16. [39] において，筆者は Silverman と標準的高さ関数 $\widehat{h}_f$ と $\widehat{h}_g$ が一致するときにどういうことがいえるかを調べた．特に，定理 3.14 の非常に特別な場合にあたる f が 射影空間 $\mathbb{P}^N$ の d 乗射 $(x_0 : \cdots : x_N) \mapsto (x_0^d : \cdots : x_N^d)$ のときと，f が楕円曲線からくる 1 変数 4 次有理式（Lattès 写像，以下の定義 3.18 参照）のときに，(i)(ii)(iii) が同値であることを示した（1 のべき根に関する Laurent の定理と，アーベル多様体の捩れ点に関する Raunaud の定理を使う）．また，この場合には，$\widehat{h}_f = \widehat{h}_g$ となる g の具体的な形（上の例の (iv) にあたるもの）も求められる．

3.4 楕円曲線への応用

DeMarco–Wang–Ye [19] は， $\mathbb{P}^1$ の Lattès 写像（以下の定義 3.18 参照）の族のなすパラメーター空間上で等分布定理を使って，Masser–Zannier による楕円曲線についての数論の定理の別証明を与えた（さらに，Masser–Zannier の結果よりも強い主張を示した）．力学系の手法を使って，楕円曲線についての数論の定理を示すというのは非常に興味深いと思うので，この最後の小節で簡単に紹介したい．

まず，Masser–Zannier による定理を述べよう．

定理 3.17 (Masser–Zannier's unlikely intersection [49], [50])**.** $t \in \mathbb{C}, t \neq 0, 1$ に対して，E_t を，射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内で，

$$E_t : \quad y^2 z = x(x - z)(x - tz)$$

（Legendre form）で与えられる楕円曲線とする．$a \neq b \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1\}$ に対して，$P_t := (a : \sqrt{a(a-1)(a-t)} : 1)$, $\quad Q_t := (b : \sqrt{b(b-1)(b-t)} : 1)$ とおく．このとき，

$$\{t \in \mathbb{C} \mid P_t, Q_t \text{ がともに } E_t \text{ の捩れ点 }\}$$

は有限集合となる．

$\sqrt{a(a-1)(a-t)}$ の取り方は二通りあるが，$(a : \sqrt{a(a-1)(a-t)} : 1)$ が E_t の捩れ点のときは，$(a : -\sqrt{a(a-1)(a-t)} : 1)$ も捩れ点になるので，定理の主張には影響しないことに注意しよう．

DeMarco–Wang–Ye [19] の結果を述べる前に，Lattès 写像の定義をする．

定義 3.18. E を楕円曲線とし，$\varphi : E \to E$ を isogeny（つまり群の全射準同形写像）とする．さらに，f は同型射ではないとしておく．φ は $[-1]$-倍射と可換であるから，φ は商空間 $E/[-1]$ 上の全射な射 $f : E/[-1] \to E/[-1]$ を導く．ここで，$E/[-1]$ は $\mathbb{P}^1$ と同型であるから，この同型を通じて f は $\mathbb{P}^1$ からそれ自身への射とみなせる．この $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ を *Lattès* **写像** とよぶ.

さて，楕円曲線 が Legendre form $E_t \subset \mathbb{P}^2$ で与えられているときには，E_t の $[-1]$-倍射は，$E_t \ni (x : y : z) \mapsto (x : -y : z) \in E_t$ で与えられる．従って，射影 $\pi : E_t \to \mathbb{P}^1$, $E_t \ni (x : y : z) \mapsto (x : z) \in \mathbb{P}^1$ を商写像 $E_t \to E_t/[-1] \cong \mathbb{P}^1$ とみなすことができる．E_t の isogeny として $[2]$-倍射を考えると，$[2]$-倍射の次数は 4 なので，これから導かれる Lattès 写像 $f_t : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ は次数 4 の射となる．具体的に計算すると，

$$f_t : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1, (x : z) \mapsto ((x^2 - tz^2)^2 : 4xz(x - z)(x - tz)) \tag{3.7}$$

である.

Lattès 族を用いると，上の Masser–Zannier の定理は次のように言い換えられる．

定理 3.19 (定理 3.17 の言い換え)**.** $t \in \mathbb{C}, t \neq 0, 1$ に対して，$f_t : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ を (3.7) で与えられる Lattès 写像とする．このとき，任意の $a \neq b \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1\}$ に対して，

$$\{t \in \mathbb{C} \mid a, b \text{ がともに } f_t \text{ の前周期点}\}$$

は有限集合である.

$t \in \overline{\mathbb{Q}}$, $t \neq 0, 1$ に対して，$\widehat{h}_{f_t} : \mathbb{P}^1(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ を f_t に関する標準的高さとし，$\varphi(t) := \widehat{h}_{f_t}(a)$, $\psi(t) := \widehat{h}_{f_t}(b)$ とおく．このとき，φ, ψ はパラメーター空間 $(\mathbb{A}^1 \setminus \{0, 1\})(\overline{\mathbb{Q}})$ 上の関数である．DeMarco–Wang–Ye [19] は，φ, ψ について，等分布定理を用いて，Lattès 写像の族に対する上の定理 3.19（従って，定理 3.17）の別証明を与えた.

参考文献

[1] E. Amerik, *Existence of non-preperiodic algebraic points for a rational self-map of infinite order*, Math. Res. Lett. **18** (2011), no. 2, 251–256.

[2] P. Autissier, *Points entiers sur les surfaces arithmétiques*, J. Reine Angew. Math. **531** (2001), 201–235.

[3] M. Baker and L-C. Hsia, *Canonical heights, transfinite diameters, and polynomial dynamics* J. Reine Angew. Math. **585** (2005), 61–92.

[4] M. Baker and R. Rumely, *Equidistribution of small points, rational dynamics, and potential theory*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), no. 3, 625–688.

[5] E. Bedford and K. Kim, *On the degree growth of birational mappings in higher dimension*, J. Geom. Anal. **14** (2004), no. 4, 567–596.

[6] E. Bedford and K. Kim, *Periodicities in linear fractional recurrences: degree growth of birational surface maps*, Michigan Math. J. 54 (2006), no. 3, 647–670.

[7] *Degree growth of matrix inversion: birational maps of symmetric, cyclic matrices*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **21** (2008), no. 4, 977–1013.

[8] E. Bedford and K. Kim, *Dynamics of rational surface automorphisms: linear fractional recurrences* J. Geom. Anal. **19** (2009), no. 3, 553–583.

[9] M. P. Bellon, *Algebraic entropy of birational maps with invariant curves*, Lett. Math. Phys. **50** (1999), no. 1, 79–90.

[10] M. P. Bellon and C.-M. Viallet, *Algebraic entropy*, Comm. Math. Phys. **204** (1999), no. 2, 425–437.

[11] V. G. Berkovich, Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields. Mathematical Surveys and Monographs, **33**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990. x+169 pp.

[12] Y. Bilu, *Limit distribution of small points on algebraic tori*, Duke Math. J. **89** (1997), no. 3, 465–476.

[13] E. Bombieri and W. Gubler, Heights in Diophantine geometry, New Mathematical Monographs 4. Cambridge University Press, 2006.

[14] S. Boucksom, C. Favre, Charles and M. Jonsson, *Degree growth of meromorphic surface maps*, Duke Math. J. **141** (2008), no. 3, 519–538.

[15] G. Call and J. H. Silverman, *Canonical heights on varieties with morphisms*, Compositio Math. **89** (1993), no. 2, 163–205.

[16] S. Cantat, *Dynamique des automorphismes des surfaces projectives complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328** (1999), 901–906.

[17] S. Cantat, *Dynamique des automorphismes des surfaces K3*, Acta Math. **187** (2001), no. 1, 1–57.

[18] A. Chambert-Loir, *Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich*, J. Reine Angew. Math. **595** (2006), 215–235.

[19] L. DeMarco, X. Wang and H. Ye, *Torsion points and the Lattes family*, preprint, available at arXiv:1311.1792.

[20] J. Diller and C. Favre, *Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces*, Amer. J. Math. **123** (2001), no. 6, 1135–1169.

[21] T-C. Dinh and N. Sibony, *Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle*, Ann. of Math. (2) **161** (2005), no. 3, 1637–1644.

[22] T-C. Dinh and V-A. Nguyên, *Comparison of dynamical degrees for semi-conjugate meromorphic maps*, Comment. Math. Helv. **86** (2011), no. 4, 817–840.

[23] T-C. Dinh, V-A. Nguyên and T. T. Truong, *On the dynamical degrees of meromorphic maps preserving a fibration*, Commun. Contemp. Math. **14** (2012), no. 6, 1250042, 18 pp.

[24] C. Favre and M. Jonsson, *Dynamical compactifications of* $\mathbb{C}^2$, Ann. of Math. (2) **173** (2011), no. 1, 211–248.

[25] C. Favre and J. Rivera-Letelier, *Équidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective*, Math. Ann. **335** (2006), 311–361. Corrigendum: **339** (2007), 799–801.

[26] C. Favre and E. Wulcan, *Degree growth of monomial maps and McMullen's polytope algebra*, Indiana Univ. Math. J. **61** (2012), no. 2, 493–524.

[27] S. Friedland and J. Milnor, *Dynamical properties of plane polynomial automorphisms*, Ergodic Theory Dynam. Systems **9** (1989), no. 1, 67–99.

[28] V. Guedj, *Ergodic properties of rational mappings with large topological degree*, Ann. of Math. (2) **161** (2005), no. 3, 1589–1607.

[29] M. Gromov, *On the entropy of holomorphic maps*, Enseign. Math. (2) **49** (2003), no. 3-4, 217–235.

(Manuscript, 1977).

[30] B. Hasselblatt and J. Propp, *Degree-growth of monomial maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems **27** (2007), no. 5, 1375–1397. Corrigendum: **27** (2007), no. 6, 1999.

[31] J. Hietarinta and C.Viallet, *Singularity confinement and chaos in discrete systems*, Phy. Rev. Lett. **81** (1998), 325–328.

[32] J. Hietarinta and C. Viallet, *Singularity confinement and degree growth.* SIDE III—symmetries and integrability of difference equations (Sabaudia, 1998), 209–216, CRM Proc. Lecture Notes, **25**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[33] M. Hindry and J. H. Silverman, Diophantine geometry, Springer-Verlag, 2000.

[34] S. Kawaguchi, *Canonical heights, invariant currents, and dynamical eigensystems of morphisms for line bundles*, J. Reine Angew. Math. **597** (2006), 135–173.

[35] S. Kawaguchi, *Canonical height functions for affine plane automorphisms*, Math. Ann. **335** (2006), 285–310.

[36] S. Kawaguchi, *Canonical heights for random iterations in certain varieties*, Int. Math. Res. Not. **2007** (2007), Art. ID rnm023, 33 pages.

[37] S. Kawaguchi, *Projective surface automorphisms of positive topological entropy from an arithmetic viewpoint*, Amer. J. Math. **130** (2008), 159–186.

[38] S. Kawaguchi *Local and global canonical height functions for affine space regular automorphisms*, Algebra Number Theory **7** (2013), no. 5, 1225–1252.

[39] S. Kawaguchi and J. H. Silverman, *Dynamics of projective morphisms having identical canonical heights*, Proc. London Math. Soc. (3) **95** (2007), 519–544. Addendum: **97** (2008), 272.

[40] S. Kawaguchi and J. H. Silverman, *On the dynamical and arithmetic degrees of rational self-maps of algebraic varieties*, preprint, available at arXiv:1208.0815. To appear, J. Reine Angew. Math.

[41] S. Kawaguchi and J. H. Silverman, *Examples of dynamical degree equals arithmetic degree*, Michigan Math. J. **63** (2014), no. 1, 41–63.

[42] S. Kawaguchi and J. H. Silverman, *Dynamical canonical heights for Jordan blocks, arithmetic degrees of orbits, and nef canonical heights on abelian varieties*, preprint, available at arXiv:1301.4964. To appear, Trans. Amer. Math. Soc.

[43] S. Lafortune, A. Ramani, B. Grammaticos, Y. Ohta, and K. M. Tamizhmani, *Blending two discrete integrability criteria: singularity confinement and algebraic entropy.* Bäcklund and Darboux transformations. The geometry of solitons (Halifax, NS, 1999), 299–311, CRM Proc. Lecture Notes, 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[44] S. Lang, Fundamentals of Diophantine geometry, Springer, 1983.

[45] J-L. Lin, *Algebraic stability and degree growth of monomial maps*, Math. Z. **271** (2012), no. 1-2, 293–311.

[46] J-L. Lin, *Pulling back cohomology classes and dynamical degrees of monomial maps*, Bull. Soc. Math. France **140** (2012), no. 4, 533–549 (2013).

[47] K. Oguiso, *A remark on dynamical degrees of automorphisms of hyperkähler manifolds*, Manuscripta Math. **130** (2009), no. 1, 101–111.

[48] Y. Okuyama, *Adelic equidistribution, characterization of equidistribution, and a general equidistri-*

bution theorem in non-Archimedean dynamics, Acta Arith. **161** (2013), no. 2, 101–125.

[49] D. Masser and U. Zannier, *Torsion anomalous points and families of elliptic curves*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **346** (2008), no. 9-10, 491–494.

[50] D. Masser and U. Zannier, *Torsion anomalous points and families of elliptic curves*, Amer. J. Math. **132** (2010), no. 6, 1677–1691.

[51] C. T. McMullen, *Dynamics on K3 surfaces: Salem numbers and Siegel disks*, J. Reine Angew. Math. **545** (2002), 201–233.

[52] C. T. McMullen, *Dynamics on blowups of the projective plane*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. **105** (2007), 49–89.

[53] A. Russakovskii and B. Shiffman, *Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics*, Indiana Univ. Math. J. **46** (1997), no. 3, 897–932.

[54] J. H. Silverman, *Dynamical degree, arithmetic entropy, and canonical heights for dominant rational self-maps of projective space*, Ergodic Theory Dynam. Systems **34** (2014), no. 2, 647–678.

[55] J. H. Silverman, The Arithemtic of Dynamical Systems, GTM **241**, Springer, 2007.

[56] L. Szpiro, E. Ullmo and S. Zhang, *Équirépartition des petits points*, Invent. Math. **127** (1997), no. 2, 337–347.

[57] T. Takenawa, *Algebraic entropy and the space of initial values for discrete dynamical systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001), 10533–10545.

[58] T. Takenawa, *Discrete dynamical systems associated with root systems of indefinite type*, Commun. Math. Phys. **224** (2001), 657–681.

[59] T. Uehara, *Rational surface automorphisms with positive entropy*, preprint, available at arXiv:1009.2143v2

[60] E. Ullmo, *Positivité et discrétion des points algébriques des courbes*, Ann. of Math. (2) **147** (1998), no. 1, 167–179.

[61] Y. Yomdin, *Volume growth and entropy*, Israel J. Math. **57** (1987), no. 3, 285–300.

[62] X. Yuan, *Big line bundles over arithmetic varieties*, Invent. Math. **173** (2008), 603–649.

[63] X. Yuan and S. Zhang, *The arithmetic Hodge index theorem for adelic line bundles I*, preprint, available at arXiv:1304.3538.

[64] S. Zhang, *Small points and adelic metrics*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), no. 2, 281–300.

[65] S. Zhang, *Equidistribution of small points on abelian varieties*, Ann. of Math. (2) **147** (1998), no. 1, 159–165.

[66] S. Zhang, *Distributions in Algebraic Dynamics, A tribute to Professor S.–S. Chern*, Survey in Differential Geometry, vol **10**, 381-430, International Press 2006.