代数群と被覆群上の保型表現

池田保　（京都大学大学院理学研究科）

1　半整数の重さの保型形式の志村対応

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は一次分数変換

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad z \in \mathfrak{h}, \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

により上半平面 $\mathfrak{h}$ に作用しているものとする．4 の倍数 N に対して合同部分群 $\Gamma_0(N)$ を

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \middle| c \equiv 0 \bmod N \right\}$$

により定義する．テータ函数 $\theta(z)$ を

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} \qquad q = e^{2\pi\sqrt{-1}z},\ z \in \mathfrak{h}$$

により定義する．このとき，$\Gamma_0(4)$ の保型因子 $j(\gamma, z)$ で

$$\theta(\gamma(z)) = j(\gamma, z)\theta(z) \qquad z \in \mathfrak{h}, \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$$

を満たすものが存在する．この保型因子は

$$j(\gamma, z)^2 = \left(\frac{-1}{d}\right)(cz+d) \qquad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$$

を満たす．

整数 $k > 0$ に対して，上半平面上の正則函数 $f(z)$ が $\Gamma_0(N)$ に関する重さ $k + (1/2)$ の保型形式であるとは

$$f(\gamma(z)) = j(\gamma, z)^{2k+1} f(z) \qquad \forall \gamma \in \Gamma_0(N)$$

なる式を満たし，さらにすべてのカスプで正則であることをいう．さらに，すべてのカスプで零点をもつようなものを重さ $k+(1/2)$ のカスプ形式といい，その全体を $S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(N))$ で表す．

N を割らない素数 p に対して Hecke 作用素 $T_{k+(1/2)}(p^2)$ が $S_{k+1/2}(\Gamma_0(N))$ に作用する．

一方，整数 $M>0$ に対して重さ $2k$, レベル M のカスプ形式の空間 $S_{2k}(\Gamma_0(M))$ には通常の Hecke 作用素 $T_{2k}(p)$ $(p \nmid M)$ が作用する．

定理 1.1 (志村)**.** $k \geq 2$ とする．M を N によって定まるある整数とする．（M は N の適当なベキの約数であるようにとれる。）$f \in S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(N))$ をすべての素数 $p \nmid N$ に関する Hecke 作用素の同時固有関数とする．

$$T_{k+(1/2)}(p^2)f = \lambda_p f \qquad p \nmid N.$$

このとき，Hecke 作用素 $T_{2k}(p)$ の同時固有関数 $g \in S_{2k}(\Gamma_0(M))$ で

$$T_{2k)}(p)g = \lambda_p g \qquad p \nmid N.$$

を満たすものが存在する．

この対応を志村対応という．

2 メタプレクティック群

整数の重さを持つ保型形式はアデール群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 上の保型形式とみなすことができるが，半整数の重さを持つ保型形式は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 上の関数とみなすことはできない．半整数の重さを持つ保型形式を扱うには $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}$ を考える必要がある．（一般に半整数の重さを持つ Siegel 保型形式を考えるには $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の被覆群 $\widetilde{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}$ を考える必要がある．）

F を局所体とするとき，$\mathrm{SL}_2(F)$ には唯一の自明でない 2 重被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ が存在する．これは次のようにして構成される．$g \in \mathrm{SL}_2(F)$ に対して

$$\mathbf{x}(g) = \begin{cases} c & c \neq 0 \text{ のとき} \\ d & c = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおき

$$\mathbf{c}(g_1, g_2) = \langle \frac{\mathbf{x}(g_1)}{\mathbf{x}(g_1 g_2)}, \frac{\mathbf{x}(g_2)}{\mathbf{x}(g_1 g_2)} \rangle \qquad g_1, g_2 \in \mathrm{SL}_2(F)$$

と定義する．ここで $\langle\ ,\ \rangle$ は F における Hilbert 記号である．このように定義すると $\mathbf{c}(g_1,g_2)$ は $\mathrm{SL}_2(F)$ 上の 2 コサイクルとなることが知られている．これを久保田 2 コサイクルという．久保田 2 コサイクルによって定まる $\mathrm{SL}_2(F)$ の 2 重被覆群をメタプレクティック群といい $\widetilde{\mathrm{SL}_2}(F)$ で表す．$F \not\cong \mathbb{C}$ ならこの被覆は自明でない．

F の剰余標数が奇数ならばこの被覆群は $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}_F)$ 上で分裂する．ここで $\mathfrak{o}_F$ は F の整数環である．一方，F の剰余標数が 2 ならば被覆 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)} \to \mathrm{SL}_2(F)$ は $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}_F)$ 状では分裂しないが

$$\Gamma_0(4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}) \,\middle|\, c \in 4\mathfrak{o}_F \right\}$$

上では分裂することが知られている．半整数の重さを持つ保型形式を考えるとき，レベルが 4 の倍数のものを考えなければならないのはこのことが背景にある．

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の 2 重被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ で，すべての素点 v に対して $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_v) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の逆像が $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_v)}$ と同型になるようなものが（同型を除いて）ただ一つ存在する．すなわち，次の図式を可換にするような被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}$ が同型を除いてただ一つ存在する．

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_v)} & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_v) & \longrightarrow & \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \end{array}$$

これを $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ のメタプレクティック被覆群という．この被覆群は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ 上で分裂する．

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})} \\ \big\downarrow \| & & \big\downarrow \\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \end{array}$$

これにより $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ は $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}$ の部分群と考えられる．半整数の重さを持つ保型形式は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})\backslash\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}$ 上の関数と考えることができる．

3 Waldspurger-Shimura 対応

F を局所体，$\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ を自明でない加法指標とする．$\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ の許容表現 $\tilde{\pi}$ は $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)} \to \mathrm{SL}_2(F)$ の核 $\{\pm 1\}$ が非自明な指標により作用するとき genuine であるという．$\tilde{\pi}$ を $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ の genuine な既約許容表現とする．$\tilde{\pi}$ からテータ対応によって得られる

$\mathrm{PGL}_2(F)$ の許容表現を $\tau=\theta(\tilde{\pi},\theta)$ とする．$\theta(\tilde{\pi},\psi)\neq(0)$ となるための必要十分条件は $\tilde{\pi}$ が ψ-Whittaker model を持つことである．また $\xi\in F^\times$ に対して

$$\psi_\xi(x)=\psi(\xi x),\qquad \chi_\xi(t)=\langle\xi,t\rangle,\qquad x\in F,t\in F^\times$$

とおく．このとき $\theta(\tilde{\pi},\psi_\xi)\otimes\chi_\xi\neq(0)$ となる $\xi\in F^\times$ が存在し，$\theta(\tilde{\pi},\psi_\xi)\otimes\chi_\xi$ の同型類はそのような ξ の取り方によらずに定まる．この表現 $\theta(\tilde{\pi},\psi_\xi)\otimes\chi_\xi\neq(0)$ を $\mathrm{Wald}(\tilde{\pi},\psi)$ で表す．これについて次のようなことが知られている．

(1) $\tilde{\pi}$ が主系列表現ならば $\tau=\mathrm{Wald}(\tilde{\pi},\psi)$ も主系列表現である．このとき $\mathrm{Wald}(\tilde{\pi}',\psi)=\tau$ となる $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ の genuine な既約許容表現 $\tilde{\pi}$ は $\tilde{\pi}$ しかない．

(2) $\tilde{\pi}$ が離散系列表現ならば $\tau=\mathrm{Wald}(\tilde{\pi},\psi)$ も離散系列表現である．このとき $\mathrm{Wald}(\tilde{\pi}',\psi)=\tau$ となる $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ の genuine な既約許容表現 $\tilde{\pi}$ は 2 つある．それらを $\tilde{\pi}^+,\tilde{\pi}^-$ とする．ただし $\tilde{\pi}^+=\tilde{\pi}$ とする．

F を代数体，$\mathbb{A}$ を F のアデール環とする．$\psi:\mathbb{A}/F\to\mathbb{C}^\times$ を自明でない加法指標とする．$\tilde{\pi}=\otimes_v\tilde{\pi}_v$ を $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$ の既約尖点保型表現とする．$\tilde{\pi}$ の表現空間に属する保型形式は 1 変数のテータ関数と直交すると仮定する．このとき $\tau=\mathrm{Wald}(\tilde{\pi},\psi):=\otimes_v\mathrm{Wald}(\tilde{\pi}_v,\psi_v)$ は PGL2($\mathbb{A}$) の既約許容表現である．

S を $\tilde{\pi}_v$ が離散系列表現となるような F の素点の集合とする．$\tilde{\pi}'$ を別の既約尖点保型表現で $\mathrm{Wald}(\tilde{\pi}',\psi)=\mathrm{Wald}(\tilde{\pi},\psi)$ とするとき次が成り立つ．

(1) $v\notin S$ ならば $\tilde{\pi}'=\tilde{\pi}$ である．

(2) $v\notin S$ ならば $\tilde{\tau}'=\tilde{\pi}^+,\tilde{\pi}^-$ である．$\tilde{\pi}'=\tilde{\pi}^{\varepsilon_v}$, $\varepsilon_v\in\{\pm1\}$ とすると

$$\prod_{v\in S}\varepsilon_v=1$$

が成り立つ．

逆にこの条件 (1), (2) を満たす $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$ の既約許容表現 $\tilde{\pi}=\otimes_v\tilde{\pi}_v$ は $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$ の既約尖点保型表現である．

4　被覆群の構成

前節でみたように，メタプレクティック 2 重被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}\to\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ 上には自然な保型形式が存在し，美しい理論を展開することができる．同様の理論をより一般的な被覆群で構成できないかと考えるのは自然なことである．ところが志村五郎先生が注意している

ように分母が3以上の分数の重さを持つ保型形式を考えたのでは同様の理論を作ることはできない．実際 $n > 2$ ならば $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ 上分裂するような $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の n 重被覆群で n より低い次数の被覆群から誘導されないようなものは存在しない．また，$p \not\equiv 1 \bmod n$ ならば $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の n 重被覆群で n より低い次数の被覆群から誘導されないようなものは存在しない．志村先生の注意の背景にはこのような事情がある．

一般に被覆群上の保型形式で意味のあるものを得るためには，代数体 F 上に定義された代数群 G のアデール群 $G(\mathbb{A}_F)$ の被覆群 $\widetilde{G(\mathbb{A}_F)}$ で $G(F)$ 上分裂するようなものを探す必要があると考えられる．G が分裂型の単連結な単純代数群の場合にはこの問題は古くから考察されていた．

体 F 上の K 群 $K_2(F)$ を

$$K_2(F) = F^\times \otimes F^\times / \langle x \otimes (1-x) \,|\, x \in F,\, x \neq 0, 1\rangle$$

により定義する．ここで $\langle x \otimes (1-x) \,|\, x \in F,\, x \neq 0, 1\rangle$ は $\{x \otimes (1-x) \,|\, x \in F,\, x \neq 0, 1\}$ で生成される $F^\times \otimes F^\times$ の部分群である．自然な双線型写像

$$F^\times \times F^\times \to K_2(F)$$

を普遍記号写像という．この写像による (x, y) の像を $\langle x, y\rangle$ で表す．定義により $\langle x, 1-x\rangle = 1 \ \ (x \neq 0, 1)$ である．これを記号関係式という．

G を F 上定義された分裂型の単連結な単純代数群とするとき，松本英也は自然な群拡大

$$1 \to K_2(F) \to E \to G(F) \to 1$$

を構成した．しかも $G \not\simeq \mathrm{Sp}_n(F)$ のときにはこの拡大は普遍中心拡大である．

F を標数0の大局体でとする．F に含まれる1のベキ根全体のなす群を $\mu(F)$, 1の n ベキ根全体のなす群を μ_n で表す．$\mu_n \subset \mu(F)$ であると仮定する．

F の素点 v に対して次数 n の Hilbert 記号 $F_v^\times \times F_v^\times \to \mu_n$ は記号関係式を満たすので，自然な写像 $K_2(F_v) \to \mu_n$ が存在する．拡大

$$1 \to K_2(F_v) \to E_v \to G(F_v) \to 1$$

の $K_2(F_v) \to \mu_n$ による push out を

$$1 \to \mu_n \to \widetilde{G(F_v)} \to G(F_v) \to 1$$

とする．$v \nmid n$ なる有限素点 v に対しては拡大 $\widetilde{G(F_v)} \to G(F_v)$ は $G(\mathfrak{o}_v)$ 上で分裂する．このことからすべての素点 v に対して図式

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mu_n \arrow[r] \arrow[d, "||"] & \widetilde{G(F_v)} \arrow[r] \arrow[d] & G(F_v) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mu_n \arrow[r] & \widetilde{G(\mathbb{A}_F)} \arrow[r] & G(\mathbb{A}_F) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

を可換にするようなアデール群上の拡大 $\widetilde{G(\mathbb{A}_F)} \to G(\mathbb{A}_F)$ が存在する．ここで

$$1 \to K_2(F) \to \bigoplus_v \mu(F_v) \to \mu_n \to 1$$

なる完全列が存在することが知られているのでこの拡大 $\widetilde{G(\mathbb{A}_F)} \to G(\mathbb{A}_F)$ は $G(F)$ 上で分裂する．すなわち次の図式．

$$\begin{tikzcd}
G(F) \arrow[r] \arrow[d, "||"] & \widetilde{G(\mathbb{A}_F)} \arrow[d] \\
G(F) \arrow[r] & G(\mathbb{A}_F)
\end{tikzcd}$$

を可換にする準同型 $G(F) \to \widetilde{G(\mathbb{A}_F)}$ が存在する．

Brylinski-Deligne は圏論的な手法により一般の簡約可能な代数群 G に対して同様の性質を持つ拡大を構成した．

F を標数 0 の体，$\bar{F}$ を F の代数閉包とする．G を F 上に定義された簡約可能な代数群とする．簡単のため G の derived group G_{der} は単連結であるとする．ここで G_{der} は $G_{\mathrm{der}}(\bar{F}) = [G(\bar{F}), G(\bar{F})]$ なる半単純代数群である．T を F 上定義された一つの極大トーラス，$Y = \mathrm{Hom}_{\bar{F}}(\mathbb{G}_m, T)$ を T の cocharacter group とする．Y には Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ が自然に作用する．

S_{Zar} を体 F 上の Zariski site とする．K 群 K_2, 代数群 G は S_{Zar} 上の層 $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{G}$ とみなすことができる．このとき Brylinsky-Deligne [1] は S_{Zar} 上の層の拡大

$$1 \to \mathbf{K}_2 \to E \to \mathbf{G} \to 1$$

のなす圏を記述した．とくにこのような拡大に対して，$\mathbb{Z}$ に値を持つ Y 上の 2 次形式 Q で Weyl 群と Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の作用で不変なものを対応させることができる．

5　被覆群の跡公式の安定化

このような被覆群上の保型表現と代数群の保型表現の間の対応を与えるには跡公式の比較を行うことによって可能になると考えられる．ここでは $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ の n 重被覆群の跡公式に安定化（京都大学の平賀氏との共同研究）について簡単に紹介する．

F を局所体，n は $\mu(F)$ の約数で偶数であるとする．$\langle\ ,\ \rangle$ を μ_n に値を持つ Hilbert 記号とする．$\mathrm{SL}_n(F)$ の n 重被覆群も 2 重被覆群と同様の方法で構成される．2 節と同様に

$$\boldsymbol{x}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} c & \text{if } c \neq 0, \\ d & \text{if } c = 0. \end{cases}$$

とおき，久保田 2 コサイクル $\mathbf{c}(g_1, g_2)$ を

$$\mathbf{c}(g_1, g_2) = \langle \frac{\boldsymbol{x}(g_1)}{\boldsymbol{x}(g_1 g_2)}, \frac{\boldsymbol{x}(g_2)}{\boldsymbol{x}(g_1 g_2)} \rangle$$

により定義すれば，これが $\mathrm{SL}_2(F)$ の n 重被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ を与える．すなわち $[g_1, \zeta_1], [g_2, \zeta_2] \in \mathrm{SL}_2(F) \times \mu_n$ の積を

$$[g_1, \zeta_1] \cdot [g_2, \zeta_2] = [g_1 g_2, \zeta_1 \zeta_2 \mathbf{c}(g_1, g_2)].$$

与えたものが $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ である．$g \in \mathrm{SL}_2(F)$ に対して $[g, 1]$ を単に $[g]$ で表すことにする．$\mathrm{SL}_2(F)$ の部分集合 H に対して H の $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ における逆像を $\tilde{H}$ で表す．

F が非アルキメデス的で $n \in \mathfrak{o}^\times$ ならば $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})} \to \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$ には標準的な分裂写像 $\mathbf{s} : \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}) \to \widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})}$ が存在する．この分裂写像の像 $\mathbf{s}(\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}))$ を $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$ と同一視する．

写像

$$\boldsymbol{\tau}^+ : \mathrm{GL}_2(F) \to \mathrm{SL}_2(F) \qquad \boldsymbol{\tau}^- : \mathrm{GL}_2(F) \to \mathrm{SL}_2(F)$$

を

$$\boldsymbol{\tau}^+(g) = (\det g)^{-n/2} g^n \qquad \boldsymbol{\tau}^-(g) = -(\det g)^{-n/2} g^n$$

により定義する．これらの写像はスカラー倍写像で不変なので $\mathrm{PGL}_2(F)$ を経由するので $\mathrm{PGL}_2(F)$ から $\mathrm{SL}_2(F)$ への写像 $\boldsymbol{\tau}^+ : \mathrm{PGL}_2(F) \to \mathrm{SL}_2(F)$, $\boldsymbol{\tau}^- : \mathrm{PGL}_2(F) \to \mathrm{SL}_2(F)$ と考えることができる．

正則半単純な元 $h \in \mathrm{SL}_2(F)$ が good であるとは $Z_{\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}}(h) = Z_{\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}}([h])$ が成り立つことと定義する．ここで $Z_{\mathrm{SL}_2(F)}(h)$ は h の $\mathrm{SL}_2(F)$ における中心化群であり，$Z_{\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}}([h])$ は $[h] \in \widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ の $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ における中心化群である．このとき，$h \in \mathrm{SL}_2(F)$

が good であるためには $h=\boldsymbol{\tau}^+(g)$ または $h=\boldsymbol{\tau}^-(g)$ を満たす $g\in \mathrm{PGL}_2(F)$ が存在することが必要十分である．

$h\in \mathrm{SL}_2(F)$ が $\boldsymbol{\tau}^+$ に関して $g\in \mathrm{PGL}_2(F)$ と対応するとは $\boldsymbol{\tau}^+(g)$ が h に安定共役，（すなわち $\mathrm{SL}_2(\bar{F})$ において共役）であることとする．同様に $h\in \mathrm{SL}_2(F)$ が $\boldsymbol{\tau}^-$ に関して $g\in \mathrm{PGL}_2(F)$ と対応するとは $\boldsymbol{\tau}^-(g)$ が h に安定共役であることとする．

F の加法指標 $\psi : F\to \mathbb{C}^\times$ を一つとって固定する．$x\in F^\times$ とする．このとき任意の Schwartz 関数 $\phi\in \mathcal{S}(F)$ に対して

$$\int_F \phi(t)\psi(xt^2)\,dt=\alpha_\psi(x)|2x|^{-1/2}\int_F \hat{\phi}(t)\psi(-x^{-1}t^2/4)\,dt,$$

が成り立つような定数 $\alpha_\psi(x)\in\mathbb{C}^\times$ が存在する．ここで $\hat{\phi}(t)$ は ϕ の Fourier 変換で

$$\hat{\phi}(t)=\int_F \phi(u)\psi(tu)\,du$$

により定義される．この定数 $\alpha_\psi(x)$ を x の Weil 定数という．

$h\in \mathrm{SL}_2(F)$ が $g\in \mathrm{GL}_2(F)$ と $\boldsymbol{\tau}^+$ によって対応しているとき，転移因子 $\delta_\psi^+([h,\zeta],g)$ を

$$\delta_\psi^+([h,\zeta],g)=\begin{cases}\zeta\dfrac{\alpha_\psi(1)}{\alpha_\psi(\det g)}\langle(\det g)^{n/2},-\boldsymbol{x}(h)\rangle & \text{if } n\equiv 2 \bmod 4,\\ \zeta\langle(\det g)^{n/2},-\boldsymbol{x}(h)\rangle & \text{if } n\equiv 0 \bmod 4.\end{cases}$$

により定義する．h が g に τ^+ によって対応していないときは $\delta_\psi^+([h,\zeta],g)=0$ とおく．この定義は g にスカラー行列をかけても変わらないので $g\in \mathrm{PGL}_2(F)$ に対しても $\delta_\psi^+([h,\zeta],g)$ が定義できる．また $g\in \mathrm{PGL}_2(F)$, $h=\boldsymbol{\tau}^-(g)\in \mathrm{SL}_2(F)$ に対して

$$\delta_\psi^-(\tilde{h},g):=\alpha_\psi(1)^{-2}\delta_\psi^+([-\mathbf{1}_2]\tilde{h},g).$$

とおく．これらの転移因子 $\delta_\psi^+([h,\zeta],g)$, $\delta_\psi^-([h,\zeta],g)$ は $[h,\zeta]$ の $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ における共役類上で不変であることを示すことができる．

$C_0(\mathrm{PGL}_2(F))$ を $\mathrm{PGL}_2(F)$ 上の台がコンパクトな局所定数関数のなす空間とする．$\varphi\in C_0(\mathrm{PGL}_2(F))$ の正則半単純な元 $g\in \mathrm{PGL}_2(F)$ 上の正規化された軌道積分を

$$I(g,\varphi)=\Delta(g)\int_{\mathrm{PGL}_2(F)/Z_{\mathrm{PGL}_2(F)}(g)}\varphi(xgx^{-1})\,dx,$$

により定義する．ここで $Z_{\mathrm{PGL}_2(F)}(g)$ は g の $\mathrm{PGL}_2(F)$ における中心化群で $\Delta(g)$ は Weyl の分母因子である．

$\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ 上の関数 $\tilde{\varphi}$ が anti-genuine であるとは

$$\tilde{\varphi}(\zeta\tilde{h}) = \zeta^{-1}\tilde{\varphi}(\tilde{h}), \qquad \forall\zeta \in \mu_n$$

が成り立つことをいう．$\widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)})$ を $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ 上の台がコンパクトで anti-genuine な局所定数関数全体のなす空間とする．$\widetilde{\varphi} \in C_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)})$ の $\tilde{h} = [h, \zeta] \in \widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ 上の正規化された軌道積分を

$$I(\tilde{h}, \varphi) = \Delta(h) \int_{\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}/Z_{\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}}(\tilde{h})} \varphi(\tilde{x}\tilde{h}\tilde{x}^{-1})\, d\tilde{x}$$

により定義する．$\tilde{h} \in \widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ が good でなければ $I(\tilde{h}, \tilde{\varphi}) = 0$ となる．

$\varphi^+ \in C_0(\mathrm{PGL}_2)$ が $\tilde{\varphi} \in \widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)})$ の転移因子 δ_ψ^+ に関する転移であるとは

$$\sum_h \delta_\psi^+([h], g) I([h], \tilde{\varphi}) = I(g, \varphi^+), \qquad \forall g \in \mathrm{PGL}_2(F)$$

が成り立つことをいう．ここで $h \in \mathrm{SL}_2(F)$ は g と $\boldsymbol{\tau}^+$ に関して対応する共役類の代表元を走る．同様にして $\tilde{\varphi} \in \widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)})$ の転移因子 δ_ψ^+ に関する転移 $\varphi^- \in C_0(\mathrm{PGL}_2(F))$ を

$$\sum_h \delta_\psi^-([h], g) I([h], \tilde{\varphi}) = I(g, \varphi^-), \qquad \forall g \in \mathrm{PGL}_2(F)$$

が成り立つものとして定義する．このような転移 φ^+, φ^- が実際に存在することを示すことができる．また $n \in \mathfrak{o}^\times$ ならば Hecke 環 $\mathrm{PGL}_2(\mathfrak{o})$ の単位元は Hecke 環 $\widetilde{\mathcal{H}}(\widetilde{\mathrm{SL}_2}//\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}))$ の単位元の転移であることを示すことができる．

アルキメデス的局所体上でも同様に転移因子を定義でき、転移 φ^+, φ^- の存在を示すことができる．

F を代数体で $\mu_n \subset \mu(F)$ とする．また n は偶数と仮定する．アデール群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ の n 重被覆群を $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$ で表す．$\mathbb{A}/F$ の加法指標 $\psi : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times$ を一つとって固定する．

$C_0(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}))$ を $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ 上の台がコンパクトで滑らかな関数のなす空間とする．$g = (g_v) \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ と $\varphi = \prod_v \varphi_v \in C_0(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}))$ に対して大局的な軌道積分を

$$I(g, \varphi) = \prod_v I(g_v, \varphi_v).$$

により定義する．

また $\widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})})$ を $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$ 上の anti-genuine で台がコンパクトかつ滑らかな関数のなす空間とする．ただし $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$ 上の関数 $\tilde{\varphi}$ が anti-genuine であるとは

$$\tilde{\varphi}(\zeta\tilde{h}) = \zeta^{-1}\tilde{\varphi}(\tilde{h}), \qquad \forall\zeta \in \mu_n$$

が成り立つことをいう．$h = (h_v) \in \widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$, $\tilde{\varphi} = \prod_v \tilde{\varphi}_v \in \widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})})$ に対して正規化された軌道積分を

$$I(h, \tilde{\varphi}) = \prod_v I(h_v, \tilde{\varphi}_v).$$

により定義する．局所的な転移の存在から，$\tilde{\varphi} \in \widetilde{C}_0(\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})})$ に対して大局的な転移 $\varphi^+, \varphi^- \in C_0(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}))$ が存在することがわかる．

定理 5.1.

$$2 \sum_{\substack{h \in \mathrm{SL}_2(F)/\sim \\ h\text{: ell. reg.}}} I(h, \tilde{\varphi}) = \sum_{\substack{g \in \mathrm{PGL}_2(F)/\sim \\ \tau^{\pm}(g)\text{: ell. reg.}}} \left(I(g, \varphi^+) + I(g, \varphi^-)\right).$$

ここで左辺の h は正則な楕円的元の共役類を走り，右辺の g は $\boldsymbol{\tau}^{\pm}$ が正則で楕円的な元の共役類を走る．

楕円的でない元の跡公式の寄与についても $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})}$ の跡公式と $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ の跡公式の比較ができ，それによって両者の保型表現の対応を示すことができると考えられるが，現時点ではまだそういった結果を得るには至っていない．

この方面では最近 Wen-Wei Li [3] などが精力的に研究を進めている．

参考文献

[1] J.-L. Brylinski and P. Deligne, *Central extensions of reductive groups by K_2*, Publ. Math. IHES **94** (2001), 5–85.

[2] P. Delinge, *Extensions centrales de groupes algebriques simplement connexes et cohomologie galoisienne*, Publ. Math. IHES **84** (1996), 35–89.

[3] Wen-Wei Li, *La formule des traces pour les revêtements de groupes réductifs connexes,* I, arXiv:1004.4011, II. arXiv:1107.1865, III. arXiv:1107.2220, IV. arXiv:1209.4156,

[4] J. Milnor, Introduction to algebraic K-theory, Annals of Mathematics Studies, **72** Princeton University Press.

[5] G. Shimura, *On modular forms of half integral weight* Ann. of Math. (2) **97** (1973), 440–481.

[6] T. Shintani *On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight*, Nagoya Math. J. **58** (1975), 83–126.

[7] J.-L. Waldspurger, *Sur les coefficients de Fourier des formes modulair de poid demi entier* J. Math. Pures Appl. (9) **60** (1981), no. 4, 375–484.

[8] J.-L. Waldspurger, *Correspondence de Shimura*, J. Math. Pures Appl. (9) **59** (1980), no. 1, 1–132.

[9] J.-L. Waldspurger, *Correspondances de Shimura et quaternions* Forum Math. **3** (1991), no. 3, 219–307.

[10] A. Weil, *Sur certains groupes d'operateurs unitaires* Acta Math. **111** (1964) 143–211.

[11] Weissman, Metaplectic Tori over Local Fields Pacific J. Math. **241** (2009), no. 1, 169–200.