

Hochschild cohomology and support varieties for finite-dimensional algebras

古谷貴彦 (明海大学歯学部)

速水孝夫 (北海学園大学工学部)

1 序

多元環のホッホシルトコホモロジーは、与えられた多元環が“分離的”という性質からどのくらい隔たりがあるかを記述する指標と言えます。これまでに有限群の表現論、多元環の表現論、ホモトピー論、非可換代数幾何等の様々な分野で応用されており、重要な研究対象となっています。しかしながら、与えられた多元環が具体的なものであっても、その計算は容易ではなく、今後、その計算方法や理論の発展が望まれています。

多元環の表現論においては、スナーシャル・ソルベルグ (2004 年) によって (有限次元) 多元環上の加群のサポート多様体が、ホッホシルトコホモロジー環を用いて定義されました。これは、その性質からカールソンによって導入された有限群の群環上の加群の多様体の類似と言えます。以後、有限次元多元環上の加群のサポート多様体の研究が盛んになり始めました。(有限群の表現論、多元環の表現論における“加群の多様体”は様々な形で研究されています。今回のシンポジウムの佐々木氏の報告集、また、2009 年度代数学シンポジウムの飛田氏、長瀬氏の報告集も合わせてご覧ください。)

本稿では、これまでに計算されてきたホッホシルトコホモロジー環に関する計算結果、および、それらに端を発するいくつかの問題や予想を述べます。また、ある種の有限次元単項多元環 (stacked monomial algebra) 上の単純加群のサポート多様体に関するいくつかの結果を紹介します。

本稿を通して、断りのない限り K は代数的閉体、 B は K 上の直既約な有限次元多元環とし、加群はすべて有限生成な右加群とします。また、 B^e で B の包絡多元環 $B^{\text{op}} \otimes B$ を表します。

今回の講演の機会を与えて頂きました河田成人先生ならびに関係者の方々に深く感謝いたします。

2 ホッホシルトコホモロジーの定義

本節では、ホッホシルトコホモロジーの定義および多元環の表現論における基本性質を紹介する。本節では K を可換環とする。このとき、 B のホッホシルトコホモロジー群 $\text{HH}^i(B)$ ($i \geq 0$) とは

$$\text{HH}^i(B) := \text{Ext}_{B^e}^i(B, B)$$

によって定義される K -加群である ([3])。また、これらの直和を考えた空間

$$\text{HH}^*(B) := \text{Ext}^*(B, B) = \bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}^i(B, B)$$

は米田積 \times を考えることで、次数付き可換 (graded commutative)、すなわち

$$\theta \times \eta = (-1)^{mn} \eta \times \theta \in \text{HH}^{m+n}(B) \quad (\theta \in \text{HH}^m(B), \eta \in \text{HH}^n(B))$$

をみたす次数付き多元環になることが知られている ([19])。HH*(B) を B のホッホシルトコホモロジー環とよぶ。

次に, \mathcal{N} を HH*(B) における同次冪零元から生成されるイデアルとする。このとき, \mathcal{N} も同次イデアルとなり, その剰余環 HH*(B)/ \mathcal{N} は可換な次数付き多元環となる ([23])。HH*(B)/ \mathcal{N} を B の冪零元を法とするホッホシルトコホモロジー環とよぶ。

さて, 0 次および 1 次のホッホシルトコホモロジー群に関しては次のことが知られている。

- HH⁰(B) = Z(B) B の中心に環として一致。
- HH¹(B) は, (B の) 導分の空間の (B の) 内部導分による剰余空間に一致。

また, HH²(B) は, B の無限小変形 (infinitesimal deformation) がどのくらい存在するのかを表す指標と考えることができる。さらに, ホッホシルトコホモロジー環は, 多元環の森田同値, 導来同値, 森田型の安定同値 (0 次は除く) で不変であることが分かっている。このことから, 近年ホッホシルトコホモロジー群の多元環の導来同値分類への応用も見られる。(例えば [26] 参照)

3 ホッホシルトコホモロジー環の計算例 ($K[x]/(x^n)$)

多元環の表現論に限定した場合, ホッホシルトコホモロジー環を中心とする研究はごく最近始まったと言える。それらは, 有限表現型の自己入射多元環 ([5], [6]) や有限次元前射影多元環 ([9]) など, 両側加群としての射影分解が周期的なものに対するものであった。

ホッホシルトコホモロジーの定義から, 両側射影分解が構成できればホッホシルトコホモロジー環の計算は (理論的に) 可能である。したがって, 多元環の両側射影分解をいかに構成するかが 1 つのポイントである。本節では, ホルムの多元環 $K[x]/(x^n)$ に対するホッホシルトコホモロジー環の計算結果 ([17]) について紹介する。これはホッホシルトコホモロジー群および環を具体計算する際の手本となる例と言えよう。

本節を通し, K は可換環とする。 $n \geq 2$ を整数とし, 剰余環 $\Lambda := K[x]/(x^n)$ を考える。このとき, Λ の両側射影分解は次のように与えられる。

定理 1. ([17]) Λ の次の周期 2 の両側射影分解が存在する。

$$\dots \xrightarrow{d^3} \Lambda \otimes \Lambda \xrightarrow{d^2} \Lambda \otimes \Lambda \xrightarrow{d^1} \Lambda \otimes \Lambda \xrightarrow{d^0} \Lambda \longrightarrow 0$$

ただし, d^i ($i \geq 0$) は次の式で決まる両側加群の準同型である: $d^0(1 \otimes 1) = 1$,

$$d^i(1 \otimes 1) = 1 \otimes x - x \otimes 1 \quad (i \text{ が奇数}),$$

$$d^i(1 \otimes 1) = \sum_{j=0}^{n-1} x^j \otimes x^{n-j-1} \quad (i \text{ が偶数}).$$

注意. 論文 [17] では, より一般的な形の多元環 $K[x]/(f(x))$ の両側射影分解およびホッホシルトコホモロジー環が計算されている。本節は特に $f(x) = x^n$ の場合を扱っている。

これらの射影分解を用いてホッホシルトコホモロジー環を計算すると次のようになる。

定理 2. ([17]) 次の可換な次数付き多元環の同型が存在する:

(a) $\text{char } K \mid n$ のとき ,

$$\text{HH}^*(\Lambda) \simeq \begin{cases} K[x, y, z]/(x^n, y^2) & \text{if } \text{char } K \neq 2, \text{ or if } \text{char } K = 2 \text{ and } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ K[x, y, z]/(x^n, y^2 - x^{n-2}z) & \text{if } \text{char } K = 2 \text{ and } n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

ただし $\deg x = 1, \deg y = 2$ and $\deg z = 3$ とする。

(b) $\text{char } K \nmid n$ のとき ,

$$\text{HH}^*(\Lambda) \simeq K[x, y, z]/(x^n, nx^{n-1}z, yx^{n-1}, y^2).$$

ただし $\deg x = 1, \deg y = 2$ and $\deg z = 3$ とする。

上記のように、より扱いやすい多元環であっても、その構造は煩雑になる。しかしながら、冪零元を法とするホッホシルトコホモロジー環は比較的明快な構造をしている場合が多い。実際、周期的な両側射影分解をもつ多元環に対しては、次の同型が存在する。

定理 3. ([14]) B が周期的な両側射影分解をもつとき、 $\text{HH}^*(B)/\mathcal{N}$ は次数付き多元環として K または $K[x]$ に同型である。

4 単項多元環上の加群のサポート多様体

有限次元多元環上の加群の多様体を、有限群の表現論における定義 ([2]) と同様に定めようと考えても、自明な加群の概念が存在しないため、同様の方法では行えない。そこでスナーシャル、ソルベルグはホッホシルトコホモロジー環を用いて、サポート多様体を導入した。

M を B -加群とする。そうすると、次数付き多元環

$$\text{Ext}_B^*(M, M) = \bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_B^i(M, M)$$

を得る。ただし積は米田積とする。このとき、テンソル積 $M \otimes_B -$ は次数付き多元環の準同型

$$H \xrightarrow{\text{inc.}} \text{HH}^*(B) \xrightarrow{M \otimes_B -} \text{Ext}_B^*(M, M)$$

を引き起こす。この準同型を通して $\text{Ext}_B^*(M, M)$ を H -加群とみなす。 \mathcal{N}' で H における同次冪零元から生成されるイデアルを表す。

定義. ([23]) M の H/\mathcal{N}' におけるサポート多様体とは

$$V_H(M) = \{ \mathfrak{m} \in \text{MaxSpec } H/\mathcal{N}' \mid \text{Ann}_H \text{Ext}_B^*(M, M) \subseteq \mathfrak{m}' \}$$

を言う。ただし、 \mathfrak{m}' は \mathfrak{m} の H における逆像である。特に $H = \text{HH}^*(B)$ のときは $V_H(M)$ を $V(M)$ で表し、単に M のサポート多様体とよぶ。

4.1 有限性条件 (Fg)

[8] においてエルトマン, ホロウェイ, スナシャル, ソルベルグテイラファーは, 以下に述べるの有限性条件 (Fg1), (Fg2) を導入した。そして, (Fg1), (Fg2) が成り立つとき, 有限生成加群が有限群の表現論における多様体に関連する幾何学的性質 ([2] 参照) をもつことを示した。

(Fg1) $\mathrm{HH}^*(B)$ の可換な次数付きネーター部分多元環 H で, $H^0 = \mathrm{HH}^0(B) (= Z(B))$ となるものが存在する。

(Fg2) 拡大多元環 (Ext algebra) $\mathrm{Ext}_B^*(B/\mathrm{rad} B, B/\mathrm{rad} B)$ は有限生成 H -加群である。

[23] において, 一意的に H の極大イデアル $\mathfrak{m}_{\mathrm{gr}}$ が存在して, 任意の B -加群 M に対して $\mathfrak{m}_{\mathrm{gr}} \in V_H(M)$ となることが示されている。このとき, サポート多様体が自明であることを次のように定義する。

定義. ([23]) M の H/\mathfrak{N}' におけるサポート多様体が自明であるとは, $V_H(M) = \{\mathfrak{m}_{\mathrm{gr}}\}$ であるときを言う。

さて, 有限次元多元環上の加群のサポート多様体の基本的な性質が論文 [23] において述べられている。本稿ではその中の次の性質に注目する。

命題. ([23]) B -加群 M の射影次元または入射次元が有限のとき, サポート多様体は自明である。

上記に述べたように, 有限性条件 (Fg1), (Fg2) がみたされるとき, 多元環 B のサポート多様体の理論は有限群の表現論の場合と類似した性質をもつことが示されているが, 特に, 上記の命題に関して逆の主張が成立することが示されている。このことから, 一般的な有限次元多元環 B について次の問題が考えられる。

問題 1. ([23]) B -加群 M のサポート多様体が自明になるのはどのようなときか?

また, どのような場合に (Fg1), (Fg2) をみたすか? という問題も研究されている。

問題 2. 多元環 B が (Fg1), (Fg2) をみたすのはどのようなときか?

エルトマン, ソルベルグ ([9]) によって, 根基の 3 乗が零であるが, 冪零ではないような対称多元環について (Fg1), (Fg2) が成り立つための必要十分条件が与えられている。

4.2 積み上げ単項多元環上の加群のサポート多様体

この節では積み上げ単項多元環上の単純加群について問題 1 を考える。すなわち, 単純加群のサポート多様体が自明になるための必要十分条件を与える。はじめに積み上げ単項多元環について復習する。以降 Q は有限クイバーを表し, I は常に道多元環 KQ の許容イデアル, すなわち $J^t \subseteq I \subseteq J^2$ ($t \geq 2$, J は全ての矢から生成される KQ のイデアル) となる両側イデアルとする。

定義. ([13])

(i) 有限次元多元環 KQ/I が単項多元環 (monomial algebra) であるとは, I がいくつかの道から生成されるときを言う。

- (ii) 単項多元環 $\Lambda := KQ/I$ が (D, A) -積み上げ単項多元環 ((D, A) -stacked monomial algebra) であるとは, $A/\text{rad } \Lambda$ の極小射影分解の各項が同じ次数から成る生成元をもつときを言う。(ここで, $D \geq 2$, A は I の生成元から一意的に決まる整数である。)

注. (a) 積み上げ単項多元環のオリジナルの定義は道のオーバーラップ (overlap) の概念および整数 $D \geq 2$, $A \geq 1$ を用いて定義されている (詳しくは [13] をご覧頂きたい)。

(b) 積み上げ単項多元環の類は, コシユール単項多元環および D -コシユール単項多元環の類を含む。実際, コシユール単項多元環は $(2, 1)$ -積み上げ単項多元環に一致し, D -コシユール単項多元環は $(D, 1)$ -積み上げ単項多元環に一致する ([13] 参照)。

本節の主結果を述べるために [11] から記号を準備する。

記号. Q の任意の道 p に対して $o(p)$ で p の始点を表し, $t(p)$ で p の終点を表す。 Q の頂点 v での閉道 (closed path) とは, 自明でない道 C で $C = vCv \in KQ$ をみたすものを言う。また, 整数 $A \geq 1$ に対して Q の閉道 T が A -閉小径であるとは, 自明でない道 $T = \alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_{m-1} (\in KQ)$ を言う。ここで $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}$ は相異なる長さ m の道である。 $T_0 = T$, $T_i = \alpha_i \cdots \alpha_{m-1}\alpha_0 \cdots \alpha_{i-1}$ ($i = 1, \dots, m-1$) とおく。

次に, 整数 $d \geq 2$ に対して $d = Nm + l$ と置く。ここで $0 \leq N$, $0 \leq l \leq m-1$ とする。自然数 t について, t を N で割った余りを $[t]$ と書く。 A -閉小径 T に対して, $W = T_0^N \alpha_0 \cdots \alpha_{l-1}$ とおく。ただし, $N = 0$ のとき $T_0^N = o(\alpha_0)$ とし, $l = 0$ のとき $W = T_0^N$ とする。さらに, W に対して $\sigma^k(W) = T_k^N \alpha_k \alpha_{k+1} \cdots \alpha_{k+l-1}$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) と定義する。ここで

- (a) $t \geq m$ のとき, $\alpha_t = \alpha_{[t]}$,
- (b) $N = 0$ のとき, $T_k^N = o(\alpha_k)$,
- (c) $l = 0$ のとき, $\sigma^k(W) = T_k^N$

する。 $\rho_T := \{W, \sigma(W), \dots, \sigma^{m-1}(W)\}$ と定める。

$\Lambda = KQ/I$ を無限大局次元をもつ (D, A) -積み上げ単項多元環とし, ρ を I の道から成る生成元の極小集合とする。ここで $D = dA$ であることに注意する ([11] 参照)。

C_i ($i = 1, \dots, u$) を Q の頂点 v_i における閉道で次をみたすものとする: (i) Q の任意の道 p_i に対して $C_i \neq p_i^{r_i}$ ($r_i \geq 2$). (ii) $C_i^d \in \rho$. (iii) 差集合 $\rho \setminus \{C_i^d\}$ の任意の元と C_i^d のオーバーラップ (overlap) は存在しない。また v_i に対応する Λ の単純加群を C_i に付随する単純加群とよぶ。

続いて, T_j ($j = u+1, \dots, r$) を Q の相異なるすべての A -閉小径で次をみたすものとする。(i) $\rho_{T_j} \subset \rho$. (ii) 長さ A の道 α_{ij} を用いて, $T_j = \alpha_{j0}\alpha_{j1} \cdots \alpha_{jm_j-1}$ と表したとき, 各 $i = u+1, \dots, r$ について $\rho \setminus \rho_{T_i}$ の任意の元と α_{jk} のオーバーラップは存在しない。また, $k = 0, \dots, m_j-1$ ($j = j+1, \dots, r$) に対して, $o(T_{jk})$ に対応する Λ の単純加群を T_j に付随する単純加群とよぶ。

このとき, 次の同型が存在することが示されている。

定理 4. ([13]) $\Lambda = KQ/I$ を (D, A) -積み上げ単項多元環とする。 Λ の冪零元を法とするホッホシルトコホモロジー環について次の可換次数付き多元環の同型が存在する:

$$\text{HH}^*(\Lambda)/\mathcal{N} \simeq K[x_1, \dots, x_r]/(x_a x_b \mid 1 \leq a, b \leq r; a \neq b)$$

ただし, $r = 0$ のときは $\text{HH}^*(\Lambda)/\mathcal{N} \simeq K$ とする。

上記の定理を用いて次を得る:

定理 5. ([11]) $\Lambda = KQ/I$ を (D, A) -積み上げ単項多元環とする。 Λ の単純加群 S のサポート多様体 $V(S)$ が自明となるための必要十分条件は、 S が C_1, \dots, C_r または T_{u+1}, \dots, T_r のいずれかに付随することである。

注. (a) 上記の定理に関して、単純でない加群のサポート多様体が自明になるための条件は分かっていない。

(b) (D, A) -積み上げ単項多元環のなす類は (Fg1), (Fg2) をみたさないものも多く含む。

5 ある自己入射多元環のホッホシルトコホモロジーの計算例

Γ を次のような 4 個の頂点 e_i ($i = 0, 1, 2, 3$) と 8 個の矢 $a_{l,m}$ ($l = 0, 1; m = 0, 1, 2, 3$) をもつクイパーとする:

$$\begin{array}{ccc}
 e_0 & \xrightarrow{a_{1,0}} & e_1 \\
 \uparrow a_{1,3} & \begin{array}{c} \xrightarrow{a_{0,0}} \\ \xrightarrow{a_{0,3}} \end{array} & \downarrow a_{1,1} \\
 e_3 & \xleftarrow{a_{0,2}} & e_2 \\
 & \xleftarrow{a_{1,2}} &
 \end{array}$$

また、 $l = 0, 1$ に対して $x_l = \sum_{i=0}^3 a_{l,i} \in K\Gamma$ と置き、 $q_i \in K^\times$ ($i = 0, 1, 2, 3$) とする。さらに $T (\geq 2)$ を整数とする。 $I = I_T(q_0, q_1, q_2, q_3)$ を 4 種類の変元 $e_i x_0 x_1, e_i x_1 x_0, e_j (q_j x_0^{4T+2} + x_1^{4T+2}), e_k (q_k x_1^{4T+2} + x_0^{4T+2})$ ($i = 0, 1, 2, 3; j = 0, 2; k = 1, 3$) から生成される $K\Gamma$ の両側イデアルとする。多元環 $A = A_T(q_0, q_1, q_2, q_3)$ を剰余多元環 $K\Gamma/I_T(q_0, q_1, q_2, q_3)$ で定義する。このとき、 A は弱対称多元環ではない自己入射多元環であり、また、特殊双列多元環であることが分かる。特に $T = 2$ の場合はコシュール多元環になる。本講演の目的はいくつかの A のホッホシルトコホモロジー群および冪零元を法とするホッホシルトコホモロジー環を調べることである。

さて、ホッホシルトコホモロジー群に関する次の問題は長年未解決であった:

問題 3. (ハッペルの問題 [16]) 任意の $i \gg 0$ に対して、 $\mathrm{HH}^i(B) = 0$ のとき B の大局次元は有限であるか?

2005 年に [1] においてこの問題に対する否定的な答えが与えられた。この予想の逆はハッペル自身によって示されている。実際 B の大局次元と B^e 加群としての B の射影次元は一致することが示されている。

一方、[23] において冪零元を法とするホッホシルトコホモロジー環について次のことが予想された:

予想 4. 任意の多元環 B に対して、 $\mathrm{HH}^*(B)/\mathcal{N}$ は環として有限生成である。

次の有限次元多元環の類に対して、上記の予想が正しいことが分かっている:

- 有限群の群環のブロック ([4])
- 大局次元が有限な多元環 ([16])

- 周期的な多元環 ([14]) (特に有限表現型の自己入射多元環)
- 単項多元環 ([15])

また, 最近, 数種類の具体的な特殊双列自己入射多元環に対して上記の予想正しいことが示されている ([24, 25, 18, 20])。しかし, 2005 年にシュウ ([27]), スナシャル ([21]) によってこの予想の反例が見つかった ([28] も参照)。現在は上記の予想にかわる次の問題と予想が研究されている。

問題 5. ([21]) 多元環 B に対して, $\mathrm{HH}^*(B)/\mathcal{N}$ が環として有限生成のはどのようなときか?

予想 6. B が自己入射多元環のとき, $\mathrm{HH}^*(B)/\mathcal{N}$ は環として有限生成である。

さて, この節で定めた多元環 A のホッホシルトコホモロジーについてのいくつかの結果を述べる。

定理 6. ([10]) $q_i = 1_K$ ($i = 0, 1, 2, 3$), $T = 0$ とする。このとき, 次の可換な次数付き多元環の同型が存在する:

$$\mathrm{HH}^*(A)/\mathcal{N}_A \simeq K[z_0, z_1, z_2, z_3, z_4] / \langle z_0 z_2 - z_1^2, z_0 z_3 - z_1 z_2, z_0 z_4 - z_2^2, z_0 z_4 - z_1 z_3, z_1 z_4 - z_2 z_3, z_2 z_4 - z_3^2 \rangle.$$

ここで, $\deg z_j = 4$ ($j = 0, \dots, 4$) である。したがって $\mathrm{HH}^*(A)/\mathcal{N}_A$ は環として有限生成である (予想 6 は正しい)。

定理 7. ([12]) 積 $q_0 q_1 q_2 q_3$ は 1_K の冪乗根ではないとする。このとき次を得る。

(a) 整数 $m \geq 0$, $r = 0, 1, 2, 3$ に対して

$$\dim_K \mathrm{HH}^{4m+r}(A_{4,4T+2}) = \begin{cases} 2T+1 & \text{if } m=r=0 \\ 2T+3 & \text{if } m=0, r=1 \text{ and } \mathrm{char} K \mid 2T+1 \\ 2T+2 & \text{if } m=0, r=1 \text{ and } \mathrm{char} K \nmid 2T+1 \\ 2T+2 & \text{if } m=0, r=2 \text{ and } \mathrm{char} K \mid 2T+1 \\ 2T+1 & \text{if } m=0, r=2 \text{ and } \mathrm{char} K \nmid 2T+1 \\ 2T & \text{if } m \geq 0 \text{ and } r=3, \\ & \text{or if } m \geq 1 \text{ and } r=0 \\ 2T+2 & \text{if } m \geq 1, r=1 \text{ and } \mathrm{char} K \mid 2T+1, \\ & \text{or if } m \geq 1, r=2 \text{ and } \mathrm{char} K \mid 2T+1 \\ 2T & \text{if } m \geq 1, r=1 \text{ and } \mathrm{char} K \nmid 2T+1, \\ & \text{or if } m \geq 1, r=2 \text{ and } \mathrm{char} K \nmid 2T+1. \end{cases}$$

(b) 全ての $n \geq 3$ に対して, $\mathrm{HH}^n(A) = 0$ となる必要十分条件は $T = 0$ である。

注. 上記の定理において, A の大局次元は無限であるので問題 3 に否定的な答えを与えている。

系. 積 $q_0 q_1 q_2 q_3$ は 1_K の冪乗根ではないとする。このとき $\mathrm{HH}^*(A)$ は 4 次元の局所環である。また $\mathrm{HH}^*(A)/\mathcal{N} \simeq K$ となる。

参考文献

- [1] R.-O. Buchweitz, E. L. Green, D. Madesen and Ø. Solberg, Finite Hochschild cohomology without finite global dimension, *Math. Res. Lett.* **12** (2005), 805–816.
- [2] J. F. Carlson, Varieties and the cohomology ring of a module, *J. Algebra* **85** (1983), 104–143.
- [3] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra* (Princeton University Press, 1956).
- [4] L. Evens, The cohomology ring of a finite group, *Trans. Amer. Math. Soc.* **101** (1961), 224–239.
- [5] K. Erdmann and T. Holm, Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of type A_n , *Forum Math.* **11** (1999), 177–201.
- [6] K. Erdmann, T. Holm and N. Snashall, Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of type A_n II, *Algebr. Represent. Theory.* **5** (2002), 457–482.
- [7] K. Erdmann and Ø. Solberg, Radical cube zero weakly symmetric algebras and support varieties, *J. Pure and Appl.* **215** (2011), 185–200.
- [8] K. Erdmann, M. Holloway, N. Snashall, Ø. Solberg, and R. Taillefer, Support varieties for self-injective algebras, *K-Theory* **33** (2004), 67–87.
- [9] K. Erdmann and S. Snashall, Preprojective algebras of Dynkin type: periodicity and the second Hochschild cohomology, *Algebras and modules II* (ed I. Reiten, S. O. Smalø and Ø. Solberg), *Canadian Mathematical Society Conference Proceedings* **24** (American Mathematical Society, Providence, RI, 1998), 183–193.
- [10] T. Furuya, Hochschild cohomology for a class of some self-injective special biserial algebras of rank four, to appear in *J. Pure and Applied Algebra*.
- [11] T. Furuya and N. Snashall, Support varieties for modules over stacked monomial algebras, *Comm. Algebra* **39** (2011), 2926–2942.
- [12] T. Furuya and T. Hayami, Hochschild cohomology for a socle deformation of some self-injective special biserial algebra of rank four, preprint.
- [13] E. L. Green and N. Snashall, The Hochschild cohomology ring modulo nilpotence of a stacked monomial algebra, *Colloq. Math.* **105** (2006), 233–258.
- [14] E. L. Green, N. Snashall and Ø. Solberg, The Hochschild cohomology ring of a self-injective algebra of finite representation type, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), 3387–3393.
- [15] E. L. Green, N. Snashall and Ø. Solberg, *The Hochschild cohomology ring modulo nilpotence of a monomial algebra*, *J. Algebra Appl.* **5** (2006), 153–192.
- [16] D. Happel, *The Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras*, *Springer Lecture Notes in Mathematics* **1404** (1989), 108–126.

- [17] T. Holm, Hochschild cohomology rings of algebras $K[X]/(f)$, *Beiträge Algebra Geom.* **41** (2000), 291–301.
- [18] A. Itaba, On Hochschild cohomology of a self-injective special biserial algebra obtained by a circular quiver with double arrows, to appear in *Comm. in Algebra*.
- [19] S. MacLane, *Homology*, Classics in Mathematics (Springer, New York, 1995).
- [20] A. Parker and N. Snashall, A family of Koszul self-injective algebras with finite Hochschild cohomology, *J. Pure and Applied Algebra* **216** (2012), 1245–1252.
- [21] N. Snashall, Support varieties and the Hochschild cohomology ring modulo nilpotence, *Proceedings of the 41st Symposium on Ring Theory and Representation Theory*, 68–82, Ed. H. Fujita, Tsukuba, Japan, 2009.
- [22] S. Schroll and N. Snashall, Hochschild cohomology and support varieties for tame Hecke algebras, *Quart. J. Math.* **62** (2011), 1017–1029.
- [23] N. Snashall and Ø. Solberg, Support varieties and Hochschild cohomology rings, *Proc. London Math. Soc.* **88** (2004), 705–732.
- [24] N. Snashall and R. Taillefer, The Hochschild cohomology ring of a class of special biserial algebras, *J. Algebra Appl.* **9** (2010), 73–122.
- [25] N. Snashall and R. Taillefer, Hochschild cohomology of socle deformations of a class of Koszul self-injective algebras, *Colloq. Math.* **119** (2010), 79–93.
- [26] N. Snashall and R. Taillefer, Classification of symmetric special biserial algebras with at most one non-uniserial indecomposable projective, to appear in *Proc. EMS*.
- [27] F. Xu, Hochschild and ordinary cohomology rings of small categories, *Adv. Math.* **219** (2008), 1872–1893.
- [28] Y. Xu and C. Zhang, More counterexamples to Happel’s question and Snashall-Solberg’s conjecture, [arXiv:1109.3956](https://arxiv.org/abs/1109.3956).