冪零軌道と W 代数

荒川 知幸 (京大・数理研)

1. 序

(アフィン)W 代数は Kac-Moody 代数や Virasoro 代数などの無限次元リー環を含み, 可積分系, 共型場理論, 散在型有限群, モジューラ表現論, 4 次元のゲージ理論, 幾何学的 Langlands 対応など様々な分野と関係のある興味深い頂点代数の族である．一方, その構造は極めて複雑であり, そのため W 代数の表現論は最近までよくわかっていなかった．しかしようやく近年, 有限 W 代数の表現論の進展などに伴い, W 代数の表現論も応用可能なレベルにまで進展しつつある ([A1, A2, A3, A7]).

Premet[Pre] によって導入された有限 W 代数は (アフィン)W 代数の有限次元版であり, その歴史は Kostant[Kos] に遡る．有限 W 代数は Slodowy の横断片の自然な量子化であり, その表現論は普遍包絡環の primitive ideal の理論と密接な関係がある．両者の関係は Premet によって予想され Losev[Los2] によって確立された．冪零軌道は primitive ideal の重要な不変量として現れる．したがってその理論は有限 W 代数にとっても重要である．

本稿では (アフィン)W 代数に対する Losev の結果のアナローグを考察する．アフィン Kac-Moody 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ に関しては (現時点では) primitive ideal の理論は存在しないが, 頂点代数の理論の中では普遍アフィン頂点代数の極大イデアルが primitive ideal のアナローグであるとみなすことができる。その随伴多様体はアフィン Kac-Moody 代数の最高ウエイト $k\Lambda_0$ (k はレベル) の最高ウエイト表現の特異台と一致するが、それは $\mathfrak{g}^*$ のアーク空間の部分スキームして定義される．有限次元リー環の場合と異なり, アフィン Kac-Moody 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の普遍包絡環には $\widehat{\mathfrak{g}}$ の中心元以外の非自明な中心が存在しないため冪零錐との関係は全く明らかではないが、$\widehat{\mathfrak{g}}$ の許容表現に関してはその特異台が $\mathfrak{g}$ の冪零錐のアーク空間に含まれことを示すことができる (Feigin-Frenkel 予想 [A5])．これは $\widehat{\mathfrak{g}}$ の許容表現に付随した頂点代数の随伴多様体 [A4] が $\mathfrak{g}$ の冪零錐に含まれることと同値である。

許容表現の特異台, あるいは対応する随伴多様体に関してはさらに既約性も成立し, これらの明示的に決定することも可能である ([A5])．このことと, アフィン Kac-Moody 代数の許容表現 [A6], 及び Losev の結果のアナローグ, すなわちアフィン Kac-Moody 代数と W 代数との関係から, 例えば 20 年来の未解決問題であった主冪零軌道に付随する W 代数の有理性問題 [FKW] を解決することが可能になった ([A7])．本稿ではそうした状況を報告したい.

2. 有限次元リー環の表現論における冪零軌道

$\mathfrak{g}$ を有限次元複素単純リー環とし, $U(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環とする:

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\langle x\otimes y - x\otimes x - [x,y] \mid x, y \in \mathfrak{g}\rangle.$$

ただし, $T(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ のテンソル代数．このとき, $\mathfrak{g}$ 加群とは (多元環としての)$U(\mathfrak{g})$ 加群のことに他ならない.

$$U_p(\mathfrak{g}) := \sum (\text{高々} p \text{ 個の } \mathfrak{g} \text{ の元の積}) \subset U(\mathfrak{g})$$

とおくと,

$$0 = U_{-1}(\mathfrak{g}) \subset U_0(\mathfrak{g}) \subset U_1(\mathfrak{g}) \subset \dots, \quad U(\mathfrak{g}) = \bigcup_p U_p(\mathfrak{g})$$

$$U_p(\mathfrak{g})U_q(\mathfrak{g}) \subset U_{p+q}(\mathfrak{g}), \quad [U_p(\mathfrak{g}), U_q(\mathfrak{g})] \subset U_{p+q-1}(\mathfrak{g})$$

となる. これを $U(\mathfrak{g})$ の PBW フィルトーレーション, あるいは標準トレーションフィルトレーションという. Associated graded algebra

$$\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_p U_p(\mathfrak{g})/U_{p-1}(\mathfrak{g})$$

には次で Poisson 代数の構造が入る.

$$\sigma_p(a)\sigma_q(b) = \sigma_{ab}, \quad \{\sigma_p(a), \sigma_q(b)\} = \sigma_{p+q-1}([a,b]).$$

ここで, $\sigma_p : U_p(\mathfrak{g}) \to U_p(\mathfrak{g})/U_{p-1}(\mathfrak{g})$ は自然な射影 (symbol map).

定理 2.1 (Poincaré-Birkoff-Witt)**.** 次のポアソン代数の同型が存在する.

$$\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*].$$

ただし, $\mathfrak{g}^*$ には Kirillov-Kostant の Poisson 構造を入れる (つまり $x, y \in \mathfrak{g} \subset \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ に対して $\{x, y\} = [x, y]$).

$\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ を $U(\mathfrak{g})$ の中心とすると, $\mathcal{Z}_p(\mathfrak{g}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cap U_p(\mathfrak{g})$ により $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ に誘導フィルトレーションが入り, $\operatorname{gr} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_p \mathcal{Z}_p(\mathfrak{g})/\mathcal{Z}_{p-1}(\mathfrak{g})$ は $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ の Poisson 可換な部分代数になる. 実際,

$$\operatorname{gr} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G$$

が成立することが知られている. ただし $\operatorname{Lie} G = \mathfrak{g}$ なる連結な半単純代数群.

I を $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアルとして, 誘導フィルトレーション $I_p = I \cap U_p(\mathfrak{g})$ に関する associated graded $\operatorname{gr} I = \bigoplus_p I_p/I_{p-1} \subset \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ は $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ の G 不変なイデアルとなる. この零集合

$$\operatorname{Var}(I) := \{\lambda \in \mathfrak{g}^* \mid f(\lambda) = 0, \ \forall f \in \operatorname{gr} I\}$$

は I の随伴多様体と呼ばれる. $\operatorname{Var}(I)$ は $\mathfrak{g}^*$ の G 不変, コーニックな部分代数多様体である.

随伴多様体は I が $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal, すなわちある単純加群 M の零化イデアル[1]になるときが特に重要である. Shur の補題より, 単純加群 M についてはある中心指標 $\gamma : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ が存在し,

$$z - \chi(z) \in I = \operatorname{Ann}_{U(\mathfrak{g})} M, \quad z \in Z(\mathfrak{g}) \tag{1}$$

となる.

$\mathcal{N}$ を $\mathfrak{g}$ の冪零錐とする.

$$\mathcal{N} =: \{x \in \mathfrak{g} \mid (\operatorname{ad} x)^r = 0, \ r \gg 0\} \subset \mathfrak{g}.$$

$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}$ の不変内積 $(\ |\ )$ で同一視すると,

$$\mathcal{N} = \{\lambda \in \mathfrak{g}^* \mid p(\lambda) = 0, \ \forall p \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G_+\} \subset \mathfrak{g}^*$$

[1]次の定理が知られている.

定理 2.2 (Duflo '77)**.** 任意の primitigve ideal は単純な最高ウエイト加群の零化イデアルである.

となることはよく知られている．ここで $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G_+$ は $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G$ の argumentation ideal. (つまり $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_l]$, $\deg p_i > 0$, としたとき $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G_+ = \sum_{i=1}^l \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]p_i$.) 従って (1) より, primitive ideal I については

$$\mathrm{Var}(I) \subset \mathcal{N}$$

が成立する[2].

定理 2.3 (Joseph[Jos])**.** $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal I の随伴多様体は既約である．すなわち, ある冪零軌道[3]$\mathbb{O}$ が存在して

$$\mathrm{Var}(I) = \overline{\mathbb{O}}$$

となる．

3. 冪零軌道と有限 W 代数

$f \in \mathcal{N}$ を零でない元とする．Jacobson-Morozov の定理から f を含む $\mathfrak{sl}_2$ トリプル $\{e, f, h\}$ が存在する:

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

点 $f \in \mathfrak{g}$ における Slodowy の横断片とはアフィン空間

$$\mathcal{S}_f := f + \mathfrak{g}^e \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*$$

のことを云う．$\mathcal{S}_f$ はその各点において $\mathfrak{g}$ の G 軌道と横断的に交わることが知られている ([GG]).

$\gamma : \mathbb{C}^* \to G$, $t \mapsto \gamma_t$, を $h \in \mathfrak{g}$ が生成する G の 1 パラメーター部分群とすると,

$$\mathbb{C}^* \ni t : x \mapsto t^{-2}\,\mathrm{Ad}(\gamma_t^{-1})(x)$$

は $\mathcal{S}_f$ 上の $\mathbb{C}^*$ 作用を定める．容易に分かるようにこの $\mathbb{C}^*$ 作用は f に縮小する．

以下に説明するように $\mathcal{S}_f$ はポアソン多様体の構造が入る．$\chi \in \mathfrak{g}^*$ を $x \mapsto (f|x)$ で定める．また, $\mathfrak{g}$ の次数付けを

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j, \quad \mathfrak{g}_j = \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}\,h(x) = jx\}$$

で与える．このとき,

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 & \to & \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto & \chi([x, y]) \end{array}$$

はシンプレクティック形式を定めることがわかる．この形式に関する $\mathfrak{g}_1$ のラグランジャン部分空間 l を固定し,

$$\mathfrak{m} = l \oplus \bigoplus_{j \geq 2} \mathfrak{g}_j \subset \mathfrak{g}$$

と定めると, $\mathfrak{m}$ は $\mathfrak{g}$ の冪零部分代数になる．また, χ の $\mathfrak{m}$ への制限は指標になる (すなわち, $\chi([\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]) = 0$)

M を $\mathfrak{m}$ に対応する G の冪単部分群とすると制限写像

$$\mu : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{m}^*$$

は M の作用に関するモーメント写像であり, 点 $\chi \in \mathfrak{m}^*$ は一点からなる M の軌道である．逆像 $\mu^{-1}(\chi) = \chi + \mathfrak{m}^\perp$ は $\mathcal{S}_f$ を含むが, $\mathcal{S}_f$ の横断性より次が従う．

---

[2] このことから, $U(\mathfrak{g})$ の任意の有限生成加群の零化イデアル冪零錐に含まれることがわかる．

[3] $\mathbb{O} = \mathrm{Ad}\,G.x$, $x \in \mathcal{N}$ の形の (随伴作用に関する)G 軌道のことである．

定理 3.1 ([Kos, GG])**.** (i) χ はモーメント写像 μ の正則値である.

(ii) 次はアフィン代数多様体の同型を与える.

$$M \times \mathcal{S}_f \xrightarrow{\sim} \mu^{-1}(\chi), \quad (g,x) \mapsto \mathrm{Ad}\, g.x.$$

定理 3.1 より $\mathcal{S}_f \cong \mu^{-1}(\chi)/M$ には還元されたポアソン多様体の構造が入る.

ポアソン多様体 $\mathcal{S}_f$ は自然な非可換変形を持つことが知られている ([Kos, Pre]). 以下にその BRST 還元法を用いた構成 ([KS]) を説明する.

$\mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}^{\bullet}$ を $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*$ に付随したクリフォード代数とし, $\deg \mathfrak{m} = -1$, $\deg \mathfrak{m}^* = 1$ によって次数付けをいれる: $\mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}^{\bullet} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}^{p}$.

$\mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}^{\bullet}$ のフィルトレーションを $\mathcal{C}l_{\mathfrak{m},p}^{\bullet} = \Lambda^{\leq p}(\mathfrak{m})\Lambda^{\bullet}(\mathfrak{m}^*)$ で定めると

$$\mathrm{gr}\, \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}^{\bullet} = \bigoplus_p \mathcal{C}l_{\mathfrak{m},p}^{\bullet}/\mathcal{C}l_{\mathfrak{m},p-1}^{\bullet}$$

はスーパーポアソン代数になる. これを古典クリフォード代数という. 環としては

$$\mathrm{gr}\, \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}^{\bullet} = \Lambda(\mathfrak{m}) \otimes \Lambda(\mathfrak{m}^*)$$

であり, ポアソン構造は

$$\{x,y\} = 0 \quad \{f,g\} = 0 \quad \{f,x\} = f(x) \quad (x,y \in \mathfrak{m},\ f,g \in \mathfrak{m}^*)$$

で与えられる.

テンソル積 $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}^{\bullet}$ には自然にスーパー代数の構造が入るが, Lie 代数の準同型

$$\theta : \mathfrak{m} \mapsto U(\mathfrak{m}) \otimes \mathcal{C}l^0 \subset U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}^{\bullet}, \quad x \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}(x)$$

が存在する. ただし

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{m} \mapsto \mathcal{C}l^0$$

は $\mathfrak{m}$ の随伴作用が定める Lie 代数の準同型である[4].

補題 3.2. ([KS, Akm, BD]

(i) 任意の $x \in \mathfrak{m}$ について $[Q, 1 \otimes x] = \theta(x) + \chi(x)$ をみたす $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}^{1}$ の元 Q が唯一存在する.

(ii) 上で定まる元 Q は $Q^2 = 0$ を満たす.

具体的には, Q は次で与えられる. $\mathfrak{m}$ の基底を $\{x_i\}$, その双対基底を $\{x_i^*\}$, 構造定数を $\{c_{ij}^k\}$ とすると

$$Q = \sum_i (x_i + \chi(x_i)) \otimes x_i^* - 1 \otimes \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} c_{ij}^k x_i^* x_j^* x_k. \tag{2}$$

Q は odd の元だから $Q^2 = 0$ より $(\mathrm{ad}\, Q)^2 = 0$ が従う. 従って $(C^{\bullet}(\mathfrak{g}), \mathrm{ad}\, Q)$ は dga(differential graded algebra) である. 特にそのコホモロジー

$$H_f^{\bullet}(U(\mathfrak{g})) := H^{\bullet}(U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}^{\bullet}, \mathrm{ad}\, Q)$$

は次数付けされたスーパー代数の構造を持つ.

スーパー代数 $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}$ のフィルトレーション $F_p(U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}) = \sum_{i+j \leq p} U_i(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}l_{\mathfrak{m},j}^{\bullet}$ に関する associated graded は

$$\mathrm{gr}_F(U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}) = \mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{gr}\, \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}^{\bullet} \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \otimes \mathrm{gr}\, \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}^{\bullet}$$

[4] $\mathfrak{m}$ の冪零性を使う.

となる．$Q \in (F_1 U(\mathfrak{g}) \otimes Cl^{\bullet}_{\mathfrak{m}})$ の $\mathrm{gr}_F(U(\mathfrak{g})\otimes \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]\otimes \mathrm{gr}\, \mathcal{C}l^{\bullet}_{\mathfrak{m}}$ での像を $\bar{Q}$ と書くと $(\mathrm{ad}\, \bar{Q})^2 = 0$ である．従って $(\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]\otimes \mathrm{gr}\, \mathcal{C}l^{\bullet}_{\mathfrak{m}}, \mathrm{ad}\, \bar{Q})$ は dgPa(differential graded Poisson algebra) である．とくにそのコホモロジーはポアソン (スーパー) 代数になる．

定理 3.3 ([KS])**.** 任意の $i \in \mathbb{Z}^{\times}$ について $H^i(\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]\otimes \mathrm{gr}\, \mathcal{C}l^{\bullet}_{\mathfrak{m}}, \mathrm{ad}\, \bar{Q}) = 0$ が成立し, 次のポアソン代数としての同型が存在する．

$$H^0(\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]\otimes \mathrm{gr}\, \mathcal{C}l^{\bullet}_{\mathfrak{m}}, \mathrm{ad}\, \bar{Q}) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{S}_f]$$

定理 3.4 ([Kos, Pre, GG])**.** $H^{i\neq 0}_f(U(\mathfrak{g})) = 0$ and $\mathrm{gr}\, H^0_f(U(\mathfrak{g})) \cong \mathbb{C}[\mathcal{S}_f]$. ここで $\mathrm{gr}\, H^0_f(U(\mathfrak{g}))$ は $U(\mathfrak{g})\otimes\mathcal{C}l^{\bullet}_{\mathfrak{m}}$ のフィルトレーションが誘導する $H^{\bullet}_f(U(\mathfrak{g}))$ のフィルトレーションに関する associated graded ポアソン代数.

$\mathcal{S}_f$ の量子化

$$U(\mathfrak{g}, f) := H^0_f(U(\mathfrak{g})) \tag{3}$$

を $(\mathfrak{g}, f)$ に付随する有限 W 代数と呼ぶ[5].

この有限 W 代数の定義は通常のものとは異なるが, 等価であることを確かめることが出来る ([A2, DSK, BGK]).

例 3.5. $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ とする．($\mathfrak{gl}_N$ は単純ではないが上で述べたことがそのまま適用される．)

$$f = f_{prin} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると $f = F_{prin}$ は主冪零元である．すなわち,

$$\mathcal{N} = \overline{\mathrm{Ad}\, G.f_{prin}}$$

定義から

$$\mathcal{S}_f = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N \\ 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{N-1} \\ 0 & 1 & y_1 & \cdots & y_{N-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & y_1 \end{pmatrix} | y_1, \dots, y_N \in \mathbb{C} \right\}$$

となるが,

$$\mathbb{C}[\mathcal{S}_f] \underset{\text{制限写像}}{\overset{\sim}{\leftarrow}} \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^{GL_N} \underset{\text{Chevalley の制限定理}}{\cong} \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^{\mathfrak{S}_N}$$

が成立する．ここで $\mathfrak{h}$ は対角行列からなる $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環．この量子化として

$$U(\mathfrak{g}, f_{prin}) \underset{\text{Kostant の Whitttaker 模型 [Kos]}}{\overset{\sim}{\leftarrow}} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \underset{\text{Harish-Chandra 同型}}{\cong} S(\mathfrak{h})^{\mathfrak{S}_N}, \tag{4}$$

が成立するとが知られている．

---

[5] $U(\mathfrak{g}, f)$ はラグランジャン部分空間 l の取り方に依らず定まることが知られている.

上で与えた有限 W 代数の定義の利点はその関手性にある．いろいろなバージョンを考えることができるが (cf. [A2, A7]) ここでは $U(\mathfrak{g})$ の Harish-Chandra 両側加群の圏 $\mathcal{HC}$ を考える:

$$\mathcal{HC} = \{\mathfrak{g} \text{ の随伴作用が局所有限であるような両側 } U(\mathfrak{g}) \text{ 加群のなす圏 }\}.$$

$M \in \mathcal{HC}$ について $M \otimes \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}^{\bullet}$ は自然に両側 $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}^{\bullet}$ 加群であり, 特に $\mathrm{ad}\, Q$ が作用する．従ってそのコホモロジー $H_f^{\bullet}(M) = H^0(M \otimes \mathcal{C}l_{\mathfrak{m}}^{\bullet}, \mathrm{ad}\, Q)$ は両側 $U(\mathfrak{g}, f)$ 加群になり, 関手

$$\mathcal{HC} \to \{ \text{ 両側 } U(\mathfrak{g}, f) \text{ 加群の圏 } \}, \quad M \mapsto H_f^0(M), \tag{5}$$

が定まる．

定理 3.6 ([Los2, Gin])**.** 任意の $M \in \mathcal{HC}$ について $H_f^{i \neq 0}(M) = 0$. 従って (5) は完全関手.

I を $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアルとすると I と $U(\mathfrak{g})/I$ は共に $\mathcal{HC}$ 対象である．従って定理 3.6 より次の完全列が存在する．

$$0 \to H_f^0(I) \to U(\mathfrak{g}, f) \to H_f^0(U(\mathfrak{g})/I) \to 0.$$

故に $H_f^0(I)$ の (graded な) イデアルである．$U(\mathfrak{g}, f)$ の両側イデアル J に対してもその associated variety $\mathrm{Var}(J)$ が $\mathcal{S}_f$ の部分代数多様体として定まるが, $H_f^0(I)$ は graded なので $\mathrm{Var}(H_f^0(I))$ は $\mathcal{S}_f$ の $\mathbb{C}^*$ 不変な部分代数多様体である．

定理 3.7 ([Los1], [Gin])**.** $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアル I について次が成立する．

$$\mathrm{Var}(H_f^0(I)) = \mathrm{Var}(I) \cap \mathcal{S}_f.$$

系 3.8. I を $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal, $\mathbb{O}$ を $\mathrm{Var}(I) = \overline{\mathbb{O}}$ となる $\mathfrak{g}$ の冪零軌道とする．

(i) $H_f^0(U(\mathfrak{g})/I) \neq 0 \iff \mathrm{Ad}\, G.f \subset \overline{\mathbb{O}}$.
(ii) $H_f^0(U(\mathfrak{g})/I)$ が (零でない) 有限次元 (代数) $\iff f \in \mathbb{O}$.

$H_f^0(U(\mathfrak{g})/I)$ は $U(\mathfrak{g}, f)$ の商代数であるので, $H_f^0(U(\mathfrak{g})/I)$ の既約表現は $U(\mathfrak{g}, f)$ の既約表現でもある．

定理 3.9 ([Los2])**.** I を $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal, $\mathbb{O}$ を $\mathrm{Var}(I) = \overline{\mathbb{O}}$ となる $\mathfrak{g}$ の冪零軌道, $f \in \mathbb{O}$ とすると, $H_f^0(U(\mathfrak{g})/I)$ は有限次元半単純代数．さらに $U(\mathfrak{g}, f)$ の任意の有限次元既約表現はこのようにして現れる．

4. カイラル表現論における冪零軌道

$\widehat{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ に付随するアフィン Kac-Moody 代数とする．

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K.$$

交換関係は

$$[xt^m, yt^n] = [x, y]t^{m+n} + (x|y)\delta_{m+n,0}K, \quad [K, \widehat{\mathfrak{g}}] = 0 \quad (x, y \in \mathfrak{g})$$

で与えられる．

以下 $\mathfrak{g}$ の内積は $(\theta, \theta) = 2$ と正規化されているとする．ただし θ は $\mathfrak{g}$ の最高ルート．

$k \in \mathbb{C}$ について

$$V^k(\mathfrak{g}) := U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K)} \mathbb{C}_k$$

とおく. ただし, $\mathbb{C}_k$ は $\mathfrak{g}[t]$ が自明に, K が定数 k で作用する $\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K$ の一次元表現. $V^k(\mathfrak{g})$ は自然な頂点代数の構造を持つことが知られており,

$$\text{頂点代数としての } V^k(\mathfrak{g}) \text{ 加群} = \text{レベル } k \text{ の滑らかな } \widehat{\mathfrak{g}} \text{ 加群}$$

となる ([Kac, FBZ] などを参照). ここで $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群 M が $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群がレベル k であるとは中心元 K が定数 k で作用すること, また滑らかであるとは任意の $x \in \mathfrak{g}$, $m \in M$ に対して $xt^r m = 0$ が十分大きな r に対して成立することを云う. $V^k(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ に付随したレベル k の普遍頂点代数と呼ばれる.

$N_k(\mathfrak{g})$ を $V^k(\mathfrak{g})$ の唯一の極大部分加群とすると, 一般論により $N_k(\mathfrak{g})$ は $V^k(\mathfrak{g})$ の頂点代数としてのイデアルでもある. 従って既約商加群 $L_k(\mathfrak{g}) = V^k(\mathfrak{g})/N_k(\mathfrak{g})$ は単純な頂点代数となる. $L_k(\mathfrak{g})$ 加群の圏 $L_k(\mathfrak{g})$-Mod は $V^k(\mathfrak{g})$ 加群の圏 $V^k(\mathfrak{g})$-Mod(= レベル k の滑らかな $\widehat{\mathfrak{g}}$ のなす圏) の次で与えられる充満部分圏である.

$$L_k(\mathfrak{g})\text{-Mod} = \{M \in V^k(\mathfrak{g})\text{-Mod} \mid a_{(n)}M = 0 \ \forall a \in N_k(\mathfrak{g}), n \in \mathbb{Z}\}$$

ここで, 頂点代数 V について V-Mod で V 加群の圏を表し,

$$V \to (\operatorname{End} M)[[z, z^{-1}]], \quad a \mapsto a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}$$

を V のベクトル空間 M への表現とする.

$L_k(\mathfrak{g})$-Mod の記述は基本的な問題ではあるが一般には未解決である. ただし, 次はよく知られている.

定理 4.1. k が非負整数の時, $L_k(\mathfrak{g})$-Mod は $\widehat{\mathfrak{g}}$ のレベル k の可積分表現のなす圏に等しい.

頂点代数 $V^k(\mathfrak{g})$, $L_k(\mathfrak{g})$ は $\deg xt^n = -n$ により次数付けされていることに注意する.

Zhu[FZ] は関手

$$\{\text{ 次数付けされた頂点代数のなす圏 }\} \to \{\mathbb{C} \text{ 上の多元環のなす圏 }\}, \quad V \mapsto A(V),$$

を構成し, 次の全単射が存在することを示した.

$$\begin{array}{ccc} \{\mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ で次数付けされた単純 } V \text{ 加群の同型類 }\} & \xrightarrow{\sim} & \{\text{ 単純 } A(V) \text{ 加群の同型類 }\} \\ M & \mapsto & M_{top}. \end{array}$$

ここで, M_{top} は M の最低次数の成分.

普遍アフィン頂点代数の場合, 自然な同型

$$A(V^k(\mathfrak{g})) \cong U(\mathfrak{g})$$

が任意の k について成立しおり, $U(\mathfrak{g})$ の単純加群 E に対応する単純 $V^k(\mathfrak{g})$ 加群は誘導表現 $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K)} E$ の唯一の既約商である.

また頂点代数の全射 $V \to V'$ は多元環の全射 $A(V) \to A(V')$ を誘導する. 従って $L_k(\mathfrak{g})$ の Zhu 代数は $U(\mathfrak{g})$ の商に同型となる:

$$A(L_k(\mathfrak{g})) \cong U(\mathfrak{g})/I_k \quad \exists \text{ 両側イデアル } I_k.$$

よって単純 $L_k(\mathfrak{g})$ 加群の分類は ($U(\mathfrak{g})$ の表現論を modulo として) I_k を含む $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal の分類に帰着する. Primitive ideal J が I_k に含まれれば $\operatorname{Var}(J) \subset \operatorname{Var}(I_k)$ であるので, まず I_k の associated variety を決定しようというのは自然な発想である. しかし $A(V)$ の定義が複雑なため, 一般にはこれが既に難しい.

一方, 頂点代数 V に対してはその随伴多様体を定義する方法が別にある. Zhu[Zhu] により,

$$R_V := V/C_2(V), \quad C_2(V) = \{a_{(-2)}b \mid a, b \in V\}.$$

は次でポアソン代数の構造を持つことが知られている.

$$\bar{a}\bar{b} = \overline{a_{(-1)}b}, \quad \{\bar{a}, \bar{b}\} = \overline{a_{(0)}b}.$$

R_V を Zhu の C_2 代数と云う. 従って V の随伴多様体 X_V を

$$X_V = \operatorname{Specm} R_V$$

で定義することができる.

V が $V^k(\mathfrak{g})$, あるいはその商であるとき, $C_2(V) = \mathfrak{g}[t^{-1}]t^{-2}V$ となることがわかる. 従って

$$\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] = S(\mathfrak{g}) \cong R_{V^k(\mathfrak{g})}, \quad x \mapsto \overline{xt^{-1}\mathbf{1}}$$

が成立し,

$$X_{V^k(\mathfrak{g})} = \mathfrak{g}^*$$

となる. $X_{L_k(\mathfrak{g})}$ は $\mathfrak{g}^*$ の G 不変なポアソン部分代数多様体である.

X_V は次の意味で V の重要な不変量である.

定理 4.2 ([A4]). 次の条件は同値である.

(i) $\dim X_V = 0$,

(ii) $\dim \operatorname{Spec}(\operatorname{gr} V) = 0$.

ここで $\operatorname{gr} V$ は V の自然なフィルトレーションに関する associated graded vertex algebra[6].

X_V の次元が 0 であるような頂点代数は C_2 有限であると呼ばれる. 定理 4.2 より, C_2 有限な頂点代数は有限次元代数の類似と見なすことができるが, 様々な良い性質を持つことが知られている ([ABD, H2, H1, Miy] などを参照のこと).

次はよく知られている.

定理 4.3. 次の三つの条件は同値.

(i) $\dim X_{L_k(\mathfrak{g})} = 0$,

(ii) $L_k(\mathfrak{g})$ は可積分である.

(iii) $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

上の定理より, C_2 有限性条件はアフィン Kac-Moody 代数の表現論における可積分性条件を一般の頂点代数に拡張したものであるとみなすこともできる.

さて Zhu 代数と Zhu の C_2 代数の関係は次で与えられる.

補題 4.4 ([ALY]). 自然なポアソン代数の全射

$$R_V \twoheadrightarrow \operatorname{gr} A(V)$$

が存在する. ここで $\operatorname{gr} A(V)$ は V の次数付けが誘導する $A(V)$ のフィルトレーションに関する associated graded Poisson algebra.

[6] これは Poisson vertex algebra であり, 特に可換な $\mathbb{C}$ 代数の構造が入る.

上の補題から

(6) $$\mathrm{Var}(I_k) \subset X_{L_k(\mathfrak{g})}$$

が従う.

写像 $R_{L_k(\mathfrak{g})} \twoheadrightarrow \mathrm{gr}\, A(L_k(\mathfrak{g}))$ は一般には同型では無い[7]が, 我々は次を予想している.

予想 4.5 ([A7])**.** 任意の k について $\mathrm{Var}(I_k) = X_{L_k(\mathfrak{g})}$.

さて $U(\mathfrak{g})$ の primitive イデアルの associated variety の場合と違い, $X_{L_k(\mathfrak{g})}$ は冪零錐 $\mathcal{N}$ に含まれるとは限らない. 実際, k が有理数でないとき $L_k(\mathfrak{g}) = V^k(\mathfrak{g})$ であるので $X_{L_k(\mathfrak{g})} = \mathfrak{g}^*$ となる.

一方, 定理 4.3 より $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき $X_{L_k(\mathfrak{g})} = \{0\}$ である. これ以外に $X_{L_k(\mathfrak{g})} \subset \mathcal{N}$ となるような場合はあるであろうか？

$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環とすると, $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}K$ は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Cartan 部分環になる. その双対を $\widehat{\mathfrak{h}}^+ = \mathfrak{h}^* \oplus \mathbb{C}\Lambda_0$ とする. ただし, $\Lambda_0(K) = 1$, $\Lambda_0(\mathfrak{h}) = 0$.

$\widehat{\Delta}^{re}$ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の実ルートの集合, $\widehat{\Delta}^{re}_+$ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の正の実ルートの集合とする.

$\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ について $L(\lambda)$ を最高ウエイト λ の $\widehat{\mathfrak{g}}$ の既約表現とする. $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現として,

$$L_k(\mathfrak{g}) \cong L(k\Lambda_0)$$

である.

$L(\lambda)$ は次を満たすとき許容表現であると云う.

(i) λ は regular dominant である. すなわち,

$$\langle \lambda + \widehat{\rho}, \alpha^\vee \rangle \notin \{0, -1, -2. \dots\}, \quad \forall \alpha \in \widehat{\Delta}^{re}_+$$

ここで $\widehat{\Delta}^{re}_+$ は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の正の実ルートの集合.

(ii) $\mathbb{Q}\widehat{\Delta}(\lambda) = \mathbb{Q}\widehat{\Delta}^{re}$. ただし, $\mathbb{Q}\widehat{\Delta}(\lambda)$ は λ の integral root system: $\widehat{\Delta}(\lambda) = \{\alpha \in \widehat{\Delta}^{re} \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}\}$.

定義から,

$$\{\text{ 可積分表現 }\} \subset \{\text{ 許容表現 }\}$$

である. 従って許容表現は可積分表現の一般化と見なすことができる.

許容表現は可積分表現と同様, 様々な良い性質を持つ. 例えば条件 (i) より可積分表現は Weyl-Kac 型の指標公式を持つことが従う.

(7) $$\mathrm{ch}\, L(\lambda) = \sum_{w \in \widehat{W}(\lambda)} \frac{(-1)^{\ell_\lambda(w)} e^{w \circ \lambda}}{\prod_{\alpha \in \widehat{\Delta}_+} (1 - e^{-\alpha})^{\dim \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha}}.$$

ここで $\widehat{W}(\lambda)$ は $\widehat{\Delta}^{re}(\lambda)$ に対応する鏡映で生成される $\widehat{\mathfrak{g}}$ のワイル群 $\widehat{W}$ の部分群. さらに (ii) の条件から $\mathrm{ch}\, L(\lambda)$ はある種のテータ関数で表すことができ, モジュラー群 $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用に関する不変性を持つことがわかる (指標がモジュラー不変性を持つ表現は許容表現に限ることが予想されている [KW1]). また 2 つの許容表現の間には非自明な拡大がない ([GK]). 従って $\widehat{\mathfrak{g}}$ の許容表現は半単純な圏をなす.

一方, 可積分表現でない許容表現は (可積分表現とは異なり) ワイル群不変性を持たず[8], ユニタリー性も成立しない. 自然な幾何学的実現は (現在のところ）知られておらず, 結晶基底の存在も (現在のところ）知られていない.

---

[7]例えば $\mathfrak{g}$ が E_8 型で $k = 1$ のとき, (vareity は共に $\{0\}$ であるが) 核が非自明であることが容易にわかる.

[8]指標 (7) は $\widehat{W}(\lambda)$ 不変ではない.

レベル k は $L(k\Lambda_0)$ が許容表現となるとき許容であると云われる．これは次の条件と同値である．(1) $k \in \mathbb{Q}$ かつ (2) $k\Lambda_0$ が $\widehat{\mathfrak{g}}$ ウエイトとして regular dominant である．具体的には許容レベルは次の形をしている ([KW2]).

$$k + h^\vee = \frac{p}{q}, \quad (p,q) \in \mathbb{N},\ (p,q) = 1,\ p \geq \begin{cases} h^\vee & (r^\vee, q) = 1 \text{ のとき}, \\ h & (r^\vee, q) = r^\vee \text{ のとき} \end{cases}$$

ここで, $h, h^\vee$ はそれぞれ $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Coxter 数と双対 Coxeter 数, $r^\vee = \begin{cases} 1 & \mathfrak{g} \text{ が } ADE \text{ 型のとき} \\ 2 & \mathfrak{g} \text{ が } BCF \text{ 型のとき} \\ 3 & \mathfrak{g} \text{ が } G_2 \text{ 型のとき}. \end{cases}$

次の結果は Feigin-Frenkel によって予想され, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のときは Feigin-Malikov [FM] によって示されていた.

定理 4.6 ([A5])**.** k が許容であれば $X_{L_k(\mathfrak{g})} \subset \mathcal{N}$.

さらに次が成立する (Joseph の定理のアフィンアナローグ).

定理 4.7 ([A5])**.** k が許容レベルの時 $X_{L_k(\mathfrak{g})}$ は k の分母 $q \in \mathbb{N}$ のみに依る $\mathcal{N}$ の既約な部分代数多様体である．すなわち, 各 $q \in \mathbb{N}$ に対して冪零軌道 $\mathbb{O}_q$ が存在し, 分母が q の許容レベル k に対して

$$|X_{L_k(\mathfrak{g})}| = \overline{\mathbb{O}_q}$$

となる．具体的には $\overline{\mathbb{O}_q}$ は次で与えられる.

$$\overline{\mathbb{O}_q} = \begin{cases} \{x \in \mathfrak{g} \mid (\operatorname{ad} x)^{2q} = 0\}, & (q, r^\vee) = 1 \text{ のとき}, \\ \{x \in \mathfrak{g} \mid \pi_{\theta_s}(x)^{2q/r^\vee} = 0\}, & (q, r^\vee) = r^\vee \text{のとき}. \end{cases}$$

ここで θ_s は $\mathfrak{g}$ の最高ショートルート, π_{θ_s} は最高ウエイト θ_s の $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現.

例 4.8. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ のとき, $\mathbb{O}_q$ は分割 $\begin{cases} (n) \vdash n & (q \geq n) \\ (q, q, \ldots, q, s) \vdash n\ (0 \leq s < n) & (q < n) \end{cases}$ に対応する冪零軌道である.

注意 4.9. 上の定理から k が許容レベルの時

$$\operatorname{Specm}(\operatorname{gr} L_k(\mathfrak{g})) \cong J\overline{\mathbb{O}_q}$$

であることも従う．ここで JX は X のアーク空間[9]

定理 4.10. [A7] k が許容レベルの時予想 4.5 は正しい．すなわち, $q \in \mathbb{N}$ を k の分母とすると

$$\operatorname{Var}(I_k) = \overline{\mathbb{O}_q}.$$

定理 4.6 と定理 4.10 の証明には (アフィン)W 代数を使う.
Duflo の定理から, 次の結果は I_k を含む $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal を完全に決定する.

定理 4.11 ([A6])**.** $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ をレベル k(i.e. $\lambda(K) = k$) とすると $L(\lambda)$ が $L_k(\mathfrak{g})$ 加群であるための必要十分条件は $L(\lambda)$ が $\widehat{\Delta}(\lambda) \cong \widehat{\Delta}(k\Lambda_0)$ なる許容表現であることである.

---

[9] $\mathbb{C}$ 上の有限型スキーム X に対し, JX は任意の可換 C 代数 A に対し $\operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} A, JX) \cong \operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} A[[t]], X)$ を満たすスキームとして定義される (cf.
citeEinMus).

5. (アフィン)W 代数

$f \in \mathcal{N}$ とし, $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ を $(\mathfrak{g}, f)$ に付随するレベル $k \in \mathbb{C}$ の W 代数とする ([FF, KRW]). $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は一般にはリー環ではなく頂点代数であり, 次の性質を持つ.

- $X_{\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)} \cong \mathcal{S}_f$ かつ, $\operatorname{gr} \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \cong \mathbb{C}[J\mathcal{S}_f]$ ([DSK, A5]).
- $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は次の意味で有限 W 代数 $U(\mathfrak{g}, f)$ のアフィン化である[10]([[DSK, A2]]).

$$A(\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)) \cong U(\mathfrak{g}, f)$$

- $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は次の意味でアフィン Kac-Moody 代数や Virasoro 代数の一般化である.
  - $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, 0) = V^k(\mathfrak{g})$,
  - $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_2, f)$ は ($k \neq -2$ のとき) 中心電荷 $1-6(k+1)^2/(k+2)$ の Virasoro 頂点代数である.

$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は量子 Drinfeld-Sokolov 還元法によって定義される. すなわちある BRST コホモロジー関手 $H_f^\bullet(?)$ を用いて

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) = H_f^0(V^k(\mathfrak{g}))$$

と定義される ((3) のアナローグ).

$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の唯一[11]の既約単純商を $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ と書く. $X_{\mathcal{W}^K(\mathfrak{g},f)} \cong \mathcal{S}_f$ なので $X_{\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},f)}$ は $\mathcal{S}_f$ の $\mathbb{C}^*$ 不変なポアソン部分代数多様体になる. 従って,

$$\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f) \text{ が } C_2 \text{ 有限} \iff \quad X_{\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},f)} = \{f\}.$$

例 5.1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$, $f = f_{prin}$ とする. (4) より,

$$U(\mathfrak{g}, f_{prin}) \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h})^{\mathfrak{S}_N} \hookrightarrow S(\mathfrak{h})$$

であった. $\mathfrak{h}$ の自然なアフィン化としては Heisenberg 代数が考えられる. 対応する頂点代数は $\mathfrak{h}$ に付随した (レベル $\kappa = k + N$ の[12]) 普遍アフィン頂点代数 $\mathcal{H}_\kappa$ である. これは生成場 $x_i(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{i,n} z^{-n-1}$ $(i = 1, \dots, N)$, OPE

$$x_i(z)x_j(w) \sim \frac{\kappa\delta_{i,j}}{(z-w)^2}$$

$$(\iff [x_{i,n}, x_{j,m}] = \kappa n \delta_{n+m,0}\delta_{i,j})$$

で定義される頂点代数である.

Harish-Chandra 同型のアフィン化として, 三浦変換と呼ばれる頂点代数の埋め込み

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{prin}) \hookrightarrow \mathcal{H}_\kappa.$$

が存在することが知られている.

$\mathcal{H}_\kappa$ の部分頂点代数としては $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{prin})$ は以下で定義される場

$$W^{(1)}(z), W^{(2)}(z), \dots, W^{(N)}(z)$$

---

[10] $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は一般には $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graded なのでここでの Zhu 代数は正確には Ramond twisted Zhu 代数である.

[11] $k = -h^\vee$ の時は唯一の graded simple quotient

[12] $\kappa \neq 0$ に依らない.

で生成される.

$$\sum_{j=0}^{N} W^{(j)}(z)(\nu\partial)^{N-j} =: (\nu\partial_z + x_1(z))(\nu\partial_z + x_1(z))\dots(\nu\partial_z + x_N(z)):$$

ここで, $\partial_z x_i(z) = \frac{d}{dz}x_i(z) + x_i(z)\partial_z$, $\nu = \kappa - 1 = k + N - 1$. よって

$$W^{(r)}(z) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} : x_{i_1}(z)x_{i_2}(z)\dots x_{i_r}(z) : + lower$$

という形をしている ([FL], [AM] も参照のこと). ただし, $W^{(r)})(z)$ たちの OPE(交換関係) に関する closed formula は知られていない (導出は不可能だと思われる).

さて, 有限次元の場合同様, 次の関手が定まる.

$$V^k(\mathfrak{g})\text{-Mod} \to \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)\text{-Mod}, \quad M \mapsto H_f^0(M)$$

KL_k を $\widehat{\mathfrak{g}}$ のレベル k の Harish-Chandra $(\widehat{\mathfrak{g}}, G[[t]])$ 加群の圏とする. すなわち KL_k は $G[[t]]$ 加群の構造を持ち, その作用を微分することによって得られる $\mathfrak{g}[[t]]$ の作用が $\mathfrak{g}[t] \subset \widehat{\mathfrak{g}}$ の作用と整合的な対象からなるレベル k の $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群のなす充満部分圏である.

定理 5.2 ([A5])**.** 任意の $k \in \mathbb{C}$, $M \in \mathrm{KL}_k$ について $H_f^{i\neq 0}(M) = 0$. 従って

$$\mathrm{KL}_k \to \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)\text{-Mod}, \quad M \mapsto H_f^0(M),$$

は完全関手.

上の定理より, 特に自然な全射 $V^k(\mathfrak{g}) \to L_k(\mathfrak{g})$ は頂点代数の全射 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) = H_f^0(V^k(\mathfrak{g})) \to H_f^0(L_k(\mathfrak{g}))$ を誘導する. 従って $H_f^0(L_k(\mathfrak{g}))$ は零でなければ $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の商頂点代数である. 特に単純 W 代数 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ をその商に持つ.

予想 5.3 ([FKW, KRW])**.** $H_f^0(L_k(\mathfrak{g}))$ は零でなければ $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ に同型.

上の予想は多くの場合 [A1, A2, A3] において証明されている.

定理 5.4 ([A5])**.** 任意の $k \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{N}$ について次が成立する.

$$X_{H_f^0(L_k(\mathfrak{g}))} = X_{L(k\Lambda_0)} \cap \mathcal{S}_f.$$

系 5.5. $H_f^0(L_k(\mathfrak{g})) \neq 0 \iff f \in X_{L(k\Lambda_0)}$.

系 5.6. k を分母が $q \in \mathbb{N}$ の許容レベル, $f \in \mathbb{O}_q$ とする. このとき $X_{H_f^0(L(k\Lambda_0))} = \{f\}$. 従って $H_f^0(L(k\Lambda_0))$ は C_2 有限. 故に $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ も C_2 有限.

6. W 代数の極小模型

頂点代数 V は全ての加群が完全可約のとき有理的であると云われる.

定理 6.1. V を有理的かつ C_2 有限, CFT 型の頂点作用素代数とする.

(i) ([Zhu], Dong-Lin-Ng]) $\{M_1, \dots, M_r\}$ を単純 V 加群の完全代表系, $v \in V$ のウエイト k の斉次ベクトルとすると $\{q^{-\frac{c_v}{24}} \operatorname{tr}_{M_i}(o(v)q^{L_0})\}$ はウエイト k のモジュラー形式となる. ただし, $o(v)$ は V の斉次成分を保つ $v(z)$ のフーリエ係数.

(ii) ([H1]) V 加群の圏はモジュラーなテンソル圏になる. 特に対応する Reshetikhin-Turaev 不変量は 3 次元多様体の不変量を与える.

主冪零軌道 $\mathbb{O}_{prin}$ は $\mathcal{N}$ の中の稠密な G 軌道であった．許容レベル k は次を満たすとき非退化であると云われる．

$$X_{L_k(\mathfrak{g})} = \overline{\mathbb{O}_{prin}}(= \mathcal{N}).$$

$q \in \mathbb{N}$ を k の分母とするとこれは次の条件と同値である．

$$q \geq \begin{cases} h & ((q, r^\vee) = 1 \text{ のとき}), \\ r^{\vee L} h^\vee & ((q, r^\vee) = r^\vee \text{のとき}). \end{cases}$$

予想 6.2 ([FKW])**.** k を非退化許容レベルすると $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f_{prin})$ は有理的 (かつ C_2 有限)．

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のとき, 非退化許容レベルに対応する $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f_{prin})$ は Virasoro 代数の極小模型 ([BPZ]) に対応した頂点代数に他ならない．

予想 6.2 は Kac-脇本 [KW2] によって一般化された．冪零軌道 $\mathbb{O}_q$ を用いるとそれは次の形で述べることができる ([A5])．

予想 6.3 ([KW2])**.** k を $q \in \mathbb{N}$ を分母とする許容数とする．次を満たすとき $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ は有理的である．

- $f \in \mathbb{O}_q$.
- f は標準 Levi type である．
- $(q, r^\vee) = 1$.

現在我々は上の条件のうち, 最後の 2 つの条件は必要ないと考えている．

予想 6.4 (A.)**.** k を $q \in \mathbb{N}$ を分母とする許容数とする．$f \in \mathbb{O}_q$ とすると $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ は有理的である．

定理 6.5.
(i) ([A7]) 予想 6.2 は正しい．
(ii) ([A8]) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ のとき, 予想 6.3 は正しい（このときは最後の 2 つの条件は自動的に満たされる)．
(iii) ([A8]) f が ADE 型の副正則元の時一般化された Kac-脇本予想 6.4 は正しい (DE 型の副正則元は標準 Levi type ではない)．

References

[ABD] Toshiyuki Abe, Geoffrey Buhl, and Chongying Dong. Rationality, regularity, and C_2-cofiniteness. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(8):3391–3402 (electronic), 2004.

[Akm] Füsun Akman. A characterization of the differential in semi-infinite cohomology. *J. Algebra*, 162(1):194–209, 1993.

[ALY] Tomoyuki Arakawa, Ching Hung Lam, and Hiromichi Yamada. Zhu's algebra, C_2-algebra and C_2-cofiniteness of parafermion vertex operator algebras. *Adv. Math.*, 264:261–295, 2014.

[AM] Tomoyuki Arakawa and Alexander Molev. Explicit generators in rectangular affine W-algebras o type A. arXiv:1403.1017 [math.RT].

[A1] Tomoyuk Arakawa. Representation theory of superconformal algebras and the Kac-Roan-Wakimoto conjecture. *Duke Math. J.*, 130(3):435–478, 2005.

[A2] Tomoyuki Arakawa. Representation theory of W-algebras. *Invent. Math.*, 169(2):219–320, 2007.

[A3] Tomoyuki Arakawa. Representation theory of W-algebras, II. In *Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics*, volume 61 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 51–90. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2011.

[A4] Tomoyuki Arakawa. A remark on the C_2 cofiniteness condition on vertex algebras. *Math. Z.*, 270(1-2):559–575, 2012.

[A5] Tomoyuki Arakawa. Associated varieties of modules over Kac-Moody algebras and C_2-cofiniteness of W-algebras. 04 2010. 1004.1554v2.

[A6] T. Arakawa. Rationality of admissible affine vertex algebras in the category $\mathcal{O}$. arXiv:1207.4857[math.QA].

[A7] Tomoyuki Arakawa. Rationality of W-algebras; principal nilpotent cases. arXiv:1211.7124[math.QA].

[A8] Tomoyuki Arakawa. in preparation.

[BD] Alexander Beilinson and Vladimir Drinfeld. Quantization of hitchin's integrable system and hecke eigensheaves. *preprint*.

[BGK] Jonathan Brundan, Simon M. Goodwin, and Alexander Kleshchev. Highest weight theory for finite W-algebras. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (15):Art. ID rnn051, 53, 2008.

[BPZ] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nuclear Phys. B*, 241(2):333–380, 1984.

[DSK] Alberto De Sole and Victor G. Kac. Finite vs affine W-algebras. *Japan. J. Math.*, 1(1):137–261, 2006.

[FBZ] Edward Frenkel and David Ben-Zvi. *Vertex algebras and algebraic curves*, volume 88 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2004.

[FF] Boris Feigin and Edward Frenkel. Quantization of the Drinfel′d-Sokolov reduction. *Phys. Lett. B*, 246(1-2):75–81, 1990.

[FKW] Edward Frenkel, Victor Kac, and Minoru Wakimoto. Characters and fusion rules for W-algebras via quantized Drinfel′d-Sokolov reduction. *Comm. Math. Phys.*, 147(2):295–328, 1992.

[FL] V. A. Fateev and S. L. Lykyanov. The models of two-dimensional conformal quantum field theory with Z_n symmetry. *Internat. J. Modern Phys. A*, 3(2):507–520, 1988.

[FM] Boris Feigin and Fyodor Malikov. Modular functor and representation theory of $\widehat{\mathrm{sl}}_2$ at a rational level. In *Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995)*, volume 202 of *Contemp. Math.*, pages 357–405, Providence, RI, 1997. Amer. Math. Soc.

[FZ] Igor B. Frenkel and Yongchang Zhu. Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras. *Duke Math. J.*, 66(1):123–168, 1992.

[GG] Wee Liang Gan and Victor Ginzburg. Quantization of Slodowy slices. *Int. Math. Res. Not.*, (5):243–255, 2002.

[Gin] Victor Ginzburg. Harish-Chandra bimodules for quantized Slodowy slices. *Represent. Theory*, 13:236–271, 2009.

[GK] Maria Gorelik and Victor Kac. On complete reducibility for infinite-dimensional Lie algebras. *Adv. Math.*, 226(2):1911–1972, 2011.

[H1] Yi-Zhi Huang. Rigidity and modularity of vertex tensor categories. *Commun. Contemp. Math.*, 10(suppl. 1):871–911, 2008.

[H2] Yi-Zhi Huang. Vertex operator algebras and the Verlinde conjecture. *Commun. Contemp. Math.*, 10(1):103–154, 2008.

[Jos] Anthony Joseph. On the associated variety of a primitive ideal. *J. Algebra*, 93(2):509–523, 1985.

[Kac] Victor Kac. *Vertex algebras for beginners*, volume 10 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 1998.

[Kos] Bertram Kostant. On Whittaker vectors and representation theory. *Invent. Math.*, 48(2):101–184, 1978.

[KRW] Victor Kac, Shi-Shyr Roan, and Minoru Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.

[KS] Bertram Kostant and Shlomo Sternberg. Symplectic reduction, BRS cohomology, and infinite-dimensional Clifford algebras. *Ann. Physics*, 176(1):49–113, 1987.

[KW1] V. G. Kac and M. Wakimoto. Classification of modular invariant representations of affine algebras. In *Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988)*, volume 7 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pages 138–177. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.

[KW2] Victor G. Kac and Minoru Wakimoto. On rationality of W-algebras. *Transform. Groups*, 13(3-4):671–713, 2008.

[Los1] Ian Losev. 1-dimensional representations and parabolic induction for w-algebras. *preprint*, 2009. arXiv:math/0906.0157[math.RT].

[Los2] Ivan Losev. Finite-dimensional representations of W-algebras. *Duke Math. J.*, 159(1):99–143, 2011.

[Miy] Masahiko Miyamoto. Modular invariance of vertex operator algebras satisfying C_2-cofiniteness. *Duke Math. J.*, 122(1):51–91, 2004.

[Pre] Alexander Premet. Special transverse slices and their enveloping algebras. *Adv. Math.*, 170(1):1–55, 2002. With an appendix by Serge Skryabin.

[Zhu] Yongchang Zhu. Modular invariance of characters of vertex operator algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(1):237–302, 1996.