Milnor 型ゼータ正規化積について

山崎 義徳* (愛媛大学大学院理工学研究科)

1 導入

複素数列 $\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n\in I}$ に対して, $\boldsymbol{a}$ の (ゼータ) 正規化積が以下で定義される.

$$\coprod_{n\in I} a_n := \exp\Big(-\frac{d}{dw}\zeta_{\boldsymbol{a}}(w)\Big|_{w=0}\Big).$$

ここで $\zeta_{\boldsymbol{a}}(w) := \sum_{n\in I} a_n^{-w}$ は $\boldsymbol{a}$ に付随するゼータ関数である. 正規化積の存在を保証するため, $\zeta_{\boldsymbol{a}}(w)$ は十分右半平面で絶対収束し, $w=0$ を含む領域まで有理型接続され, さらに $w=0$ では正則であると仮定する. 正規化積は通常の積の一般化になっている. 実際 I が有限集合の場合, $\coprod_{n\in I} a_n = \prod_{n\in I} a_n$ が成り立つ. ただし, 通常の積で自然に成り立つような性質, 例えば二つの数列の積の正規化積がそれぞれの正規化積の積になったり, 絶対値を取ったものの数列の正規化積がその正規化積の絶対値を取ったものと一致したりするかどうかは, それぞれの正規化積の存在も含めて一般に定かではない (正規化積の一般論については, 例えば [16] を参照にされたい).

正規化積の研究で最も基本的かつ重要な例は, Lerch の公式 ([18]) と呼ばれる以下の公式である.

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(z)} = \coprod_{n\geq 0}(n+z).$$

これは, 言いかえれば Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(w,z) := \sum_{n\geq 0}(n+z)^{-w}$ の $w=0$ での微分がガンマ関数で書けるということを意味している. この公式を逆に見ることで, ガンマ関数の様々な一般化が得られる. 例えば, 重要な例として, 次で定義される Barnes の多重ガンマ関数 ([3]) が挙げられる.

$$\frac{1}{\Gamma_m(z)} := \coprod_{n_1,\dots,n_m\geq 0}(n_1+\cdots+n_m+z).$$

この場合, 対応するゼータ関数は $\zeta_m(w,z) := \sum_{n_1,\dots,n_m\geq 0}(n_1+\cdots+n_m+z)^{-w}$ であり, これは Barnes の多重ゼータ関数 (または多重 Hurwitz ゼータ関数) と呼ばれるものである. この級数は $\mathrm{Re}\,(w) > m$ で絶対収束し, 全平面に有理型接続され, $w = 1, 2, \dots, m$ に一位の極を持つ. $\Gamma_m(z)$ は通常のガンマ関数同様 $z = -n$ $(n \geq 0)$ に極を持つが, その位数は 1 ではなく, $\binom{n+m-1}{m-1}$ となる.

一般に, 正規化積 $\coprod_{n\in I}(a_n + z)$ で定義される関数は, 存在が証明されれば $-a_n$ $(n \in I)$ のみに零点を持つ非零な整関数になることが示される ([9]). この意味で, 与えられた関数の正規化積表示を得ることは重要である. 例えば Lerch の公式はガンマ関数の正規化積表示と見ることができるが, 上記を踏まえれば, その右辺を見るだけでそれが $-n$ $(n \geq 0)$ のみに一位の極を持つ有理型関数であることが分かる.

*Partially supported by Grant-in-Aid for Young Scientists (B) No. 21740019.

本稿で中心となる正規化積の二つの結果を紹介する.

Selberg ゼータ関数の正規化積 (行列式) 表示

$\mathbb{H}$ を複素上半平面, Γ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の余コンパクトでねじれのない離散部分群とする. このとき $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ には種数 g が 2 以上の負定曲率のコンパクトリーマン面の構造が入る. $\Delta_\Gamma = -y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ を $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ 上の関数に作用するラプラシアンとし, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \to \infty$ をその固有値とする. $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ とすると, Δ_Γ のスペクトルゼータ関数 $\zeta_{\Delta_\Gamma}(w,z) := \sum_{j\ge 0}(\lambda_j + z)^{-w}$ は $\mathrm{Re}\,(w) > 1$ で絶対収束し, w の関数として全平面に有理型接続され, $w = 1$ のみに一位の極を持つことが示される. 特に, $w = 0$ では正則となる. ラプラシアンの行列式を, 以下のように固有値の正規化積として定義する.

$$\det(\Delta_\Gamma + z) := \prod_{j\ge 0}(\lambda_j + z) = \exp\Bigl(-\frac{\partial}{\partial w}\zeta_{\Delta_\Gamma}(w,z)\Big|_{w=0}\Bigr).$$

Voros によって, 以下の等式が得られた ([5, 23] も参照).

定理 1.1 (**Selberg ゼータ関数の行列式表示** [27])**.**

$$\det\bigl(\Delta_\Gamma - s(1-s)\bigr) = \phi(s)^{g-1}Z_\Gamma(s). \tag{1.1}$$

ただし, $\phi(s)$ は以下で定まる有理型関数である.

$$\phi(s) := e^{-2(s-\frac{1}{2})^2}\Gamma_1(s)^{-2}\Gamma_2(s)^4.$$

また, $Z_\Gamma(s)$ は Γ に付随する Selberg ゼータ関数である. □

以下, Selberg ゼータ関数 $Z_\Gamma(s)$ の基本的な性質について述べておく. まず $Z_\Gamma(s)$ は以下のオイラー積で定義される.

$$Z_\Gamma(s) := \prod_{P\in \mathrm{Prim}\,(\Gamma)}\prod_{n=0}^{\infty}\bigl(1 - N(P)^{-s-n}\bigr).$$

ここで $\mathrm{Prim}\,(\Gamma)$ は Γ の素な双曲的共役類全体のなす集合, $N(P)$ は $P \in \mathrm{Prim}\,(\Gamma)$ のノルム (P の固有値の小さくない方の平方) である. この無限積は $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ で絶対収束する. $Z_\Gamma(s)$ は全平面に解析接続され, 関数等式

$$Z_\Gamma(1-s) = \Bigl(S_1(s)^2 S_2(s)^{-4}\Bigr)^{g-1} Z_\Gamma(s)$$

を満たす. ここで $S_n(z) := \Gamma_n(z)^{-1}\Gamma_n(n-z)^{(-1)^n}$ は (正規化された) 多重サイン関数 ([12]) である. また, 完備 Selberg ゼータ関数を

$$\Xi_\Gamma(s) := \bigl(\Gamma_2(s)^2\Gamma_2(s+1)^2\bigr)^{g-1} Z_\Gamma(s)$$

と定義すれば, 関数等式は次の対称形と同値になる.

$$\Xi_\Gamma(1-s) = \Xi_\Gamma(s).$$

Selberg ゼータ関数は Riemann 予想の類似を満たすことも知られている. 実際, $Z_\Gamma(s)$ は $s = 1,\ 0,\ -k$ $(k \in \mathbb{N})$ にそれぞれ $1,\ 2g-1,\ 2(g-1)(2k+1)$ 位の零点を持つが (これらの零点は多重ガンマ関数から来るので, Riemann ゼータ関数の場合と同様に自明零点と呼ばれる), それ以外の零点は有限個を除いてすべて $\mathrm{Re}\,(s) = \frac{1}{2}$ 上にあることが示される. より詳しく, $\lambda_j = r_j^2 + \frac{1}{4}$ と書き, $\alpha_j^{\pm} := \frac{1}{2} \pm i r_j$ とおくと, $s = \alpha_j^{\pm}$ は $Z_\Gamma(s)$ の零点になる (これらの零点は非自明零点と呼ばれる). ここで r_j は

$0 \le \lambda_j < \frac{1}{4}$ のとき $r_j \in i\mathbb{R}_{>0}$, それ以外では $r_j \ge 0$ と取る. これより $0 \le \lambda_j < \frac{1}{4}$ のとき $\alpha_j^{\pm} \in [0,1]$, それ以外では $\mathrm{Re}\,(\alpha_j^{\pm}) = \frac{1}{2}$ となる. $0 \le \lambda_j < \frac{1}{4}$ に対応する有限個の零点を例外零点と呼ぶ.

行列式公式 (1.1) は Selberg ゼータ関数の正規化積表示と見ることもできる. それゆえ, この表示から $Z_\Gamma(s)$ の零点の情報を得ることも可能である. 実際, 非自明零点 $\alpha_j^{\pm}$ の正体は, 正規化積表示の "因子" に現れる二次方程式 $\lambda_j - s(1-s) = 0$ の二つの解である.

Riemann ゼータ関数の正規化積表示

$\zeta(w) := \sum_{n\ge1} n^{-w}$ を Riemann ゼータ関数とし, $\mathcal{R}$ を $\zeta(w)$ の非自明零点全体のなす集合とする. Deninger によって次の公式が得られた ([25] も参照のこと).

定理 1.2 (**Riemann ゼータ関数の正規化積表示** [4]).

$$\Xi(z) := \prod_{\rho\in\mathcal{R}} \Big(\frac{z-\rho}{2\pi}\Big) = 2^{-\frac{1}{2}} \frac{z(z-1)}{(2\pi)^2} \Lambda(z).$$

ここで $\Lambda(z) := \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma(\frac{z}{2}) \zeta(z)$ は完備 Riemann ゼータ関数である. $\square$

この場合, 対応するゼータ関数は $\xi(w,z) := \sum_{\rho\in\mathcal{R}} (\frac{z-\rho}{2\pi})^{-w}$ である. $\mathrm{Re}\,(z) > 1$ とすると, この級数は $\mathrm{Re}\,(w) > 1$ で絶対収束し, 全平面に有理型接続され, $w=1$ にのみ一位の極を持つことが示される (後述の命題 3.6 を参照). 特に $w=0$ では正則なので, $\Xi(z)$ が定義できることに注意しておく.

この公式は Riemann ゼータ関数の正規化積表示と呼ばれる. その背後には, Riemann 予想解決へ向けた一つのアイディアである Hilbert-Pólya 予想がある. すなわちそれは, Selberg ゼータ関数と同様に Riemann ゼータ関数も然るべき作用素に関する行列式表示を持つであろうというものであり, 言いかえれば, Riemann ゼータ関数の非自明零点も固有値的な解釈を持つであろうというものである.

本稿では上で述べた二つの正規化積の結果の "higher depth" な拡張を与える. ここで "higher depth" とは, 一言で言えば, ゼータ関数の 0 での微分だけでなく, 負の整数点での微分も考えようというものである. この研究は Milnor ([20]) による "深さ r のガンマ関数" の研究に端を発する. そこで, まずはそれについて説明する.

自然数 r に対して, Milnor は以下で定義される関数の研究を行った.

$$\mathbf{\Gamma}_r(z) := \exp\Big(\frac{\partial}{\partial w}\zeta(w,z)\Big|_{w=1-r}\Big).$$

Lerch の公式より, $\mathbf{\Gamma}_1(z) = \frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}}$ となる. よって $\mathbf{\Gamma}_r(z)$ はガンマ関数の一般化を与える. 以下 $\mathbf{\Gamma}_r(z)$ を Milnor ガンマ関数と呼ぶ. Milnor がこのような関数を研究した目的は, "Kubert 恒等式" ([11]) (正確にはそのある種の変形) を満たす関数を構成するためであった. Kubert 恒等式は, 例えば p-進整数環 $\mathbb{Z}_p$ などの副有限群上の測度を構成する際に用いられる (distribution の役割を果たす). Milnor は $\mathbf{\Gamma}_r(z)$ のガンマ関数的性質, 例えば, 正の整数点での特殊値や, Stirling の公式 ($z \to +\infty$ の漸近公式), 関数等式等について研究した. また, Kurokawa-Ochiai-Wakayama ([14]) によって, $\mathbf{\Gamma}_r(z)$ のより深い解析的性質が研究された. 最近では Onodera ([22]) によって, 多重ゼータ値 (より正確には Mordell-Tornheim 型の多重ゼータ値) の研究にも応用されている.

Milnor の研究を踏まえ, 数列 $\boldsymbol{a}$ の "深さ r の正規化積" を以下で定義する.

$$\prod_{n\in I}^{[r]} a_n := \exp\Big(-\frac{d}{dw}\zeta_{\boldsymbol{a}}(w)\Big|_{w=1-r}\Big).$$

定義を保証するため, $\zeta_{\boldsymbol{a}}(w)$ は $w=1-r$ を含む領域まで有理型接続され, $w=1-r$ では正則であることを仮定する. これは明らかに通常の正規化積の一般化を与える. また, この記号を使えば, Milnor ガンマ関数は $\boldsymbol{\Gamma}_r(z)^{-1}=\prod_{n\geq 0}^{[r]}(n+z)$ と書くこともできる. 本稿の主目的は, まず "深さ r の正規化積" で定義される以下の二つの関数を明示的に計算し (前者は "深さ r の行列式" と呼ぶべきものである), そして, そこからどのような "ゼータ関数" が現れるかを調べることにある.

$$\prod_{j\geq 0}^{[r]}\big(\lambda_j-s(1-s)\big),\qquad \prod_{\rho\in\mathcal{R}}^{[r]}\Big(\frac{z-\rho}{2\pi}\Big).$$

安直に考えれば, 前者からは Selberg ゼータ関数の, 後者からは Riemann ゼータ関数の一般化が得られるはずである. ただし, ここで注意しなければならないのは, $r\geq 2$ のとき, 一般に "深さ r の正規化積" で定義される関数 $\prod_{n\in I}^{[r]}(a_n+z)$ は $-a_n$ $(n\in I)$ に対数的分岐点を持つ多価関数になるということである (それゆえ, Milnor ガンマ関数も多価関数となる). この事実は, I が有限集合の場合で簡単に確認することができる.

$$\begin{aligned}\prod_{n\in I}^{[r]}(a_n+z)&=\exp\Big(-\frac{\partial}{\partial w}\sum_{n\in I}\frac{1}{(a_n+z)^w}\Big|_{w=1-r}\Big)\\&=\prod_{n\in I}\exp\Big((a_n+z)^{r-1}\log\,(a_n+z)\Big).\end{aligned}$$

すなわち, $r\geq 2$ のときは $(a_n+z)^{r-1}$ が 1 にならず, 対数関数が生き残ってしまい, 結果として多価性が出てしまう. この点に注意して, 本稿では分枝の取り方についても一部議論を行う (二節を参照). なお, 本稿では偏角の主値を $(-\pi,\pi]$ に取り, それを arg と書く. また, それに対応する対数関数の主値を log と書く. それ以外の分枝を選ぶ場合は, その都度明記する.

本稿では高次元球面 S^n 上のラプラシアンの "深さ r の行列式" について触れることができなかった. これについては, [29] を参照していただきたい.

2　ラプラシアンの "深さ r の行列式"

この節では Voros の結果 (定理 1.1) の "深さ r 版" について述べる. 詳しい証明等については [17] (東京工業大学の黒川信重氏と九州大学の若山正人氏との共同研究) を参照していただきたい. 記号は前節のものをそのまま用いる. なお, 議論を簡略化するため, 以下 Δ_Γ が固有値 $\frac{1}{4}$ を持たない場合を考える. この仮定は技術的なものであり, 本質的ではないことを注意しておく.

2.1　主結果

本節の主研究対象であるラプラシアンの "深さ r の行列式" について正確な定義を述べることから始める. そのために, まずは前節で述べたスペクトルゼータ関数で, $z=-s(1-s)$ としたものを考えよう. $\mathrm{Re}\,\big(-s(1-s)\big)>0$ とする. ここで, この不等式が表す領域は二つの連結成分を持つことに注意する (それぞれ $\mathrm{Re}\,(s)>1$, $\mathrm{Re}\,(s)<0$ にあり, 両者は $\mathrm{Re}\,(s)=\frac{1}{2}$ に関して対称である). スペクトルゼータ関数 $\zeta_{\Delta_\Gamma}(w,-s(1-s))=\sum_{j\geq 0}(\lambda_j-s(1-s))^{-w}$ の各項 $\big(\lambda_j-s(1-s)\big)^{-w}$ は, もちろん対数関数を用いて定義するのだが, 二次方程式 $\lambda_j-s(1-s)=0$ の解が $s=\alpha_j^{\pm}$ であること, および, $\alpha_j^{\pm}$ が $s=\frac{1}{2}$ に関して対称であることを鑑みて, ここでは各 j に対して

$$\big(\lambda_j-s(1-s)\big)^{-w}:=\exp\Big(-w\log^{(j)}\big(\lambda_j-s(1-s)\big)\Big)$$

と定義する．ここで $\log^{(j)}$ は，以下で定まる対数関数の分枝である．

$$\begin{aligned}&\log^{(j)}\bigl(\lambda_j - s(1-s)\bigr)\\&\quad := \log\bigl|\lambda_j - s(1-s)\bigr| + i\begin{cases}\bigl(\arg_+(s-\alpha_j^+) + \arg_-(s-\alpha_j^-)\bigr) & (0 \le \lambda_j < \frac{1}{4}),\\ \arg\bigl((s-\alpha_j^+)(s-\alpha_j^-)\bigr) & (\lambda_j > \frac{1}{4}).\end{cases}\end{aligned}$$

ただし，偏角 $\arg_\pm$ は，それぞれ $-\frac{1}{2}\pi \le \arg_+ z < \frac{3}{2}\pi$, $-\frac{3}{2}\pi \le \arg_- z < \frac{1}{2}\pi$ に値を取るものとする．$\lambda_j > \frac{1}{4}$ のとき，$\log^{(j)} = \log$ である．よって $\log^{(j)}$ は有限個を除いて主値と一致することに注意する (なぜこのような分枝を選ぶかについては注意 2.7 を参照のこと)．各 j に対して，$\log^{(j)}\bigl(\lambda_j - s(1-s)\bigr)$ は $s = \frac{1}{2}$ に関して対称な領域

$$W_j := \begin{cases}\mathbb{C} \setminus \Bigl(\bigl[\alpha_j^+, \alpha_j^+ - i\infty\bigr) \cup \bigl[\alpha_j^-, \alpha_j^- + i\infty\bigr)\Bigr) & (0 \le \lambda_j < \frac{1}{4}),\\ \mathbb{C} \setminus \Bigl(\bigl[\alpha_j^+, \dfrac{1}{2} + i\infty\bigr) \cup \bigl[\alpha_j^-, \dfrac{1}{2} - i\infty\bigr)\Bigr) & (\lambda_j > \frac{1}{4})\end{cases}$$

で一価正則となる (図 1, 2 を参照).

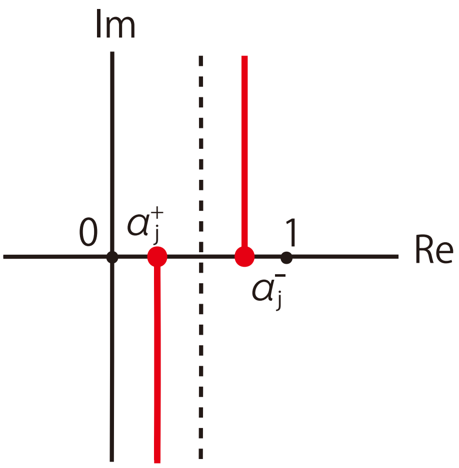

図 1: W_j $(0 \le \lambda_j < \frac{1}{4})$.

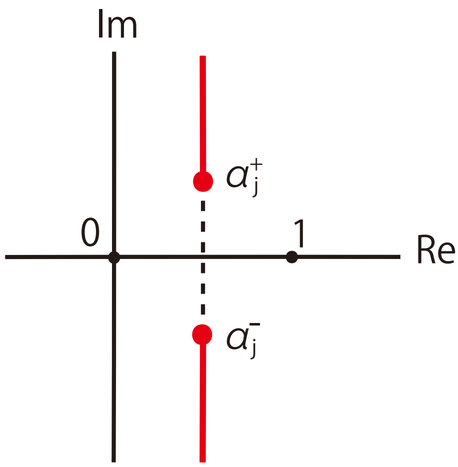

図 2: W_j $(\lambda_j > \frac{1}{4})$.

古典的な Mellin 変換 (積分表示) の議論を用いることで，$\zeta_{\Delta_\Gamma}(w, -s(1-s))$ は全平面に有理型接続され，$w = 1$ のみに一位の極を持つことが示される．特に，任意の $r \in \mathbb{N}$ に対して，$\zeta_{\Delta_\Gamma}(w, -s(1-s))$ は $w = 1 - r$ で正則である．これを踏まえ，ラプラシアンの "深さ r の行列式" を以下で定義する．

$$\mathrm{D}_{\Gamma,r}(s) := \prod_{j\ge 0}^{[r]}\bigl(\lambda_j - s(1-s)\bigr) = \exp\Bigl(-\frac{\partial}{\partial w}\zeta_{\Delta_\Gamma}\bigl(w, -s(1-s)\bigr)\Big|_{w=1-r}\Bigr).$$

$\mathrm{D}_{\Gamma,r}(s)$ は $\mathrm{Re}\,(-s(1-s)) > 0$ で正則である．もちろん，$r = 1$ のとき，これは通常の正規化行列式 $\det\bigl(\Delta_\Gamma - s(1-s)\bigr)$ に一致する．$r = 1$ の場合の議論は終わっているので，以後 $r \ge 2$ として考える．(なお，以下の議論は適当に修正すれば $r = 1$ の場合にも適用可能である.)

$\Omega_\Gamma := \bigcap_{j=0}^{\infty} W_j$ とする．今，Δ_Γ は $\frac{1}{4}$ を固有値として持たない (つまり，任意の j に対して $\alpha_j^+ = \alpha_j^- = \frac{1}{2}$ とはならない) と仮定しているので，Ω_Γ は連結になる (図 3 を参照)．標準的な方法で，$\mathrm{D}_{\Gamma,r}(s)$ は Ω_Γ に解析接続されることが示される．実際，十分大きな $T > 0$ に対して，

$$\mathrm{D}_{\Gamma,r}(s) = e_{\Gamma,r}^{(T)}(s) \cdot \mathrm{D}_{\Gamma,r}^{(T)}(s)$$

と書くことができる．ここで $e^{(T)}_{\Gamma,r}(s) := \prod_{0\le\lambda_j<T}\exp\bigl(\bigl(\lambda_j - s(1-s)\bigr)^{r-1}\log^{(j)}\bigl(\lambda_j - s(1-s)\bigr)\bigr)$ であり, $\mathrm{D}^{(T)}_{\Gamma,r}(s)$ はある非零な正則関数である (スペクトルゼータ関数の $\lambda_j > T$ の部分に対応するものである)．T は任意なので, $T\to\infty$ とすれば, この表示は $\mathrm{D}_{\Gamma,r}(s)$ の Ω_Γ への解析接続を与える．また, $\mathrm{D}_{\Gamma,r}(s)$ は定義より明らかに関数等式 $\mathrm{D}_{\Gamma,r}(1-s) = \mathrm{D}_{\Gamma,r}(s)$ を満たす．

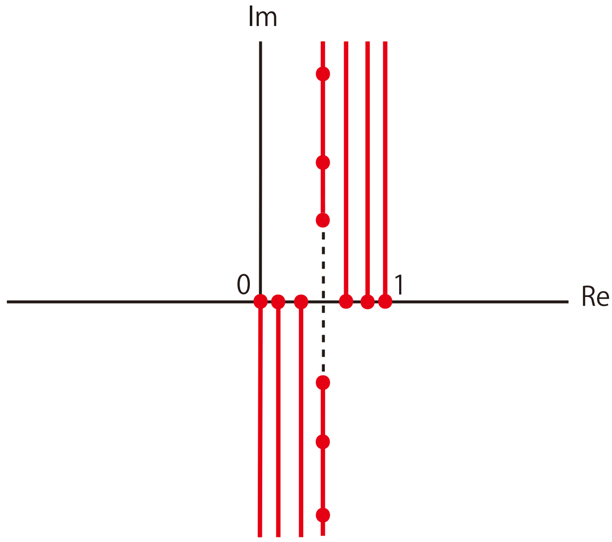

図 3: Ω_Γ.

本節の主結果は以下のとおりである ((i) はもうすでに示した)．

定理 2.1. $r\ge 2$ とする．

(i) $\mathrm{D}_{\Gamma,r}(s)$ は Ω_Γ に解析接続され, 関数等式 $\mathrm{D}_{\Gamma,r}(1-s) = \mathrm{D}_{\Gamma,r}(s)$ を満たす．

(ii) $\mathrm{D}_{\Gamma,r}(s)$ は以下の表示を持つ．

$$\mathrm{D}_{\Gamma,r}(s) = \phi_r(s)^{g-1} Z_{\Gamma,r}(s). \tag{2.1}$$

ここで, $\phi_r(s)$, $Z_{\Gamma,r}(s)$ は次の性質を満たす正則関数である．

(a) $\phi_r(s)$ は $\mathbb{C}\setminus\bigl((-\infty,-1]\cup[0,-i\infty)\bigr)$ 上正則で, 以下のように多重ガンマ関数の積で書ける．

$$\phi_r(s) = e^{-\frac{(2r)!!}{r^2(2r-1)!!}(s-\frac{1}{2})^{2r}} \prod_{j=1}^{2r} \Gamma_j(s)^{\alpha_{r,j}(s-\frac{1}{2})}.$$

ただし, $\alpha_{r,j}(t)$ は次で定まる偶多項式である．

$$\alpha_{r,j}(t) := 4\sum_{\ell=\lfloor\frac{j+1}{2}\rfloor}^{r} \binom{r-1}{\ell-1}(-1)^{\ell-1} c_{2\ell,j}\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr) t^{2r-2\ell}.$$

ここで $c_{r,j}(z) := \sum_{l=0}^{j-1}\binom{j-1}{l}(-1)^l (z-l-1)^{r-1}$ とする．

(b) $Z_{\Gamma,r}(s)$ は $\Omega_\Gamma\setminus(-\infty,-1]$ 上正則で, “オイラー積表示” を持ち, 以下の関数等式を満たす．

$$Z_{\Gamma,r}(1-s) = \Bigl(\prod_{j=1}^{2r} S_j(s)^{-\alpha_{r,j}(s-\frac{1}{2})}\Bigr)^{g-1} Z_{\Gamma,r}(s).$$

$r=1,2,3$ のとき, $\phi_r(s)$ の具体的な表示は以下のようになる.

例 2.1. $t=s-\frac{1}{2}$ と書くと,

$$\begin{aligned}
\phi_1(s)&=e^{-2t^2}\Gamma_1(s)^{-2}\Gamma_2(s)^4,\\
\phi_2(s)&=e^{-\frac{2}{3}t^4}\Gamma_1(s)^{-2t^2+\frac{1}{2}}\Gamma_2(s)^{4t^2-13}\Gamma_3(s)^{36}\Gamma_4(s)^{-24},\\
\phi_3(s)&=e^{-\frac{16}{45}t^6}\Gamma_1(s)^{-2t^4+t^2-\frac{1}{8}}\Gamma_2(s)^{4t^4-26t^2+\frac{121}{4}}\Gamma_3(s)^{72t^2-330}\Gamma_4(s)^{-48t^2+1020}\Gamma_5(s)^{-1200}\Gamma_6(s)^{480}.
\end{aligned}$$

これより $\phi_1(s)=\phi(s)$ がわかり, $Z_{\Gamma,1}(s)=Z_\Gamma(s)$ もわかる. すなわち, (2.1) は Voros の結果の拡張になっている. $Z_{\Gamma,r}(s)$ は Selberg ゼータ関数の Milnor 型の一般化なので, 本稿ではこれを "Milnor-Selberg ゼータ関数" と呼ぶことにする. 以下, (ii)-(b) の Milnor-Selberg ゼータ関数についての部分の補足説明を行う. なお, 定理の証明については本節の後半でその概略を述べる.

まず, 関数等式だが, Selberg ゼータ関数の場合同様, 以下のように対称な形で記述することも可能である (これは, 多重ガンマ関数および多重サイン関数の差分公式を用いて示すことができる).

系 2.2. $r\geq 2$ とする. $\hat{\alpha}_{r,l}(t):=(-1)^l\sum_{j=1}^{2r-l}\binom{2r-j}{l}\alpha_{r,j}(t)$ と定義する. また, 完備 Milnor-Selberg ゼータ関数 $\Xi_{\Gamma,r}(s)$ を以下のように定義する.

$$\Xi_{\Gamma,r}(s):=\Big(\prod_{l=0}^{2r-1}\Gamma_{2r}(s+l)^{\hat{\alpha}_{r,l}(s-\frac{1}{2})}\Big)^{g-1}Z_{\Gamma,r}(s).$$

このとき, Milnor-Selberg ゼータ関数の関数等式は次の対称形と同値になる.

$$\Xi_{\Gamma,r}(1-s)=\Xi_{\Gamma,r}(s).$$

□

$r=1,2,3$ のとき, $\Xi_{\Gamma,r}(s)$ の具体的な表示は以下のようになる.

例 2.3. $t=s-\frac{1}{2}$ と書くと,

$$\begin{aligned}
\Xi_{\Gamma,1}(s)&=\big(\Gamma_2(s)^2\Gamma_2(s+1)^2\big)^{g-1}Z_{\Gamma,1}(s),\\
\Xi_{\Gamma,2}(s)&=\big(\Gamma_4(s)^{-\frac{1}{2}+2t^2}\Gamma_4(s+1)^{-\frac{23}{2}-2t^2}\Gamma_4(s+2)^{-\frac{23}{2}-2t^2}\Gamma_4(s+3)^{-\frac{1}{2}+2t^2}\big)^{g-1}Z_{\Gamma,2}(s),\\
\Xi_{\Gamma,3}(s)&=\big(\Gamma_6(s)^{\frac{1}{8}-t^2+2t^4}\Gamma_6(s+1)^{\frac{237}{8}-21t^2-6t^4}\Gamma_6(s+2)^{\frac{841}{4}+22t^2+4t^4}\\
&\qquad\times\Gamma_6(s+3)^{\frac{841}{4}+22t^2+4t^4}\Gamma_6(s+4)^{\frac{237}{8}-21t^2-6t^4}\Gamma_6(s+5)^{\frac{1}{8}-t^2+2t^4}\big)^{g-1}Z_{\Gamma,3}(s).
\end{aligned}$$

次に, "オイラー積表示" について説明する. そのために, 自然数 m に対して, 以下のオイラー積で定義される関数 $Z_\Gamma^{(m)}(s)$ を導入する.

$$Z_\Gamma^{(m)}(s):=\prod_{P\in\mathrm{Prim}(\Gamma)}\prod_{n=0}^{\infty}H_m\big(N(P)^{-s-n}\big)^{(\log N(P))^{-m+1}}.$$

ここで $H_m(z):=\exp(-Li_m(z))$ であり, $Li_m(z):=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^m}$ は多重対数関数である. この無限積は $\mathrm{Re}\,(s)>1$ で絶対収束する. $m=1$ のとき, $Li_1(z)=-\log(1-z)$ なので $H_1(z)=1-z$ となり, $Z_\Gamma^{(1)}(s)=Z_\Gamma(s)$ が従う. つまり, $Z_\Gamma^{(m)}(s)$ も Selberg ゼータ関数の一般化を与える. 多重対数関数を用いた一般化なので, ここではこれを "poly-Selberg ゼータ関数" と呼ぶことにする. Milnor-Selberg ゼータ関数が "オイラー積表示" を持つとは, それが次のように (オイラー積で定義される) poly-Selberg ゼータ関数の積で書ける, という意味である.

定理 2.2. $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ において, 以下の等式が成り立つ.

$$Z_{\Gamma,r}(s) = \left(\prod_{m=0}^{r-1} Z_\Gamma^{(r+m)}(s)^{\frac{(r-1+m)!}{m!(r-1-m)!}(2s-1)^{r-1-m}} \right)^{(r-1)!(-1)^{r-1}}.$$

□

$r = 1, 2, 3$ のとき, "オイラー積表示" は具体的には以下のようになる.

例 2.4. $t = s - \frac{1}{2}$ と書くと,

$$\begin{aligned} Z_{\Gamma,1}(s) &= Z_\Gamma^{(1)}(s) = Z_\Gamma(s), \\ Z_{\Gamma,2}(s) &= Z_\Gamma^{(2)}(s)^{-(2t)} Z_\Gamma^{(3)}(s)^{-2}, \\ Z_{\Gamma,3}(s) &= Z_\Gamma^{(3)}(s)^{2(2t)^2} Z_\Gamma^{(4)}(s)^{12(2t)} Z_\Gamma^{(5)}(s)^{24}. \end{aligned}$$

$m \geq 2$ のとき, よく知られているように $Li_m(z)$ は微分方程式 $\frac{d}{dz} Li_m(z) = z^{-1} Li_{m-1}(z)$ を満たす. これを用いれば, 実は $Z_\Gamma^{(m)}(s)$ も ($m-1$ 階の) 微分方程式を満たすことが示される. そこには $\log Z_\Gamma(s)$ が現れるので, それを用いれば $Z_\Gamma^{(m)}(s)$ の $\log Z_\Gamma(s)$ を被積分関数に持つ反復積分表示が得られる. $\log Z_\Gamma(s)$ が $\Omega_\Gamma \setminus (-\infty, -1]$ 上正則であることを踏まえば, この表示は $Z_\Gamma^{(m)}(s)$ の $\Omega_\Gamma \setminus (-\infty, -1]$ への解析接続を与えることがわかる. 以上をまとめると次のようになる.

命題 2.5. $m \geq 2$ とする.

(i) $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ において, $Z_\Gamma^{(m)}(s)$ は以下の微分方程式を満たす.

$$\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \log Z_\Gamma^{(m)}(s) = (-1)^{m-1} \log Z_\Gamma(s).$$

(ii) $\mathrm{Re}\,(a) > 1$ を一つ固定すると, $Z_\Gamma^{(m)}(s)$ は以下の反復積分表示を持つ.

$$Z_\Gamma^{(m)}(s) = Q_\Gamma^{(m)}(s,a) \exp\left(\underbrace{\int_a^s \int_a^{\xi_{m-1}} \cdots \int_a^{\xi_2}}_{m-1} \log Z_\Gamma(\xi_1) d\xi_1 \cdots d\xi_{m-1} \right)^{(-1)^{m-1}}.$$

ここで $Q_\Gamma^{(m)}(s,a)$ は $Q_\Gamma^{(m)}(s,a) := \prod_{k=0}^{m-2} Z_\Gamma^{(m-k)}(a)^{\frac{(-1)^k}{k!}(s-a)^k}$ で定まる整関数である. この表示は $Z_\Gamma^{(m)}(s)$ の $\Omega_\Gamma \setminus (-\infty, -1]$ への解析接続を与える.

□

$Z_\Gamma^{(m)}(s)$ が $\Omega_\Gamma \setminus (-\infty, -1]$ で正則であることが分かったので, "オイラー積表示" から $Z_{\Gamma,r}(s)$ もそこで正則であることが分かる. さらに, 対数微分の計算を経由して, $Z_{\Gamma,r}(s)$ も $Z_\Gamma^{(m)}(s)$ と同様の表示を持つことが示される. この表示からも, $Z_{\Gamma,r}(s)$ が $\Omega_\Gamma \setminus (-\infty, -1]$ で正則であることが分かる.

系 2.6. $r \geq 2$ とする.

(i) $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ において, $Z_{\Gamma,r}(s)$ は以下の微分方程式を満たす.

$$\left(\frac{1}{2s-1} \frac{d}{ds} \right)^{r-1} \log Z_{\Gamma,r}(s) = (r-1)! \log Z_\Gamma(s).$$

(ii) $\mathrm{Re}\,(a) > 1$ を一つ固定すると, $Z_{\Gamma,r}(s)$ は以下の反復積分表示を持つ.

$$Z_{\Gamma,r}(s) = Q_{\Gamma,r}(s,a)\exp\left(\underbrace{\int_a^s\int_a^{\xi_{r-1}}\cdots\int_a^{\xi_2}}_{r-1}\Big(\prod_{j=1}^{r-1}(2\xi_j-1)\Big)\log Z_\Gamma(\xi_1)d\xi_1\cdots d\xi_{r-1}\right)^{(r-1)!}.$$

ここで $Q_{\Gamma,r}(s,a)$ は $Q_{\Gamma,r}(s,a) := \prod_{k=0}^{r-2} Z_{\Gamma,r-k}(a)^{\binom{r-1}{k}(s-a)^k(s+a-1)^k}$ で定まる整関数である.

□

以上により, Milnor-Selberg ゼータ関数は "ゼータ関数" と呼ぶにふさわしい性質をいくつか有することが分かった. しかしながら, 現在のところ, それが何かに応用できるかどうかは不明である. ただし, $r=1$ の場合, すなわち Selberg ゼータ関数の場合に, それから素測地線定理が導かれることを踏まえれば, 一般の r の場合にも何か幾何学的な応用があるのではないかと期待している. これについては今後の課題である.

注意 2.7. スペクトルゼータ関数を定義する際, 例外固有値に対応する j に対しては, 今回対数関数の特別な分枝 ($\log^{(j)}$ と書いた) を選んだ. もしすべての j に対して主値を選んだとすると, それで定義される "深さ r の行列式" $\mathrm{D}_{\Gamma,r}(s)$ は $\mathbb{C}\setminus([0,1]\cup(\frac{1}{2}+i\mathbb{R}))$ までしか解析接続できなくなってしまう. すなわち, $\mathrm{Re}\,(s)=\frac{1}{2}$ を超えることができない. 今回の分枝の選び方は, "$\mathrm{D}_{\Gamma,r}(s)$ が $\mathrm{Re}\,(s)=\frac{1}{2}$ を超えることができ, さらに連結かつ関数等式と整合性を持つような対称な領域 (今の場合は Ω_Γ) に解析接続できるための選び方である" という風に言うことができる. ただし, Δ_Γ が $\frac{1}{4}$ を固有値に持つ場合は, 今回の選び方でも $\mathrm{Re}\,(s)=\frac{1}{2}$ を超えることができないことを注意しておく.

2.2 定理 2.1 の証明の概略

以下, 定理 2.1 の証明の概略を述べる. 証明では, 次に述べる Selberg の跡公式が重要となる.

命題 2.8 (Selberg の跡公式). 関数 f の Fourier 変換を $\hat{f}(r) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-irx}dx$ と書く. $\hat{f}(r)$ は, ある $\delta > 0$ に対して, 帯領域 $\{r\in\mathbb{C}\,|\,|\mathrm{Im}\,r| < \frac{1}{2}+\delta\}$ で正則で, $\hat{f}(-r)=\hat{f}(r)$ かつ $\hat{f}(r)=O(|r|^{-2-\delta})$ ($|r|\to\infty$) を満たすと仮定する. このとき次の等式が成り立つ.

$$\sum_{j=0}^{\infty}\hat{f}(r_j) = \sum_{\gamma\in\mathrm{Hyp}\,(\Gamma)}\frac{\log N(\delta_\gamma)}{N(\gamma)^{\frac{1}{2}}-N(\gamma)^{-\frac{1}{2}}}f\big(\log N(\gamma)\big) + (g-1)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(r)r\tanh(\pi r)dr.$$

ここで $\mathrm{Hyp}\,(\Gamma)$ は Γ の双曲的共役類全体のなす集合であり, 各 $\gamma\in\mathrm{Hyp}\,(\Gamma)$ に対して $\gamma=P^k$ (k はある自然数) として一意的に定まる元 $P\in\mathrm{Prim}\,(\Gamma)$ を δ_γ と書く. □

"深さ r の行列式" を計算するためには, スペクトルゼータ関数の $w=1-r$ での微分が必要となる. ここでは計算を簡略化するため, あらかじめ w を $w+1-r$ と平行移動して, それに対する $w=0$ での微分を計算していく.

$\mathrm{Re}\,(w) > r$, $\mathrm{Re}\,\big(-s(1-s)\big) > 0$ かつ $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ とする. まずはスペクトルゼータ関数の積分表示 (Mellin 変換による表示) から始める.

$$\zeta_{\Delta_\Gamma}\big(w+1-r,-s(1-s)\big) = \frac{1}{\Gamma(w+1-r)}\int_0^\infty \xi^{w+1-r}e^{-t^2\xi}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}e^{-r_j^2\xi}\Big)\frac{d\xi}{\xi}.$$

ここで $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\xi}}e^{-\frac{x^2}{4\xi}}$ (すなわち $\hat{f}(r)=e^{-r^2\xi}$) として Selberg の跡公式を使えば,

$$\zeta_{\Delta_\Gamma}\big(w+1-r,-s(1-s)\big)=\Theta_{\Gamma,r}(w,t)+2(g-1)\sum_{\ell=0}^{r-1}\binom{r-1}{\ell}t^{2(r-1-\ell)}J_{2\ell+1}(w,t) \tag{2.2}$$

という表示式を得る. ここで

$$\Theta_{\Gamma,r}(w,t):=\frac{1}{\Gamma(w+1-r)}\int_0^\infty \xi^{w+1-r}\theta_\Gamma(\xi,t)\frac{d\xi}{\xi},$$
$$\theta_\Gamma(\xi,t):=\frac{1}{2\sqrt{\pi\xi}}\sum_{\gamma\in\mathrm{Hyp}\,(\Gamma)}\frac{\log N(\delta_\gamma)}{N(\gamma)^{\frac{1}{2}}-N(\gamma)^{-\frac{1}{2}}}e^{-t^2\xi-\frac{(\log N(\gamma))^2}{4\xi}}$$

であり,

$$J_m(w,t):=\int_0^\infty \varphi_m(x;w,t)dx,$$
$$\varphi_m(x;w,t):=(x^2+t^2)^{-w}x^m\tanh(\pi x)$$

とする. すべての $\gamma\in\mathrm{Hyp}\,(\Gamma)$ に対して $\log N(\gamma)>\varepsilon_\Gamma$ となるような $\varepsilon_\Gamma>0$ が存在することに注意すれば, $\Theta_{\Gamma,r}(w,t)$ に現れる積分は任意の $w\in\mathbb{C}$ に対して絶対収束することが示される. よって, $\Theta_{\Gamma,r}(w,t)$ は w の関数として整関数になる. また, $J_m(w,t)$ も w の関数として全平面に有理型接続され, $w=0$ では正則となることが示される (後述する). これより, (2.2) を両辺 $w=0$ で微分すれば, $\mathrm{D}_{\Gamma,r}(s)$ の次のような表示式が得られる.

$$\mathrm{D}_{\Gamma,r}(s)=\phi_r(s)^{g-1}Z_{\Gamma,r}(s).$$

ここで $t=s-\frac{1}{2}$ と書き,

$$\phi_r(s):=\prod_{\ell=0}^{r-1}\exp\Big(-\frac{\partial}{\partial w}J_{2\ell+1}(w,t)\Big|_{w=0}\Big)^{2\binom{r-1}{\ell}t^{2(r-1-\ell)}},$$
$$Z_{\Gamma,r}(s):=\exp\Big(-\frac{\partial}{\partial w}\Theta_{\Gamma,r}(w,t)\Big|_{w=0}\Big)$$

と定義する. これらが (2.1) に現れる関数 $\phi_r(s)$, $Z_{\Gamma,r}(s)$ の正確な定義である. あとは $\phi_r(s)$ が多重ガンマ関数の積で, $Z_{\Gamma,r}(s)$ が poly-Selberg ゼータ関数の積で書けることを示せば, 定理 2.1 の証明は完了する. 以下, これらの事実を簡単に説明する.

最初に $\phi_r(s)$ についてだが, これは本質的に積分 $J_m(w,t)$ および, その $w=0$ での微分の計算ができればよい. あとは (それなりに煩雑になるが) 得られた結果を掛けて整理するという組合せ論的な議論に帰着される. まずは留数定理を用いることで,

$$J_m(w,t)=\frac{i^{m+1}}{\cos(\pi w)}\Big(J_{m,1}(w,t)+J_{m,2}(w,t)\Big)$$

と計算できる. ここで,

$$J_{m,1}(w,t):=-t^{-2w}\sin(\pi w)\int_0^t\big(1-\frac{\xi^2}{t^2}\big)^{-w}\xi^m\tan(\pi\xi)d\xi,$$
$$J_{m,2}(w,t):=\sum_{j=0}^\infty\binom{w+j-1}{j}t^{2j}\zeta\big(2w+2j-m,\frac{1}{2}\big)$$

とする．$J_{m,1}(w,t)$ は原点と被積分関数の対数的特異点 $z=it$ をつなぐ部分の積分で, $J_{m,2}(w,t)$ は各極 $z=(k+\frac{1}{2})i$ $(k\geq 1)$ での留数の和を整理したものである．これらはいずれも $w=0$ で正則なので, それぞれの微分を計算して整理すると次を得る．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w}J_m(w,t)\Big|_{w=0}=&\frac{i^{m+1}}{m+1}\Big(H\big(\frac{m-1}{2}\big)-2H(m)\Big)t^{m+1}\\&+2i^{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k\binom{m}{k-1}t^{m+1-k}\log\mathbf{\Gamma}_k\big(t+\frac{1}{2}\big).\end{aligned}$$

ここで $H(m):=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}$ は調和数, $\mathbf{\Gamma}_k(t)$ は Milnor ガンマ関数である．Milnor ガンマ関数は, 実は Barnes の多重ガンマ関数のある多項式べきの積で書けることが知られている ([14])．そのときの多項式が, 定理 2.1 (ii)-(a) に現れる $c_{r,j}(z)$ である．従って, $\phi_r(s)$ を最終的に整理すると, Barnes の多重ガンマ関数 (および $c_{r,j}(z)$) が現れるのである．

もう一言言えば, 上記では Hurwitz ゼータ関数に対する次のような無限級数の計算が本質的になる．

$$R_m(t):=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\zeta\big(2j+1,\frac{1}{2}\big)}{2j+m+1}t^{2j+m+1}.$$

この種の級数は, 数理物理など様々な分野に現れているようである ([1, 10], [24] も参照)．$R_m(t)$ は, Milnor ガンマ関数を使えば以下のように明示的に計算することが可能である．上記で $\frac{\partial}{\partial w}J_m(w,t)\big|_{w=0}$ を整理する際, この公式を用いた．

命題 2.9. $m\geq 1$ とすると,

$$\begin{aligned}R_m(t)=&\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k\binom{m}{k-1}t^{m+1-k}\log\mathbf{\Gamma}_k\big(t+\frac{1}{2}\big)-\frac{1}{2}\log\mathcal{C}_{m+1}(t)\\&-\frac{1}{m+1}\Big(H(m)-\psi\big(\frac{1}{2}\big)\Big)t^{m+1}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\frac{m-1}{2}}\frac{B_{m+1-2j}(\frac{1}{2})}{j(m+1-2j)}t^{2j}-\log\mathbf{\Gamma}_{m+1}\big(\frac{1}{2}\big).\end{aligned}$$

ここで $\psi(z):=\frac{d}{dz}\log\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ はディガンマ関数, $B_m(z)$ は Bernoulli 多項式, $\mathcal{C}_m(t)$ は (基本) 多重コサイン関数 ([12, 13]) である． □

次に, Milnor-Selberg ゼータ関数 $Z_{\Gamma,r}(s)$ の "オイラー積表示" を導く．まず, poly-Selberg ゼータ関数 $Z_{\Gamma}^{(m)}(s)$ の定義から, その対数が以下のように計算できることに注意しておく．

$$-\log Z_{\Gamma}^{(m)}(s)=\sum_{\gamma\in\mathrm{Hyp}\,(\Gamma)}\frac{\log N(\delta_\gamma)}{N(\gamma)^{\frac{1}{2}}-N(\gamma)^{-\frac{1}{2}}}\frac{N(\gamma)^{-s+\frac{1}{2}}}{(\log N(\gamma))^m}.$$

第二種変形 Bessel 関数 $K_w(z)$ の積分表示

$$\int_0^\infty\xi^w e^{-(a\xi+\frac{b}{\xi})}\frac{d\xi}{\xi}=2\Big(\frac{b}{a}\Big)^{\frac{w}{2}}K_w(2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})$$

を用いると, $\Theta_{\Gamma,r}(w,t)$ は次のように書くことができる．

$$\begin{aligned}\Theta_{\Gamma,r}(w,t)=&\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(w+1-r)}\\&\times\sum_{\gamma\in\mathrm{Hyp}\,(\Gamma)}\frac{\log N(\delta_\gamma)}{N(\gamma)^{\frac{1}{2}}-N(\gamma)^{-\frac{1}{2}}}\Big(\frac{\log N(\gamma)}{2t}\Big)^{w+\frac{1}{2}-r}K_{w+\frac{1}{2}-r}\big(t\log N(\gamma)\big).\end{aligned}$$

この式を $w=0$ で微分すれば, 上記 $\log Z_\Gamma^{(m)}(s)$ の表示と $K_w(z)$ のよく知られた公式

$$K_{\frac{1}{2}-r}(z)=\Big(\frac{\pi}{2z}\Big)^{\frac{1}{2}}e^{-z}\sum_{m=0}^{r-1}(2z)^{-m}\frac{(r-1+m)!}{m!(r-1-m)!}$$

(例えば [6] を参照) を用いることで

$$\begin{aligned}\log Z_{\Gamma,r}(s)&=-\frac{\partial}{\partial w}\Theta_{\Gamma,r}(w,t)\Big|_{w=0}\\&=(-1)^{r-1}(r-1)!\sum_{m=0}^{r-1}\frac{(r-1+m)!}{m!(r-1-m)!}(2t)^{r-1-m}\log Z_\Gamma^{(r+m)}(s).\end{aligned}$$

を得る. これを指数関数で持ち上げたものが, “オイラー積表示” になる.

3　保型 L-関数の非自明零点に関する “深さ r の正規化積”

この節では Deninger の結果 (定理 1.2) の “深さ r 版” について述べる. 詳しい証明等については, 今度は [28] (九州大学の若山正人氏との共同研究) を参照していただきたい. Deninger の結果は Riemann ゼータ関数に対するものであったが, ここではもっと一般に GL_d の既約カスプ保型表現に付随する L-関数 (以下, カスプ保型 L-関数という) に対して議論を行い, その上で結果を拡張する.

3.1　主結果

まずはカスプ保型 L-関数について簡単に復習する (一般論については, 例えば [7] を参照のこと). K を n 次の代数体とし, $\mathcal{O}_K$ を K の整数環, $\mathbb{A}_K$ を K のアデール環とする. S_f, S_∞ をそれぞれ K の有限素点, 無限素点全体のなす集合とする. $S_\infty=S_\mathbb{R}\sqcup S_\mathbb{C}$ と書く. すなわち, $S_\mathbb{R}$ は K の実素点, $S_\mathbb{C}$ は複素素点全体のなす集合である. それぞれの元の個数を r_1, r_2 と書く. $\pi=\otimes_v\pi_v$ をアデール群 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}_K)$ の既約カスプ保型表現とする. このとき π に付随する L-関数 $L(w,\pi)$ が, 以下のオイラー積で定義される.

$$L(w,\pi):=\prod_{v\in S_f}\prod_{j=1}^{d}\big(1-\alpha_{v,j}(\pi)q_v^{-w}\big)^{-1}.$$

ここで q_v は K の v での剰余体の位数であり, $\alpha_{v,j}(\pi)$ は π_v から定まるある複素数である. この無限積は $\mathrm{Re}\,(w)>1$ で絶対収束する. 次に, ガンマ因子 $L_\infty(w,\pi)$ を以下のように定める.

$$L_\infty(w,\pi):=\prod_{v\in S_\infty}\prod_{j=1}^{d}\Gamma_v\big(w+\mu_{v,j}(\pi)\big).$$

ここで

$$\Gamma_v(w):=N_v(N_v\pi)^{-\frac{N_vw}{2}}\Gamma\Big(\frac{N_vw}{2}\Big)$$

と定義する. ただし, N_v は $v\in S_\mathbb{R}$ のとき 1, それ以外では 2 と定義する. また, $\mu_{v,j}(\pi)$ は π_v から定まるある複素数である. さらに, 完備 L-関数 $\Lambda(w,\pi)$ を以下で定める.

$$\Lambda(w,\pi):=L_\infty(w,\pi)L(w,\pi).$$

$\Lambda(w,\pi)$ は全平面に有理型接続される．より詳しく, $d=1$ かつ $\pi=\mathbf{1}$ ($\mathbf{1}$ は自明表現) のとき, すなわち $L(w,\pi)$ が K の Dedekind ゼータ関数 $\zeta_K(w)$ のとき, $\Lambda(w,\pi)$ は $w=0,1$ に一位の極を持つ有理型関数となり, それ以外のとき, $\Lambda(w,\pi)$ は整関数となる．また, $\Lambda(w,\pi)$ は以下の関数等式を満たす．

$$N_\pi^{\frac{w}{2}}\Lambda(w,\pi)=\varepsilon_\pi N_\pi^{\frac{1-w}{2}}\Lambda(1-w,\overline{\pi}).$$

ここで $N_\pi\in\mathbb{N}$ は π の導手, ε_π は絶対値が 1 のある複素数, $\overline{\pi}$ は π の反傾表現である．

$\mathcal{R}(\pi)$ を $L(w,\pi)$ の非自明零点 (つまり $\Lambda(w,\pi)$ の零点) 全体のなす集合とする．$\mathrm{Re}\,(z)>1$ に対して, 数列 $\{\frac{z-\rho}{2\pi}\}_{\rho\in\mathcal{R}(\pi)}$ に付随するゼータ関数を $\xi(w,z,\pi)$ と書く．

$$\xi(w,z,\pi):=\sum_{\rho\in\mathcal{R}(\pi)}\Bigl(\frac{z-\rho}{2\pi}\Bigr)^{-w}.$$

ここで, すべての $\rho\in\mathcal{R}(\pi)$ に対して $\bigl(\frac{z-\rho}{2\pi}\bigr)^{-w}$ は対数関数の主値を用いて定義されるものとする．この級数は $\mathrm{Re}\,(w)>1$ で絶対収束する．本節の主目的は, "深さ r の正規化積" で定義される以下の関数 $\Xi_r(z,\pi)$ を明示的に計算することである．

$$\Xi_r(z,\pi):=\prod_{\rho\in\mathcal{R}(\pi)}^{[r]}\Bigl(\frac{z-\rho}{2\pi}\Bigr)=\exp\Bigl(-\frac{\partial}{\partial w}\xi(w,z,\pi)\Big|_{w=1-r}\Bigr).$$

後述の命題 3.6 より, 任意の $r\in\mathbb{N}$ に対して $\Xi_r(z,\pi)$ は定義可能であることに注意しておく．

結果を先に言ってしまうと, この場合も前節同様 "poly L-関数" と呼ぶべき関数が本質的に現れる．詳細を記述するためにいくつか関数を準備する．まずは L-関数の "深さ r 版" を以下のオイラー積で定義する．

$$L_r(w,\pi):=\prod_{v\in S_f}\prod_{j=1}^{d}H_r\bigl(\alpha_{v,j}(\pi)q_v^{-w}\bigr)^{-(\log q_v)^{1-r}}.$$

ここで $H_r(z)$ は, 前節同様多重対数関数 $Li_r(z)$ を用いて定義される関数である．$L_r(w,\pi)$ を "poly L-関数" と呼ぶことにする．[19] ([8] も参照) で得られた $\alpha_{v,j}(\pi)$ の評価式 $\bigl|\log_{q_v}|\alpha_{v,j}(\pi)|\bigr|<\frac{1}{2}-\frac{1}{d^2+1}$ を用いれば, この無限積が少なくとも $\mathrm{Re}\,(w)>\frac{3}{2}-\frac{1}{d^2+1}$ (≥ 1) で絶対収束することが示される．ただし, $r=1$ の場合のように, 絶対収束域が $\mathrm{Re}\,(w)>1$ となるかは不明である．$r=1$ のとき, $L_1(w,\pi)=L(w,\pi)$ となる．よって $L_r(w,\pi)$ は $L(w,\pi)$ の一般化を与える (注意 3.4 を参照)．次に, ガンマ因子の "深さ r 版" を以下で定義する．

$$L_{r,\infty}(w,\pi):=\prod_{v\in S_\infty}\prod_{j=1}^{d}\Gamma_{r,v}\bigl(w+\mu_{v,j}(\pi)\bigr).$$

ここで, 各 $v\in S_\infty$ に対して,

$$\Gamma_{r,v}(w):=\sqrt{2N_v}(N_v\pi)^{-\frac{1}{r}(N_v\pi)^{1-r}B_r(\frac{N_vw}{2})}\mathbf{\Gamma}_r\Bigl(\frac{N_vw}{2}\Bigr)^{(N_v\pi)^{1-r}}$$

と定義する．ただし, $B_r(w)$ は Bernoulli 多項式, $\mathbf{\Gamma}_r(w)$ は Milnor ガンマ関数である．$B_1(w)=w-\frac{1}{2}$, $\mathbf{\Gamma}_1(w)=\frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}}$ を用いれば, $\Gamma_{1,v}(w)=\Gamma_v(w)$ が分かる．よって $L_{1,\infty}(w,\pi)=L_\infty(w,\pi)$ となる．最後に, 完備 L-関数の "深さ r 版" を以下のように定義する．

$$\Lambda_r(w,\pi):=L_{r,\infty}(w,\pi)L_r(w,\pi)^{(-1)^{r-1}(r-1)!(2\pi)^{1-r}}.$$

上記を踏まえれば, $\Lambda_1(w,\pi)=\Lambda(w,\pi)$ がすぐに従う．

本節の主結果は以下の通りである．

定理 3.1. $\mathrm{Re}\,(z) > \frac{3}{2} - \frac{1}{d^2+1}$ のとき, 次の等式が成り立つ.

$$\Xi_r(z,\pi) = \prod_{\rho\in\mathcal{R}(\pi)}^{[r]} \left(\frac{z-\rho}{2\pi}\right) = 2^{-\frac{1}{2}nd} \left[\left(\frac{z}{2\pi}\right)^{\left(\frac{z}{2\pi}\right)^{r-1}} \left(\frac{z-1}{2\pi}\right)^{\left(\frac{z-1}{2\pi}\right)^{r-1}} \right]^{\delta_{1,\mathbf{1}}} \Lambda_r(z,\pi). \tag{3.1}$$

ただし, $\delta_{1,\mathbf{1}} = \delta_{1,\mathbf{1}}(\pi)$ は $d=1$ かつ $\pi = \mathbf{1}$ のとき 1, それ以外では 0 と定義する.

特に $r=1$ とすると, 以下に述べるカスプ保型 L-関数の正規化積表示を得ることができる. Deninger の結果は, 下記でさらに $K=\mathbb{Q}$, $d=1$, $\pi=\mathbf{1}$ としたものである.

系 3.1 (**カスプ保型 L-関数の正規化積表示**).

$$\prod_{\rho\in\mathcal{R}(\pi)} \left(\frac{z-\rho}{2\pi}\right) = 2^{-\frac{1}{2}nd} \left[\frac{z(z-1)}{(2\pi)^2}\right]^{\delta_{1,\mathbf{1}}} \Lambda(z,\pi). \tag{3.2}$$

□

なお一節で述べたように, 正規化積で定義される関数は一般に整関数になるので, (3.2) は任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して有効であることを注意しておく.

主結果の証明の概略を述べる前に, $r\geq 2$ に対する “poly L-関数” $L_r(w,\pi)$ の解析接続を与えよう. それが得られれば, $\Lambda_r(w,\pi)$ の解析接続も得られ ($L_{r,\infty}(w,\pi)$ は本質的に Milnor ガンマ関数の有限積なので, 解析的性質はよく分かっている), 最終的に (3.1) から $\Xi_r(z,\pi)$ の解析接続も得られる.

解析接続の方法は, 前節の “poly-Selberg ゼータ関数” の場合と同様である. $L(w,\pi)$ の (自明・非自明含めた) すべての零点および (存在すれば) 極を起点として, そこから実軸と平行に左方向にスリットを入れた領域を $\Omega(\pi)$ とする (図 4 を参照). $\Omega(\pi)$ 上 $\log L(w,\pi)$ は一価正則になることに注意する. $L_r(w,\pi)$ も多重対数関数に由来する微分方程式を満たす. これを用いれば, $L_r(w,\pi)$ の $\log L(w,\pi)$ を被積分関数とする反復積分表示が得られ, それが $\Omega(\pi)$ への解析接続を与える.

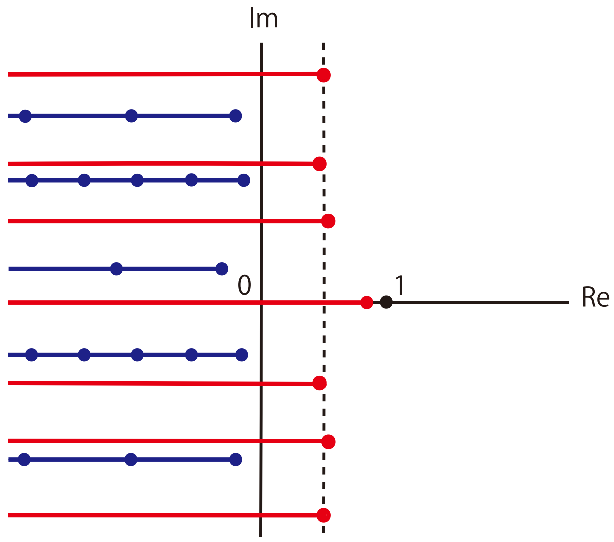

図 4: $\Omega(\pi)$.

命題 3.2. $r \geq 2$ とする.

(i) $\mathrm{Re}\,(w) > \frac{3}{2} - \frac{1}{d^2+1}$ において, $L_r(w,\pi)$ は以下の微分方程式を満たす.

$$\frac{d^{r-1}}{dw^{r-1}} \log L_r(w,\pi) = (-1)^{r-1} \log L(w,\pi).$$

(ii) $\mathrm{Re}\,(a) > \frac{3}{2} - \frac{1}{d^2+1}$ を一つ固定すると, $L_r(w,\pi)$ は以下の反復積分表示を持つ.

$$L_r(w,\pi) = Q_r(w,a,\pi) \exp\Biggl(\underbrace{\int_a^w \int_a^{\xi_{r-1}} \cdots \int_a^{\xi_2}}_{r-1} \log L(\xi_1,\pi) d\xi_1 \cdots d\xi_{r-1}\Biggr)^{(-1)^{r-1}}.$$

ここで $Q_r(w,a,\pi)$ は $Q_r(w,a,\pi) := \prod_{k=0}^{r-2} L_{r-k}(a,\pi)^{\frac{(-1)^k}{k!}(w-a)^k}$ で定まる整関数である. この表示は $L_r(w,\pi)$ の $\Omega(\pi)$ への解析接続を与える.

□

系 3.3. $r \geq 2$ のとき, $\Xi_r(z,\pi)$ は $\Omega(\pi)$ に解析接続される. □

注意 3.4. $L_r(w,\pi)$ の代わりに, 例えば

$$\widetilde{L}_r(w,\pi) := \prod_{v \in S_f} \prod_{j=1}^{d} H_r\bigl(\alpha_{v,j}(\pi) q_v^{-w}\bigr)^{-1}$$

という関数 ($L_r(w,\pi)$ のべきの部分を単に -1 に変えたもの) を考えると, $L_r(w,\pi)$ の場合と同様に $\widetilde{L}_r(w,\pi)$ は $\mathrm{Re}\,(w) > \frac{3}{2} - \frac{1}{d^2+1}$ で絶対収束し, $\widetilde{L}_1(w,\pi) = L(w,\pi)$ となることが示される. よって $\widetilde{L}_r(w,\pi)$ も $L(w,\pi)$ の一般化を与える. さらに, べきが簡単になった分, $L_r(w,\pi)$ 以上に解析的性質が良く分かるのではないかと期待される. しかし, [15] によると, 最も単純な $K = \mathbb{Q}$, $d = 1$, $\pi = \mathbf{1}$ の場合 (つまり Riemann ゼータ関数の場合) に, $\widetilde{\zeta}_r(w) := \widetilde{L}_r(w,\mathbf{1})$ は $\mathrm{Re}\,(w) > 0$ までは解析接続できるが, 虚軸を自然境界に持つことが示せてしまう. 物事はそう簡単にはいかないようである.

3.2 定理 3.1 の証明の概略

以下, 定理 3.1 の証明の概略を述べる. 証明は Deninger ([4]) によるものと概ね同様である. 前節で Selberg の跡公式が重要な役割を果たしたように, 本節では $L(w,\pi)$ の明示公式が重要となる. ここでは, Michel ([21]) によって得られた明示公式を, Barner ([2]) 流に Weil 型に書き直した以下の明示公式を用いる.

命題 3.5 (Weil 型明示公式). F を $\mathbb{R}$ 上有界変動な関数とする. F が次の三条件を満たすと仮定する.

(a) $F(x)e^{(\frac{1}{2}+b)|x|}$ が $\mathbb{R}$ 上有界変動となるような正の数 b が存在する.

(b) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $2F(x) = F(x+0) + F(x-0)$ が成り立つ.

(c) 任意の $v \in S_\infty$, $1 \leq j \leq d$ に対して, $\widetilde{F}_{v,j}(x,\pi) = 2F(0) + O(|x|)$ $(|x| \to 0)$ が成り立つ. ここで $\widetilde{F}_{v,j}(x,\pi) := F(x)e^{-i\mathrm{Im}\,(\mu_{v,j}(\pi))x} + F(-x)e^{i\mathrm{Im}\,(\mu_{v,j}(\pi))x}$ とする.

また, $\tau \in \mathbb{C}$ に対して $\Phi_F(\tau)$ を次で定義する.

$$\Phi_F(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{(\tau-\frac{1}{2})x} dx.$$

このとき以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\sum_{\rho\in\mathcal{R}(\pi)} \Phi_F(\rho) = F(0)\log\frac{N_\pi}{(2^{2r_2}\pi^n)^d} + \big(\Phi_F(0)+\Phi_F(1)\big)\delta_{1,\mathbf{1}} \\ - \sum_{v\in S_f}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\Lambda_\pi(q_v^l)}{q_v^{\frac{1}{2}l}}F(l\log q_v) + \frac{\Lambda_{\overline{\pi}}(q_v^l)}{q_v^{\frac{1}{2}l}}F(-l\log q_v)\right) \\ + \sum_{v\in S_\infty}\sum_{j=1}^{d} W_{v,j}(F,\pi).\end{aligned}$$

ここで $\Lambda_\pi(q_v^l) := \log q_v \sum_{j=1}^d \alpha_{v,j}(\pi)^l$ であり, $W_{v,j}(F,\pi)$ は次の積分で定義される.

$$W_{v,j}(F,\pi) := \int_0^{\infty}\left(\frac{N_v F(0)}{x} - \widetilde{F}_{v,j}(x,\pi)\frac{e^{(\frac{2}{N_v}-\frac{1}{2}-\mathrm{Re}\,(\mu_{v,j}(\pi)))x}}{1-e^{-\frac{2}{N_v}x}}\right)e^{-\frac{2}{N_v}x}dx.$$

□

$\mathrm{Re}\,(z)>1$, $\mathrm{Re}\,(w)>1$ に対して, 関数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を

$$F(x) := \begin{cases} x^{w-1}e^{-(z-\frac{1}{2})x} & (x\geq 0), \\ 0 & (x<0), \end{cases}$$

と定義する. 簡単にわかるように, この F は命題 3.5 の三条件 (a), (b), (c) を満たす. また, $\Phi_F(\tau) = \Gamma(w)(z-\tau)^{-w}$ なので, $\sum_{\rho\in\mathcal{R}(\pi)}\Phi_F(\rho) = (2\pi)^{-w}\Gamma(w)\xi(w,z,\pi)$ がわかる. さらに Hurwitz ゼータ関数の積分表示 (Mellin 変換による表示) を用いれば,

$$W_{v,j}(F,\pi) = -\Gamma(w)\Big(\frac{N_v}{2}\Big)^w \zeta\Big(w, \frac{N_v(z+\mu_{v,j}(\pi))}{2}\Big)$$

となることが分かる. よって, 上記明示公式から $\xi(w,z,\pi)$ の次のような表示を得ることができる.

命題 3.6. $\mathrm{Re}\,(z)>1$ とすると, $\xi(w,z,\pi)$ は以下の表示を持つ.

$$\begin{aligned}\xi(w,z,\pi) = \left[\Big(\frac{2\pi}{z}\Big)^w + \Big(\frac{2\pi}{z-1}\Big)^w\right]\delta_{1,\mathbf{1}} + \frac{(2\pi)^w}{2\pi i}\int_C t^{-w}\frac{L'}{L}(z-t,\pi)dt \\ - \sum_{v\in S_\infty}\sum_{j=1}^{d}(N_v\pi)^w\zeta\Big(w,\frac{N_v(z+\mu_{v,j}(\pi))}{2}\Big).\end{aligned}$$

ここで積分路 C は, 実軸負方向の無限遠点から出発して実軸上を $-\delta$ まで進み, 原点を中心とする半径 δ の円上を反時計回りに一周して実軸上の点 $-\delta$ に戻り, 再び実軸上を負方向に無限遠点まで戻るものとする. この表示は $\xi(w,z,\pi)$ の全平面への有理型接続を与える. 極は $w=1$ のみで, それは単純極である. □

主結果は, この表示を微分することで得られる. 実際, $\mathrm{Re}\,(z) > \frac{3}{2} - \frac{1}{d^2+1}$ に対して,

$$
\begin{aligned}
A_0(w,z,\pi) &:= \left[\left(\frac{2\pi}{z}\right)^w + \left(\frac{2\pi}{z-1}\right)^w\right]\delta_{1,\mathbf{1}},\\
A_f(w,z,\pi) &:= \frac{(2\pi)^w}{2\pi i}\int_C t^{-w}\frac{L'}{L}(z-t,\pi)dt,\\
A_\infty(w,z,\pi) &:= -\sum_{v\in S_\infty}\sum_{j=1}^{d}(N_v\pi)^w\zeta\Big(w, \frac{N_v(z+\mu_{v,j}(\pi))}{2}\Big)
\end{aligned}
$$

とおけば,

$$
\begin{aligned}
\exp\Big(-\frac{\partial}{\partial w}A_0(w,z,\pi)\Big|_{w=1-r}\Big) &= \left[\left(\frac{z}{2\pi}\right)^{(\frac{z}{2\pi})^{r-1}}\left(\frac{z-1}{2\pi}\right)^{(\frac{z-1}{2\pi})^{r-1}}\right]^{\delta_{1,\mathbf{1}}},\\
\exp\Big(-\frac{\partial}{\partial w}A_\infty(w,z,\pi)\Big|_{w=1-r}\Big) &= \prod_{v\in S_\infty}\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{\sqrt{2N_v}}\Gamma_{r,v}\big(z+\mu_{v,j}(\pi)\big) = 2^{-\frac{1}{2}nd}L_{r,\infty}(z,\pi)
\end{aligned}
$$

が簡単に計算できる. (後者は Hurwitz ゼータ関数の特殊値の計算である. それゆえ Bernoulli 多項式が現れる.) また $A_f(s,z,\pi)$ についてだが, まずは偏角のずれを利用してそれを $(0,+\infty)$ 上の積分に書き直す. そして, $L(w,\pi)$ の対数微分の表示と比較すれば,

$$
\exp\Big(-\frac{\partial}{\partial s}A_f(s,z,\pi)\Big|_{s=1-r}\Big) = L_r(z,\pi)^{(-1)^{r-1}(r-1)!(2\pi)^{1-r}}
$$

が示される. これら三つを掛け合わせることで, 主結果である (3.1) が導かれる.

注意 3.7. この議論では保型性は全く用いていない. 使ったのは, 与えられた L-関数がオイラー積表示を持ち, 全平面に解析接続され, ガンマ因子を適当に補えばそれが対称な関数等式を満たすという事実だけである. それゆえ, 本議論は "Selberg クラス" (例えば [26] を参照) と呼ばる関数のクラスに属する L-関数に対しても並行して行うことができると考えられる.

参考文献

[1] V.S. Adamchik, The multiple gamma function and its application to computation of series, *The Ramanujan J.*, **9** (2005), 271–288.

[2] K. Barner, On A. Weil's explicit formula, *J. Reine Angew. Math.*, **323** (1981) 139–152.

[3] E.W. Barnes, On the theory of the multiple gamma functions, *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, **19** (1904), 374–425.

[4] C. Deninger, Local L-factors of motives and regularized determinants, *Invent. Math.*, **107** (1992), 135–150.

[5] E. D'Hoker and D.H. Phong, On determinants of Laplacians on Riemann surfaces, *Commun. Math. Phys.*, **104** (1986), 537–545.

[6] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberthettinger and F.G. Tricomi, Higher Transcendental Functions, McGraw-Hill, New York, 1953.

[7] R. Godement and H. Jacquet, Zeta functions of simple algebras, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 260. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[8] H. Iwaniec and P. Sarnak, Perspectives on the analytic theory of L-functions, *GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999), Geom. Funct. Anal.*, 2000, Special Volume, Part II, 705–741.

[9] J. Jorgenson and S. Lang, Basic analysis of regularized series and products, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1564. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[10] J.P. Keating and N.C. Snaith, Random matrix theory and $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, *Commun. Math. Phys.*, **214** (2000), 57–89.

[11] D. Kubert, The universal ordinary distribution, *Bull. Soc. Math. France*, **107** (1979), 179–202.

[12] N. Kurokawa and S. Koyama, Multiple sine functions, *Forum Math.*, **15** (2003), 839–876.

[13] N. Kurokawa, H. Ochiai and M. Wakayama, Multiple trigonometry and zeta functions, *J. Ramanujan Math. Soc.*, **17** (2002), 101–113.

[14] N. Kurokawa, H. Ochiai and M. Wakayama, Milnor's multiple gamma functions, *J. Ramanujan Math. Soc.*, **21** (2006), 153–167.

[15] N. Kurokawa and M. Wakayama, Analyticity of polylogarithmic Euler products, *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, **200** (2003), 382–388.

[16] N. Kurokawa and M. Wakayama, Zeta regularizations, *Acta Appl. Math.*, **81** (2004), 147–166.

[17] N. Kurokawa, M. Wakayama and Y. Yamasaki, Milnor-Selberg zeta functions and zeta regularizations, preprint, 2011.

[18] M. Lerch, Dalši studie v oboru Malmsténovských řad, *Rozpravy České Akad.*, **3** (1894), No. 28, 1–61.

[19] W. Luo, Z. Rudnick and P. Sarnak, On the generalized Ramanujan conjecture for GL(n), Automorphic forms, automorphic representations, and arithmetic (Fort Worth, TX, 1996), 301–310, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **66**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[20] J. Milnor, On polylogarithms, Hurwitz zeta functions, and the Kubert identities, *Enseignement Mathématique*, **29** (1983), 281–322.

[21] P. Michel, Répartition des zéros des fonctions L et matrices aléatoires, Seminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001, *Asterisque*, **282** (2002), Exp. No. 887, viii, 211–248.

[22] K. Onodera, Generalized log sine integrals and the Mordell-Tornheim zeta values, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **363** (2011), 1463–1485.

[23] P. Sarnak, Determinants of Laplacians, *Commun. Math. Phys.*, **110** (1987), 113–120.

[24] H.M. Srivastava and J. Choi, Series associated with the zeta and related functions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[25] M. Schröter and C. Soulé, On a result of Deninger concerning Riemann's zeta function, In : Motives, *Proc. Symp. Pure Math.*, **55**, Part 1 (1994), 745–747.

[26] J. Steuding, Value-distribution of L-functions, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1877, Springer, Berlin, 2007.

[27] A. Voros, Spectral functions, special functions and the Selberg zeta functions, *Commun. Math. Phys.*, **110** (1987), 439–465.

[28] M. Wakayama and Y. Yamasaki, Higher regularizations for zeros of cuspidal automorphic L-functions of GL_d, to appear in *J. Theor. Nombres Bordeaux*, 2011.

[29] Y. Yamasaki, Factorization formulas for higher depth determinants of the Laplacian on the n-sphere, preprint, 2010. arXiv:1011.3095.

山崎 義徳 (Yoshinori YAMASAKI)
〒 790–8577 松山市文京町 2-5 愛媛大学大学院理工学研究科
`yamasaki@math.sci.ehime-u.ac.jp`