Adic 空間のエタールコホモロジーについて

九州大学大学院数理学研究院
三枝 洋一 (Yoichi Mieda)
Faculty of Mathematics, Kyushu University

1 はじめに

Adic 空間とは，Roland Huber ([Hub93], [Hub94]) によって導入された空間概念であり，リジッド解析空間 (複素解析空間の非アルキメデス類似) および局所 Noether 形式スキームを同時に一般化したものである．その理論は，藤原空間，Berkovich 空間と並び，リジッド幾何学の現代的な定式化の一つとして重要視されている．また，本稿の後半でも触れることになるが，adic 空間が形式スキームの一般化になっているという特徴を活かした応用も今後数多く発見されていくであろうことが期待される．

Adic 空間に対してもスキームの場合と同様にエタールコホモロジーを定義することができる．周知の通り，スキームに対するエタールコホモロジーの理論は大成功を収め，今日の数論において欠くことのできない道具となっている．そのため，adic 空間に対しても同様の理論が構築できれば，華々しい応用があるのではないかと夢見るのは自然なことであろう．Adic 空間のエタールコホモロジーの基礎理論はやはり Huber によって考察され ([Hub96])，華々しいとは言わないまでも，非可換 Lubin-Tate 理論等を通じて，局所体上の Galois 表現の理論や p 進簡約代数群の表現論を支える役割を果たすに至っている．しかし，スキームの場合とは異なり，adic 空間のエタールコホモロジーの理論はまだ完成には程遠い状態である．スキームの場合には起こらなかった困難も数多く存在し，そのような困難を目の当たりにすると，スキームの場合と同様の，極めて一般的かつ美しい理論が本当に存在するのかが疑わしく思えてくることもある．そのような心理もあって，筆者は一般論を構築することを第一の目標としているわけではなく，主に非可換 Lubin-Tate 理論を拡張するにはどのようなコホモロジー論が必要であるかという立場から出発して研究を行っている次第である．Lubin-Tate 塔・Drinfeld 塔以外の Rapoport-Zink 空間のコホモロジーに現れる表現を純局所的な立場から考察したり，複数の p 進簡約代数群の表現の間に存在する対応（局所 Langlands 関手性）を adic 空間を用いて幾何学的に実現したりすることを目標としているが，まだまだ先は長いようだ．

Adic 空間の理論は自然かつ一般的で，またリジッド幾何学を扱う際にも大変便利

なものであるが，解説が少ないこともあり，あまり有名ではないようである．そのため本稿では，まず adic 空間の理論を概観することにした．その後，筆者がこれまでに行ってきた研究を，ℓ 独立性，Lefschetz 跡公式，隣接輪体関手と比較定理という三つのトピックに分けて紹介する．はじめの ℓ 独立性は，リジッド空間（非アルキメデス局所体上有限型の adic 空間）の ℓ 進エタールコホモロジーとして得られる局所 Galois 表現について一般的にどのようなことがいえるだろうかという興味から始めた研究である．Lefschetz 跡公式は，Rapoport-Zink 空間のコホモロジーの交代和に現れる表現を計算するために考察したものであるが，その研究過程ではスキームと adic 空間の大きな違いに気付かされた．最後の「隣接輪体関手と比較定理」は最も最近の研究であり，完備離散付値環上の adic 空間（これはリジッド空間と解釈することはできない！）に対して隣接輪体関手を定義しようという試みである．これもやはり Rapoport-Zink 空間のコホモロジーに現れる表現を調べる，特に特定の次数のコホモロジーに超尖点表現が現れないこと（非尖点性）を証明することが目標となっており，Lubin-Tate 空間に対する筆者の別の研究 ([Mie08]) に端を発したものである．

2 Adic 空間

2.1 定義

本小節では，adic 空間の定義を概観する．Adic 空間もスキームと同様，まずアフィンな対象（局所環付空間）を定義し，それを貼り合わせるという流儀で定義される．「アフィンな対象」は古典的なリジッド解析空間の場合と同様，アフィノイドと呼ばれる．Tate はアフィノイドを定義する際に Banach 環から出発したが，adic 空間の場合はノルムを固定せず，位相環から出発するのが特徴である．その際に基本となる位相環のクラスが，次に定義する f-adic 環である．

定義 2.1 位相環 A が **f-adic** であるとは，A のある開部分環 A_0 およびその有限生成イデアル I が存在して，$\{I^n\}_{n\geq 0}$ が $0 \in A_0$ の基本開近傍系となることをいう．この A_0 を A の**定義環**といい，また I を A_0 の**定義イデアル**という．

例えば，Noether 環のイデアルに関する完備化は f-adic である（それ自身が定義環である）．また，$\mathbb{Q}_p$ 上の収束冪級数環

$$\mathbb{Q}_p\langle T_1,\ldots,T_m\rangle = \Big\{ \sum_{I\in\mathbb{N}^m} a_I T^I \;\Big|\; a_I \in \mathbb{Q}_p, a_I \to 0\ (|I| \to \infty)\Big\}$$

($I=(i_1,\dots,i_m)$ に対し，$T^I=T_1^{i_1}\cdots T_m^{i_m}$，$|I|=i_1+\cdots+i_m$ とおいた) に Gauss ノルム $|a_IT^I|=\max_{I\in\mathbb{N}^m}|a_I|_p$ ($|-|_p$ は p 進ノルム) によって位相を入れると，これも f-adic である．実際，$\mathbb{Z}_p\langle T_1,\dots,T_m\rangle=\mathbb{Q}_p\langle T_1,\dots,T_m\rangle\cap\mathbb{Z}_p[[T_1,\dots,T_m]]$ とおくと $\{p^n\mathbb{Z}_p\langle T_1,\dots,T_m\rangle\}_{n\geq 0}$ は $0\in\mathbb{Q}_p\langle T_1,\dots,T_m\rangle$ の基本開近傍系となるので，$\mathbb{Z}_p\langle T_1,\dots,T_m\rangle$ は $\mathbb{Q}_p\langle T_1,\dots,T_m\rangle$ の定義環であり，定義イデアル $p\mathbb{Z}_p\langle T_1,\dots,T_m\rangle$ を持つ．

A を f-adic な位相環とする．$a\in A$ が**冪有界**であるとは，$0\in A$ の任意の開近傍 U に対し $0\in A$ の開近傍 U' が存在して，任意の整数 $n>0$ および $u\in U'$ に対し $a^nu\in U$ となることをいう．容易に分かるように，A の冪有界元全体 A° は A の開部分環をなす．例えば，$\mathbb{Q}_p\langle T_1,\dots,T_m\rangle^\circ=\mathbb{Z}_p\langle T_1,\dots,T_m\rangle$ である．

定義 2.2 位相環の組 (A,A^+) が次の条件を満たすとき，**アフィノイド環**という：

- A は f-adic な位相環である．
- A^+ は A の開部分環であり，A の中で整閉であり，かつ A° に含まれる．

このアフィノイド環から，adic 空間の構成単位となるアフィノイド adic 空間という局所環付空間を構成していくのだが，それには付値論が用いられる．以下に簡単に付値に関する定義をまとめておく．

定義 2.3 i) 環 A の**付値**とは，全順序アーベル群 Γ (演算は乗法的に書く) および写像 $v:A\longrightarrow\Gamma\cup\{0\}$ の組 (Γ,v) であって次を満たすもののことである：

(a) $v(ab)=v(a)v(b)$ $(a,b\in A)$.

(b) $v(a+b)\leq\max\{v(a),v(b)\}$ $(a,b\in A)$.

(c) $v(0)=0$, $v(1)=1$.

ただし，$\Gamma\cup\{0\}$ には Γ の積・順序を $0\cdot\gamma=0$, $0\leq\gamma$ $(\gamma\in\Gamma)$ によって拡張しておく．A の付値 (Γ,v) に対し，$\operatorname{supp}v=v^{-1}(0)$ を v の**台**という．これは A の素イデアルである．また，$v(A)\setminus\{0\}\subset\Gamma$ で生成される Γ の部分群を Γ' と書く．

ii) 環 A の二つの付値 (Γ_1,v_1), (Γ_2,v_2) が**同値**であるとは，順序を保つ同型 $f:\Gamma_1'\longrightarrow\Gamma_2'$ であって $v_2=f\circ v_1$ を満たすものが存在することをいう．

iii) 位相環 A の付値 $v:A\longrightarrow\Gamma\cup\{0\}$ が**連続**であるとは，任意の $\gamma\in\Gamma'$ に対しある $0\in A$ の開近傍 U が存在して $a\in U$ ならば $v(a)<\gamma$ となることをいう．

誤解のないときには，付値は単に v で表し，Γ の方は Γ_v と表すことも多い．

上で導入した用語を用いて，アフィノイド環に伴うアフィノイド adic 空間の構成

を述べる．まず，底空間は次のようにして与えられる：

定義 2.4 アフィノイド環 (A, A^+) に対し，

$$\mathrm{Spa}(A, A^+) = \big\{(v, \Gamma) : A \text{ の連続付値} \bigm| v(a) \le 1 \ (a \in A^+)\big\}/\sim$$

と定める（$\sim$ は付値の同値）．

$t_1A + \cdots + t_nA$ が開集合となるような $t_1, \ldots, t_n, s \in A$ に対し，$\mathrm{Spa}(A, A^+)$ の部分集合 $R\Big(\dfrac{t_1, \ldots, t_n}{s}\Big) = \{v \in \mathrm{Spa}(A, A^+) \bigm| v(t_i) \le v(s) \ne 0\}$ を**有理部分集合**と呼ぶ．$\mathrm{Spa}(A, A^+)$ には有理部分集合を開基とする位相を考えることができる．

次に挙げるように，$\mathrm{Spa}(A, A^+)$ は環の Spec とよく似た位相的性質を持っている：

- 準コンパクトである．
- 準コンパクト開集合からなる開基で，有限交叉について閉じているものがある．
- 任意の既約閉集合は唯一の生成点を持つ（sober 性）．

また，Tate のリジッド解析空間などと異なり，$\mathrm{Spa}(A, A^+)$ はしばしば全不連結ではない．例えば $A = \mathbb{Q}_p\langle T\rangle$, $A^+ = \mathbb{Z}_p\langle T\rangle$ とし，$\mathbb{D}^1 = \mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p\langle T\rangle, \mathbb{Z}_p\langle T\rangle)$（これは $|z| \le 1$ という円板に相当する）の有理部分集合 $U = R\Big(\dfrac{T, p}{p}\Big)$ を考える（これは $|z| \le |p|_p$ という円板に相当する）．このとき，U は $\mathbb{D}^1$ の開部分集合であるが，閉部分集合ではない[注1]．実際，$\mathbb{Q}_p\langle T\rangle$ 上の付値

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \longmapsto \max_i \big\{(|p^i a_i|_p, i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}\big\}$$

（$\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ には辞書式順序を入れる）は $\partial U = \overline{U} \setminus U$ の（唯一の）元を与える．Tate のリジッド解析空間が Grothendieck 位相を考えることによって全不連結性を回避したのに対し，adic 空間は点を増やすことによって全不連結性を回避したといえる．

構造層 $\mathcal{O}$ を与えるには，有理部分集合 $R\Big(\dfrac{t_1, \ldots, t_n}{s}\Big)$ 上の断面を与えればよい．A の定義環 A_0 およびその定義イデアル I をとり，環 $A\Big[\dfrac{1}{s}\Big]$ に $\Big\{I^n A_0\Big[\dfrac{t_1}{s}, \ldots, \dfrac{t_n}{s}\Big]\Big\}_{n \ge 0}$ を 0 の基本開近傍系とする位相を入れて完備化した位相環を $A\Big\langle\dfrac{t_1, \ldots, t_n}{s}\Big\rangle$ と書く．さらに，$\Gamma\Big(R\Big(\dfrac{t_1, \ldots, t_n}{s}\Big), \mathcal{O}\Big) = A\Big\langle\dfrac{t_1, \ldots, t_n}{s}\Big\rangle$ とおく（これは有理部分集合の表示によらずに定まることが証明できる）．(A, A^+) にある種の Noether 性の条件を付け

注1 このため，adic 空間においては境界付き円板の方を開円板と呼び，境界がない円板の方を閉円板と呼ぶ．

ると，この $\mathcal{O}$ は $\mathrm{Spa}(A,A^+)$ 上の位相環の層を定めることが示せる．この条件は A が Noether 環の完備化で得られるとき，および**非アルキメデス体**（階数 1 の完備付値体）上の Tate 代数であるときには満たされるので，実用的にはさほど困るわけではない．なお，この条件がないと $\mathcal{O}$ が層を定めない例もある．

以下では $\mathcal{O}$ が層になる場合のみを考えることにする．このとき各 $x \in \mathrm{Spa}(A,A^+)$ における茎 $\mathcal{O}_x$ は局所環となる．さらに，x は A の付値であったから，それを延長することで $\mathcal{O}_x$ 上の付値 v_x が定まる．つまり，次で導入する圏 $\mathscr{V}$ の対象 $(\mathrm{Spa}(A,A^+),\mathcal{O},(v_x)_{x\in\mathrm{Spa}(A,A^+)})$ が得られたことになる（この対象も単に $\mathrm{Spa}(A,A^+)$ と書く）：

定義 2.5 圏 $\mathscr{V}$ を次のように定める：対象は，位相空間 X，X 上の位相環の層 $\mathcal{O}_X$，各 $x \in X$ に対し茎 $\mathcal{O}_{X,x}$ の付値の同値類 v_x を集めたもの $(v_x)_{x\in X}$ からなる三つ組 $(X,\mathcal{O}_X,(v_x)_{x\in X})$ とする．$(X,\mathcal{O}_X,(v_x)_{x\in X})$ から $(Y,\mathcal{O}_Y,(v'_y)_{y\in Y})$ への射は付値と両立する位相環付空間の射，すなわち連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ と位相環の層の準同型 $\varphi\colon \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ の組で，任意の $x \in X$ に対し $v'_{f(x)} = v_x \circ \varphi_x$ となるものとする．

$\mathcal{O}$ の定義より，$\Gamma(\mathrm{Spa}(A,A^+),\mathcal{O})$ は A の完備化に一致する．また，その部分環

$$\left\{s \in \Gamma(\mathrm{Spa}(A,A^+),\mathcal{O}) \;\middle|\; v_x(s) \le 1 \ (x \in \mathrm{Spa}(A,A^+))\right\}$$

は A^+ の完備化に一致する．したがって，$\mathscr{V}$ の対象 $\mathrm{Spa}(A,A^+)$ から (A,A^+) は完備化を除いて復元される．

二つのアフィノイド環 (A,A^+), (B,B^+) の間の準同型，すなわち連続準同型 $f\colon A \longrightarrow B$ で $f(A^+) \subset B^+$ を満たすものが与えられたとき，$\mathscr{V}$ における射 $\mathrm{Spa}(B,B^+) \longrightarrow \mathrm{Spa}(A,A^+)$ が自然に定まる．さらに B が完備であるときには，$\mathscr{V}$ における射 $\mathrm{Spa}(B,B^+) \longrightarrow \mathrm{Spa}(A,A^+)$ はアフィノイド環の準同型 $(A,A^+) \longrightarrow (B,B^+)$ と一対一に対応する．

圏 $\mathscr{V}$ において貼り合わせを行うことで，adic 空間の定義ができる．

定義 2.6 圏 $\mathscr{V}$ の対象で，あるアフィノイド環 (A,A^+) に対応する $\mathrm{Spa}(A,A^+)$ と同型なものを**アフィノイド adic 空間**という．また，局所的にアフィノイド adic 空間と同型な圏 $\mathscr{V}$ の対象を **adic 空間**という．

2.2 形式スキームとの関係

Noether アフィン形式スキーム $\operatorname{Spf} A$ に対し，自然にアフィノイド adic 空間 $\operatorname{Spa}(A, A)$ を定めることができる．これを貼り合わせることで，局所 Noether 形式スキームの圏から adic 空間の圏への充満忠実関手 t が得られる．

一般に，形式スキーム $\mathcal{X}$ よりも adic 空間 $t(\mathcal{X})$ の方が豊かな底空間を有している．例えば，V を完備離散付値環とするとき，$\operatorname{Spf} V$ の底空間は一点であるが，$t(\operatorname{Spf} V) = \operatorname{Spa}(V, V)$ は V の自然な付値に対応する点 η と V の自明な付値 $V \twoheadrightarrow V/\mathfrak{m}_V \longrightarrow \{0, 1\}$ （$\mathfrak{m}_V$ は V の極大イデアル）に対応する点 s との二点からなる（位相は η が生成点，s が閉点となる位相である）．つまり，アフィンスキーム $\operatorname{Spec} V$ からその完備化 $\operatorname{Spf} V$ に移ると位相が貧弱になるが，さらにそれに伴う adic 空間 $t(\operatorname{Spf} V)$ に移ると位相が回復されるというわけである．より一般に，X を Noether スキーム，Y をその閉部分スキームとし，X を Y に沿って完備化して得られる形式スキームを $\mathcal{X}$ とおくと，局所環付空間の射 $(t(\mathcal{X}), \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ が自然に存在する．$X = \operatorname{Spec} A$, $\mathcal{X} = \operatorname{Spf} \widehat{A}$ のときには $v \in \operatorname{Spa}(\widehat{A}, \widehat{A})$ の像は $A \cap \operatorname{supp} v$ で与えられる．

2.3 他のリジッド空間との関係

Adic 空間の圏は，Tate のリジッド解析空間（以下単に Tate 空間という）の圏を部分圏として含んでいる．このことを説明するため，K を非アルキメデス体とし，その付値環を K^+ と書く．K 上の Tate 代数とは，$K\langle T_1, \ldots, T_m \rangle$ という形の K 代数の剰余環として得られる K 代数のことをいうのであった．Tate 代数 A には自然にノルムが定まり，Banach K 代数になる．特に A は f-adic な位相環となり，(A, A°) はアフィノイド環となる．$\operatorname{Sp} A$ にアフィノイド adic 空間 $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$ を対応させる関手を貼り合わせることで，K 上の Tate 空間の圏から $\operatorname{Spa}(K, K^+)$ 上の adic 空間の圏への関手が構成でき，これによって，

- K 上準分離的な Tate 空間の圏
- $\operatorname{Spa}(K, K^+)$ 上準分離的かつ局所有限型な adic 空間の圏

の間に圏同値が誘導される．このため，以後 K 上の**リジッド空間**と言ったときには $\operatorname{Spa}(K, K^+)$ 上局所有限型な adic 空間のことを指すものとする．

前小節で述べた内容と合わせると，形式スキームに対してリジッド空間を対応させる，いわゆる Raynaud 一般ファイバーを adic 空間の枠組みで解釈できる．以下では V を完備離散付値環，K をその商体とし，$\mathcal{X}$ を V 上の Noether 形式スキームとする．このとき，$t(\mathcal{X}) \longrightarrow t(\operatorname{Spf} V)$ による $\eta \in \operatorname{Spf} V$ のファイバー $t(\mathcal{X})_\eta$ は $t(\mathcal{X})$ の開集合であるから，自然に $\operatorname{Spa}(K,V)$ 上の adic 空間の構造を持つ．特に $\mathcal{X}$ が Berkovich の意味で特殊形式スキーム（[Ber96] 参照）であった場合には $t(\mathcal{X})_\eta$ は K 上のリジッド空間となり，さらに準分離的な場合には上記の圏同値を通して Raynaud，Berthelot の構成と一致する．例えば $\mathcal{X} = \operatorname{Spf} V\langle T\rangle$ のときには $t(\mathcal{X})_\eta = \mathbb{D}^1$（境界付き円板）となる．また，$\mathcal{X} = \operatorname{Spf} V[[T]]$ のときには $t(\mathcal{X})_\eta$ は境界のない円板となる．より正確には，$\{v \in \operatorname{Spa}(K\langle T\rangle, V\langle T\rangle) \mid v(T) < 1\}$ の内部として得られる開集合に $\mathbb{D}^1$ より誘導される adic 空間の構造を入れたものとなる．

また，藤原空間に対して adic 空間を自然に対応させることもできる．詳細は割愛するが，藤原空間 $\mathscr{X}$ に対応する adic 空間の底空間は $\mathscr{X}$ の Zariski-Riemann 空間 $\langle\mathscr{X}\rangle$ に一致する．藤原空間に対応する adic 空間を考えると，[Hub94, Theorem 2.2] 中の Noether 条件を満たさないようなアフィノイド環 (A, A^+) に対しても構造層 $\mathcal{O}$ の存在が証明できることがある．

2.4 エタールコホモロジー

Adic 空間に対するエタールコホモロジーの定義は，基本的にスキームの場合と同じである．まず adic 空間の間のエタール射を定義し，それを用いてエタールサイトを定義する．Adic 空間 X のエタールサイト $X_{\text{ét}}$ における射の族 $(Z_i \longrightarrow Y)_{i\in I}$ が被覆となっているための条件は，単に Z_i $(i \in I)$ の像が Y を覆うというものである．詳細は Huber の本 [Hub96] を参照されたい．

Adic 空間ないしリジッド空間のエタールコホモロジーを考える強い動機として，非可換 Lubin-Tate 理論がある．これについて簡単に復習しておこう．本稿では Drinfeld 上半空間を用いた定式化を紹介する（Lubin-Tate 空間を用いた定式化もある）．$d \geq 2$ を整数とする．K を非アルキメデス局所体（剰余体が有限体である完備離散付値体）とし，D を K 上の中心的斜体で Hasse 不変量が $1/d$ であるものとする．$\mathbb{P}^{d-1}$ から K 上定義された超平面を全て除いて得られる K 上のリジッド空間を Ω^{d-1} と書く（K 上定義された超平面は無限個存在するので，Ω^{d-1} は K 上のスキームとはならないことに注意）．Ω^{d-1} は階数 d の特殊形式 $\mathcal{O}_D$ 加群によるモジュライ解釈を持つ（Drinfeld による）ので，Ω^{d-1} 上には普遍形式 $\mathcal{O}_D$ 加群がある．その等

分点を用いることで Ω^{d-1} 上の Galois エタール被覆の塔（**Drinfeld 塔**と呼ばれる）$\cdots \longrightarrow \Sigma_m \longrightarrow \Sigma_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Sigma_0 = \Omega^{d-1}$ が得られる．この塔 $\{\Sigma_m\}_{m\geq 0}$ の ℓ 進エタールコホモロジーに

- 局所 Langlands 対応（$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の d 次元 ℓ 進表現と $\mathrm{GL}_d(K)$ の既約許容表現の対応）
- 局所 Jacquet-Langlands 対応（$\mathrm{GL}_d(K)$ の既約離散系列表現と $D^\times$ の既約許容表現の対応）

が現れるということを主張するのが非可換 Lubin-Tate 理論である．このような現象に最初に注目したのは Drinfeld であり，正確な予想として提出したのは Carayol ([Car90]) であるが，そのころにはまだリジッド空間に対するエタールコホモロジーの枠組みは存在しなかった．彼らの観察や予想を定式化することを大きな動機の一つとして，リジッド空間に対するエタールコホモロジーの理論が発展してきたことは間違いないだろう．

上記の Carayol の予想は Harris（混標数）および Hausberger（等標数）によって大域的な手法を用いることで解決されたが，さらに Drinfeld 塔の局所的な研究を推し進めることで，局所 Langlands 対応についてより理解が進むことが期待できる．また，Drinfeld 上半空間（や Lubin-Tate 空間）の一般化として **Rapoport-Zink 空間**というものがある（[RZ96] 参照）．これも付加構造付きの形式群や p 可除群のモジュライ空間として定義され（PEL 型志村多様体の局所版と考えるとイメージしやすいだろう），そのコホモロジーとして $\mathrm{GL}_n(K)$ や $D^\times$ 以外の群の表現を得ることができる．しかし，一般の Rapoport-Zink 空間のコホモロジーに関しては，古典的な例である Lubin-Tate 空間，Drinfeld 上半空間と比べると分かっていることがあまりにも少なく，今後の重要な研究課題であると思われる．

3 ℓ 独立性

本節では K を非アルキメデス局所体とし，その整数環を $\mathcal{O}_K$ と書く．また，K の剰余体の位数を q とおく．合成 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) \underset{(*)}{\cong} \widehat{\mathbb{Z}}$ を n で表す．ここで $\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ であり，また $(*)$ は $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ の**幾何的 Frobenius 元** $x \longmapsto x^{1/q}$ と $1 \in \widehat{\mathbb{Z}}$ を対応させる同型である．n の核は**惰性群**と呼ばれ，I_K と書かれる．I_K は $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ からの誘導位相によってコンパクト群となる．$W_K = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \mid n(\sigma) \in \mathbb{Z}\}$, $W_K^+ = \{\sigma \in W_K \mid n(\sigma) \geq 0\}$ とおき，前者を

K の **Weil 群**と呼ぶ．W_K は I_K を開部分群とする自然な位相によって局所コンパクト群となる．

以下，K の剰余体の標数を p とし，p と異なる素数 ℓ を一つ固定する．K 上分離的なリジッド空間 X を考えよう．このとき，スキームの場合と同様，コンパクト台コホモロジー $H_c^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ をとることで $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の連続 ℓ 進表現が得られる．したがって，特に W_K に制限することによって W_K の連続 ℓ 進表現も得られることになる．さらに X が準コンパクト空間である場合には，$H_c^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は有限次元 $\mathbb{Q}_\ell$ ベクトル空間になることが知られている（K の標数が 0 の場合には [Hub98]，K の標数が正の場合には [Hub07]）．

このようにして得られる W_K の表現について，一般に次のようなことが成り立つ：

定理 3.1 ([Mie06a], [Mie07]) X を K 上分離的かつ準コンパクトなリジッド空間とする．X が K 上スムーズであるか，または K の標数が 0 であるとき，任意の $\sigma \in W_K^+$ に対して次が成立する：

i) σ の $H_c^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ における任意の固有値 α は代数的整数である．さらに，ある整数 $m \geq 0$ が存在して，α の全ての共役の複素絶対値は $q^{m/2}$ となる．

ii) $\sum_{i=0}^{2\dim X}(-1)^i \operatorname{Tr}(\sigma; H_c^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$ は ℓ に依存しない整数である．

i) は有限体上のスキームに対する Weil 予想の類似であり，実際それに帰着させることで証明される．ii) は ℓ 独立性と呼ばれる性質である．局所体上のスキームに対するこれらの性質は落合理氏によって証明されている ([Och99])．上記の定理はリジッド空間のエタールコホモロジーとして得られる Galois 表現がスキームより得られる Galois 表現と同様の性質を満たしていることを主張しており，リジッド空間のエタールコホモロジーを用いて多くの興味深い Galois 表現が構成できることへの理論的な根拠を示していると考えられる．

証明について簡単に述べる（より詳しい解説は [Mie06b] を参照していただきたい）．スキームの場合の落合氏による証明は，de Jong のオルタレーションと X の次元に関する帰納法を組み合わせることによってなされている．しかし，この証明をそのままリジッド空間に転用することはできない．最も大きな問題は，リジッド空間がスキームよりもはるかに複雑な位相構造を有しているということである．K 上有限型なスキームの底空間は Noether 空間であるから，空でない開集合を除いていくという操作を繰り返すことでどんどん次元を下げることができるが，K 上のリジッド空間では同様のことは期待できない．例えば円板 $\mathbb{D}^1$ から円環 $|p|_p^n \leq |z| \leq 1$ $(n \geq 1)$

をいくら除いても次元は一定である．

実際の方針は，まず X が K 上スムーズである場合に次元の帰納法を用いることなく主張を証明し，それを用いて K の標数が 0 である場合に次元の帰納法を用いて証明するというものである．X が K 上スムーズである場合には，Čech スペクトル系列を用いることで次の場合（代数化可能な場合）に帰着できる：$\mathcal{O}_K$ 上分離有限型なスキームでスムーズな一般ファイバーを持つもの $\mathcal{X}$ が存在して，X は $\mathcal{X}$ の特殊ファイバーに沿った完備化 $\mathcal{X}^\wedge$ の Raynaud 一般ファイバー $t(\mathcal{X}^\wedge)_\eta$ と同型である（2.3 節の記号を用いた）．実際，X は局所的には代数化可能であり，また，代数化可能な開集合の交わりはまた代数化可能である．$t(\mathcal{X}^\wedge)_\eta$ のコホモロジーは次のように $\mathcal{X}$ の隣接輪体のコホモロジーとして計算できる（$\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ は $\mathcal{X}$ の特殊ファイバーの $\overline{\mathbb{F}}_q$ への底変換）：

$$H^i_c\big(t(\mathcal{X}^\wedge)_{\eta,\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell\big) \cong H^i_c(\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, R\psi\mathbb{Q}_\ell).$$

以上より，X が K 上スムーズである場合の定理は次に帰着される：

定理 3.2 $\mathcal{X}$ を $\mathcal{O}_K$ 上分離有限型なスキームで純 d 次元，スムーズな一般ファイバーを持つものとする．このとき，W_K の表現 $H^i_c(\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, R\psi\mathbb{Q}_\ell)$ について，定理 3.1 i), ii) と同様の性質が成り立つ．

これのうち i) については，オルタレーションとコホモロジー降下によって容易に証明できる．ii) の証明は，斎藤毅氏の方法 ([Sai03]) を参考にして，主張を次のように代数的対応付きの場合に拡張することで行った：

定理 3.3 $\mathcal{X}$ を定理 3.2 と同様とし，$\Gamma \subset \mathcal{X} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{X}$ を閉部分スキームで純 d 次元な一般ファイバーを持ち，合成 $\Gamma \longrightarrow \mathcal{X} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{X} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathcal{X}$ が固有であるものとする．このとき，$\sigma \in W_K^+$ に対して $\sum_{i=0}^{2d}(-1)^i \operatorname{Tr}(\sigma \circ \Gamma^*; H^i_c(\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, R\psi\mathbb{Q}_\ell))$ は ℓ に依存しない有理数である．

このように拡張しておくことによって，オルタレーションにより $\mathcal{X}$ が強半安定スキーム[注2]である場合に帰着することが可能になるのである．この場合には，[Sai03] における重さスペクトル系列の構成と同様の方法によって，$\mathcal{X}$ の特殊ファイバーの既約成分を用いて $H^i_c(\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, R\psi\mathbb{Q}_\ell)$ を計算するスペクトル系列（**重さスペクトル系列の類似**）を構成することができる．さらに，[Sai03] の議論を部分台付きの場合に精密

[注2] エタール局所的に $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K[T_1, \ldots, T_n]/(T_1 \cdots T_r - \pi)$（$1 \leq r \leq n$，$\pi \in \mathcal{O}_K$ は素元）という形であり，かつ特殊ファイバーの全ての既約成分が $\mathbb{F}_q$ 上滑らかであること．

化することにより，このスペクトル系列が代数的対応の作用について関手的であることが確かめられる．これらのことから，定理 3.3 は最終的に有限体上滑らかなスキームへの代数的対応の作用に関する次の ℓ 独立性に帰着される：

定理 3.4 Y を純 d 次元，$\mathbb{F}_q$ 上分離有限型かつスムーズなスキームとし，$\Gamma \subset Y \times_{\mathbb{F}_q} Y$ を合成 $\Gamma \hookrightarrow Y \times_{\mathbb{F}_q} Y \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} Y$ が固有であるような純 d 次元閉部分スキームとする．このとき，$\sum_{i=0}^{2d}(-1)^i \operatorname{Tr}(\Gamma^*; H_c^i(Y_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell))$ は ℓ に依存しない有理数である．

この ℓ 独立性は藤原一宏氏による跡公式 ([Fuj97]) から容易に導くことができ，X が K 上滑らかである場合の証明が完了する．

なお，[Mie07] が出版された後，定理 3.2 は Weizhe Zheng によって係数層付きの場合に拡張された ([Zhe09])．彼の証明のポイントは，筆者が代数的対応付きの場合に拡張してオルタレーションを用いたのに対し，群作用付きの場合に拡張してオルタレーションを用いた点にあるようである．しかし，彼の方法では定理 3.3 は証明できない．定理 3.3 はそれ自身興味深いものであり，係数層付きの場合への一般化を考えることは面白い問題であると思う．

最後に，K の標数が 0 である場合の証明の概略を述べる．$\dim X$ に関する帰納法を行う．被約化をとることで X が被約である場合に帰着でき，その場合には X が K 上スムーズでないような点全体のなす閉部分 adic 空間 Y の次元は $\dim X$ より小さくなる．また，$U = X \setminus Y$ は K 上スムーズなリジッド空間となる．問題となるのは，U が準コンパクトであるとは限らないため，U に対して定理 3.1 のスムーズな場合を適用できるかどうかが分からないという点である．また，完全系列

$$\cdots \longrightarrow H_c^i(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H_c^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H_c^i(Y_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H_c^{i+1}(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \cdots$$

の存在も実は明らかではない．そこで，Huber による結果 [Hub98] を用いて，U の準コンパクト開部分集合 U' で $H_c^i(U'_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H_c^i(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ が同型になるものの存在を示し，U' に定理 3.1 を適用することで帰納法を進行させる（上記の完全系列も U' の存在から導かれる）．このような U' の存在は K の標数が 0 であるという条件下で証明されている（Lütkebohmert による Riemann の存在定理の p 進版を用いるため）ので，定理 3.1 の証明にも K の標数が 0 であるという仮定が必要となるのである．

4 Lefschetz 跡公式

本節では開リジッド空間の Lefschetz 跡公式について紹介する．その前に，スキームの場合の Lefschetz 跡公式について簡単に復習しよう．k を代数閉体とし，ℓ を k の標数と異なる素数とする．X を k 上分離有限型かつスムーズな純 d 次元スキームとし，$f\colon X \longrightarrow X$ を k 上の固有射とする．このとき，コンパクト台コホモロジーの間に引き戻し写像 $f^*\colon H_c^i(X,\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H_c^i(X,\mathbb{Q}_\ell)$ が定義される．最も基本的な Lefschetz 跡公式は，X が k 上固有であるときに，f の固定点の個数と f がコホモロジーに誘導する準同型の跡の交代和を結び付ける公式である：

定理 4.1 (Lefschetz 跡公式) X が k 上固有であるとき，次が成り立つ：

$$\sum_{i=0}^{2d}(-1)^i \operatorname{Tr}\bigl(f^*; H_c^i(X,\mathbb{Q}_\ell)\bigr) = \#\operatorname{Fix} f.$$

ただし，右辺の $\#\operatorname{Fix} f$ は $X \times_k X$ の対角 Δ_X と f のグラフ $\Gamma_f \subset X \times_k X$ の交点数 $(\Delta_X, \Gamma_f)_{X\times_k X}$ によって定義される整数である．

この公式を用いると，群が作用する空間が与えられたとき，そのコホモロジーの交代和として得られる仮想表現の指標を群作用の固定点の数え上げによって計算することができる．志村多様体のコホモロジーの計算などに必要不可欠な定理である．

X が k 上固有であるという条件を外すと上記の公式は一般に成り立たない．例えば，$X = \mathbb{A}^1$, $f\colon \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1$; $a \longmapsto a+1$ とすると，左辺は 1 になる一方，右辺は 0 である．しかし，左辺と右辺の「誤差」を無限遠における固定点の寄与として記述する Lefschetz-Verdier 跡公式という公式が存在する：

定理 4.2 (Lefschetz-Verdier 跡公式) $X \hookrightarrow \overline{X}$ を X のコンパクト化とし ($\overline{X}$ は k 上スムーズであるとは限らない)，f が $\overline{f}\colon \overline{X} \longrightarrow \overline{X}$ と延長されているとする．また，スキーム $\operatorname{Fix} f = \Delta_X \times_{(X\times_k X)} \Gamma_f$ が k 上固有であるとする（例えば f の固定点が全て孤立点ならばよい）．このとき，$\operatorname{Fix}\overline{f}$ の連結成分 D で X の境界 ∂X に含まれているものに対し，D のエタール近傍での $X \times_k X \subset \overline{X} \times_k \overline{X} \supset \Gamma_{\overline{f}}$ の様子のみに依存する $\mathbb{Q}_\ell$ の元 loc_D（局所項と呼ばれる）が存在して，次が成り立つ：

$$\sum_{i=0}^{2d}(-1)^i \operatorname{Tr}\bigl(f^*; H_c^i(X,\mathbb{Q}_\ell)\bigr) = \#\operatorname{Fix} f + \sum_{D\in\pi_0(\operatorname{Fix}\overline{f}),\, D\subset\partial X} \operatorname{loc}_D.$$

この定理から特に，境界 ∂X 上に $\overline{f}$ の固定点が存在しなければ定理 4.1 と同じ形の跡公式が成り立つことが分かる．なお，前節で用いた藤原氏の跡公式は，k が有限体の代数閉包である場合に，f に Frobenius 射の十分高い冪を合成すると全ての局所項が 0 になることを主張する定理である．

ではリジッド空間の場合の考察に移ろう．K を代数閉な非アルキメデス体とし，その付値環を K^+ とする．$S = \mathrm{Spa}(K, K^+)$ とおく．X を S 上固有な adic 空間とし[注3]，$U \subset X$ を S 上準コンパクトかつスムーズ，純 d 次元な開部分 adic 空間とする[注4]（スキームの場合の $X, \overline{X}$ をそれぞれ U, X と書き換えている）．$\overline{f}: X \longrightarrow X$ を S 上の射とし，U の $\overline{f}$ による像がまた U に含まれ，かつ $f = \overline{f}|_U: U \longrightarrow U$ が固有であると仮定する．さらに adic 空間 $\mathrm{Fix}\, f = \Delta_U \times_{(U \times_S U)} \Gamma_f$ が S 上固有であると仮定する．このとき，$\sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \operatorname{Tr}(f^*; H_c^i(U, \mathbb{Q}_\ell))$ と $\#\,\mathrm{Fix}\, f = (\Delta_U, \Gamma_f)_{U \times_S U}$ を比較することが目標である．ただし，リジッド空間上の交叉理論はまだ整備されていないので，さしあたり $(\Delta_U, \Gamma_f)_{U \times_S U}$ は Δ_U と Γ_f のサイクル類のカップ積のトレース射 $H_c^{4d}(U \times_S U, \mathbb{Q}_\ell(2d)) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell$ による像として定義する．この定義だと交点数が ℓ 進数になってしまうという短所があるが，応用上は問題ないだろう．

U が S 上固有ならば，定理 4.1 の証明をそのままなぞることによって同様の跡公式を証明することができる．問題は U が S 上固有ではない場合である．まず最初の観察として，定理 4.2 の類似は一般には成立しないことが分かる．例として，$U = \mathbb{D}^1$, $X = \mathbb{P}^1$, $\overline{f}: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1;\ a \longmapsto a + 1$ を考えよう．このとき，adic 空間 $\mathrm{Fix}\,\overline{f} \subset \Delta_{\mathbb{P}^1} \cong \mathbb{P}^1$ は無限遠点 ∞ のみからなり，$\partial\mathbb{D}^1$ に含まれる連結成分を持たない．したがって，もし定理 4.2 の類似が成り立つならば，

$$\sum_{i=0}^{2} (-1)^i \operatorname{Tr}\bigl(f^*; H_c^i(\mathbb{D}^1, \mathbb{Q}_\ell)\bigr) = \#\,\mathrm{Fix}\, f$$

となるはずであるが，左辺は 1，右辺は 0 なので不合理である．

では，なぜスキームに対して成り立つ定理が adic 空間に対して成り立たないのだろうか．両者のコホモロジー論にはいったいどのような違いがあるのだろうか．それをつきとめるため，$j: U \hookrightarrow X$ を開埋め込みとし，自然な射

$$\tau: (1 \times j)_!(j \times 1)_* \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow (j \times 1)_*(1 \times j)_! \mathbb{Q}_\ell$$

注3 X は K 上のリジッド空間であるとは限らない．[Hub96] 中の固有射の定義を参照．

注4 U は K 上のリジッド空間である．

を考えよう[注5]（$1 \times j$ は $U \times_S U \hookrightarrow U \times_S X$ あるいは $X \times_S U \hookrightarrow X \times_S X$ を表す．$j \times 1$ も同様）．このとき，τ は一般には同型ではない．実際，上で考察した $U = \mathbb{D}^1$, $X = \mathbb{P}^1$ の場合には，$\Delta_{\partial \mathbb{D}^1} \subset \mathbb{P}^1 \times_S \mathbb{P}^1$ の唯一の点 v_0 において $(1 \times j)_!(j \times 1)_* \mathbb{Q}_\ell$, $(j \times 1)_*(1 \times j)_! \mathbb{Q}_\ell$ の茎をとると，前者は 0 になるが，後者は $\mathbb{Q}_\ell$ となる．一方スキームにおいては τ と同様の射は同型になる（層に対する Künneth 公式より，$(1 \times j)_! R(j \times 1)_* \mathbb{Q}_\ell$ と $R(j \times 1)_*(1 \times j)_! \mathbb{Q}_\ell$ はともに $Rj_* \mathbb{Q}_\ell \boxtimes j_! \mathbb{Q}_\ell$ と同型である）ことに注意すると，τ が同型であるかどうかはスキームと adic 空間の大きな違いであると見ることができる．

実は，この τ が同型であるかどうかは Lefschetz-Verdier 跡公式が成立するかどうかと直結しているのである．τ に $R\Gamma(X \times_S X, -)$ を施すと同型になることに注意すると，$\sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \operatorname{Tr}(f^*; H^i(U, \mathbb{Q}_\ell))$ は図式

$$\begin{tikzcd}
H^{2d}(X \times_S X, (1 \times j)_!(j \times 1)_* \mathbb{Q}_\ell) \arrow[r, "H^{2d}(\tau)", "\cong"'] \arrow[d, "\delta_X^*"] & H^{2d}(X \times_S X, (j \times 1)_*(1 \times j)_! \mathbb{Q}_\ell) \arrow[d, dashed] \\
H^{2d}(X, j_! \mathbb{Q}_\ell) = H_c^{2d}(U, \mathbb{Q}_\ell) \arrow[r, "\mathrm{Tr}"] & \mathbb{Q}_\ell
\end{tikzcd}$$

(Tate 捻りは無視して書いている）において $\Gamma_{\overline{f}}$ のサイクル類 $\operatorname{cl}(\Gamma_{\overline{f}}) \in H^{2d}(X \times_S X, (j \times 1)_*(1 \times j)_! \mathbb{Q}_\ell)$[注6]を $\mathbb{Q}_\ell$ に送って得られる元に一致することが分かる．したがって，もし τ が同型であったならば，この図式を全て $\Gamma_{\overline{f}}$ で局所化する（H^* を $H^*_{\Gamma_{\overline{f}}}$ などに変える）ことで Lefschetz-Verdier 跡公式と類似した公式を得ることができる．一方で，τ が同型でない場合には一般には $H^{2d}_{\Gamma_{\overline{f}}}(\tau)$ は同型にはならず，そのときには同様の議論が機能しないことも分かる．

随分前置きが長くなってしまったが，こうした考察を経て次の跡公式に到達した：

定理 4.3 (開リジッド空間の Lefschetz 積公式) $X, U, \overline{f}, f$ は上記の通りとする．任意の $x \in \partial U$ に対し，X の構成可能閉部分集合 W_x で $x \in W_x$, $\overline{f}(W_x) \cap W_x = \varnothing$ を満たすものが存在すると仮定するとき，$\sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \operatorname{Tr}(f^*; H^i(U, \mathbb{Q}_\ell)) = \# \operatorname{Fix} f$ が成り立つ．

定理中の仮定より，特に $\overline{f}$ は ∂U 上に集合論的な固定点を持たないことが分かる．これは adic 空間 $\operatorname{Fix} \overline{f}$ が Δ_U に含まれることよりもはるかに強い条件である．

注5 $(j \times 1)_*$ は完全関手であるので，$(j \times 1)_* = R(j \times 1)_*$ である．

注6 サイクル類 $\operatorname{cl}(\Gamma_{\overline{f}})$ がこのコホモロジー内に定義できることに f が固有であるという仮定を使う．

定理 4.3 は，$d = 1$ で f が有限射の場合には Huber によって証明されている ([Hub01])．また，X がスキームから来る場合には藤原氏によって証明されている ([Fuj97]，位相的跡公式)．

証明のアイデアは，閉集合 $\Gamma_{\overline{f}} \subset X \times_S X$ を少し大きくした Γ' に置き換えて，

- $H^{2d}_{\Gamma'}(\tau)$ が同型である
- $\Delta_X \cap \Gamma' \subset \Delta_U$

の二つが同時に成立するようにするというものである．これらが成立していれば，前頁の図式を Γ' で局所化することで所望の跡公式が得られる（後者の条件は $H^{2d}_{\Delta_X \cap \Gamma'}(X, j_!\mathbb{Q}_\ell)$ から $H^{2d}_c(U, \mathbb{Q}_\ell)$ へ射が存在するために必要である）．Γ' の構成は次の通りである：有限個の点 $x_1, \ldots, x_n \in \partial U$ を $\bigcup_{i=1}^n W_{x_i} \supset \partial U$ となるようにとり（∂U は X の構成可能閉部分集合なのでこのようなことは可能である），$\Gamma' = \Gamma_{\overline{f}} \cup \bigcup_{i=1}^n (W_{x_i} \times_S f^{-1}(W_{x_i}))$ とする．Γ' が後者の条件を満たすことは明らかである．前者の条件を満たすことは，任意の構成可能閉部分集合 $W_1, W_2 \subset X$ に対して $R\Gamma_{W_1 \times_S W_2}(\tau)$ が同型であることから従う．

定理 4.3 の応用について述べる．まず，藤原氏が [Fuj97] において証明した縮小射の跡公式を一般のリジッド空間に拡張することができる（[Fuj97] においてはスキームから来るリジッド空間のみを扱っている）．ただし，扱えるのは定数層係数の場合に限る．この縮小射の跡公式は，p 進対称空間などに応用できるのではないかと期待している．

また，K 上スムーズかつ部分固有なリジッド空間 X に p 進半単純群 G が連続に作用していて条件

- G の作用に関して非常に良く振舞う X の「セル分割」が存在する（詳細は割愛）
- 楕円非正則元 $\gamma \in G$ に対し，$\# \mathrm{Fix}\, \gamma = 0$

を満たすならば，G の許容表現 Π に対して $\dim R\mathrm{Hom}_G(R\Gamma_c(X, \mathbb{Q}_\ell), \Pi)$ を各楕円正則元 $\gamma \in G$ の作用の固定点の個数 $\# \mathrm{Fix}\, \gamma$ と Π の指標によって記述することができる．これは Drinfeld 上半空間および Lubin-Tate 空間に対しては適用可能であるが，それ以外の Rapoport-Zink 空間に対しては適用できない．古典的な場合以外に定理 4.3 を適用するには，各 Rapoport-Zink 空間の幾何学をもう少し詳しく調べる必要がありそうである．

さらに，定理 4.3 の証明を少し変えることで，$\dim X = \dim U = 1$ の場合には $\overline{f}$ に関する仮定がなくても Lefschetz-Verdier 跡公式と類似した等式をつくることができる．この場合には $\partial U = \{x_i\}_{i \in I}$ は有限個の閉点からなる．$I_{\mathrm{fix}} = \{i \in I \mid \overline{f}(x_i) =$

$x_i\}$ の各元 i に対し，局所項 $\mathrm{loc}_i \in \mathbb{Q}_\ell$ が定義でき，

$$\sum_{i=0}^{2}(-1)^i \operatorname{Tr}\bigl(f^*; H_c^i(U, \mathbb{Q}_\ell)\bigr) = \#\operatorname{Fix} f + \sum_{i \in I_{\mathrm{fix}}} \mathrm{loc}_i$$

という式が得られるのである．Huber も [Hub01] において類似の跡公式を得ているが，彼の局所項は x_i に対応する付値環（高さ 2 の付値環となる）についての分岐理論を用いて定義される代数的なものであり，上述の loc_i（コホモロジーを用いて定義される）とは異なる定義を持つ．これらの比較については現在研究中である．もし両者の一致が証明できれば，Huber の跡公式の別証明が得られるだけではなく，より次元の高いリジッド空間の跡公式の局所項に分岐理論的な量が現れるのではないかという期待を持つことができる．

5　隣接輪体関手と比較定理

本節では V を剰余体が代数閉な完備離散付値環（例えば非アルキメデス局所体の最大不分岐拡大の整数環の完備化）とし，その商体を K とする．X を V 上有限型なスキームとし，その一般ファイバー，特殊ファイバーをそれぞれ X_η, X_s と書く．Y を X_s の閉部分スキームとし，X を Y に沿って完備化して得られる形式スキームを $\mathcal{X}$ とおく．

$X \longrightarrow \operatorname{Spec} V$ についての隣接輪体関手 $R\psi_X$ の重要性はよく知られていることと思う．$R\psi_X\mathbb{Q}_\ell$ は X の還元の「悪さ」，すなわち X_η と比べた X_s の特異性の高さを測る指標である．これまで，志村多様体の隣接輪体を考察することによって局所 Langlands 予想の解決を始めとする数多くの成果が得られてきたわけであるが，その際にしばしば，群 G が X には作用しないが $\mathcal{X}$ には作用するという状況が現れる．例えば，X が Harris-Taylor 型の志村多様体 ([HT01]) である場合，その超特異点における完備化は Lubin-Tate 空間となり $D^\times$（局所体上の中心的斜体の乗法群）が作用するが，X 全体には $D^\times$ は作用しない．そうした状況において，G の $R\psi_X\mathbb{Q}_\ell$ への作用のようなものを考えることが重要となる．Vladimir Berkovich はリジッド幾何学の理論を用いて $\mathcal{X}$ に対し**形式隣接輪体関手** $R\Psi_{\mathcal{X}}$ を定義し，$R\Psi_{\mathcal{X}}\mathbb{Q}_\ell$（これは Y 上の対象である）が $(R\psi_X\mathbb{Q}_\ell)|_Y$ と自然に同型になることを証明した（[Ber94] および [Ber96] を参照）．これによって $(R\psi_X\mathbb{Q}_\ell)|_Y$ には G が作用することが分かる．

しかし，この方法では $R\psi_X\mathbb{Q}_\ell$ の情報のうち Y の外の部分は捨ててしまうことになる．一方で，[Mie08] においては Y の外の部分を利用して Lubin-Tate 塔のコホモ

ロジーの非尖点性を導いている．その際には，$\mathcal{X}$ がアフィン形式スキーム $\mathrm{Spf}\,A$ である場合に，$\widehat{X}=\mathrm{Spec}\,A$（これは V 上有限型ではない！）の隣接輪体 $R\psi_{\widehat{X}}\mathbb{Q}_\ell$ を考えている．G は $\mathcal{X}$ に作用するので $\widehat{X}$ にも作用し，したがって $R\psi_{\widehat{X}}\mathbb{Q}_\ell$ にも作用する．その一方で，X はエクセレントであるから $h\colon\widehat{X}\longrightarrow X$ は正則射となり正則底変換定理から $R\psi_{\widehat{X}}\mathbb{Q}_\ell\cong h_s^*R\psi_X\mathbb{Q}_\ell$ がいえるので，$R\psi_{\widehat{X}}\mathbb{Q}_\ell$ は $R\psi_X\mathbb{Q}_\ell$ の情報をきちんと引き継いでいることが分かる．$R\psi_{\widehat{X}}\mathbb{Q}_\ell$ の載っているスキーム $\widehat{X}_s$ は Y よりも豊富な位相構造を持っており，それを利用することで[注7]非尖点性が導かれるのである．この方法の欠点は，$\mathcal{X}$ がアフィンでないと通用しないということである．

ここで，形式スキーム $\mathcal{X}$ に伴う adic 空間 $t(\mathcal{X})$ を考えると，X の位相がある程度復元されるという 2.2 節の観察を思い出そう．さらに，t は関手なのでもちろん G は $t(\mathcal{X})$ に作用している．そこで，上記の $\widehat{X}$ の代わりに $t(\mathcal{X})$ を利用できないだろうかと考えた．$t(\mathcal{X})$ は $\mathrm{Spa}(V,V)$（$\mathrm{Spec}\,V$ と同じく二点集合！）への構造射を持っているので，これについて隣接輪体関手をスキームの場合と同様に定義し，それが X の隣接輪体関手と比較可能であることを証明すれば，上記の二つの方法の欠点を同時に補うことができそうである．以上の考察のもと，次の定義および定理を得た：

定義 5.1 $\mathcal{X}$ を $\mathrm{Spf}\,V$ 上の局所 Noether 形式スキームとする．K の分離閉包 $\overline{K}$ を固定し，$\overline{K}$ に含まれる K の有限次拡大体 F に対し次のような図式を考える：

$$\begin{array}{ccccc}
t(\mathcal{X})_s & \xrightarrow{i_F} & t(\mathcal{X})_{\mathcal{O}_F} & \xleftarrow{j_F} & t(\mathcal{X})_F \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
s & \longrightarrow & \mathrm{Spa}(\mathcal{O}_F,\mathcal{O}_F) & \longleftarrow & \mathrm{Spa}(F,\mathcal{O}_F).
\end{array}$$

ここで $\mathcal{O}_F$ は F の整数環，$t(\mathcal{X})_{???}$ は $t(\mathcal{X})$ の底変換である．$t(\mathcal{X})$ 上のエタール層 $\mathcal{F}$ に対し，$t(\mathcal{X})_s$ 上のエタール層の導来圏の対象 $R\Psi_{t(\mathcal{X})}\mathcal{F}$ を次で定義する：

$$R\Psi_{t(\mathcal{X})}\mathcal{F}=\varinjlim_{K\subset F\subset\overline{K}} i_F^*Rj_{F*}(\mathcal{F}|_{t(\mathcal{X})_F}).$$

定理 5.2 定義 5.1 において V が等標数完備離散付値環 $k[[T]]$（k は代数閉体）であるとし，$\mathcal{X}\longrightarrow\mathrm{Spf}\,V$ が k 上有限型なスキームの射から来ていると仮定する．より正確には，

- k 上有限型なスキーム X およびその閉部分スキーム Y，

注7 具体的には，$\widehat{X}_s\setminus Y$ の局所閉部分集合についての $R\psi_{\widehat{X}}\mathbb{Q}_\ell$ の局所コホモロジーを考える．

- k 上スムーズな代数曲線 C およびその閉点 t,
- Y を t にうつす k 上の射 $f:X \longrightarrow C$

が存在して，X を Y に沿って，C を t に沿って完備化することで f より誘導される形式スキーム間の射が $\mathcal{X} \longrightarrow \mathrm{Spf}\, k[[T]]$ と一致することを仮定する．2.2 節で述べたように，このとき局所環付空間の間の自然な射 $t(\mathcal{X}) \longrightarrow X$ が存在するが，さらにこれはエタールサイトの間の射 $t(\mathcal{X})_{\text{ét}} \longrightarrow X_{\text{ét}}$ および $t(\mathcal{X})_{s,\text{ét}} \longrightarrow X_{t,\text{ét}}$ を誘導する．これらを ε と書く．

以上の設定のもとで，X 上の任意の構成可能 $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ 層（ℓ は k の標数と異なる素数）$\mathcal{F}$ に対し，自然な同型 $\varepsilon^*R\psi_X\mathcal{F} \xrightarrow{\cong} R\Psi_{t(\mathcal{X})}\varepsilon^*\mathcal{F}$ がある．

定理 5.2 は次の比較定理より従う：

定理 5.3 k を代数閉体とする．X を k 上有限型のスキーム，Y をその閉部分スキームとし，$U = X \setminus Y$ とおく．また，X を Y に沿って完備化して得られる形式スキームを $\mathcal{X}$ とおく．V を U に含まれる開部分スキームとし，$j:V \hookrightarrow X$ を自然な埋め込みとする．$V^{\mathrm{ad}} = t(\mathcal{X}) \times_X V$ を V に伴う adic 空間とし，$j^{\mathrm{ad}}:V^{\mathrm{ad}} \hookrightarrow t(\mathcal{X})$ を j から誘導される射とする．このとき，V 上の構成可能 $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ 層 $\mathcal{F}$ に対し，自然な同型 $\varepsilon^*Rj_*\mathcal{F} \xrightarrow{\cong} Rj^{\mathrm{ad}}_*\varepsilon^*\mathcal{F}$ がある．

この定理の証明について簡単に述べる．j を $V \xhookrightarrow{j_1} U \xhookrightarrow{j_2} X$ と分解し，それに伴った j^{ad} の分解 $V^{\mathrm{ad}} \xhookrightarrow{j_1^{\mathrm{ad}}} U^{\mathrm{ad}} \xhookrightarrow{j_2^{\mathrm{ad}}} t(\mathcal{X})$ を考える．j_2^{ad} は準コンパクトな射であるから，それについての比較定理は茎の計算により比較的容易に証明することができる．一方，j_1^{ad} は準コンパクトではない「解析的な」射（リジッド空間 $\mathbf{A}^1$ から $\mathbb{P}^1$ への射を想像するとよいだろう）なので取り扱いが難しい．筆者はまず藤原空間に対して（少し一般化した）類似の主張を証明し，その後 adic 空間に移るという手法を用いた．藤原空間における比較関手（GAGA 関手）の構成は具体的であるため，底スキームを変更したときにどのように振舞うかが見やすいのである．詳細は省略するが，最終的には藤原氏の比較定理 [Fuj95, Theorem 7.2.1] に帰着させる．

ここで定義した隣接輪体関手を応用するには，定理 5.2 以外に，Berkovich の連続性定理 ([Ber96, Theorem 4.1]) の類似など，もういくつか確かめなくてはならないことがある．しかしそれらを克服できれば，Rapoport-Zink 空間の等標数版（Hartl, Viehmann による）のエタールコホモロジーなどに適用することが可能であろう．

定理 5.2 は V が混標数で，X が V 上有限型なスキームのときにも成立しているこ

とが期待される．これは例えば藤原氏の比較定理 [Fuj95, Theorem 7.2.1] が任意のエクセレントスキーム上で成り立っているならば証明できる．現在では，Gabber の一意化定理など，一般のエクセレントスキームに対して機能する道具立てが揃ってきているので，こうした比較定理が証明できてもおかしくない状況ではあるが，残念ながら筆者にはまだどのように考えればよいのか分からない．

参考文献

[Ber94] V. G. Berkovich, *Vanishing cycles for formal schemes*, Invent. Math. **115** (1994), no. 3, 539–571.

[Ber96] ———, *Vanishing cycles for formal schemes. II*, Invent. Math. **125** (1996), no. 2, 367–390.

[Car90] H. Carayol, *Nonabelian Lubin-Tate theory*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math., vol. 11, Academic Press, Boston, MA, 1990, pp. 15–39.

[Fuj95] K. Fujiwara, *Theory of tubular neighborhood in étale topology*, Duke Math. J. **80** (1995), no. 1, 15–57.

[Fuj97] ———, *Rigid geometry, Lefschetz-Verdier trace formula and Deligne's conjecture*, Invent. Math. **127** (1997), no. 3, 489–533.

[HT01] M. Harris and R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, With an appendix by Vladimir G. Berkovich.

[Hub93] R. Huber, *Continuous valuations*, Math. Z. **212** (1993), no. 3, 455–477.

[Hub94] ———, *A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties*, Math. Z. **217** (1994), no. 4, 513–551.

[Hub96] ———, *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, Aspects of Mathematics, E30, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996.

[Hub98] ———, *A finiteness result for the compactly supported cohomology* *of rigid analytic varieties*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), no. 2, 313–357.

[Hub01] ———, *Swan representations associated with rigid analytic curves*, J. Reine Angew. Math. **537** (2001), 165–234.

[Hub07] ———, *A finiteness result for the compactly supported cohomology of rigid analytic varieties. II*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **57** (2007), no. 3, 973–1017.

[Mie06a] Y. Mieda, *On the action of the Weil group on the l-adic cohomology of rigid spaces over local fields*, Int. Math. Res. Not. (2006), Art. ID 16429, 1–11.

[Mie06b] ———, 局所体上のリジッド空間の ℓ 進コホモロジーへの Weil 群の作用について, RIMS 講究録 1521「代数的整数論とその周辺」, 2006.

[Mie07] ———, *On l-independence for the étale cohomology of rigid spaces over local fields*, Compos. Math. **143** (2007), no. 2, 393–422.

[Mie08] ———, *Non-cuspidality outside the middle degree of l-adic cohomology of the Lubin-Tate tower*, `http://arxiv.org/abs/0806.0697`, preprint, 2008.

[Och99] T. Ochiai, *l-independence of the trace of monodromy*, Math. Ann. **315** (1999), no. 2, 321–340.

[RZ96] M. Rapoport and Th. Zink, *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 141, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[Sai03] T. Saito, *Weight spectral sequences and independence of l*, J. Inst. Math. Jussieu **2** (2003), no. 4, 583–634.

[Zhe09] W. Zheng, *Sur l'indépendance de l en cohomologie l-adique sur les corps locaux*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **42** (2009), no. 2, 291–334.