クラスター圏

伊山 修（名古屋大学多元数理科学研究科）

最近, 三角圏や完全圏における n-クラスター傾斜対象の研究が盛んである. 発端は Caldero-Chapoton-Schiffler [CCS] および Buan-Marsh-Reiten-Reineke-Todorov [BMRRT] によって導入されたクラスター圏 (2.1 節参照) である. クラスター圏における 2-クラスター傾斜対象と, それらの間の mutation と呼ばれる操作が, Fomin-Zelevinsky [FZ1,2] によって導入されたクラスター多元環の圏論化を与えるものとして調べられている[1]. クラスター圏は quiver の表現の導来圏を用いて定義される特別な圏であるが, n-クラスター傾斜対象は一般の三角圏や完全圏においても定義されるものであり, それを例えば, 可換 Gorenstein 環上の Cohen-Macaulay 加群の安定圏において考察する事は, 興味をそそる[2]. 本稿ではクラスター圏の紹介をしつつ, 一般の三角圏の n-クラスター傾斜対象とその mutation を導入し, 最後にある種の不変式環上の Cohen-Macaulay 加群の安定圏の n-クラスター傾斜対象の分類結果を, 吉野雄二氏との共同研究 [IY] に即して報告する.

1. n-クラスター傾斜対象

定義 1.1 $\mathcal{T}$ を三角圏または完全圏（例えばアーベル圏）とし, n を正整数とする. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,Y)$ を (X,Y) と略記する. 対象 $M \in \mathcal{T}$ が **n-クラスター傾斜対象** [KR1] であるとは,

$$\begin{aligned}\mathrm{add}\, M &= \{X \in \mathcal{T} \mid (M, X[i]) = 0 \text{ for any } 0 < i < n\}\\ &= \{X \in \mathcal{T} \mid (X, M[i]) = 0 \text{ for any } 0 < i < n\}.\end{aligned}$$

が成立する事である. 但し $\mathrm{add}\, M$ は, M のコピーの有限直和の直和因子全体よりなる $\mathcal{T}$ の充満部分圏を表す. 例えば, M が 1-クラスター傾斜対象である事は, M が $\mathcal{T}$ の**加法生成元**である事, 即ち $\mathcal{T} = \mathrm{add}\, M$ である事と同値である.

定義より直ちに, n-クラスター傾斜対象 M は **n-rigid**, 即ち $(M, M[i]) = 0$ $(0 < i < n)$ が成立する. 更に n-クラスター傾斜対象は n-rigid であるものの中で極大である事, 即ち n-クラスター傾斜対象 M と n-rigid 対象 N が $M \in \mathrm{add}\, N$ を満たせば, $\mathrm{add}\, M = \mathrm{add}\, N$ となる事も分かる.

2-クラスター傾斜対象（resp. 2-rigid）を, 単に**クラスター傾斜対象**（resp. **rigid**）と呼ぶ事もある. また M が **basic** であるとは, $M = \bigoplus_i M_i$ と直既約分解した際に, M_i は全て非同型であるものとする. n-クラスター傾斜対象を考察する際には, basic なものに限って考える事が多い.

基本的な問題として, 三角圏や完全圏がいつ n-クラスター傾斜対象を持つか, というものがある. これは以下の 2.3 節で述べるように, 80 年代に盛んに研究されていた有限表

[1] 本稿では主に n-クラスター傾斜対象の圏論的, 加群論的側面を扱ったが, クラスター圏やクラスター多元環の周辺では様々な理論が交錯している. 関心を持たれた方は, quiver mutation に関する Keller の webpage [K2] や, クラスター多元環に関する Fomin の webpage [F] をご覧下さい.

[2] 実際, n-クラスター傾斜対象は, 2005 年度の代数学シンポジウムで報告した Auslander-Reiten 理論の $(n+1)$ 次元類似の考察 [I4] に現れる, 極大 $(n-1)$-直交部分圏 [I2,3] と同じ概念である. 2 種類の用語が文献によって混在しており, ちょっと分かりにくい状況になっている.

現型有限次元多元環の分類問題の, ホモロジー代数的観点からの一般化, 高次元化と見なされる [I4]. また, n-クラスター傾斜対象が存在する場合に, その全体がどの様な構造を持っているかは興味深い問題である. 以下の 3 節で述べるように, mutation と呼ばれる, 一つの n-クラスター傾斜対象から別のものを構成する方法があり, 特に $n = 2$ の場合には, Fomin-Zelevinsky によって導入されたクラスター多元環の組み合わせ論的な構造の, 圏論化を与えるものとして盛んに研究されている.

注意 1.2 クラスター傾斜対象は, 傾斜対象の類似として [BMRRT] で導入された. 環 Λ の導来圏 $\mathcal{T} := D(\mathrm{Mod}\,\Lambda)$ の対象 $M \in \mathcal{T}$ が**傾斜対象**であるとは, $(M, M[i]) = 0$ $(i \neq 0)$ かつ M が $\mathcal{T}$ のコンパクトな生成元である事であった. 傾斜対象は, Rickard の導来森田定理 [R], 即ち 2 つの環の導来圏が三角同値であるための必要十分条件に現れる. n-クラスター傾斜対象も, 特別な場合においては三角圏の同値を与える事が Keller-Reiten [KR2] によって知られている.

定義 1.3 以下 k を体とし, $\mathcal{T}$ を k-線形な三角圏で $\dim_k(X, Y) < \infty$ $(X, Y \in \mathcal{T})$ となるものとする. $\mathcal{T}$ の自己同型 $\mathbb{S}$ が **Serre 関手** [BK][RV2] であるとは, 関手的同型

$$(X, Y) \simeq D(Y, \mathbb{S}X) \qquad (X, Y \in \mathcal{T})$$

が存在する事. 但し $D := \mathrm{Hom}_k(-, k)$ とおいた.

$\mathcal{T}$ が n-**Calabi-Yau** であるとは, $[n]$ が Serre 関手を与える事をいう. この時, 任意の $M \in \mathcal{T}$ は $(M, M[n]) \neq 0$ を満たすため, $\mathcal{T}$ は傾斜対象を持たない. 代わりに n-Calabi-Yau 三角圏においては, n-クラスター傾斜対象の考察が興味深い様である. 例えば, $M \in \mathcal{T}$ が n-クラスター傾斜対象である条件は, 簡潔に

$$\mathrm{add}\, M = \{X \in \mathcal{T} \mid (M, X[i]) = 0 \text{ for any } 0 < i < n\}$$

となる.

2. 例

この節では, n-クラスター傾斜対象が自然に現れる例を 4 つ挙げる.

例 2.1 クラスター圏 Q を有限 quiver で cycle の無いものとし, kQ で道多元環を表す. $\mathrm{mod}\, kQ$ で kQ-加群のアーベル圏を表し, $\mathcal{D}_Q := D^b(\mathrm{mod}\, kQ)$ でその導来圏を表す. $\mathcal{D}_Q$ は Serre 関手

$$\nu := D \circ \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{kQ}(-, kQ)$$

を持つ [H]. ここで自己同型 $\mathbb{F}_n := \nu^{-1} \circ [n]$ に対して, 軌道圏

$$\mathcal{C}_Q^{(n)} := \mathcal{D}_Q \,/\mathbb{F}_n$$

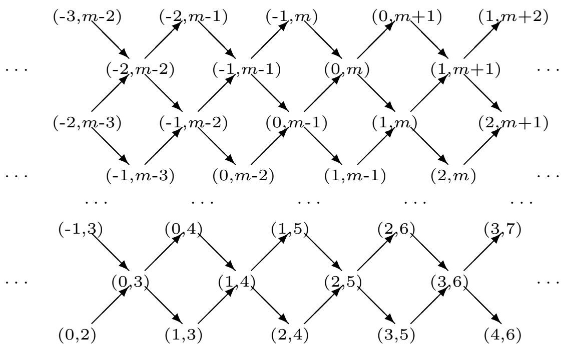
を考える [K1]. 即ち $\mathcal{C}_Q^{(n)}$ の対象は $\mathcal{D}_Q$ の対象の $\mathbb{F}_n$-軌道であり, $X, Y \in \mathcal{D}_Q$ の属する $\mathbb{F}_n$-軌道を $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathcal{C}_Q^{(n)}$ と表す時,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q^{(n)}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Q}(X, \mathbb{F}_n^i Y)$$

である. この時, $\mathcal{C}_Q^{(n)}$ は三角圏を成し, さらに n-Calabi-Yau である事が分かる [BMRRT][K1].

$\mathcal{C}_Q^{(2)}$ は**クラスター圏**と呼ばれ, Fomin-Zelevinsky によって導入された**クラスター多元環**の "圏論化" を与える事を目的として, A 型の場合に Caldero-Chapton-Schiffer [CCS] によって, 一般の場合に Buan-Marsh-Reiten-Reineke-Todorov [BMRRT] によって導入された. 本文で用いる, n-クラスター傾斜対象等の名称は, 全てクラスター多元環を起源としている. クラスター圏の 2-クラスター傾斜対象が, クラスター多元環の生成元に対応し, 以下で定義するクラスター傾斜対象の間の mutation と呼ばれる操作が, クラスター多元環の生成元の間の関係式に対応するのである. また $\mathcal{C}_Q^{(n)}$ は $(n-1)$-**クラスター圏**と呼ばれ, 最近 Baur-Marsh [BM], Thomas [T], Zhu [Z] らによって導入された.

さて Q が A_m 型の quiver の場合に, もう少し詳しく $\mathcal{C}_Q^{(2)}$ とそのクラスター傾斜対象を見ることにする. 詳細は [CCS][BMRRT] 及び [I2, 4 章][3] 参照. まず $\mathcal{D}_Q$ の Auslander-Reiten quiver は以下で与えられる.



即ち, 一つの頂点が $\mathcal{D}_Q$ の直既約対象（の同型類）を表し, 矢印は圏 $\mathcal{D}_Q$ の既約写像と呼ばれる, 圏を生成する射を表す [ARS][ASS][H].

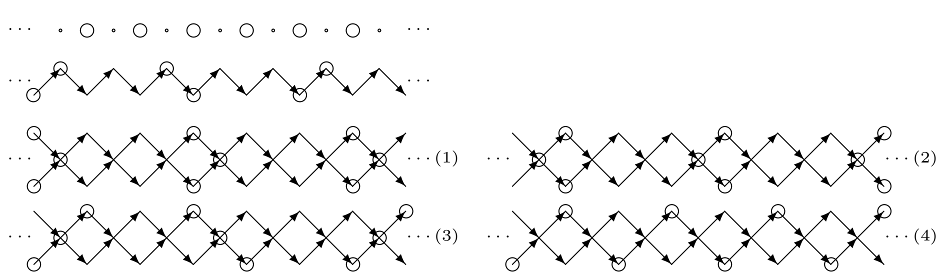
さて自己同型 $\mathbb{F}_2 = \nu^{-1} \circ [2]$ は, 頂点 (i,j)（に対応する直既約対象）を頂点 $(j-m-3, i)$ に写すものなので, $\mathcal{C}_Q^{(2)}$ の Auslander-Reiten quiver は, 上記 quiver において, 頂点 (i,j) と頂点 $(j-m-3, i)$ を同一視したものである.

$\mathcal{C}_Q^{(2)}$ のクラスター傾斜対象を, その直既約因子に対応する頂点に丸をつけることによって, 表記することにすると, 以下の様に, A_1 の場合 2 個, A_2 の場合 5 個, A_3 の場合 14 個の basic なクラスター傾斜対象が存在することが分かる.

(A_1)

(A_2)

(A_3)



一般に $Q = A_m$ の場合, クラスター圏 $\mathcal{C}_Q^{(2)}$ の直既約対象と, 正 $(m+3)$ 角形の対角線（辺は除く）が, 次の対応で一対一に対応することが分かる: 正 $(m+3)$ 角形の頂点を順に $\mathbb{Z}/(m+3)\mathbb{Z}$ と同一視して, $\mathcal{C}_Q^{(2)}$ の頂点 (i,j) に対応する直既約対象を, 正 $(m+3)$ 角形の頂点 i と j を結ぶ対角線に対応させる.

さらにこの時 $M \in \mathcal{T}$ に対し, M の直既約直和因子に対応する, 正 $(m+3)$ 角形の対角線の集合を考えることにより $\mathcal{C}_Q^{(2)}$ の basic なクラスター傾斜対象と, 正 $(m+3)$ 角形の対角

[3] ここでは有限表現型自己入射多元環の安定圏を扱っているが, クラスター圏でも同じ議論が通用する.

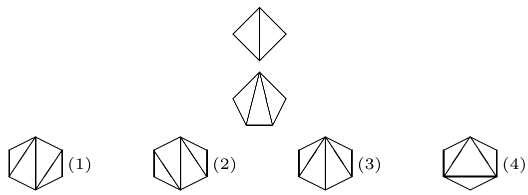
線による三角形分割とが, 一対一に対応することが分かる. 特に $\mathcal{C}_Q^{(2)}$ の basic なクラスター傾斜対象は, 丁度 Catalan 数 $\frac{1}{m+2}\binom{2m+2}{m+1}$ 個存在する事が分かる.

例えば A_m $(m = 1, 2, 3)$ の場合, 三角形分割の（回転を除いた）リストは以下のようになるが, 上で与えたクラスター傾斜対象のリストと一対一に対応していることが分かる.（番号 (1)–(4) は対応を示す. ）

(A_1)

(A_2)

(A_3)



例 2.2 preprojective 多元環 Λ を Dynkin 型の preprojective 多元環とすると, Λ は自己入射的な有限次元多元環である. 射影 Λ-加群を通過する射全体からなる $\mathrm{mod}\,\Lambda$ のイデアルを $[\Lambda]$ で表し, 剰余圏

$$\underline{\mathrm{mod}}\Lambda := (\mathrm{mod}\,\Lambda)/[\Lambda]$$

を**安定圏**と呼ぶ. $\underline{\mathrm{mod}}\Lambda$ は三角圏を成すが [H], さらに 2-Calabi-Yau であり [AR2], 標準的な 2-クラスター傾斜対象を持つ事が Geiss-Leclerc-Schröer [GLS1,2] によって知られている. 彼らは複素リー群の極大冪単部分群 N の座標環 $\mathbb{C}[N]$ のクラスター多元環構造を調べるため, preprojective 多元環とその 2-クラスター傾斜対象を扱っている.

例えば A_n 型の場合, Λ は以下の quiver に関係式 $a_1b_1 = 0$, $a_{i+1}b_{i+1} = b_ia_i$ $(1 \leq i \leq n-2)$ と $b_{n-1}a_{n-1} = 0$ を入れることによって定義される.

$$\overset{e_1}{\bullet} \underset{b_1}{\overset{a_1}{\rightleftarrows}} \overset{e_2}{\bullet} \underset{b_2}{\overset{a_2}{\rightleftarrows}} \overset{e_3}{\bullet} \underset{b_3}{\overset{a_3}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{b_{n-1}}{\overset{a_{n-1}}{\rightleftarrows}} \overset{e_n}{\bullet}$$

この時, Λ_n の剰余環 $\Lambda_m := \Lambda_n/\langle\sum_{i=m+1}^n e_i\rangle$ に対して, 環の全射順同型の列

$$\Lambda = \Lambda_n \to \Lambda_{n-1} \to \cdots \to \Lambda_2 \to \Lambda_1 = k$$

が出来るが,

$$M := \bigoplus_{i=1}^n \Lambda_i$$

は $\underline{\mathrm{mod}}\Lambda$ の 2-クラスター傾斜対象となる事が示される.

例 2.3 Auslander 対応 同型を除いて有限個しか直既約な有限生成加群を持たない有限次元多元環を**有限表現型**と呼ぶ. Auslander [A1][ARS] による次の古い定理は, 多元環の表現論における関手圏の応用の最も基本的な場合に相当し, その意味で今日の Auslander-Reiten 理論の原型を与えていると言える.

定理 2.3.1 有限表現型有限次元多元環 Λ の森田同値類と, 大域次元が 2 以下で dominant 次元が 2 以上の有限次元多元環 Γ の森田同値類の間に一対一対応が存在する. それは Λ に対して $\mathrm{mod}\,\Lambda$ の加法生成元 M をとり $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(M)$ と置く事により与えられる.

上記の条件を満たす多元環は **Auslander 多元環**と呼ばれ, translation quiver と呼ばれるある種の quiver と, mesh 関係式を用いた構造論が知られている [BG][IT][I1] が, これは

有限表現型有限次元多元環における Auslander-Reiten 理論の帰結でもある. より大域次元の高い多元環で, このように良い構造論を持ったクラスを探す事は, 多元環論における基本的問題といえると思う[4]. また, それらの多元環のクラスに対しては, 有限表現型多元環のように何らかの表現論的な意味を持った多元環のクラスが対応している事を期待するのは自然であろう. 実際, 次の事実 [I3] が成立する.

定理 2.3.2 有限次元多元環上の n-クラスター傾斜加群の同値類と, 大域次元が $(n+1)$ 以下で dominant 次元が $(n+1)$ 以上の有限次元多元環 Γ の森田同値類の間に一対一対応が存在する. (但し n-クラスター傾斜 Λ-加群 M と n-クラスター傾斜 Λ'-加群 M' が同値であるとは, $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ と $\mathrm{End}_{\Lambda'}(M')$ が森田同値である事とする.) 対応は n-クラスター傾斜 Λ-加群 M に対して, $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(M)$ を対応させる事により与えられる.

1-クラスター傾斜 Λ-加群は, $\mathrm{mod}\,\Lambda$ の加法生成元に他ならないので, 2.3.2 において $n=1$ とした場合が 2.3.1 に相当する事が分かる.

例 2.4 不変式環 以下 k を標数 0 の体とし, G を $\mathrm{SL}_{n+1}(k)$ の有限部分群とする. S で冪級数環 $k[[x_0, \cdots, x_n]]$ を表し, S^G で G の不変式環を表す. 以下 S^G が孤立特異点である事を仮定する. また $\mathrm{CM}\,S^G$ で maximal Cohen-Macaulay S^G-加群 (以下, 単に $\mathrm{CM}S^G$-加群と呼ぶ) の成す圏を表す. 2 次元の場合の, Herzog, Auslander による次の定理は基本的である [A3][Y].

定理 2.4.1 $n=1$ の時, S^G は**有限表現型**, 即ち直既約 CM S^G-加群は同型を除いて有限個しか存在しない.

一方で $n>1$, $G \neq 1$ の時, S^G は決して有限表現型にならない [AR1] のだが, 有限表現性を 1-クラスター傾斜対象の存在と捉えると, 自然に $n>1$ の場合にも以下の観察がなされる. まず, G が $\mathrm{SL}_{n+1}(k)$ の部分群であることより, S^G は Gorenstein 環となる [W]. 2.2 節と同様に, 射影 S^G-加群を通過する射全体からなる $\mathrm{CM}\,S^G$ のイデアルを $[S^G]$ で表し, 剰余圏

$$\underline{\mathrm{CM}}\Lambda := (\mathrm{CM}\,S^G)/[S^G]$$

を**安定圏**と呼ぶ. $\underline{\mathrm{CM}}S^G$ は三角圏を成すが [H], さらに n-Calabi-Yau である事が Auslander-Reiten 双対より分かる [A2]. この時, 次の事実が成立する [I2].

定理 2.4.2 S は $\underline{\mathrm{CM}}S^G$ の n-クラスター傾斜対象である.

特に $n=1$ とすると, S が $\mathrm{CM}\,S^G$ の加法生成元となって 2.4.1 が得られる.

3. mutation

mutation には, Gorodentsev-Rudakov [GR] による例外列の mutation や, Riedtmann-Schofield [RS] による傾斜加群の mutation などがあるが, いずれも与えられたある種の対象から同種の別の対象を作り出す操作であり, Auslander-Smalo [AS] によって導入された近似の概念と深く関係している. この章では $\mathcal{T}$ は常に n-Calabi-Yau 三角圏を表す.

定義 3.1 $M \in \mathcal{T}$ を固定する.
$X \in \mathcal{T}$ の**極小右 M-近似**とは, 射 $f \in (M', X)$ で以下の条件を満たすものである.
(i) $M' \in \mathrm{add}\,M$.
(ii) $(M, M') \xrightarrow{\cdot f} (M, X) \to 0$ は完全.

[4] 関連した文献として [RV1][B] 参照. Calabi-Yau 多元環の, 有限次元多元環における類似と捉えられないだろうか.

(iii) f は**右極小**である, 即ち f は長さ 2 の複体と見て, $M'' \to 0$ ($M'' \neq 0$) の形の直和因子を持たない.

例えば $X \in \mathrm{add}\, M$ の時は, 恒等写像 $1_X \in (X, X)$ が X の極小右 M-近似を与える. 任意の $\mathcal{T}$ の対象は極小右 M-近似を持ち, 更にそれは複体の同型を除いて一意的であることが容易に分かる. 双対的に**極小左 M-近似**も定義される.

定義 3.2 $M \in \mathcal{T}$ を basic（定義 1.1 参照）な n-クラスター傾斜対象とする. この時 M の直既約直和因子 X を一つ取り, $M = X \oplus N$ と分解し, X の極小右 N-近似 $f \in (N', X)$ を取り, $\mathcal{T}$ の triangle

$$Y \xrightarrow{g} N' \xrightarrow{f} X \to Y[1]$$

をとる. この時, 以下が成立する [BMRRT][GLS1][IY].

命題 3.3 (1) $Y \oplus N$ は $\mathcal{T}$ の n-クラスター傾斜対象である.
(2) Y は直既約であり, g は Y の極小右 N-近似である.

$Y \oplus N$ を $X \oplus N$ の**右 mutation** と呼ぶ. 双対的に**左 mutation** も定義する. 上において, $X \oplus N$ は $Y \oplus N$ の左 mutation である事が 3.3(2) より分かる. また $n = 2$ の場合は, 右 mutation と左 mutation は同じ対象を与える事が分かる.

基本的問題として, $\mathcal{T}$ の全ての n-クラスター傾斜対象が, mutation の繰り返しによって互いに移りあうか？という事が挙げられる. これに関して, 次の結果が知られている [BMRRT].

定理 3.4 cycle を持たない有限 quiver Q に対し, クラスター圏 $\mathcal{C}_Q^{(2)}$ の全てのクラスター傾斜対象は, mutation の繰り返しによって移りあう.

Q が A_m 型の場合, $\mathcal{C}_Q^{(2)}$ の basic なクラスター傾斜対象は, 正 $(m+3)$ 角形の対角線による三角形分割と同一視できた（2.1 節参照）. この場合, クラスター傾斜対象の mutation は, 一本の対角線の入れ替えに相当する. 詳しくは [CCS] 参照.

さて 3.4 がどの程度一般の三角圏 $\mathcal{T}$ で成立するのかは興味深い問題であり, 4 章で肯定的な例を不変式環上の Cohen-Macaulay 加群の安定圏から 2 つ挙げる. この問題の最も単純な場合として, 一つの直既約直和因子以外が一致しているような n-クラスター傾斜対象が, mutation の繰り返しで移りあうかどうかを考察するために, 次の言葉を用意する.

定義 3.5 $N \in \mathcal{T}$ が**概 n-クラスター傾斜対象**であるとは, ある直既約対象 $X \in \mathcal{T}$ が存在して, $X \oplus N$ が n-クラスター傾斜対象となることである. この時 X を N の **complement** と呼ぶ (cf. [RS]).

以下, 概 n-クラスター傾斜対象が幾つ complement を持つかを考察する. $n = 1$ の場合は, 明らかに丁度 1 個の complement を持つ. $n = 2$ の場合も次が成立する [BMRRT][IY].

命題 3.6 $n = 2$ の場合, 任意の概 2-クラスター傾斜対象は丁度 2 個の complements を持ち, それらは mutation で移りあう.

$n > 2$ の場合も, n-Calabi-Yau 三角圏においては, 概 n-クラスター傾斜対象は丁度 n 個の complements を持つ事が期待されるが, 一般にはそれは成立しない.（実際に $n = 3$ の場合に, 無限個の complements を持つ概 3-クラスター傾斜対象の例を 4.2.1 で挙げる.）次に, 概 n-クラスター傾斜対象が丁度 n 個の complements を持つための十分条件を挙げる.

定義 3.7 $J_{\mathcal{T}}$ で $\mathcal{T}$ の **Jacobson 根基** [ASS][ARS] を表す. 即ち, $f \in (X, Y)$ が $J_{\mathcal{T}}(X, Y)$

に含まれる必要十分条件は, f を長さ 2 の複体と見なした時, $1_Z : Z \to Z$ $(Z \neq 0)$ の形の直和因子を持たない事である.

$\mathcal{T}$ の充満部分圏 $\mathcal{C}$ を固定する. $\mathcal{C}$ の対象 X の **sink map** とは, 射 $f \in J_{\mathcal{T}}(Y, X)$ で以下の条件を満たすものである.

(i) $Y \in \mathcal{C}$.

(ii) $(-, Y) \xrightarrow{\cdot f} J_{\mathcal{T}}(-, X) \to 0$ は $\mathcal{C}$ 上完全.

(iii) f は右極小（定義 3.1 参照）.

双対的に $X \in \mathcal{C}$ の **source map** も定義される. この時, 次が成立する [IY].

定理 3.8 $M \in \mathcal{T}$ を n-クラスター傾斜対象とする. 任意の $X_0 = X_n := X \in \operatorname{add} M$ に対して, 図式

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & X_{n-1} \arrow[dr, "b_{n-1}"] & & X_{n-2} \arrow[dr, "b_{n-2}"] & & X_2 \arrow[dr, "b_2"] & & X_1 \arrow[dr, "b_1"] & & \\
X \arrow[r, "b_n"] & M_{n-1} \arrow[ur, "a_{n-1}"] \arrow[rr] & & M_{n-2} \arrow[ur, "a_{n-2}"] \arrow[rr] & & \cdots\cdots\cdots \arrow[ur, "a_2"] \arrow[rr] & & M_1 \arrow[ur, "a_1"] \arrow[rr] & & M_0 \arrow[r, "a_0"] & X
\end{tikzcd}$$

で以下の性質を満たすものが存在する.

(1) $X_{i+1} \xrightarrow{b_{i+1}} M_i \xrightarrow{a_i} X_i \to X_{i+1}[1]$ $(0 \leq i < n)$ は $\mathcal{T}$ の triangle.

(2) $M_i \in \operatorname{add} M$ $(0 \leq i < n)$.

(3) a_0 は $\operatorname{add} M$ における sink map.

(4) a_i $(0 < i < n)$ は極小右 M-近似.

(5) b_n は $\operatorname{add} M$ における source map.

(6) b_i $(0 < i < n)$ は極小左 M-近似.

$n = 1$ の場合, 上の図式は $\mathcal{T}$ における Auslander-Reiten triangle に他ならない. この意味で, 上の図式を仮に **Auslander-Reiten** $(n+2)$**-angle** と呼ぶ事にする. ここに現れた X_i $(0 < i < n)$ と mutation の関係を与える結果が次である [IY].

命題 3.9 M を n-クラスター傾斜対象とし, M の直既約直和因子 $X_0 = X_n := X$ に対し $M = X \oplus N$ と直和分解する. X の Auslander-Reiten $(n+2)$-angle を取り,

$$X \notin \bigoplus_{i=0}^{n-1} M_i$$

が成立すると仮定する. この時以下が成立する.

(1) $X_{i+1} \oplus N$ は $X_i \oplus N$ の右 mutation である $(0 \leq i < n)$. 特に $X_i \oplus N$ $(0 \leq i < n)$ は n-クラスター傾斜対象である.

(2) N の complements は X_i $(0 \leq i < n)$ の丁度 n 個であり, それらは mutation の繰り返しによって移りあう.

3.6 及び 3.8 は, 次に示す三角圏の還元 [BMR][CK][IY] を用いて証明される.

補題 3.10 n-rigid 対象 $N \in \mathcal{T}$ に対して,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &:= \{X \in \mathcal{T} \mid (N, X[i]) = 0 \text{ for any } 0 < i < n\}, \\
\mathcal{U} &:= \mathcal{Z}/[N]
\end{aligned}$$

とおく. 但し $[N]$ は, $\operatorname{add} N$ を通過する射全体よりなる $\mathcal{Z}$ のイデアルを表す. この時, 以下が成立する.

(1) $\mathcal{U}$ は n-Calabi-Yau 三角圏を成す.

(2) 自然な関手 $\mathcal{Z}\to\mathcal{U}$ は, $\mathcal{T}$ の basic な n-クラスター傾斜対象 M で $N\in\operatorname{add}M$ となるものの同型類と, $\mathcal{U}$ の basic な n-クラスター傾斜対象の同型類の間の一対一対応を与える.

4. rigid Cohen-Macaulay 加群

この節では, 以上の話を [IY] に即して不変式環上の rigid CM 加群の決定に応用する. 2.4 節の記号を用いるが, 今のところ完全に決定できているのは, 4.1 と 4.2 の二つの場合のみである.

4.1 1 の原始 3 乗根 ω に対して, $\sigma:=\operatorname{diag}(\omega,\omega,\omega)\in\mathrm{SL}_3(k)$, $G=\langle\sigma\rangle\subset\mathrm{SL}_3(k)$ とおく. $S=k[[x,y,z]]$ に対して,

$$S_i:=\{f\in S\mid f^\sigma=\omega^i f\}\quad(i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$

とおくと, $S^G=S_0$ であり, 2.4.2 より $S\in\underline{\mathrm{CM}}S^G$ は 2-クラスター傾斜対象であるが, $S=S_0\oplus S_1\oplus S_2$ と分解される. S の Koszul 複体

$$0\to S(-3)\xrightarrow{(x\ y\ z)}S^3(-2)\xrightarrow{\begin{pmatrix}0&z&-y\\-z&0&x\\y&-x&0\end{pmatrix}}S^3(-1)\xrightarrow{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}S\to 0$$

の次数 $(1+3\mathbb{Z})$ 部分を取りだすと, $\operatorname{add}S$ における Auslander-Reiten 4-angle

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & \Omega S_1 \arrow[dr] & & \\ S_1 \arrow[r] & S_2^3 \arrow[ur] \arrow[rr] & & 0 \arrow[r] & S_1\end{tikzcd}$$

が得られる事が分かる. これより $S_1\oplus S_2$ の mutation として, 2-クラスター傾斜対象 $(\Omega S_1)\oplus S_2$ をうる. 同様に次数 $(2+3\mathbb{Z})$ 部分から, $\operatorname{add}S$ における Auslander-Reiten 4-angle

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & \Omega^{-1} S_2 \arrow[dr] & & \\ S_2 \arrow[r] & 0 \arrow[ur] \arrow[rr] & & S_1^3 \arrow[r] & S_2\end{tikzcd}$$

が得られる事が分かる. これより $S_1\oplus S_2$ の mutation として, 2-クラスター傾斜対象 $S_1\oplus\Omega^{-1}S_2$ をうる.

更に, $\Omega^i=[-i]$ は $\underline{\mathrm{CM}}S^G$ の自己同型なので, 2-クラスター傾斜対象 $\Omega^i(S_1\oplus S_2)$ 及び $\Omega^{i+1}S_1\oplus\Omega^iS_2$ $(i\in\mathbb{Z})$ をうる.

定理 4.1.1 (1) $\underline{\mathrm{CM}}S^G$ の basic な 2-クラスター傾斜対象は,

$$\Omega^i(S_1\oplus S_2)\ \text{または}\ \Omega^{i+1}S_1\oplus\Omega^iS_2\quad(i\in\mathbb{Z})$$

であり, これらは mutation の繰り返しによって移りあう. また, これらは全て非同型である.

(2) rigid な CM S^G-加群は,

$$S_0^a\oplus(\Omega^iS_1)^b\oplus(\Omega^iS_2)^c\ \text{または}\ S_0^a\oplus(\Omega^{i+1}S_1)^b\oplus(\Omega^iS_2)^c\quad(i\in\mathbb{Z},\ a,b,c\geq 0).$$

以下に証明の概略を記す. 証明には次の一般的な結果 [BMR][KR1] を用いる[5].

補題 4.1.2 $\mathcal{T}$ を 2-Calabi-Yau 三角圏, $M\in\mathcal{T}$ を 2-クラスター傾斜対象とする.

[5] クラスター圏を用いた別証明が [KR2] で与えられている.

(1) 圏同値 $\mathbb{F} = (M, -) : \mathcal{T}/[M[1]] \to \operatorname{mod}\operatorname{End}_{\mathcal{T}}(M)$ が存在する.
(2) $X \in \mathcal{T}$ が $(X, X[1]) = 0$ を満たすならば, $\operatorname{Ext}^1_{\operatorname{End}_{\mathcal{T}}(M)}(\mathbb{F}X, \mathbb{F}X) = 0$ が成立する.

特に, rigid な $\operatorname{End}_{\mathcal{T}}(M)$-加群が全て求まれば, $\mathcal{T}$ の rigid な対象も全て求まる事になる.
この命題を, 上記の $\mathcal{T} = \underline{\mathrm{CM}}S^G$ 及び $M = S \in \mathcal{T}$ に対して適用してみる. S の直和因子 S^G に対応する, $\operatorname{End}_{S^G}(S)$ の冪等元を e と表す時,

$$\operatorname{End}_{\mathcal{T}}(S) = \operatorname{End}_{S^G}(S)/\langle e \rangle$$

が成立する. ここで $\operatorname{End}_{S^G}(S)$ は捩れ群環 $S * G$ に同型であり, その quiver は G の McKay quiver として与えられていた [A3][Y][I3]. 特に, $\operatorname{End}_{\mathcal{T}}(S)$ の quiver は, G の McKay quiver から, 自明な表現に対応する頂点を取り除く事によって得られる.
特に $G = \langle \operatorname{diag}(\omega, \omega, \omega) \rangle$ の場合, G の McKay quiver は

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[d, "3"] & \\ \bullet \arrow[r, "3"] & \bullet \arrow[ul, "3"'] \end{tikzcd}$$

で与えられる（数字は矢印の本数を示す）ので, $\operatorname{End}_{\mathcal{T}}(S)$ の quiver は $\bullet \xrightarrow{3} \bullet$ となり, $\operatorname{End}_{\mathcal{T}}(S)$ が 3 次の Kronecker 多元環である事が分かる.
Kronecker 多元環上の直既約 rigid 加群は, preprojective 加群及び preinjective 加群と呼ばれるものに限る. 一方, 圏同値 $\mathbb{F} : \mathcal{T}/[S[1]] \to \underline{\operatorname{mod}}\operatorname{End}_{\mathcal{T}}(S)$ により, 対象 $\Omega^i S_1$ および $\Omega^i S_2$ は, $i \geq 0$ ならば preprojective 加群に, $i < -1$ ならば preinjective 加群に送られる事が分かる. 以上の事と補題 4.1.2 をあわせて, 証明が完了する. ∎

4.2 次に $\sigma := \operatorname{diag}(-1, -1, -1, -1) \in \mathrm{SL}_4(k)$, $G = \langle \sigma \rangle \subset \mathrm{SL}_4(k)$ とおく. $S = k[[w, x, y, z]]$ に対して,

$$S_i := \{f \in S \mid f^\sigma = \omega^i f\} \quad (i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

とおくと, $S^G = S_0$ であり, 2.4.2 より $S \in \underline{\mathrm{CM}}S^G$ は 3-クラスター傾斜対象であるが, $S = S_0 \oplus S_1$ と分解される.
$\Omega^i = [-i]$ は $\underline{\mathrm{CM}}S^G$ の自己同型なので, 3-クラスター傾斜対象 $\Omega^i S_1$ $(i \in \mathbb{Z})$ をうる.

定理 4.2.1 (1) $\underline{\mathrm{CM}}S^G$ の basic な 3-クラスター傾斜対象は,

$$\Omega^i S_1 \quad (i \in \mathbb{Z})$$

であり, これらは mutation の繰り返しによって移りあう. また, これらは全て非同型である.
(2) rigid な CM S^G-加群は,

$$S_0^a \oplus (\Omega^i S_1)^b \quad (i \in \mathbb{Z},\ a, b, c \geq 0).$$

以下に証明の概略を記す. 証明には次の結果を用いるが, 4.1.2 と比べて強い仮定が必要となっている.

命題 4.2.2 $\mathcal{T}$ を 3-Calabi-Yau 三角圏, $M \in \mathcal{T}$ を 3-クラスター傾斜対象とし, $\operatorname{End}_{\mathcal{T}}(M) = k$ かつ $(M[1], M) = 0$ が成立すると仮定する.
(1) 圏同値 $\mathbb{F} = (M \oplus M[1], -) : \mathcal{T}/[M[2]] \to \operatorname{mod}\operatorname{End}_{\mathcal{T}}(M \oplus M[1])$ が存在する.

(2) $X \in \mathcal{T}$ が $(X, X[1]) = 0$ を満たすならば, $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(M \oplus M[1])}(\mathbb{F}X, \mathbb{F}X) = 0$ が成立する.

この場合, $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(M \oplus M[1])$ は 6 次の Kronecker 多元環となる事がわかり, 4.1 と同様の論法で定理が示される. ∎

References

[ASS] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński: Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory. London Mathematical Society Student Texts, 65. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[A1] M. Auslander: Representation dimension of Artin algebras. Lecture notes, Queen Mary College, London, 1971.

[A2] M. Auslander: Functors and morphisms determined by objects. Representation theory of algebras (Proc. Conf., Temple Univ., Philadelphia, Pa., 1976), pp. 1–244. Lecture Notes in Pure Appl. Math., Vol. 37, Dekker, New York, 1978.

[A3] M. Auslander: Rational singularities and almost split sequences. Trans. Amer. Math. Soc. 293 (1986), no. 2, 511–531.

[AR1] M. Auslander, I. Reiten: The Cohen-Macaulay type of Cohen-Macaulay rings. Adv. in Math. 73 (1989), no. 1, 1–23.

[AR2] M. Auslander, I. Reiten: DTr-periodic modules and functors. Representation theory of algebras (Cocoyoc, 1994), 39–50, CMS Conf. Proc., 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalo: Representation theory of Artin algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 36. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[AS] M. Auslander, S. O. Smalo: Almost split sequences in subcategories. J. Algebra 69 (1981), no. 2, 426–454.

[B] R. Bocklandt: Graded Calabi Yau Algebras of dimension 3, preprint arXiv:math.RA/0603558, 2006.

[BM] K. Baur, R. Marsh: A geometric description of m-cluster categories, arXiv:math.RT/0607151.

[BK] A. I. Bondal, M. M. Kapranov: Representable functors, Serre functors, and reconstructions. Math. USSR-Izv. 35 (1990), no. 3, 519–541.

[BG] K. Bongartz, P. Gabriel: Covering spaces in representation-theory. Invent. Math. 65 (1981/82), no. 3, 331–378.

[BMR] A. Buan, R. Marsh, I. Reiten: Cluster-tilted algebras, to appear in Trans. Amer. Math. Soc., arXiv:math.RT/0402075.

[BMRRT] A. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, G. Todorov: Tilting theory and cluster combinatorics, preprint.

[CCS] P. Caldero, F. Chapoton, R. Schiffler: Quivers with relations arising from clusters (A_n case). Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), no. 3, 1347–1364

[CK] P. Caldero, B. Keller: From triangulated categories to cluster algebras II, arXiv:math.RT/0510251.

[F] S. Fomin: http://www.math.lsa.umich.edu/ fomin/cluster.html

[FZ1] S. Fomin, A. Zelevinsky: Cluster algebras. I. Foundations. J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), no. 2, 497–529.

[FZ2] S. Fomin, A. Zelevinsky: Cluster algebras. II. Finite type classification. Invent. Math. 154 (2003), no. 1, 63–121.

[GLS1] C. Geiss, B. Leclerc, J. Schröer: Rigid modules over preprojective algebras, to appear in Invent. Math., arXiv:math.RT/0503324.

[GLS2] C. Geiss, B. Leclerc, J. Schröer: Auslander algebras and initial seeds for cluster algebras, arXiv:math.RT/0506405.

[GR] A. L. Gorodentsev, A. N. Rudakov: Exceptional vector bundles on projective spaces. Duke Math. J. 54 (1987), no. 1, 115–130.

[H] D. Happel: Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras. London Mathematical Society Lecture Note Series, 119. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[IT] K. Igusa, G. Todorov: A characterization of finite Auslander-Reiten quivers. J. Algebra 89 (1984), no. 1, 148–177.

[I1] O. Iyama: The relationship between homological properties and representation theoretic realization of Artin algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), no. 2, 709–734.

[I2] O. Iyama: Higher dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories, to appear in Adv. Math., arXiv:math.RT/0407052.

[I3] O. Iyama: Auslander correspondence, to appear in Adv. Math., arXiv:math.RT/0411631.

[I4] O. Iyama: Auslander-Reiten 理論の高次元化に向けて, 第 50 回代数学シンポジウム報告集, (2005).

[IY] O. Iyama, Y. Yoshino, Mutations in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules, arXiv:math.RT/0607736.

[K1] B. Keller: On triangulated orbit categories. Doc. Math. 10 (2005), 551–581.

[K2] B. Keller: http://www.institut.math.jussieu.fr/ keller/quivermutation/

[KR1] B. Keller, I. Reiten: Cluster-tilted algebras are Gorenstein and stably Calabi-Yau, to appear in Adv. Math., arXiv:math.RT/0512471.

[KR2] B. Keller, I. Reiten: Acyclic Calabi-Yau categories are cluster categories, with an appendix by M. Van den Bergh, arXiv:math.RT/0610594.

[R] J. Rickard: Morita theory for derived categories. J. London Math. Soc. (2) 39 (1989), no. 3, 436–456.

[RV1] I. Reiten, M. Van den Bergh: Two-dimensional tame and maximal orders of finite representation type. Mem. Amer. Math. Soc. 80 (1989).

[RV2] I. Reiten, M. Van den Bergh: Noetherian hereditary abelian categories satisfying Serre duality. J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), no. 2, 295–366.

[RS] C. Riedtmann, A. Schofield: On a simplicial complex associated with tilting modules. Comment. Math. Helv. 66 (1991), no. 1, 70–78.

[T] H. Thomas: Defining an m-cluster category, arXiv:math.RT/0607173.

[W] K. Watanabe : Certain invariant subrings are Gorenstein. I, II. Osaka J. Math. 11 (1974), 1–8; ibid. 11 (1974), 379–388.

[Y] Y. Yoshino: Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings. London Mathematical Society Lecture Note Series, 146. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Z] B. Zhu: Generalized cluster complexes via quiver representations, arXiv:math.RT/0607155.

Graduate school of Mathematics, Nagoya University,
Chikusa-ku, Nagoya, 464-8602, Japan

iyama@math.nagoya-u.ac.jp