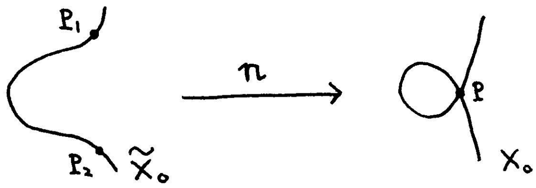
The Moduli Stack of Gieseker-SL_2-Bundles on a Nodal Curve

阿部　健（京大数理研）

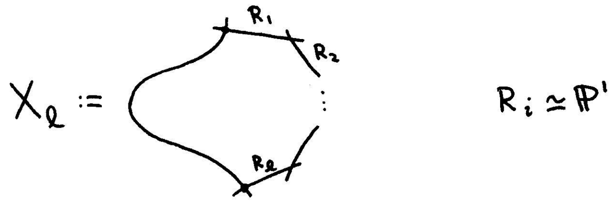
1　イントロ

コンパクトリーマン面上のベクトル束のモジュライの性質を調べる際に、リーマン面を退化させ、種数が低い場合に帰着させる方法がある。これが特異点を持った代数曲線上のベクトル束のモジュライを考えることが大切な理由のひとつだと思う。

X_0 を既約な射影的曲線で、特異点として結節点 P_0 を一つだけ持つとする。$\mathfrak{n} : \widetilde{X_0} \to X_0$ を正規化とする。



X_0 上のベクトル束のモジュライについて考えるのであるが、簡単のため安定性の議論はサボることにする。よって本稿ではモジュライはすべてスタックの枠組みで考える。X_0 上のベクトル束のモジュライはコンパクトならないのでそのコンパクト化を考える必要がある。ひとつの方法は捩れの無い層を付け加えるものである。また別の方法として X_l $(l \geq 0)$ 上のベクトル束を付け加えるというものがある。ただし、



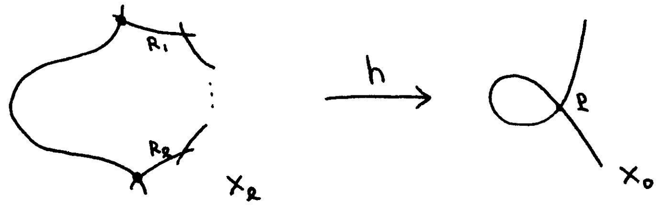
この後者によるモジュライのコンパクト化は、ギーゼカが論文 [G] の中

でニューステッド-ラマナン予想を解くために階数2の場合に考え出したものである。よって本稿ではX_l上のバンドルをギーゼカバンドルと呼ぶことにする。ギーゼカバンドルによるモジュライのコンパクト化はその後、ナガラジャ-セシャドリ [NS]、カウス [K] 等によって一般階数の場合に拡張された。ところで、捩れの無い層によるコンパクト化があるのに、なぜわざわざギーゼカバンドルによるコンパクト化を考える必要があるのだろうか。それは、ギーゼカバンドルによるコンパクト化は正規交差多様体になるからで、モジュライの退化としてこれは嬉しいことである。さて、上述の人々は、バンドルの階数と次数を固定してギーゼカバンドルのモジュライを考えていた。本稿では、階数2の場合に行列式束を固定してギーゼカバンドルのモジュライを考えて、その幾何構造を記述したい。

セクション2では、次数を固定する場合のギーゼカバンドルのモジュライの定義を安直に真似て行列式束を固定したギーゼカSL_2バンドルを考える。するとモジュライは正規交差多様体にならない。これでは何のためにわざわざギーゼカSL_2バンドルを考えるのかわからない。そこで、セクション3では定義を少し修正したギーゼカSL_2バンドルを考える。すると今度は、モジュライは正規交差になってくれる。

2 ギーゼカSL_2バンドル其の一

$h : X_l \to X_0$を$\mathbb{P}^1$の鎖を潰す射とする。



定義 2.1. X_l上の階数nのベクトル束Eが許容的であるとは、次の（1）、（2）を満たすこと。

(1) $E|_{R_i} \simeq \mathcal{O}(1)^{\oplus a} \oplus \mathcal{O}^{\oplus(n-a)} \quad a > 0,$

(2) h_*E は捩れが無い。

X_0上の次数dの直線束L_0を固定する。さて、まず安直に、ギーゼカSL_2バンドルを次のように定義してみる。

定義 2.2. T を $\mathrm{Spec}\mathbb{C}$ 上のスキームとする。T でパラメータ付けされた (X_0, L_0) 上のギーゼカ SL_2 バンドルとは、次のデータのこと。

(a) T 上平坦かつ(射影的)有限表示なスキーム $\mathcal{Y}$ と、可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr] & & X_0 \times T \arrow[dl] \\ & T & \end{tikzcd}$$

で、各 $t \in T$ に対し

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y} \times_T \mathrm{Spec}\, k(t) \arrow[rr] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowright"] & & X_0 \times \mathrm{Spec}\, k(t) \\ X_\ell \times \mathrm{Spec}\, k(t) \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

となるもの。

(b) $\mathcal{Y}$ 上の階数 2 のベクトル束 E で、各ファイバー上次数 d かつ許容的なもの。

(c) $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ 加群の射 $\delta : \det \mathcal{E} \to h^* L_0$ で、各ファイバー上で零でないもの。

このように定義すると、まず次がわかる。

補題 2.3. (X_0, L_0) 上のギーゼカ SL_2 バンドル E は次の 3 種類に分けられる。

($Type$ 0) E は X_0 上のベクトル束。

($Type$ 1) E は X_1 上のベクトル束で、$E|_{R_1} \simeq \mathcal{O}(1)^{\oplus 2}$。

($Type$ 2) E は X_2 上のベクトル束で、$i = 1, 2$ に対し $E|_{R_i} \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$。

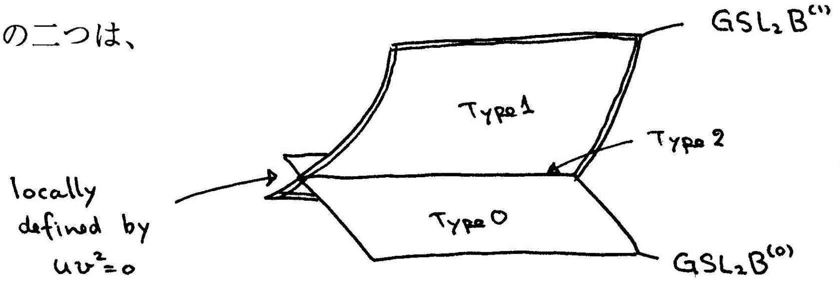
(X_0, L_0) 上のギーゼカ SL_2 バンドル E のなすモジュライを $GSL_2B(X_0; L_0)$ と書く。

定理 2.4. $GSL_2B(X_0; L_0)$ は二つの成分 $GSL_2B(X_0; L_0)^{(0)}$ と $GSL_2B(X_0; L_0)^{(1)}$ から成る。

(1) Q_3 バンドルの構造 $GSL_2B(X_0; L_0)^{(0)} \to SU_2(\widetilde{X_0}, \widetilde{L_0})$ がある。
ただし、Q_3 は 3 次元非特異 2 次超曲面、$\widetilde{L_0}$ は L_0 の $\widetilde{X_0}$ への引き戻し。

(2) $GSL_2B(X_0;L_0)^{(1)}$ は被約ではない。$\mathbb{P}^3$ バンドルの構造 $GSL_2B(X_0;L_0)^{(1)}_{red} \to SU_2(\widetilde{X_0}, \widetilde{L_0}(-P_1+P_2))$ がある。

この二つは、

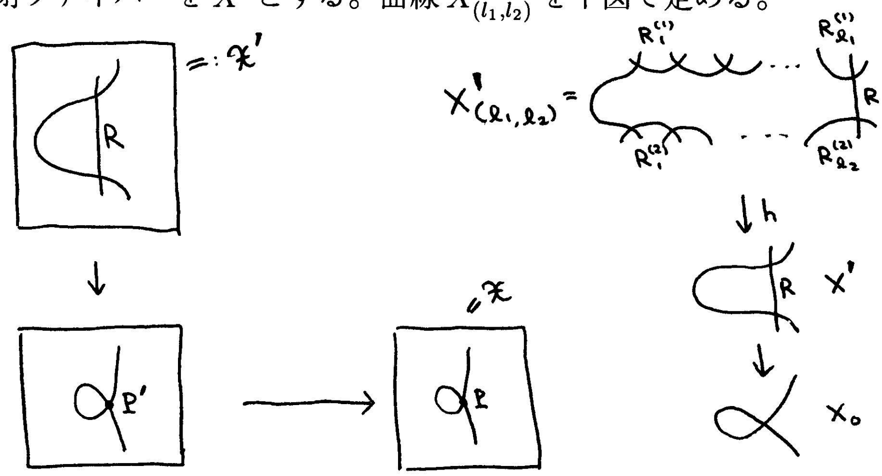


という様に交わっている。

いま、X_0 を、非特異な代数曲線の退化とみると、上の定理は、それに対応するモジュライの退化がセミステーブルでない、ということを言っている。これは嬉しくない。それで、次のセクションでギーゼカ SL_2 バンドルの「正しい」定義を与える。

3 ギーゼカ SL_2 バンドル其の二

$\mathcal{X} \to B := \mathrm{Spec}\mathbb{C}[[t]]$ を平坦な射影的曲線の族で、一般ファイバーは非特異、閉ファイバーは X_0 となるものとする。また、$\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},P} \simeq \mathbb{C}[[x,y,t]]/(xy-t)$ を仮定する。$\mathcal{L}$ を $\mathcal{X}$ 上の直線束で、閉ファイバー上 L_0 になるものとする。$B' : \mathrm{Spec}\mathbb{C}[[t']] \to B$ を $t = t'^2$ で与える。$\mathcal{X}$ 上の点 P は $\mathcal{X} \times_B B'$ 上の点 P' を決める。$\mathcal{X}'$ を $\mathcal{X} \times_B B'$ の点 P' における爆発とする。$\mathcal{X}'$ の B' 上の閉ファイバーを X' とする。曲線 $X'_{(l_1,l_2)}$ を下図で定める。



定義 3.1. $X'_{(l_1,l_2)}$ 上の階数 2 のベクトル束 E が許容的であるとは、次の 3 条件を満たすこと。

(1) $E|_{R_i^{(j)}} \simeq \mathcal{O}(1)^{\oplus a} \oplus \mathcal{O}^{\oplus(2-a)} \quad a > 0,$

(2) $(k \circ h)_* E$ は捩れが無い。

(3) $E|_R$ は大域切断で生成される。

定義 3.2. T を Spec$\mathbb{C}$ 上のスキームとする。T でパラメータ付けされた (X'_0, L'_0) 上のギーゼカ SL_2 バンドルとは、次のデータのこと。

(a) T 上平坦射影的かつ有限表示なスキーム $\mathcal{Y}'$ と、可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y}' \arrow[r] \arrow[dr] & X' \times T \arrow[d] \\ & T \end{tikzcd}$$

で、各 $t \in T$ に対し

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y}' \times_T \mathrm{Spec}\, k(t) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X' \times \mathrm{Spec}\, k(t) \\ X'_{(l_1,l_2)} \times \mathrm{Spec}\, k(t) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

となるもの。

(b) $\mathcal{Y}'$ 上の階数 2 のベクトル束 E で、各ファイバー上次数 d かつ許容的なもの。

(c) $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ 加群の射 $\delta^{(0)} : \det \mathcal{E} \to h^* L'_0$, $\delta^{(0)} : h^* L'(-R) \to \det \mathcal{E}$ で、合成 $\delta^{(0)} \circ \delta^{(1)}$ が $\mathbf{1}_R \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}'}(R)$ となるもの。

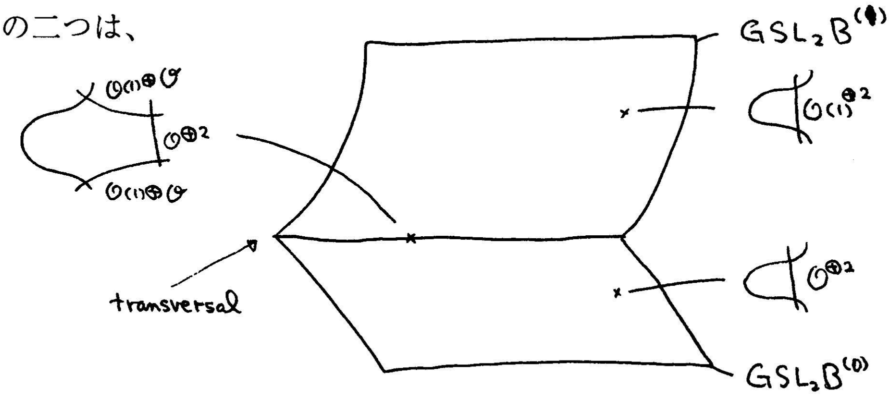
(X'_0, L'_0) 上のギーゼカ SL_2 バンドルのモジュライを $GSL_2B(X'_0; L'_0)$ で表す。

定理 3.3. $GSL_2B(X'_0; L'_0)$ は二つの成分 $GSL_2B(X'_0; L'_0)^{(0)}$ と $GSL_2B(X'_0; L'_0)^{(1)}$ から成る。

(1) 同型 $GSL_2B(X'_0; L'_0)^{(0)} \simeq GSL_2B(X_0; L_0)^{(0)}$ がある。

(2) Q_3 バンドルの構造 $GSL_2B(X'_0; L'_0)^{(1)} \to SU_2(\widetilde{X_0}, \widetilde{L_0}(-P_1 - P_2))$ がある。

この二つは、



という様に交わっている。

参考文献

[G] D. Gieseker: *A degeneration of the moduli space of stable bundles*, J. Differential Geom., 19, 173-206 (1984)

[K] I. Kausz: *A Gieseker type degeneration of moduli stacks of vector bundles on curves*, arXiv:math.AG/0201197

[NS] D. S. Nagaraj and C. S. Seshadri: *Degenerations of the moduli spaces of vector bundles on curves II (Generalized Gieseker moduli spaces)*, Proc. Indian Acad. Sci. Vol. 109, 165-201 (1999)