Weight filtration on log crystalline cohomology

志甫　淳　(東京大学大学院数理科学研究科)

1　序

κ を体とし，κ 上の代数多様体あるいはその退化 X に対して「良い」cohomology 理論 $X \mapsto H^n(X)$ が定義されているとする．この時，Grothendieck, Deligne による「weight の yoga」([G], [D1], [D4]) により，次のことが期待される：

期待 1.1. $H^n(X)$ は次の性質を満たす有限増大 filtration$P_kH^n(X)\,(k \in \mathbb{Z})$ をもつ．

(1) 次数商 $\mathrm{gr}_k^P H^n(X) := P_kH^n(X)/P_{k-1}H^n(X)\,(k \in \mathbb{Z})$ は κ 上 proper, smooth な代数多様体の重さ k の cohomology 達を用いて書ける．
(2) この filtration は cohomology への種々の自然な操作 (pull back, push forward, base change, Künneth formula, Poincaré duality 等) と compatible である．
(3) 代数多様体が族を成していれば $P_kH^n(X)$ 達は構成可能層をなす．適当な条件下では smooth な層をなす.

(ここで proper, smooth な代数多様体 Y の重さ k の cohomology とは $H^{k+2i}(Y)(i)$ $(i \in \mathbb{Z})$ のこと．但し，(i) という twist の概念が cohomology に定義されているとする．) この filtration $P_kH^n(X)\,(k \in \mathbb{Z})$ のことを $H^n(X)$ の weight filtration と言う．

Weight filtration の (1) の部分は要するに「(proper, smooth とは限らない)X の cohomology は proper, smooth な代数多様体達の cohomology を用いて書ける」ということである．従って，proper, smooth な代数多様体の cohomology がある性質を満たせば，proper, smooth とは限らない代数多様体の cohomology についても何か類似の性質が満たされるであろうと期待される．この期待が成り立つ代表的な例は次の通りである．

例 1.2. (1) X が $\mathbb{C}$ 上の proper, smooth な代数多様体ならばその Betti cohomology $H^n(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q})$ は pure Hodge 構造をもつが，一般の X に対してはその Betti cohomology $H^n(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q})$ は混合 Hodge 構造をもつ (Deligne, [D2],[D3])．(ここで X_{an} は X から自然に定まる複素解析空間を表わす．)

(2) X が有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の proper, smooth な代数多様体ならば, l を q と素な素数とするとき $X_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ の l 進エタール cohomology $H^n(X_{\overline{\mathbb{F}}_q,\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_l)$ への Frobenius 写像の固有

値の絶対値は $q^{n/2}$ である．一般の X に対しては $H^n(X_{\overline{\mathbb{F}}_q,\mathrm{et}},\mathbb{Q}_l)$ への Frobenius 写像の固有値の絶対値は $q^{1/2}$ の自然数乗になる (Deligne, [D5]).

以下では，X が次のいずれかの場合を主に考える．

(I)　X が κ 上の open な (proper でない)smooth 代数多様体の場合.
(II)　X が κ 上の proper で strictly semi-stable な退化の場合.

これらの場合，weight filtration は次の cohomology 理論に対して定義されている．(但し，(II) の場合は適当に log 構造を考慮しなければならないので，以下の説明における記述は正確でないことを断っておく．)

①　Betti cohomology および de Rham cohomology の場合.
まず $\kappa=\mathbb{C}$ の場合の X の Betti cohomology$H^n(X_{\mathrm{an}},\mathbb{Q})$ への weight filtration と de Rham cohomology $H^n_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C}):=H^n(X,\Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}})$ への weight filtration は (I) の場合には Deligne([D2]) により定義され，また (II) の場合には本質的には Steenbrink([St1]) により定義された．この場合，Betti cohomology と de Rham cohomology との比較定理 (de Rham の定理) の同型 $H^n(X_{\mathrm{an}},\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}\cong H^n_{\mathrm{dR}}(X/k)$ があるが，これは filtration を保つ同型であり，この同型により，cohomology に混合 Hodge 構造が入ることが示されている．なお，(II) については Steenbrink-Zucker([St-Zu]), Steenbrink([St2]), F.Kato([Kf]), K.Kato-Nakayama([Kk-Ny]), Matsubara([Ma]), K.Kato-Matsubara-Nakayama([Kk-Ma-Ny]), Fujisawa-Nakayama ([F-Ny]) などの関連する仕事がある．

②　l 進 etale cohomology の場合.
κ を標数 p の体 ($p\neq l$) とし，$\overline{\kappa}$ をその分離閉包とする．$X_{\overline{\kappa}}$ (X の $\overline{\kappa}$ への base change) の l 進 cohomology $H^n(X_{\overline{\kappa},\mathrm{et}},\mathbb{Q}_l)$ への weight filtration は (I) の場合は Deligne([D5]) により，(II) の場合は Rapoport-Zink([R-Zi]) により定義された．なお，(II) については Nakayama の仕事 ([Ny]) も重要である．

③　log de Rham-Witt cohomology の場合.
κ を標数 $p>0$ の完全体とするとき，X の log de Rham-Witt cohomology への weight filtration が (I), (II) の場合に Mokrane([Mo1], [Mo2]) により定義されている．

本稿での我々の目標は, κ を標数 $p>0$ の完全体とするときに X の log crystalline cohomology の weight filtration を定義し，その性質を調べることである．ここで一つ remark しておくべきことがある：実は X の log crystalline cohomology は log de Rham-Witt cohomology と同型なので (Illusie[I1], Hyodo-Kato[H-Kk]), この同型を通じて③(Mokrane の結果) により log crystalline cohomology には weight filtration が既に定義されているとも言える，ということである．しかし，ここで①の場合を

改めて考えてみる：この場合には Betti cohomology, de Rham cohomology にそれぞれ (比較同型を使うことなく直接に)weight filtration が定義されていて，それらが比較同型により保たれていたのであった．そこで我々の場合にも，「log crystalline cohomology に対する直接的な weight filtration の定義」があって，Illusie, Hyodo-Kato による同型を通じてそれが log de Rham-Witt cohomology の (Mokrane による)weight filtration と compatible になっているべきではないか，と考えることにする．つまり，我々の目標は，より正確には「log crystalline cohomology に直接的に weight filtration を定義して，その性質を調べること」である．なお，(I) の場合，我々の weight filtration の定義法は代数多様体のある種の smooth な族に対しても有効であり (Mokrane の場合はそうではない), このことから期待 1.1 の (3) のある部分 (つまり weight filtration のある種の連続性) を示すことができる．これも Mokrane の場合と比べた時の我々の定義法の利点である．

さて，§2 では (I) の場合，つまり X が open, smooth な代数多様体の場合に Betti および de Rham cohomology の weight filtration の定義を簡単に復習した後，log crystalline cohomology への weight filtration の定義およびその性質について述べる．この場合は Betti および de Rham cohomology の場合と非常に似た形で話が進み，log crystalline cohomology は (ある意味では)Betti cohomology の類似である，という見方を得ることができる．なお，§2 の内容は東京電機大の中島幸喜氏との共同研究に基づくものである．また §3 では (II) の場合，つまり X が proper，strictly semi-stable な退化の場合に l 進 etale cohomology の時の Rapoport-Zink の結果を簡単に復習した後，我々の場合にこれまでわかったことを簡単に報告する．

2 Open, smooth な代数多様体の cohomology の場合

2.1 Betti, de Rham cohomology の weight filtration の復習

X を $\mathbb{C}$ 上の open, smooth な代数多様体とし，$j : X \overset{\subset}{\longrightarrow} \overline{X}$ を compact 化で $D := \overline{X} \setminus X$ が $\overline{X}$ 上の simple normal crossing divisor(以下 SNCD と略記) となるようなものとする (このような j は広中の定理より必ず存在する)．$D = \bigcup_{i=1}^m D_i$ を D の既約成分への分解，$k \geq 0$ に対して $D^{(k)} := \coprod_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m} D_{i_1} \cap D_{i_2} \cap \cdots \cap D_{i_k}$ とし，$a^{(k)} : D^{(k)} \longrightarrow \overline{X}$ を包含写像 $D_{i_j} \overset{\subset}{\longrightarrow} \overline{X}$ たちから導かれる写像とする．($k = 0$ の時は $D^{(k)} = \overline{X}, a^{(0)} = \mathrm{id}_{\overline{X}}$ とおく.) そして $X_{\mathrm{an}}, \overline{X}_{\mathrm{an}}, j_{\mathrm{an}}$ 等を U, X, j 等に対応する複素解析空間またはその間の射とする．

まず X の Betti cohomology $H^n(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}) = H^n(\overline{X}_{\mathrm{an}}, Rj_{\mathrm{an}*}\mathbb{Q})$ の weight filtration の定義を述べる．まず次の命題に注意する．

命題 2.1 (purity). 同型 $R^k j_{\mathrm{an}*}\mathbb{Q} = a^{(k)}_{\mathrm{an}*}\mathbb{Q}(-k)$ がある．

(これは exponential sequence と cup 積の誘導する同型である．) $\tau_{\leq k} Rj_{\mathrm{an}*}\mathbb{Q}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

を $Rj_{\mathrm{an}*}\mathbb{Q}$ の canonical filtration (すなわち自然に

$$H^l(\tau_{\leq k} Rj_{\mathrm{an}*}\mathbb{Q}) = \begin{cases} H^l(Rj_{\mathrm{an}*}\mathbb{Q}), & (\text{if } l \leq k), \\ 0, & \text{if } l > k). \end{cases}$$

を満たす filtration) とおく．すると命題より $\mathrm{gr}\,^{\tau}_{k} Rj_{\mathrm{an}*}\mathbb{Q} = a^{(k)}_{\mathrm{an}*}\mathbb{Q}(-k)$ なのでこの filtration によりスペクトル系列

$$E_1^{-k,n+k} = H^{n-k}(D^{(k)}_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}(-k)) \Longrightarrow H^n(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q})$$

が導かれる．このスペクトル系列を weight スペクトル系列といい，これにより誘導される $H^n(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q})$ の filtration を weight filtration と定義する．

今，スペクトル系列を用いて weight filtration の定義を述べたが，filter 導来関手の概念を用いて次のように述べることも出来る：filter 付導来圏の object $(Rj_{\mathrm{an}*}\mathbb{Q}, \tau_{\leq k})$ に filter 導来関手 $H^n(\overline{X}_{\mathrm{an}}, -)$ を施したもの $H^n(\overline{X}_{\mathrm{an}}, (Rj_{\mathrm{an}*}\mathbb{Q}, \tau_{\leq k}))$ を weight filtration 付の Betti cohomology $H^n(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q})$ と定義する．この述べ方をしておくと，比較定理が filtration を保つことの証明が見やすくなる．

次に X の de Rham cohomology $H^n_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C}) := H^n(X_{\mathrm{Zar}}, \Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}) = H^n(\overline{X}, Rj_*\Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}) \cong H^n(\overline{X}, \Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}(\log D))$ の weight filtration の定義を述べる．まず $\Omega^\bullet_{\overline{X}/\mathbb{C}}(\log D)$ の filtration $P_k\Omega^\bullet_{\overline{X}/\mathbb{C}}(\log D)$ を

$$P_k\Omega^\bullet_{\overline{X}/\mathbb{C}}(\log D) := \begin{cases} 0, & (\text{if } k < 0), \\ \mathrm{Im}(\Omega^k_{\overline{X}/\mathbb{C}}(\log D) \otimes \Omega^{\bullet-k}_{\overline{X}/\mathbb{C}} \longrightarrow \Omega^\bullet_{\overline{X}/\mathbb{C}}(\log D)), & (\text{if } 0 \leq k \leq \bullet), \\ \Omega^\bullet_{\overline{X}/\mathbb{C}}(\log D), & (\text{if } \bullet < k). \end{cases}$$

により定義する．この時，次が成り立つ：

命題 2.2. 同型 $\mathrm{gr}\,^{P}_{k}\Omega^\bullet_{\overline{X}/\mathbb{C}}(\log D) \cong a^{(k)}_{*}\Omega^{\bullet-k}_{D^{(k)}/\mathbb{C}}(-k)$ がある．

(上の同型は Poincaré residue 同型と呼ばれる．) この命題により，filtration $P_k\Omega^\bullet_{\overline{X}/\mathbb{C}}(\log D)$ はスペクトル系列 $E_1^{-k,n+k} = H^{n-k}(D^{(k)}, \Omega^\bullet_{D^{(k)}/\mathbb{C}}) \Longrightarrow H^n(\overline{X}, \Omega^\bullet_{\overline{X}/\mathbb{C}}(\log D))$, つまり

$$E_1^{-k,n+k} = H^{n-k}_{\mathrm{dR}}(D^{(k)}/\mathbb{C}) \Longrightarrow H^n_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})$$

を導く．このスペクトル系列を weight スペクトル系列といい，これにより誘導される $H^n_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})$ の filtration を weight filtration と定義する．

この場合にも filter 導来関手を用いて次のように述べることも出来る：filter 付導来圏の object $(\Omega^\bullet_{\overline{X}/\mathbb{C}}(\log D), P_k)$ に filter 導来関手 $H^n(\overline{X}, -)$ を施したもの $H^n(\overline{X}, (\Omega^\bullet_{\overline{X}/\mathbb{C}}(\log D), P_k))$ を weight filtration 付の de Rham cohomology $H^n_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})$ と定義する．

ここで de Rham の定理による比較同型 $H^n(X_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong H^n_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})$ があることを思い出そう．この時，次が言える：

命題 2.3. 比較同型 $H^n(X_{\mathrm{an}},\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}\cong H^n_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})$ は両辺の weight filtration を保つ．

Proof. 自然な射 $\overline{X}_{\mathrm{an}}\longrightarrow\overline{X}$ を u とおく．すると，filter 擬同型

$$\begin{aligned}(\Omega^\bullet_{\overline{X}/\mathbb{C}}(\log D),P_k)&\simeq Ru_*(\Omega^\bullet_{\overline{X}_{\mathrm{an}}/\mathbb{C}}(\log D_{\mathrm{an}}),P_k)\\&\simeq Ru_*(\Omega^\bullet_{\overline{X}_{\mathrm{an}}/\mathbb{C}}(\log D_{\mathrm{an}}),\tau_{\le k})\\&\simeq Ru_*(Rj_{\mathrm{an}*}\Omega^\bullet_{X_{\mathrm{an}}/\mathbb{C}},\tau_{\le k})\\&\simeq Ru_*((Rj_{\mathrm{an}*}\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C},\tau_{\le k})\end{aligned}$$

がある．($(\Omega^\bullet_{\overline{X}_{\mathrm{an}}/\mathbb{C}}(\log D_{\mathrm{an}}),P_k)$ は解析的な log de Rham 複体 $\Omega^\bullet_{\overline{X}_{\mathrm{an}}/\mathbb{C}}(\log D_{\mathrm{an}})$ に上の P_k と同様の filtration を入れたもの.) ここで一番目の filter 擬同型は GAGA から，三番目の filter 擬同型は擬同型 $\Omega^\bullet_{\overline{X}_{\mathrm{an}}/\mathbb{C}}(\log D_{\mathrm{an}})\simeq Rj_{\mathrm{an}*}\Omega^\bullet_{X_{\mathrm{an}}/\mathbb{C}}$ から，四番目の filter 擬同型は Poincaré の補題から従う．二番目の filter 擬同型は解析的な log de Rham 複体に対する Poincaré residue 同型から出るが，詳細は省略する．

上の filter 擬同型に filter 導来関手 $H^n(\overline{X},-)$ を施すと題意を得る． □

注 2.4. なお，上の記号で, 解析的 log de Rham 複体は $\Omega^\bullet_{\overline{X}_{\mathrm{an}}/\mathbb{C}}(\log D_{\mathrm{an}})=u^*(\Omega^\bullet_{\overline{X}/\mathbb{C}}(\log D))$ を満たしていることに注意.

2.2 log crystalline cohomology の weight filtration

素数 p を固定する．S を quasi-compact で p が冪零な scheme または p-adic Noetherian formal scheme とし，$\mathcal{I}\subset\mathcal{O}_S$ を p を含む quasi-coherent PD-ideal とする．$S_0:=\underline{\mathrm{Spec}}_S\mathcal{O}_S/\mathcal{I}$ とおき，X を S_0 上の smooth scheme とする．そして $X\subset\overline{X}$ を S_0 上の相対 compact 化で $D:=\overline{X}\setminus X$ が S_0 上の相対 SNCD となっているものとする．なお，$S_0=\mathrm{Spec}\,\kappa$ の場合であっても，正標数での広中の定理は知られていないのでこのような $\overline{X}$ が常に存在するかどうかはわからない．我々は $\overline{X}$ の存在を仮定することにする．このとき，組 $(\overline{X},D)$ を自然に (Fontaine-Illusie-Kato の意味での)S 上の fine log scheme と見なすことが出来る．

一般に crystalline cohomology は proper でない scheme に対しては良い性質を持たない (例えば有限性を満たさない) ので，X の S 上の相対 crystalline cohomology は良い cohomology ではない．その代わりとなるべき良い cohomology は，log scheme $(\overline{X},D)$ の S 上の相対 crystalline cohomology であると考えられている．よって，以後我々は $(\overline{X},D)$ の S 上の相対 crystalline cohomology を考察の対象とすることにする．従って，log scheme $(\overline{X},D)$ が 2.1 節における X の類似であると考える．

$k\in\mathbb{Z},k\ge 0$ に対して $D^{(k)},a^{(k)}:D^{(k)}\longrightarrow\overline{X}$ を 2.1 節と同様に定義する．そして $((\overline{X},D)/S)_{\mathrm{crys}},(\overline{X}/S)_{\mathrm{crys}},(D^{(k)}/S)_{\mathrm{crys}}$ をそれぞれ $(\overline{X},D),X,D^{(k)}$ の S 上の crystalline site とする．詳しい定義は省略するが，これらは 2.1 節の $X_{\mathrm{an}},\overline{X}_{\mathrm{an}},D^{(k)}_{\mathrm{an}}$ の類

似である．また $\mathcal{O}_{(\overline{X},D/S)}, \mathcal{O}_{X/S}, \mathcal{O}_{D^{(k)}/S}$ をそれぞれ $((\overline{X},D)/S)_{\mathrm{crys}}, (\overline{X}/S)_{\mathrm{crys}}, (D^{(k)}/S)_{\mathrm{crys}}$ 上の構造層とする．これらは $X_{\mathrm{an}}, \overline{X}_{\mathrm{an}}, D^{(k)}_{\mathrm{an}}$ 上の定数層 $\mathbb{C}$ の類似である．そして $j : (\overline{X},D) \longrightarrow \overline{X}$ を自然な log scheme の写像とし，これが誘導する crystalline site 間の射 $((\overline{X},D)/S)_{\mathrm{crys}} \longrightarrow (\overline{X}/S)_{\mathrm{crys}}$ を j_{crys} と書くことにする．これらは 2.1 節における j, j_{an} の類似である．同様に，$a^{(k)}$ が誘導する crystalline site 間の射 $(D^{(k)}/S)_{\mathrm{crys}} \longrightarrow (\overline{X}/S)_{\mathrm{crys}}$ を $a^{(k)}_{\mathrm{crys}}$ と書く．

構造射 $(\overline{X},D) \longrightarrow S_0$ は site の射 $f_{(\overline{X},D)/S} : ((\overline{X},D)/S)_{\mathrm{crys}} \longrightarrow S_{\mathrm{Zar}}$ を自然に誘導する．$R^n f_{(\overline{X},D)/S*}\mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S}$ のことを $(\overline{X},D)$ の S 上の相対 crystalline cohomology と言い，以後は $\underline{H}^n_S(((\overline{X},D)/S)_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S})$ と書くことにする．同様にして，$\overline{X}, D^{(k)}$ の S 上の相対 crystalline cohomology $\underline{H}^n_S((\overline{X}/S)_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{\overline{X}/S})$, $\underline{H}^n_S((D^{(k)}/S)_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{D^{(k)}/S})$ も定義される．

以上の準備の下で，相対 crystalline cohomology $\underline{H}^n_S(((\overline{X},D)/S)_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S}) \cong \underline{H}^n_S((\overline{X}/S)_{\mathrm{crys}}, Rj_{\mathrm{crys}*}\mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S})$ の weight filtration の定義を述べる．まず次の命題が成り立つ：

命題 2.5 (purity). 同型 $R^k j_{\mathrm{crys}*}\mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S} \cong a^{(k)}_{\mathrm{crys}*}\mathcal{O}_{D^{(k)}/S}(-k)$ が成り立つ．

これは直接計算して示すことも出来るし，後で出てくる「解析的な log de Rham 複体」に対する Poincaré residue 同型を用いて上手く証明することも出来る．この命題より，$Rj_{\mathrm{crys}*}\mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S}$ の canonical filtration $\tau_{\le k}Rj_{\mathrm{crys}*}\mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S}$ がスペクトル系列

$$E_1^{-k,n+k} = \underline{H}^{n-k}_S((D^{(k)}/S)_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{D^{(k)}/S})(-k) \Longrightarrow \underline{H}^n_S(((\overline{X},D)/S)_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S}) \quad (2.1)$$

を導くことがわかる．このスペクトル系列を weight スペクトル系列といい，これにより誘導される $\underline{H}^n_S(((\overline{X},D)/S)_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S})$ の filtration を weight filtration と定義する．filter 導来関手を用いて言えば，filter 付導来圏の object $(Rj_{\mathrm{crys}*}\mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S}, \tau_{\le k})$ に filter 導来関手 $\underline{H}^n_S((\overline{X}/S)_{\mathrm{crys}}, -)$ を施したもの $\underline{H}^n_S((\overline{X}/S)_{\mathrm{crys}}, (Rj_{\mathrm{crys}*}\mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S}, \tau_{\le k}))$ を weight filtration 付の相対 crystalline cohomology$\underline{H}^n_S(((\overline{X},D)/S)_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S})$ と定義するわけである．

次に，相対 crystalline cohomology の weight filtration と他の cohomology の weight filtration との比較についての結果を述べる．

① 相対 de Rham cohomology との比較

$S_0 \subset S, (\overline{X},D)$ を上の通りとする．$(\overline{X},D)$ の S 上への持ち上げ $(\overline{\mathcal{X}},\mathcal{D})$ が与えられているとし，$\mathcal{X} := \overline{\mathcal{X}} \setminus \mathcal{D}$ とおく．この時，$\mathcal{X}$ の S 上の相対 de Rham cohomology $\underline{H}^n_{\mathrm{dR}}(\mathcal{X}/S) := \underline{H}^n_S(\mathcal{X}, \Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}) \cong \underline{H}^n_S(\overline{\mathcal{X}}, \Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{X}}/S}(\log\mathcal{D}))$ (但し $\underline{H}^n_S(?, -)$ は構造射 $? \longrightarrow S$ による高次順像とする) には，2.1 節と同様の filtration $P_k\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{X}}/S}(\log\mathcal{D})$ を用いて weight filtration が入る．そして Berthelot([B]), K.Kato([Kk]) により，この状況では比較同型

$$\underline{H}^n_{\mathrm{dR}}(\mathcal{X}/S) \cong \underline{H}^n_S(((\overline{X},D)/S)_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S})$$

がある．我々は [Nj-Sh] で次を示した：

定理 2.6. 上の比較同型は両辺の weight filtration を保つ.

証明の方針は命題 2.3 の証明と同様である：つまり「解析的 log de Rham 複体の類似」を構成し，それを用いて filter 擬同型で繋げていけばよい．$u : (\overline{X}/S)_{\mathrm{crys}} \longrightarrow X_{\mathrm{Zar}} = \mathcal{X}_{\mathrm{Zar}}$ を Zariski site への射影とする (これは 2.1 節の u の類似である)．また，$(\overline{X}/S)_{\mathrm{crys}}|_{\overline{\mathcal{X}}}$ を $\overline{\mathcal{X}}$ で局所化した crystalline site とし，$\varphi : (\overline{X}/S)_{\mathrm{crys}}|_{\overline{\mathcal{X}}} \longrightarrow \overline{\mathcal{X}}_{\mathrm{Zar}}$, $\psi : (\overline{X}/S)_{\mathrm{crys}}|_{\overline{\mathcal{X}}} \longrightarrow (\overline{X}/S)_{\mathrm{crys}}$ を自然な環付 site の射とする．そして $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-加群 $\mathcal{M}$ に対して $L(\mathcal{M}) := \psi_*\varphi^*\mathcal{M}$ と定義する．すると次が証明できる ([Nj-Sh])：

命題 2.7 ($Rj_*\mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S}$ **に対する Poincaré の補題**)**.** 記号を上の通りとする．この時:

(1) $L(\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{X}}/S}(\log \mathcal{D}))$ は自然に $\mathcal{O}_{\overline{X}/S}$-加群の複体をなす．(実際は crystal の複体になる.)
(2) 擬同型 $Rj_{\mathrm{crys}*}\mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S} \simeq L(\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{X}}/S}(\log \mathcal{D}))$ がある．

つまり $L(\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{X}}/S}(\log \mathcal{D}))$ こそが解析的 log de Rham 複体の類似となる．(なお，site の射としては $\varphi = u \circ \psi$ であるが，u は自然な環付 site の射にならないので u^* ではなく $L = \psi_*\varphi^*$ を使う必要がある．注 2.4 と比べてみよ．)

この命題を用いると，次の filter 擬同型の列が出来る：

$$\begin{aligned}(\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{X}}/S}(\log \mathcal{D}), P_k) &\simeq Ru_*(L(\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{X}}/S}(\log \mathcal{D})), P_k) \\ &\simeq Ru_*(L(\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{X}}/S}(\log \mathcal{D})), \tau_{\le k}) \\ &\simeq Ru_*(Rj_{\mathrm{crys}*}\Omega^\bullet_{(\overline{X},D)/S}, \tau_{\le k}).\end{aligned}$$

ここで一番目の filter 擬同型は $L(\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{X}}/S}(\log \mathcal{D}))$ の u_*-非輪状性 (GAGA に相当する) から，三番目の filter 擬同型は上の命題から従う．二番目の filter 擬同型は $L(\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{X}}/S}(\log \mathcal{D}))$ に対する Poincaré residue 同型から出る．(詳細は省略する.) 上の filter 擬同型に filter 導来関手 $\underline{H}^n_S(\overline{\mathcal{X}}, -)$ を施すと題意を得る．

② log de Rham-Witt cohomology (Mokrane の filtration) との比較

ここでは κ を標数 p の完全体，$S_0 = \operatorname{Spec} \kappa, S = \operatorname{Spf} W_m(\kappa)$ とし，$X, (\overline{X}, D)$ は上の通りとする．この時は相対ではなく普通の crystalline cohomology なので，上では $\underline{H}^n_S$ と書いていた所を単に H^n と書くことにする．

この時，log de Rham-Witt complex という X 上の層の複体 $W_m\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D)$ が定義され，その cohomology $H^n(\overline{X}, W_m\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D))$ (これを log de Rham-Witt cohomology と呼ぶ) は crystalline cohomology$H^n(((\overline{X}, D)/S)_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S})$ と同型になることが知られている．(Illusie[I1], Hyodo-Kato[H-Kk]. なお，Nakkajima の論文 [Nj1] も参照のこと．) Mokrane([Mo1],[Mo2]) は $W_m\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D)$ に filtration $P_kW_m\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D)$ を (log de Rham 複体の時と似た方法で) 定義し，$H^n(\overline{X}, W_n\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D))$ に weight filtration を定義した．そして我々は [Nj-Sh] で次を示した：

定理 2.8. Illusie, Hyodo-Kato の同型 $H^n(\overline{X}, W_m\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D)) \overset{\simeq}{=} H^n(((\overline{X}, D)/S)_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S})$ は両辺の weight filtration を保つ.

証明の概略を述べる．まず，局所的には S 上の proper, smooth scheme $\overline{\mathcal{X}}$，$\overline{\mathcal{X}}$ の S 上の相対 SNCD $\mathcal{D}$，$(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{D})$ 上への Frobenius の持ち上げおよび $(\overline{X}, D)$ から $(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{D})$ への「良い」閉埋め込みがとれる．このとき埋め込み $(\overline{X}, D) \overset{\subset}{\longrightarrow} (\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{D})$ の PD envelope を $\mathcal{Y}$ とすると擬同型 $Ru_*Rj_{\mathrm{crys}*}\mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S} \overset{\simeq}{\longrightarrow} \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}}} \Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{X}}/S}(\log \mathcal{D}) \overset{\simeq}{\longrightarrow} W_m\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D)$ がある．(Illusie, Hyodo-Kato の同型はこの擬同型から誘導されている．) まずこれが filtration を保つことを示し，かつ filter 擬同型が global に成り立つことを「良い」閉埋め込みの系をとることにより示すことで証明がなされる.

次に weight スペクトル系列の退化についての結果を述べる．V を混標数 $(0, p)$ の完備離散付置環で剰余体が完全なものとし，S を (Ogus[O1] の意味での)p 進 formal V-scheme, $S_0 := \underline{\mathrm{Spec}}_S\, \mathcal{O}_S/p\mathcal{O}_S$ とし，$X, (\overline{X}, D)$ は上の通りとする．この時，次が成り立つ：

定理 2.9. 相対 crystalline cohomology $\underline{H}^n_S(((\overline{X}, D)/S)_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S})$ に対する weight スペクトル系列(2.1) は modulo torsion で E_2 退化する.

対応する定理は Betti, de Rham, l 進 etale cohomology の場合は知られている．また $V = W(\kappa), S = \mathrm{Spf}\, W(\kappa)$ の場合，κ が有限体の時は (log de Rham-Witt cohomology との同一視を通じて) Mokrane により知られており，また κ が完全体の場合は Nakkajima による別の証明もある ([Nj1]).

定理の証明の概略を述べる.

Step 1: $S = \mathrm{Spf}\, W(\kappa)$($\kappa$ は有限体) の場合.

この場合は Mokrane により知られている．証明は crystalline cohomology に対する Weil 予想 (Katz-Messing[Kz-Me], Chiarellotto-Le Stum[C-L1]) から従う.

Step 2: $S = \mathrm{Spf}\, A$ が $\mathrm{Spf}\, W(\kappa)$(κ は有限体) 上 formally smooth で，S 上への Frobenius の持ち上げが存在する場合.

この場合には単射 $A \longrightarrow \prod_{\substack{pA \subseteq \mathfrak{m} \subseteq A \\ \mathfrak{m}:\text{極大 ideal}}} W(A/\mathfrak{m})$ が存在する．これにより weight スペクトル系列を specialize する議論を用いて Step 1 の場合に帰着して証明する.

Step 3: $S = \mathrm{Spf}\, W(\kappa)$($\kappa$ は完全体) の場合.

この場合は model をうまくとることにより Step 2 に帰着できる.

Step 4: $S = \mathrm{Spf}\, A$ で，$A_{\mathbb{Q}} := A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が Artin 環である場合.

$\mathfrak{m}$ を $A_{\mathbb{Q}}$ の極大 ideal とし，$B := \mathrm{Im}(A \to A_{\mathbb{Q}}/\mathfrak{m})$, $C := B$ の正規化 とおく．すると C は V 上有限な完備離散付置環である．κ' を C の剰余体とする．この時自然に閉埋

め込み $\mathrm{Spf}\,B \overset{\subset}{\longrightarrow} \mathrm{Spf}\,A$ があるが，Ogus により，ある formal V-scheme A' と図式

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Spf}\,A' & \longrightarrow & \mathrm{Spf}\,A \\ \| & & \uparrow\cup \\ \mathrm{Spf}\,A' & \longrightarrow & \mathrm{Spf}\,B\end{array}$$

で，上の水平な矢印に対応する環の射 $A \longrightarrow A'$ が同型 $A_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} A'_{\mathbb{Q}}$ を導くものが存在することが知られている．すると次の implication が言え，これにより Step 4 の証明がなされる：

$$\begin{aligned}\text{Step 3} \quad &\Longrightarrow (S = \mathrm{Spf}\,W(\kappa') \text{ に対する定理}) \quad \overset{(*)}{\Longrightarrow} (S = \mathrm{Spf}\,C \text{ に対する定理}) \\ &\Longrightarrow (S = \mathrm{Spf}\,B \text{ に対する定理}) \Longrightarrow (S = \mathrm{Spf}\,A' \text{ に対する定理}) \\ &\Longrightarrow (S = \mathrm{Spf}\,A \text{ に対する定理}).\end{aligned}$$

但し，$(*)$ の部分の証明には log crystalline cohomology (modulo torsion) の無限小変形による不変性 (Berthelot-Ogus[B-O2]) を weight filtration 付で示す必要がある．これは Berthelot-Ogus の証明と同様の方法で証明できる．

Step 5: 一般の場合.

$S = \mathrm{Spf}\,A$ と仮定してよい．$A_{\mathbb{Q}}$ の極大 ideal $\mathfrak{m}$ と自然数 m に対して $A_{(m)} := \mathrm{Im}(A \longrightarrow A_{\mathbb{Q}}/\mathfrak{m}^m)$ とおく．すると Step 4 より $S = \mathrm{Spf}\,A_{(m)}$ の時の定理は正しい．このことと自然な射 $(A_{\mathbb{Q}})_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \varprojlim_m A_{\mathbb{Q}}/\mathfrak{m}^m = \varprojlim_m A_{(m)\mathbb{Q}}$ の単射性より定理が従うことがわかる．

最後に，open, smooth な代数多様体の族の相対 crystalline cohmology の weight filtration について他に示したことと関連する注意を以下いくつか挙げておく．

(1)　S_0, S が定理 2.9 と同様な場合，相対 crystalline cohomology $\underline{H}^n_S(((\overline{X}, D)/S)_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S})$ は単に S 上の層であるだけでなく，自然に S/V 上の convergent isocrystal ([O1]) の構造を持つことがわかる．

(2)　Weight filtration が pull-back と strictly compatible なことが証明できる．(Compatibility は我々の定義からすぐに出る．strictness は crystalline cohomology の Weil 予想に帰着して示す.)

(3)　Compact support 付の相対 crystalline cohmology に対しても weight filtration を定義できる．

(4)　相対 crystalline cohomology に対する base change theorem, Künneth formula, Poincaré duality ([B],[B-O1],[Kk],[O1],[Tj] 等を参照のこと) は全て weight filtration と compatible であることを示すことができる．

(5)　$S = \mathrm{Spf}\,W(\kappa)$ (但し κ は完全体) の場合，crystalline cohomology $H^n(((\overline{X}, D)/S)_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{(\overline{X},D)/S})$ は X の rigid cohomology $H^n_{\mathrm{rig}}(X)$ と同型である ([Sh2])．従って我々の結果より $H^n_{\mathrm{rig}}(X)$ に weight filtration が定義されたことになる．(なお，$H^n_{\mathrm{rig}}(X)$

への weight filtration に関しては Chiarellotto-Le Stum([C-L2]) による別の定義もある．)

(6)　更に，完全体 κ 上の (smooth とは限らない) 分離的有限型な scheme X に対しても Nakkajima([Nj2]) により $H^n_{\mathrm{rig}}(X)$ により weight filtration が定義されている．これは (5) の結果と Tsuzuki([Tz]) による rigid cohomology の cohomological descent を用いて得られる．

3　Strictly semi-stable な退化の cohomology の場合

この節でも素数 p を固定し，以下の状況を考える：V を混標数 $(0,p)$ の完備離散付置環で剰余体 κ が完全なものとし，K を V の商体，$\overline{K}$ を K の代数閉包とする．$S=\operatorname{Spec}V, \hat{S}:=\operatorname{Spf}V, S_0:=\operatorname{Spec}\kappa$ とおく．X を S 上の proper scheme で strictly semi-stable reduction を持つものとする．つまり，X は S 上 proper, flat な正則 scheme で，構造射 $X\longrightarrow S$ の generic fiber X_K は smooth, special fiber $X\times_S S_0=:Y$ は SNCD であるようなものとする．$Y=\bigcup_{i=1}^m D_i$ を既約成分への分解，$k\geq 0$ に対して $Y^{(k)}:=\coprod_{1\leq i_0<i_1<\cdots<i_k\leq m} D_{i_0}\cap D_{i_1}\cap\cdots\cap D_{i_k}$ とし，$a^{(k)}:Y^{(k)}\longrightarrow Y$ を包含写像 $D_{i_j}\overset{\subset}{\longrightarrow}Y$ たちから導かれる写像とする．(なお，${}^{(k)}$ の意味するものは 2 節のものとはずれがあるので注意．) SNCD $Y\subseteq X$ により定義される X 上の log structure を M, $S_0\subseteq S$ により定義される S 上の log structure を N とおく．M の Y 上への引き戻しや N の $\hat{S},S_0,Y$ 上への引き戻しも M,N と書くことにする．このとき，$f:Y\longrightarrow S_0$(構造射 $X\longrightarrow S$ の special fiber) は log smooth な射 $(Y,M)\longrightarrow(S_0,N)$ をひきおこす．これを $f^{\log}$ と書くことにする．

3.1　l 進 etale cohomology の weight filtration の復習

V^{ur} を V の最大不分岐拡大とし，次の図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
Y_{\overline{\kappa}} \arrow[r, "\overline{i}"] \arrow[d] & X_{V^{\mathrm{ur}}} \arrow[d] & X_{\overline{K}} \arrow[l, "\overline{j}"'] \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "i"] & X & X_K \arrow[l, "j"']
\end{tikzcd}$$

但し $Y_{\overline{\kappa}}$ は Y の $\overline{\kappa}$ への base change, $X_?$ の形のものは X の ? への base change, i,j は自然な開埋め込みおよび閉埋め込みで $\overline{i},\overline{j}$ は i,j から誘導される射である．

l を p と異なる素数とする．l 進 nearby cycle の層 $R\psi\mathbb{Q}_l$ を $R\psi\mathbb{Q}_l:=\overline{i}^*R\overline{j}_*\mathbb{Q}_l$ と定義する．ここでは l 進 etale cohomology $H^n(X_{\overline{K},\mathrm{et}},\mathbb{Q}_l)\cong H^n(Y_{\kappa,\mathrm{et}},R\psi\mathbb{Q}_l)$ への weight filtration の定義を簡単に復習する ([R-Zi], [I2])．まず，次の命題が成り立つことが言える．

命題 3.1. 上の状況で次が成り立つ：

(1) (purity) 同型 $i^*R^{k+1}j_*\mathbb{Q}_l(k+1) \overset{\simeq}{=} a_*^{(k)}\mathbb{Q}_l$ がある．

(2) $1 \in a_*^{(0)}\mathbb{Q}_l \overset{\simeq}{=} i^*R^1j_*\mathbb{Q}_l(1)$ との cup 積により定義される射 $i^*R^kj_*\mathbb{Q}_l \longrightarrow i^*R^{k+1}j_*\mathbb{Q}_l(1)[1]$ を θ_k とするとき，完全系列

$$0 \longrightarrow R^k\psi\mathbb{Q}_l(-1) \xrightarrow{\alpha_k} i^*R^{k+1}j_*\mathbb{Q}_l \xrightarrow{\beta_{k+1}} R^{k+1}\psi\mathbb{Q}_l \longrightarrow 0$$

で $\theta_k = \alpha_k \circ \beta_k$ を満たすものがある．

$i^*Rj_*\mathbb{Q}_l$ を表わす複体 $\mathcal{L}$ と $1 \in a_*^{(0)}\mathbb{Q}_l \overset{\simeq}{=} i^*Rj_*\mathbb{Q}_l(1)$ との cup 積により定義される射 $i^*Rj_*\mathbb{Q}_l \longrightarrow i^*Rj_*\mathbb{Q}_l(1)[1]$ を表わす複体の射 $\theta : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}(1)[1]$ をうまくとる．すると上の命題を用いた計算により，$R\psi\mathbb{Q}_l$ は二重複体

$$A := [(\tau_{\geq 1}\mathcal{L}(1))[1] \longrightarrow (\tau_{\geq 2}\mathcal{L}(2))[2] \longrightarrow \cdots (\tau_{\geq i+1}\mathcal{L}(i+1))[i+1] \longrightarrow \cdots]$$

($(\tau_{\leq 1}\mathcal{L}(1))[1])$ の次数 0 の成分が次数 $(0,0)$ であるとする) に associate した複体により表わされることがわかる．但しここで複体 Q に対し，$\tau_{\geq i}Q$ は canonical filtration (自然に

$$H^l(\tau_{\geq i}Q) = \begin{cases} H^l(Rj_{\mathrm{an}*}\mathbb{Q}), & (\text{if } l \geq i), \\ 0, & \text{if } l < i). \end{cases}$$

を満たす filtration) である．A の filtration $P_kA\,(k \in \mathbb{Z})$ を

$$P_kA := [(\tau_{[1,k+1]}\mathcal{L}(1))[1] \longrightarrow (\tau_{[2,k+3]}\mathcal{L}(2))[2] \longrightarrow \cdots (\tau_{[i+1,k+2i+1]}\mathcal{L}(i+1))[i+1] \longrightarrow \cdots]$$

と定義する．但しここで複体 Q に対し，$\tau_{[i,j]}Q := \tau_{\leq j}\tau_{\geq i}Q$ とする．すると次数商 $\mathrm{gr}_k^P A$ は

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}_k^P A &= \bigoplus_{i\geq 0, i\geq -k} i^*R^{k+2i+1}j_*\mathbb{Q}_l(i+1)[-2i-k] \\ &= \bigoplus_{i\geq 0, i\geq -k} a_*^{(2i+k)}\mathbb{Q}_l(-i-k)[-2i-k] \end{aligned}$$

となる．従って filtration $P_kA\,(k \in \mathbb{Z})$ はスペクトル系列

$$E^{-k,n+k} = \bigoplus_{i\geq 0, i\geq -k} H^{2n-i-k}(Y_{\overline{\kappa}}^{(2i+k)}, \mathbb{Q}_l(-i)) \implies H^n(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$$

を誘導する．これを weight スペクトル系列といい，これにより誘導される $H^n(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ の filtration を weight filtration と呼ぶ．

注 3.2. $H^n(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ はある種の l 進 log etale cohomology $H^n((Y,M)_{\overline{\kappa},\mathrm{t}l}, \mathbb{Q}_l)$ と同型である ($(Y,M)_{\overline{\kappa},\mathrm{t}l}$ の定義は [Ny] を見よ．) 従って $H^n((Y,M)_{\overline{\kappa},\mathrm{t}l}, \mathbb{Q}_l)$ 上に weight filtration が定義されたことになる．実際には，$H^n((Y,M)_{\overline{\kappa},\mathrm{t}l}, \mathbb{Q}_l)$ 上の weight filtration を定義するためには $f^{\log} : (Y,M) \longrightarrow (S,N)$ があれば充分である (Nakayama [Ny])．

注 3.3. $R\psi\mathbb{Q}_l$ は $Y_{\overline{\kappa},\mathrm{et}}$ 上の perverse 層となっており (Illusie [I2]), このことを用いて filtration P_k の別の (同値な) 定義法を与えることもできる (T.Saito [Sa])．

3.2 Log crystalline cohomology の weight filtration の構成に向けて

この節の内容はまだ研究の途上であることをあらかじめ断っておく．$((Y,M)/(\hat{S},N))_{\mathrm{crys}}$ を (Y,M) の $(\hat{S},N)$ 上の log crystalline site とし，$\mathcal{O}_{(Y,M)/(\hat{S},N)}$ をその構造層とする．この時，(Y,M) の $(\hat{S},N)$ 上の log crystalline cohomology $H^n(((Y,M)/(\hat{S},N))_{\mathrm{crys}},\mathcal{O}_{(Y,M)/(\hat{S},N)})_{\mathbb{Q}}$ ($_{\mathbb{Q}}$ は $\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ を表わす) は 3.1 節の注 3.2 の $H^n((Y,M)_{\overline{\kappa},\mathrm{tl}},\mathbb{Q}_l)$ の類似であり，従って $H^n(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_l)$ の類似である．この節では，前節の復習を参考にして，$H^n(((Y,M)/(\hat{S},N))_{\mathrm{crys}},\mathcal{O}_{(Y,M)/(\hat{S},N)})_{\mathbb{Q}}$ への weight filtration の (直接的な) 定義に向けた考察を試みる．

Weight filtration の定義のために，まず 3.1 節の $i^*Rj_*\mathbb{Q}_l$ や nearby cycle の層 $R\psi\mathbb{Q}_l$ の類似を定義することを試みる．$(Y,L):=(Y,M)\times_Y(Y,N)$ とおき，$j:(Y,L)\longrightarrow(Y.N)$ を自然な射影とする．また $\overline{j}:(Y,M)\longrightarrow(Y,N)$ を $f^{\log}$ から導かれる自然な射 ($f\circ\overline{j}=f^{\log}$ となる射) とする．この $j,\overline{j}$ が 2.1 節の $j,\overline{j}$ の類似となるべき射であると考える．$j_{\mathrm{crys}}:((Y,L)/(\hat{S},N))_{\mathrm{crys}}\longrightarrow((Y,N)/(\hat{S},N))_{\mathrm{crys}}=(Y/\hat{S})_{\mathrm{crys}}$，$\overline{j}_{\mathrm{crys}}:((Y,M)/(\hat{S},N))_{\mathrm{crys}}\longrightarrow((Y,N)/(\hat{S},N))_{\mathrm{crys}}=(Y/\hat{S})_{\mathrm{crys}}$ を対応する crystalline site の射とすると，$Rj_{\mathrm{crys}*}\mathcal{O}_{(Y,L)/(\hat{S},N)},R\overline{j}_{\mathrm{crys}*}\mathcal{O}_{(Y,M)/(\hat{S},N)}$ が 2.1 節の $Rj_*\mathbb{Q}_l,R\psi\mathbb{Q}_l$ の類似であると考えられる．しかしながら，次の命題がある：

命題 3.4. $(R^1j_*\mathcal{O}_{(Y,L)/(\hat{S},N)}(1))_{\mathbb{Q}}$ は $(a^{(0)}_{\mathrm{crys}*}\mathcal{O}_{((Y^{(0)},N)/(\hat{S},N)})_{\mathbb{Q}}$ と同型ではない．(但し，ここの $_{\mathbb{Q}}$ は $(Y/\hat{S})_{\mathrm{crys}}$ 上の層の圏の Hom を $\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ した圏で考えていることを意味する．)

証明の概略は次の通りである．$U\subset Y$ を f の smooth locus に含まれる affine open sub log scheme，$U\hookrightarrow T$ を $S_0\hookrightarrow\hat{S}$ 上の PD 完全閉埋め込みで T が affine log formal V-scheme となるものとし，また $T_n:=\underline{\mathrm{Spec}}_T\,\mathcal{O}_T/p^n\mathcal{O}_T$ とする．この時 $U\hookrightarrow T_n$ は自然に $((Y,M)/(\hat{S},N))_{\mathrm{crys}}$ の object を定める．$R:=\Gamma(T,\mathcal{O}_T)$ とおき，また $(R^1j_*\mathcal{O}_{(Y,L)/(\hat{S},N)}(1)),(a^{(0)}_{\mathrm{crys}*}\mathcal{O}_{((Y^{(0)},N)/(\hat{S},N)})$ の $U\hookrightarrow T_n$ での値をそれぞれ P_n,Q_n とおくと $(\varprojlim_n P_n)_{\mathbb{Q}}=(R\langle t\rangle/tR\langle t\rangle)_{\mathbb{Q}},(\varprojlim_n Q_n)_{\mathbb{Q}}=R_{\mathbb{Q}}$ と計算でき (但しここで $R\langle t\rangle$ は R 上の PD 多項式環の p 進完備化)，これらは一般に同型でない．これより命題が示される．

命題 3.4 より，log crystalline site で考えた時には命題 3.1 の類似は成立せず，従って weight filtration を 3.1 節の方法で定義することは出来ない．これは log crystalline cohomology が singularity を持つ scheme Y に対してはうまく働かないことが原因であると思われる．そこで，log crystalline site の代替物として，log convergent site $((Y,M)/(\hat{S},N))_{\mathrm{conv}}$ ([O1], [O2], [Sh1], [Sh2]) を用いることを考える．Log convergent site とは，log crystalline site の「p 進収束半径を修正したもの」である．Log convergent site を用いることの正当性は次の定理 ([Sh2]) で与えられる：

定理 3.5. $\mathcal{K}_{(Y,M)/(\hat{S},N)}$ を log convergent site $((Y,M)/(\hat{S},N))_{\mathrm{conv}}$ の構造層を $\otimes\mathbb{Q}$ して得られる層とする．この時自然な同型

$$H^n(((Y,M)/(\hat{S},N))_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{(Y,M)/(\hat{S},N)})_{\mathbb{Q}} \cong H^n(((Y,M)/(\hat{S},N))_{\mathrm{conv}}, \mathcal{K}_{(Y,M)/(\hat{S},N)})$$

がある．

つまり，我々が weight filtration を入れることを目指している cohomology は log convergent cohomology と自然に同型なので，全て log convergent site で考えることが許されるわけである．すると，今度は $Rj_{\mathrm{conv}*}\mathcal{K}_{(Y,L)/(\hat{S},N)}, R\overline{j}_{\mathrm{conv}*}\mathcal{K}_{(Y,M)/(\hat{S},N)}$ が 3.1 節の $Rj_*\mathbb{Q}_l, R\psi\mathbb{Q}_l$ の類似であると考えられる．(ここで $j_{\mathrm{conv}}, \overline{j}_{\mathrm{conv}}$ は $j_{\mathrm{crys}}, \overline{j}_{\mathrm{crys}}$ の log convergent site での類似物とする．) この時，次の命題が証明できることがわかった．

命題 3.6. (1) (purity) 同型 $R^{k+1}j_{\mathrm{conv}*}\mathcal{K}_{(Y,L)/(\hat{S},N)}(k+1) \cong a^{(k)}_{\mathrm{conv}*}\mathcal{K}_{(Y^{(k)},N)/(\hat{S},N)}$ がある．

(2) $1 \in a^{(0)}_{\mathrm{conv}*}\mathcal{K}_{(Y^{(0)},N)/(\hat{S},N)} \cong R^1j_{\mathrm{conv}*}\mathcal{K}_{(Y,L)/(\hat{S},N)}$ との cup 積により定義される射 $R^kj_{\mathrm{conv}*}\mathcal{K}_{(Y,L)/(\hat{S},N)} \longrightarrow i^*R^{k+1}j_{\mathrm{conv}*}\mathcal{K}_{(Y,L)/(\hat{S},N)}[1]$ を θ_k とするとき，完全系列

$$0 \longrightarrow R^k\overline{j}_{\mathrm{conv}*}\mathcal{K}_{(Y,M)/(\hat{S},N)}(-1) \xrightarrow{\alpha_k} R^{k+1}j_{\mathrm{conv}*}\mathcal{K}_{(Y,L)/(\hat{S},N)} \xrightarrow{\beta_{k+1}} R^{k+1}\overline{j}_{\mathrm{conv}*}\mathcal{K}_{(Y,M)/(\hat{S},N)} \longrightarrow 0$$

で $\theta_k = \alpha_k \circ \beta_k$ を満たすものがある．

証明は基本的には直接計算なので省略する．Crystalline site の場合との違いは命題 3.4 中の $(\varprojlim_n P_n)_{\mathbb{Q}}$ に対応するものが $R_{\mathbb{Q}}\langle\langle t\rangle\rangle/tR_{\mathbb{Q}}\langle\langle t\rangle\rangle = R_{\mathbb{Q}}$ (但し $R_{\mathbb{Q}}\langle\langle t\rangle\rangle$ は $R_{\mathbb{Q}}[[t]]$ の元で単位開円板で収束するもの全体のなす環) となる点で，ここに収束半径を修正した効果が現れている．

現時点での考察は以上であるが，3.1 節と同様の方法で log convergent cohomology $H^n(((Y,M)/(\hat{S},N))_{\mathrm{conv}}, \mathcal{K}_{(Y,M)/(\hat{S},N)})$ の weight filtration が定義できると考えられる．その定義と基本的性質の解明が今後の課題である．

最後に，関連する注意をいくつか述べる．

(1)　Mokrane は 3.2 節のような状況において (Y,M) の $(\mathrm{Spf}\,W(\kappa), N)$ (N は実際は $\mathrm{Spf}\,W(\kappa)$ 上定義されることに注意) 上の log de Rham-Witt cohomology (これはやはり Illusie, Hyodo-Kato の結果 ([I1],[H-Kk]) より log crystalline cohomology と同型である) に weight filtration を定義している．彼の方法は log de Rham-Witt complex の Hyodo-Steenbrink complex と言われる二重複体 (3.1 節の A の類似) を作り，そこに filtration を入れるという手法であり，我々の方法とは異なっている．その比較は重要な問題の一つである．

(2)　Nakkajima は log crystalline cohomology への weight filtration を Mokrane の Hyodo-Steenbrink complex の構成を crystalline site で行う (実際にはもっと複雑であるようだが) ことにより定義したと教わった．我々の方法とは異なるようである

が，(1) とも関連してその比較は重要であろう．
(3)　注 3.3 の類似として，$R\overline{j}_{\mathrm{conv}*}\mathcal{K}_{(Y,M)/(\hat{S},N)}$ はある種の perverse 層であると期待される．
(4)　3.2 節にあるような p 進的な nearby cycle を用いる考えは Gros の未発表の論文の中に見出される．

4　謝辞

本稿は平成 16 年 8 月に行われた代数学シンポジウムでの筆者の講演内容をまとめたものです．筆者に講演の機会をくださった金子昌信先生を始めとする世話人の先生方に深く感謝の意を表したいと思います．また，2 節の内容の共著者である中島幸喜氏にも深く感謝したいと思います．最後に，お忙しい中筆者の講演を聴いて下さった方々にも感謝いたします．

参考文献

[B] Berthelot, P. *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique* $p > 0$. Lecture Notes in Math. 407, Springer-Verlag, Berlin-New York, (1974).

[B-O1] Berthelot, P., Ogus, A. *Notes on crystalline cohomology.* Princeton Univ. Press, (1978).

[B-O2] Berthelot, P., Ogus, A. *F-isocrystals and de Rham cohomology.* I. Invent. Math. 72, (1983), 159-199.

[C-L1] Chiarellotto, B., Le Stum, B. *Sur la pureté de la cohomologie cristalline.* C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 326, (1998), 961–963.

[C-L2] Chiarellotto, B., Le Stum, B. *A comparison theorem for weights.* J. reine angew. Math. 546, (2002), 159–176.

[D1] Deligne, P. *Théorie de Hodge* I. Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, pp. 425–430. Gauthier-Villars, Paris, (1971).

[D2] Deligne, P. *Théorie de Hodge,* II. IHES Publ. Math. 40, (1971), 5–57.

[D3] Deligne, P. *Théorie de Hodge,* III. IHES Publ. Math. 44, (1974), 5–77.

[D4] Deligne, P. *Poids dans la cohomologie des variétés algébriques.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974), Vol. 1, pp. 79–85.

[D5] Deligne, P. *La conjecture de Weil,* II. IHES Publ. Math. 52, (1980), 137–252.

[F-Ny] Fujisawa, T., Nakayama, C., *Mixed Hodge structures on log deformations.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 110 (2003), 221–268.

[G] Grothendieck, A. *Récoltes et semailles*: *Réflexions et témoinage sur un passé de mathématicien* I, II, IV. Gendai-Sugaku-sha, Japanese translation by Y. Tsuji, (1989), (1990), unpublished.

[H-Kk] Hyodo, O., Kato, K. *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles.* Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988). Astérisque 223, (1994), 221–268.

[H] Hyodo, O. *On the de Rham-Witt complex attached to a semi-stable family.* Comp. Math. 78, (1991), 241–260.

[I1] Illusie, L. *Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline.* Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4[e] série 12, (1979), 501–661.

[I2] Illusie, L., *Autour du theoreme de monodromie locale.* In: Periodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988). Asterisque No. 223 (1994), 9–57.

[Kf] Kato, F., *The relative log Poincare lemma and relative log de Rham theory.* Duke Math. J. 93 (1998), 179–206.

[Kk] Kato, K. *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie.* In: Algebraic analysis, geometry, and number theory, Johns Hopkins Univ. Press, (1989), 191–224.

[Kk-Ny] Kato, K., Nakayama, C. *Log Betti cohomology, log étale cohomology, and log de Rham cohomology of log schemes over* $\mathbb{C}$. Kodai Math. J. 22, (1999), 161–186.

[Kk-Ma-Ny] Kato, K., Matsubara, T., Nakayama, C., *Log C^∞-functions and degenerations of Hodge structures.* In: Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka), 269–320, Adv. Stud. Pure Math., 36, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.

[Kz-Me] Katz, N., Messing, W. *Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields.* Invent. Math. 23, (1974), 73–77.

[Ma] Matsubara, T., *On log Hodge structures of higher direct images.* Kodai Math. J. 21 (1998), no. 2, 81–101.

[Mo1] Mokrane, A. *La suite spectrale des poids en cohomologie de Hyodo-Kato.* Duke Math. J. 72, (1993), 301–337.

[Mo2] Mokrane, A. *Cohomologie cristalline des variétés ouvertes.* Rev. Maghrebine Math. 2, (1993), 161–175.

[Ny] Nakayama, C., *Degeneration of l-adic weight spectral sequences.* Amer. J. Math. 122 (2000), 721–733.

[Nj1] Nakkajima, Y. *p-adic weight spectral sequences of log varieties.* Preprint.

[Nj2] Nakkajima, Y. *Weight filtration and slope filtration on the rigid cohomology of a variety in characteristic $p > 0$.* Preprint.

[Nj-Sh] Nakkajima, Y., Shiho, A. *Weight filtrations on log crystalline cohomologies of families of open smooth varieties of characteristic $p > 0$.* Preprint.

[O1] Ogus, A. *F-isocrystals and de Rham cohomology.* II. *Convergent isocrystals.* Duke Math. J. 51, (1984), 765–850.

[O2] Ogus, A. *F-crystals on schemes with constant log structure.* Compositio Math. 97, (1995), 187–225.

[R-Zi] Rapoport, M., Zink, Th., *Uber die lokale Zetafunktion von Shimuravarietaten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik.* Invent. Math. 68 (1982), 21–101.

[Sa] Saito, T., *Weight spectral sequences and independence of l.* J. Inst. Math. Jussieu 2 (2003), 583–634.

[Sc] Schneiders, J.-P., *Quasi-abelian categories and sheaves.* Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) 76, (1999).

[Sh1] Shiho, A. *Crystalline fundamental groups* I—*Isocrystals on log crystalline site and log convergent site.* J. Math. Sci. Univ. Tokyo 7, (2000), 509–656.

[Sh2] Shiho, A. *Crystalline fundamental groups* II*—Log convergent cohomology and rigid cohomology.* J. Math. Sci. Univ. Tokyo 9, (2002), 1–163.

[St1] Steenbrink, J. H. M., *Limits of Hodge structures.* Invent. Math. 31 (1975/76), 229–257.

[St2] Steenbrink, J. H. M., *Logarithmic embeddings of varieties with normal crossings and mixed Hodge structures.* Math. Ann. 301 (1995), 105–118.

[St-Zu] Steenbrink, J. H. M., Zucker, S., *Variation of mixed Hodge structure. I.* Invent. Math. 80 (1985), 489–542.

[Tj] Tsuji, T. *Poincaré duality for logarithmic crystalline cohomology.* Compositio Math. 118, (1999), 11–41.

[Tz] Tsuzuki, N. *Cohomological descent of rigid cohomology for proper coverings.* Invent. Math. 151 (2003), 101-133.