有限群のブロック・イデアルのコホモロジー環と Brauer 対応

愛媛大学理学部　(Ehime University)
佐々木 洋城　(Sasaki, Hiroki)

1 はじめに

G を有限群とする. k を代数的閉体とし, その標数 p は $|G|$ の素因数であるとする. 群環 kG のブロック・イデアル B, すなわち, 群環 kG の $k[G \times G]$ 加群としての直既約直和因子, は添加写像を持たないため, $H^*(G, M) = \mathrm{Ext}^*_{kG}(k, M)$, M は kG- 加群, のまねをして, コホモロジー論を構成することはできない. 従来は多元環一般に定義される Hochschild コホモロジー環が考えられてきた. Hochschild コホモロジー環 $HH^*(B)$ は B を両側 (B, B) 加群とみて

$$\mathrm{Ext}^*_{B\otimes B^{\mathrm{op}}}(B, B)$$

のことであるが, 実はほとんど研究されてこなかったといってよい. そこで, M. Linckelmann は [11] において, D をブロック B の defect 群として, D における subpairs のなす Brauer 圏の不変量として,「B のコホモロジー環 $H^*(G, B)$」を定義した. それは, D のコホモロジー環 $H^*(D, k)$ のある種の安定な部分環であって, $HH^*(B)$ の部分環に同型である. しかしながら, Hochschild コホモロジー環のような Ext による"global decription" がないゆえに, 理論としては甚だ不完全で, 基本的な課題で残されているものがある. ここでは, Brauer 対応で対応するブロックの Linckelmann の意味のコホモロジー環について考えたい.

なお, この研究は河合浩明氏 (崇城大学) との共同の結果である. しかし, このシンポジウムでの講演, 報告の責任は私, 佐々木にあることはもちろんである.

2 Brauer 圏とコホモロジー環

G を有限群, B を群環 kG のブロック・イデアル, D を B の defect 群とし, (D, b_D) を Sylow B-subpair とする.

定義 2.1 subpairs $(Q, b_Q), (R, b_R) \subseteq (D, b_D)$ に対して,

$$T_G((Q, b_Q), (R, b_R)) = \{\, x \in G \mid {}^x(Q, b_Q) \subseteq (R, b_R) \,\};$$
$$E_G((Q, b_Q), (R, b_R)) = \{\, c_x \mid x \in T_G((Q, b_Q), (R, b_R)) \,\}$$

とおく. ここで, $c_x : Q \to P; a \mapsto {}^a x = xax^{-1}$.

そこで,

- B-subpairs $(Q, b_Q) \subseteq (D, b_D)$ を対象とし,
- 対象 $(Q, b_Q) \subseteq (D, b_D)$ から $(R, b_R) \subseteq (D, b_D)$ への射の集合は $E_G\big((Q, b_Q), (R, b_R)\big)$ である

圏を Brauer 圏とよび, $\mathscr{F}_{(D,b_D)}(G, B)$ と記す.

定義 2.2 B のコホモロジー環 $H^*(G, B)$ を

$$H^*(G, B) = \{\, \zeta \in H^*(D, k) \mid \mathrm{res}_Q{}^{x^{-1}}\zeta = \mathrm{res}_Q\, \zeta \quad \forall\, Q \leqslant D,\ \forall x \in T_G((Q, b_Q), (D, b_D))\,\}$$

と定義する.

この定義によれば, すべての B-subpair $(Q, b_Q) \subseteq (D, b_D)$ について stability を満すものを考えなければならない. かなり大変な話である. そこで, とりあえず次の 3 つの疑問がわく:

(1) 主ブロックのコホモロジー環については詳しく分かるのだろうか？
(2) defect 群が正規部分群のときは, 簡単に記述できるのだろうか？
(3) Brauer 対応で対応するブロックのコホモロジー環の関係は？

(1) については Linckelmann 自身が [11] の中で

補題 2.1 S を G の Sylow p- 部分群とし, $B_0(G)$ を G の主ブロックとすれば,

$$H^*(G, B_0(G)) = \mathrm{Im}\,[\mathrm{res}_S : H^*(G, k) \to H^*(S, k)]$$

が成り立つ.

下に述べるように, $\mathrm{res}_S : H^*(G, k) \to H^*(S, k)$ は単射であるから, $H^*(G, B_0(G))$ とは $H^*(G, k)$ のことであると思ってしまうと, 疑問の (2), (3) は主ブロックの場合には, 次のように解決される. S をやはり G の Sylow p- 部分群とする.

(2) S が正規部分群のとき,

$$H^*(G, k) = H^*(S, k)^G,$$

ここで, $H^*(S, k)^G = \{\,\sigma \in H^*(S, k) \mid {}^g\sigma = \sigma\ \forall g \in G\,\}$ である.

(3) 例えば, $H = N_G(S)$ とすると, H における Brauer 対応子は H の主ブロックである. 一般に (H がどのような部分群であっても) 次の図式は可換である:

$$\begin{tikzcd} H^*(G, k) \arrow[rr, "|G:H|\cdot"] \arrow[dr, "\mathrm{res}_H"'] & & H^*(G, k) \\ & H^*(H, k) \arrow[ur, "\mathrm{tr}^G"'] & \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

さて, いまの場合, $|\, G\!:\!H\,|$ は p と互いに素であるから, これは同型である. 特に

$$H^*(H, k) = \mathrm{Im}\ \mathrm{res}_H \oplus \mathrm{Ker}\ \mathrm{tr}^G, \quad \mathrm{Im}\ \mathrm{res}_H \simeq H^*(G, k). \tag{2.2}$$

従って, これらの事実を一般のブロック・イデアルのコホモロジー環に拡張せよというのが課題である.

defect 群が正規部分群のときは, 実は解決済であって, すでに数理解析研究所における短期共同研究で報告した:

命題 2.2 ([8], [15]) defect 群 D が G で正規ならば

$$H^*(G, B) = H^*(D, k)^{N_G(D, b_D)}$$

である. 特に, $H = N_G(D, b_D)$ とおき, $C = b_D^H$ とおくと, $H^*(G, B) = H^*(H, C)$ が成り立つ.

この命題から, 次のことが結論される. すなわち, G の部分群 H は $DC_G(D) \leqslant H \leqslant N_G(D)$ を満すとする. kH のブロック・イデアル C が Brauer 対応によって B に対応しているとすれば

$$H^*(G, B) \subset H^*(H, C)$$

である. 実は, この事実が我々の研究の出発点であった.

ところが, 最近の R. Kessar, M. Linckelmann, and G. R. Robinson [9] の Proposition 2.3 によれば, 例えば

定理 2.3 G の部分群 H は D のある自明でない部分群 Q について, $QC_G(Q) \leqslant H \leqslant N_G(Q)$ が成り立ち, $N_G(D)$ を含むと仮定する. kH のブロック・イデアル C と kG のブロック・イデアル B が Brauer 対応で対応しているならば, $\mathscr{F}_{(D,b_D)}(H, C) \subset \mathscr{F}_{(D,b_D)}(G, B)$ が成り立つ. 特に, コホモロジー環について

$$H^*(G, B) \subset H^*(H, C).$$

つまり, 十分多くの場合について, $H^*(G, B) \subset H^*(H, C)$ なのである.

そこで, われわれの課題のひとつは上の包含写像の意味を明らかにすることである.

なお, 定義 2.2 における stability condition の意味は, 命題 3.3 で明らかとなる.

3 ブロック・イデアルのコホモロジー環と Hochschild コホモロジー環

課題を明確にするために, ブロック・イデアルのコホモロジー環と Hochschild コホモロジー環との関係を, Linckelmann [11] において定義された対称多元環の Hochschild コホモロジー環の間の tranfer 写像を通して, 述べる.

群の通常の mod$p$ コホモロジー環 $H^*(G, k)$ は $H^*(G, k) = \mathrm{Ext}^*_{kG}(k, k)$ と定義され, 従って, コホモロジー環の間に自然にいくつかの写像が定義される.

部分群 $H \leqslant G$ に対して, 両側 (kG, kH)- 加群 ${}_{kG}kG_{kH}$ を X とおいて, 次の可換図式が得られる:

(3.1)
$$
\begin{tikzcd}
H^*(G,k) \arrow[r, "\delta_G"] & HH^*(kG) \\
H^*(H,k) \arrow[u, "\mathrm{cor}^G"] \arrow[r, "\delta_H"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & HH^*(kH) \arrow[u, "t_X"']
\end{tikzcd}
,\qquad
\begin{tikzcd}
H^*(G,k) \arrow[r, "\delta_G"] \arrow[d, "\mathrm{res}_H"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & HH^*(kG) \arrow[d, "t_{X^*}"] \\
H^*(H,k) \arrow[r, "\delta_H"'] & HH^*(kH)
\end{tikzcd}
.
$$

より詳しく,

$$\mathrm{Im}\,\delta_G \subset HH^*_X(kG), \quad \mathrm{Im}(\delta_H \circ \mathrm{res}_H) \subset HH^*_{X^*\otimes_{kG}X}(kH).$$

ここで, $\delta_G : H^*(G,k) \to HH^*(kG)$ は diagonal approximation であり,

- $t_X : HH^*(kH) \to HH^*(kG)$, $t_{X^*} : HH^*(kG) \to HH^*(kH)$ はそれぞれ, ${}_{kG}X_{kH}$ および, ${}_{kG}X_{kH}$ の双対 ${}_{kH}X^*_{kG}$ が定義する transfer 写像であり,
- $HH^*_X(kG)$, $HH^*_{X^*\otimes_{kG}X}(kH)$ はそれぞれ, $HH^*(kG)$ における X-stable elements および, $HH^*(kH)$ における $X \otimes_{kG} X^*$-stable elements のなす部分多元環である.

Hochschild コホモロジー環における transfer 写像および stable elements については次の節に定義を述べる. ここでは, 直感的な感じをつかむために, 次の事実を指摘する.

一般に, $\theta \in H^*(H,k)$ は条件

$$\mathrm{res}_{H\cap {}^gH}\,\theta = \mathrm{res}_{H\cap {}^gH}\,{}^g\theta \quad \forall g \in G$$

を満すとき, G-stable であるという. $H^*_G(H,k) = \{\theta \in H^*(H,k) \mid \theta \text{ は } G\text{-stable}\}$ とおく. これは $H^*(H,k)$ の次数付部分多元環である.

命題 3.1 上の記号の下で

(1) $\mathrm{res}_H\, H^*(G,k) \subset H^*_G(H,k)$.
(2) $|\,G\!:\!H\,|$ が p で割れないとき,

$$\mathrm{res}_H\, H^*(G,k) = H^*_G(H,k).$$

両側 (kG, kH)- 加群 $X = kG$ について, $X^* \otimes_{kG} X \simeq {}_{kH}kG_{kH}$ であることに注意して,

命題 3.2

$$\delta_H\, H^*_G(H,k) = HH^*_{{}_{kH}kG_{kH}}(kH).$$

さて, 主ブロック $B_0 = B_0(G)$ について

(3.2)
$$H^*(G, B_0) = \mathrm{Im}\,\mathrm{res}_S = H^*_G(S,k) \xrightarrow{\delta_S} HH^*_{{}_{kS}kG_{kS}}(kS)$$

である. この事実は一般のブロックにはどのように拡張されるだろうか. これを説明するために少し準備が必要である.

一般に, p- 部分群 $P \leqslant G$ に対して, 写像

$$\mathrm{Br}_P^G : (kG)^P \to kC_G(P); \sum_{x\in G} \alpha_x x \mapsto \sum_{y\in C_G(P)} \alpha_y y$$

は環の全射準同型であって, Brauer 準同型とよぶ．ブロック・イデアル B のブロック冪等元を e とする:$B = kGe$．D を B の defect 群とすると, $\mathrm{Br}_D^G(e) \neq 0$ であるから, $B^D = \{\beta \in B \mid {}^x\beta = \beta\ \forall\, x \in D\}$ の原始冪等元 i で $\mathrm{Br}_D^G(i) \neq 0$ となるものが存在する．このような i は単数群 $U\big((kG)^D\big)$ による共役を除いて一意的であって, source 冪等元とよばれている．source 冪等元の意義の一つは, source 多元環 $Z = ikGi$ は加群 ${}_BX_Z = kGi$, ${}_ZX^*{}_B = ikG$ によって, B と森田同値であることであろう:

$$X \otimes_Z X^* \simeq B, \quad X^* \otimes_B X \simeq Z.$$

一般に, 森田同値な多元環の Hochschild コホモロジー環は同型である (例えば, Benson [1] Theorem 2.11.1) が, B と Z は対称多元環であるから, Linckelmann による, 加群が定める transfer 写像を考えることができて, Hochschild コホモロジー環の同型を与える:

$$t_X : HH^*(Z) \xrightarrow{\sim} HH^*(B), \quad t_{X^*} : HH^*(B) \xrightarrow{\sim} HH^*(Z), \quad t_X = {t_{X^*}}^{-1}.$$

ここで, t_X, t_{X^*} はそれぞれ両側加群 X, X^* によって定められる transfer 写像である.

さて, 主ブロックについて成り立つ事実 (3.2) は Linckelmann によれば, 次のように, 一般のブロックに拡張される．source 冪等元 i は D と可換であるから, source 多元環 $Z = ikGi$ は両側 (kD, kD)- 加群である.

命題 3.3 次が成り立つ:

$$H^*(G, B) \xrightarrow{\delta_D} HH^*_{ikGi}(kD) \subset HH^*_{X^*}(kD). \tag{3.3}$$

実は, 等号 $HH^*_{ikGi}(kD) = HH^*_{X^*}(kD)$ が成り立つ. これは, 命題 4.13 から従う.

さて, $N_G(D) \leqslant H \leqslant G$ である部分群 H のブロック・イデアル C は Brauer 対応によって, B に対応していて, 包含関係 $H^*(G, B) \subset H^*(H, C)$ が成り立っていると仮定しよう. この包含写像を restriction 写像

$$\mathrm{res}_C^B : H^*(G, B) \to H^*(H, C)$$

と思って, (3.1) の右側の図式のまねをして, 何かの transfer 写像 $HH^*(B) \to HH^*(C)$ に持ち上げることはできないだろうか:

$$\begin{tikzcd} H^*(G, B) \arrow[r] \arrow[d, hook] & HH^*(B) \arrow[d, dashed] \\ H^*(H, C) \arrow[r] & HH^*(C) \end{tikzcd}$$

4 Hochschild コホモロジー環の transfer 写像と stable elements

この節では, Linckelmann による対称多元環の Hochschild コホモロジー環の transfer 写像と stable elements について述べる. Linckelmann [11] においては両側加群の bounded complex X によって定められる transfer 写像や X-stability が論じられている. しかし, 本稿では X として加群のみを扱う. また, [11] に基本的に基づいているが, Broué [3] も参考に, さらに, 独自の (少しの) 考察を加えながら述べたい. 従って, 定義は見かけ上 [11] のものとは異なるものもあるが, 内容的には, もちろん同じである.

以下では, R を可換環とする. R- 多元環 A, B および, 両側 (A, B)- 加群 ${}_AL_B$ に対して,

$$\check{}_AL = \mathrm{Hom}_A({}_AL, A), \quad L_B\check{} = \mathrm{Hom}_B(L_B, B)$$

とおく. また, 両側 (A, B)- 加群 ${}_AL_B$, ${}_AM_B$ に対して,

$${}_A(L, M) = \mathrm{Hom}_A({}_AL, {}_AM),\ (L, M)_B = \mathrm{Hom}_B(L_B, M_B),\ {}_A(L, M)_B = \mathrm{Hom}_{A\otimes B^{\mathrm{op}}}(L, M)$$

とおく.

4.1 双対性

A, B および C を R- 多元環とする.

命題 4.1 (1) 両側加群 ${}_AL_B$, ${}_BM_C$, ${}_AN_C$ に対して, 次の自然な同型が存在する:
(a) ${}_AL$ が射影的ならば, ${}_B(M, \check{}_AL \otimes_A N)_C \simeq {}_A(L \otimes_B M, N)_C$;
(b) M_C 射影的ならば, ${}_A(L \otimes_B M, N)_C \simeq {}_A(L, N \otimes_C M_C\check{})_B$.
(2) 両側加群 ${}_AL_B$, ${}_AM_C$, ${}_CN_B$ に対して, 次の自然な同型が存在する:
(a) M_C が射影的ならば, ${}_A(M_C\check{} \otimes_A L, N)_B \simeq {}_A(L, M \otimes_C N)_B$;
(b) ${}_CN$ が射影的ならば, ${}_A(L, M \otimes_C N)_B \simeq {}_A(L \otimes_B \check{}_CN, M)_C$.

両側加群 ${}_AL_B$ に対して, 上の (2)(b) によって, 同型 ${}_A(L, L)_B \simeq {}_A(L \otimes_B \check{}_AL, A)_A$ が存在するが, この同型によって, L の恒等変換に対応する両側 (A, A)- 加群の準同型 $L \otimes_B \check{}_AL \to A$ を ${}_L\varepsilon$ と書き, evaluation map とよぶ.

4.2 trace 写像と restriction 写像

A を R 上の対称多元環とする. すなわち

- ${}_RA$ は射影的であり;
- 両側 (A, A)- 加群としての同型

$$\Phi : A \to A^* = \mathrm{Hom}_R(A, R)$$

が存在する.

$$\sigma = \Phi(1) : A \to R$$

を A の対称化形式とすると,

定理 4.2 B を R- 多元環とする. 両側 (A, B)- 加群 ${}_AL_B$ に対して, 次の (B, A)- 加群として

$$\check{}_AL \simeq L^*; \varphi \mapsto \sigma \circ \varphi.$$

B も対称ならば, (B, A)- 加群として

$$\check{}_AL \simeq L^* \simeq L_B\check{}.$$

注意 4.1 上の同型は対称化形式に依存して定められるものである.

以下では A, B を対称 R- 多元環とする. ${}_AX_B$ を両側 (A, B)- 加群として固定する.

定義 4.1 ${}_AX$ および X_B はともに射影的であると仮定する. 両側 (C, A)- 加群 ${}_CM_A$, ${}_CN_A$ をとる. 両側加群としての準同型 $f : M \otimes_A X \to N \otimes_A X$ に, 命題 4.1 (1)(b) の同型によって対応する両側加群としての準同型 $M \to N \otimes_A X \otimes_B X_B\check{}$ を $\tilde{f}$ とおく. $\tilde{f}$ と定理 4.2 から得られる同型 $N \otimes_A X \otimes_B X_B\check{} \xrightarrow{\sim} N \otimes_A X \otimes_B \check{}_AX$, および $1_N \otimes {}_X\varepsilon : N \otimes_A X \otimes_B \check{}_AX \to N$ の合成

$$M \xrightarrow{\tilde{f}} N \otimes_A X \otimes_B X_B\check{} \xrightarrow{\sim} N \otimes_A X \otimes_B \check{}_AX \xrightarrow{1_N \otimes {}_X\varepsilon} N$$

を $\mathrm{Tr}^X f$ と書く:

$$\mathrm{Tr}^X : {}_C(M \otimes_A X, N \otimes_A X)_B \to {}_C(M, N)_A;\ f \mapsto \mathrm{Tr}^X f. \tag{4.1}$$

写像 $\mathrm{Tr}^X : {}_C(M \otimes_A X, N \otimes_A X)_B \to {}_C(M, N)_A$ を (relative) trace 写像とよぶ.

命題 4.1 (1)(b) の同型によって, X の恒等写像が対応する両側 (A, A)- 加群の準同型 $A \to X \otimes_B X_B\check{}$ を ${}_X\iota$ と書くと, trace 写像は次のようにも表される.

命題 4.3 定義 4.1 と同じ状況の下で

$$\mathrm{Tr}^X f : M \xrightarrow{1_M \otimes {}_X\iota} M \otimes_A X \otimes_B X_B\check{} \xrightarrow{f \otimes 1_{X_B\check{}}} N \otimes_A X \otimes_B X_B\check{} \xrightarrow{\sim} N \otimes_A X \otimes_B \check{}_AX \xrightarrow{1_N \otimes {}_X\varepsilon} N.$$

注意 4.2 Broué [3] における relative trace map (Definitioin 2.14) は上の右辺で定義されている.

補題 4.4 A, B, C を対称 R- 多元環とする. 両側加群 ${}_DM_A$, ${}_DN_A$, ${}_AX_B$, ${}_BY_C$ に対して

$$\mathrm{Tr}^{X \otimes_B Y} = \mathrm{Tr}^X \circ \mathrm{Tr}^Y.$$

定義 4.2 両側 (C, A)- 加群 ${}_CM_A$, ${}_CN_A$ をとる. 両側加群の準同型 $g : M \to N$ に対して, 両側 (C, B)- 加群の準同型 $g \otimes 1_X : M \otimes_A X, N \otimes_A X$ を $\mathrm{Res}_X f$ と書く:

$$\mathrm{Res}_X : {}_C(M, N)_A \to {}_C(M \otimes_A X, N \otimes_A X)_B;\ g \mapsto g \otimes 1_X. \tag{4.2}$$

写像 $\mathrm{Res}_X : {}_C(M, N)_A \to {}_C(M \otimes_A X, N \otimes_A X)_B$ を restriction 写像とよぼう. なお, この名前および記号ははここだけの記号である.

補題 4.5 A, B, C を対称 R- 多元環とする. 両側 (A, B)- 加群 ${}_AX_B$, 両側 (B, C)-${}_BY_C$ による restriction について次が成り立つ.

(1)

$$\mathrm{Res}_{X\otimes_B Y} = \mathrm{Res}_Y \circ \mathrm{Res}_X .$$

(2) 両側 (D, A)- 加群 ${}_D L_A$, ${}_D M_A$, ${}_D N_A$ を考える. $f \in {}_D(L, M)_A$, $g \in {}_D(M, N)_A$ について

$$\mathrm{Res}_X(g\circ f) = \mathrm{Res}_X\, g \circ \mathrm{Res}_X\, f.$$

命題 4.6 (相互律) ${}_A X$ および X_B はともに射影的であると仮定する. 両側 (C, A)- 加群 ${}_C L_A$, ${}_C M_A$, ${}_C N_A$ に対して次が成り立つ:

(1) 写像 $f \in {}_C(L \otimes_A X, M \otimes_A X)_B$, $g \in {}_C(M, N)_A$ に対して

$$\mathrm{Tr}^X(\mathrm{Res}_X\, g\circ f) = g\circ \mathrm{Tr}^X f.$$

(2) 写像 $f \in {}_C(L, M)_A$, $g \in {}_C(M \otimes_A X, N \otimes_A X)_B$ に対して

$$\mathrm{Tr}^X(g\circ \mathrm{Res}_X\, f) = \mathrm{Tr}^X g \circ f.$$

定義 4.3 X の恒等変換の trace 写像

$$\mathrm{Tr}^X : {}_A(X, X)_B \to {}_A(A, A)_A,$$

による像 $\mathrm{Tr}^X\,\mathrm{Id}_X : A \to A$ による, A の単位元の像 $\mathrm{Tr}^X\,\mathrm{Id}_X(1)$ を π_X とおく. $\pi_X \in Z(A)$ であり, 相対 X- 射影元とよぶ.

次の補題は有限群のコホモロジーでの事実 (2.1) に対応する.

補題 4.7 両側 (C, A)- 加群 ${}_C M_A$, ${}_C N_A$ に対して

$$\begin{tikzcd}
{}_C(M, N)_A \arrow[rr, "\pi_X\cdot -"] \arrow[dr, "\mathrm{Res}_X"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & {}_C(M, N)_A \\
& {}_C(M \otimes_A X, N \otimes_A X)_B \arrow[ur, "\mathrm{Tr}^X"'] &
\end{tikzcd} .$$

ここで, 例をあげる.

例 4.1 G を有限群とし, $H \leqslant G$ とする. $A = RG$, $B = RH$ とおく. 両側 (A, B)- 加群 ${}_A X_B = {}_{RG} RG_{RH}$ による trace 写像 $\mathrm{Tr}^X : {}_{RG}(RG, RG)_{RH} \to {}_{RG}(RG, RG)_{RG}$ を考えよう. このとき,

$${}_{RG}(RG, RG)_{RH} = (RG)^H, \quad {}_{RG}(RG, RG)_{RG} = Z(RG)$$

と同一視して,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}^X : (RG)^H \to Z(RG); \alpha \mapsto \sum_{tH\in G/H} t\alpha t^{-1},\\
&\mathrm{Res}_X : Z(RG) \to (RG)^H; \beta \mapsto \beta,\\
&\pi_X = |\,G : H\,|\cdot 1_R.
\end{aligned}$$

また, 双対 ${}_B X^*{}_A = {}_{RH}RG_{RG}$ については

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}^{X^*} : (RG)^H \to Z(RH); \sum_{x\in G}\alpha_x x \mapsto \sum_{y\in H}\alpha_y y,\\ &\mathrm{Res}_{X^*} : Z(RH) \to (RG)^H; \beta \mapsto \beta,\\ &\pi_{X^*} = 1 \in RH.\end{aligned}$$

Res_X, Tr^X と同様に

定義 4.4 (1) ${}_A X$ および X_B は射影的であると仮定する．両側 (B, C)- 加群 ${}_B M_C$，${}_B N_C$ に対して

$${}^X\mathrm{Tr} : {}_A(X \otimes_B M, X \otimes_B N)_C \to {}_B(M, N)_C$$

を定義する.

(2) 両側加群 ${}_B M_C$, ${}_B N_C$ に対して

$${}_X\mathrm{Res} : {}_B(M, N)_C \to {}_A(X \otimes_B M, X \otimes_B N)_C$$

を定義する.

これらの写像について, 補題 4.4, 4.5, 命題 4.6と同様の事実が成り立つ.

trace 写像, restriction 写像は Ext- 群の準同型を引き起こす．その写像もまた同じ記号で表す.

いよいよ, Linckelmann による transfer 写像の定義である.

定義 4.5 ${}_A X$ および X_B はともに射影的であると仮定する. 合成写像

$$t_X : HH^*(B) = \mathrm{Ext}^*{}_B(B, B)_B \xrightarrow{{}_X\mathrm{Res}} \mathrm{Ext}^*{}_A(X, X)_B \xrightarrow{\mathrm{Tr}^X} \mathrm{Ext}^*{}_A(A, A)_A = HH^*(A)$$

は ${}_A X_B$ による transfer 写像とよばれる.

4.3 stable elements

ここでは ${}_A X$ および X_B はともに射影的であると仮定する.

定義 4.6 次の pullback diagram をつくる:

$$\begin{array}{ccc} HH^*(A) & \xrightarrow{\mathrm{Res}_X} & \mathrm{Ext}^*{}_A(X, X)_B \\ \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle {}_X\mathrm{Res}} \\ HH^*(A) \times_X HH^*(B) & \longrightarrow & HH^*(B) \end{array}.$$

ここで

$$HH^*(A) \times_X HH^*(B) = \{ (\zeta, \tau) \in HH^*(A) \oplus HH^*(B) \mid \zeta \otimes 1_X = 1_X \otimes \tau \}.$$

pair $(\zeta, \tau) \in HH^*(A) \times_X HH^*(B)$ を X-stable pair とか X-pair とよぶことにしよう．また, 元 ζ は X-stable といわれる.

補題 4.8 $\zeta \in HH^*(A)$, $\tau \in HH^*(B)$ について

$$(\zeta, \tau) \text{ は } X\text{-stable pair である} \iff (\tau, \zeta) \text{ は } X^*\text{-stable pair である}.$$

定義 4.7

$$HH_X^n(A) = \mathrm{Im}\,[\text{projection} : HH^n(A) \times_X HH^n(B) \to HH^n(A)],$$
$$HH_{X^*}^n(B) = \mathrm{Im}\,[\text{projection} : HH^n(A) \times_X HH^n(B) \to HH^n(B)]$$

とおく.

次の補題は, いままでの定義や事実から自然に導かれる.

補題 4.9 $(\zeta, \tau) \in HH^n(A) \times_X HH^n(B)$ を X-stable pair とする.

(1) $t_X(\tau) = \pi_X \zeta$.
(2) $\sigma \in HH^*(B)$ に対して

$$t_X(\tau\sigma) = \zeta t_X(\sigma), \quad t_X(\sigma\tau) = t_X(\sigma)\zeta.$$

(3) $t_{X^* \otimes_A X}(\tau) = \pi_{X^* \otimes_A X} \tau$.

この補題により

命題 4.10 (1) $HH_X^*(A)$ は $HH^*(A)$ の次数付部分多元環である.
(2) $t_X(HH_{X^*}^*(B)) = \pi_X HH_X^*(A)$.

定義 4.8 相対 X- 射影元 $\pi_X \in Z(A)$ が可逆のとき, 正規化された transfer 写像 T_X を

$$T_X : HH^*(B) \to HH^*(A); \sigma \mapsto \pi_X^{-1} t_X(\sigma)$$

によって定義する.

命題 4.11 相対 X- 射影元 $\pi_X \in Z(A)$ が可逆と仮定する. このとき正規化された transfer T_X は R- 多元環としての全射準同型を引き起こす:

$$R_X : HH_{X^*}^*(B) \to HH_X^*(A).$$

もし $\pi_{X^*} \in Z(B)$ も可逆ならば,

$$R_X : HH_{X^*}^*(B) \xrightarrow{\sim} HH_X^*(A), \quad R_{X^*} : HH_X^*(A) \xrightarrow{\sim} HH_{X^*}^*(B)$$

であって, $R_{X^*} = R_X{}^{-1}$.

ここで, ブロック・イデアルについて考えてみよう. 第 2 節および 3 節の記号を用いる. ${}_B X_{kD} = kGi$ であった. $X^* \otimes X \simeq ikGi$ であった. 次が Linckelmann のブロック・イデアルのコホモロジーの理論の基本定理である.

定理 4.12 相対 X- 射影元 $\pi_X \in Z(B)$ および相対 X^*- 射影元 $\pi_{X^*} \in Z(kD)$ は

$$\pi_X = \mathrm{Tr}^G(i), \quad \pi_{X^*} = \frac{\dim \mathrm{Br}_D(i) kC_G(D)}{|\,C_G(D)\,|}$$

で与えられる. これらはいずれも可逆である.

従って, 同型 $R_X : HH^*_{X^*}(kD) \xrightarrow{\sim} HH^*_X(B)$ が得られる. 命題 3.3, 4.13とあわせて,

$$H^*(G, B) \xrightarrow{\delta_D} HH^*_{ikGi}(kD) = HH^*_{X^*}(kD) \xrightarrow{R_X} HH^*_X(B).$$

一般論に戻る. 以下の 2 つの命題は Kawai and Sasaki [8] によるが, C はやはり対称 R-多元環であり両側加群 ${}_BY_C$ において ${}_BY$ および Y_C は射影的であると仮定する.

命題 4.13 $(\zeta, \tau) \in HH^n(A) \times_X HH^n(B)$ かつ $(\tau, \gamma) \in HH^n(B) \times_Y HH^n(C)$ ならば $(\zeta, \gamma) \in HH^n(A) \times_{X \otimes_B Y} HH^n(C)$ である. 特に,

$$HH^n_X(A) \subset HH^n_{X \otimes X^*}(A).$$

命題 4.14 相対射影元 $\pi_X \in Z(A), \pi_{X^*} \in Z(B), \pi_Y \in Z(B), \pi_{Y^*} \in Z(C)$ はすべて可逆であると仮定する. このとき

(1) 同型

$$R'_Y : HH^*_{Y^* \otimes_B X^*}(C) \xrightarrow{\sim} HH^*_Y(B) \cap HH^*_{X^*}(B),$$
$$R'_X : HH^*_Y(B) \cap HH^*_{X^*}(B) \xrightarrow{\sim} HH^*_{X \otimes_B Y}(A)$$

を得る.

(2) もし, さらに, $\pi_{X \otimes_B Y}$ もまた可逆ならば, $R'_X \circ R'_Y = R_{X \otimes_B Y}$ がなりたつ.

以上の 2 つの命題は簡単ではあるが有用である.

注意 4.3 以上では X として加群の場合に述べたのであるが, これらの定義や事実は X として bounded complex としても, もちろん, 自動的にというわけではなく, 適切に議論を用意すれば, 成り立つと思われる.

また, 森田同値である対称多元環の Hochschild コホモロジー環の同型が森田同値を与える加群による transfer 写像で与えられると述べたが, 加群を bounded complex に置き換えると, derived equivalent な対称多元環についての事実が得られる. なお, 有限群 G のブロック B と有限群 H のブロック C が derived equivalent ならば, もちろん, transfer 写像によって $HH^*(B) \simeq HH^*(C)$ であるが, この同型が $H^*(G, B)$ と $H^*(H, C)$ の同型を引き起こすかどうかはわからない. これについては Linckelmann [10], [13] を参照してください.

5 Brauer 対応

B を kG のブロック・イデアル, e を B のブロック冪等元:$B = kGe$, D を B の defect 群, および i を source 冪等元とし, さらに

- $N_G(D) \leqslant H \leqslant G$,
- $C = kHf$ は Brauer 対応で B に対応する: $C^G = B$

と仮定する.

$$ {}_{kH}L_{kG} = {}_{kH}kG_{kG}, \quad {}_{C}M_{B} = fkGe = fLe $$

とおく.

ω_B, ω_C をそれぞれ, ブロック B, C が定める $Z(kG)$, $Z(kH)$ の 1 次の線形表現とする. transfer 写像 $t_L : Z(kG) \to Z(kH)$ は $\sum_{x\in G}\alpha_x x \mapsto \sum_{y\in H}\alpha_y y$ と写すから, 条件 $C^G = B$ は結局, 次の図式の右側の可換な 3 角形を導く:

$$
\begin{tikzcd}
Z(B) \arrow[r, hook] \arrow[d, "t_M"'] & Z(kG) \arrow[d, "t_L"'] \arrow[dr, "\omega_B"] & \\
Z(C) \arrow[d, equal] & Z(kH) \arrow[l, "\cdot f"'] \arrow[r, "\omega_C"'] & k \\
Z(C) \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd} .
$$

この図式から, $\pi_M = t_M(e)$ が可逆であることがわかる.

しかし, π_M と π_{M^*} という量は違う文脈のなかで, 従って, もちろん, 相対射影元という名前も, この記号も使われていなかったが, 古くから扱われていて, すでに, M. Brouè [2] によって次が得られていた.

定理 5.1 相対 M- 射影元および M^*- 射影元

$$ \pi_M = f t_L(e), \quad \pi_{M^*} = e\,\mathrm{Tr}_H^G(f) $$

はともに可逆である.

他の文献としては, 例えば, Watanabe [16] がある.

従って, M が定める正規化された transfer 写像は $HH^*(B)$ の M^*-stable 部分多元環から $HH^*(C)$ の M-stable 部分多元環への同型を導く:

$$ R_M : HH^*_{M^*}(B) \xrightarrow{\sim} HH^*_M(C). \tag{5.1} $$

それゆえ, $H^*(G, B) \subset H^*(H, C)$ のとき, この同型と包含写像 $H^*(G, B) \hookrightarrow H^*(H, C)$ とを結び付けて考えたいと思うのは自然であろう.

B の source 冪等元 i, および C の source 冪等元 j を

$$ j = i + i', \; i \cdot i' = i' \cdot i = 0, \; (i')^2 = i' $$

のようにとることができる. このとき, $ij = ji = i$ である.

以前のように

$$ {}_{B}X_{kD} = kGi, \quad {}_{C}Y_{kD} = kHj $$

とおく. このとき, とても幸なことに

定理 5.2 次の加群についての相対射影元はすべて可逆である:

$$
\begin{aligned}
fkGi &= {}_C(M \otimes_B X)_{kD}, & ikGf &= {}_{kD}(X^* \otimes_B M^*)_C \\
ekGj &= {}_B(M^* \otimes_C Y)_{kD}, & jkGe &= {}_{kD}(Y^* \otimes_C M)_B \\
jkGi &= {}_{kD}(Y^* \otimes_C M \otimes_B X)_{kD}, & ikGj &= {}_{kD}(X^* \otimes_B M^* \otimes_C Y)_{kD}
\end{aligned}
$$

この事実の発見が, この研究の最大のしかも自明でない成果であるが, 詳細は省略する. この事実と Hochschild コホモロジー環の transfer 写像の一般論および, source 冪等元 i, j のとり方から,

定理 5.3 次の図式は可換である:

$$
\begin{tikzcd}
H^*(D,k) \arrow[r, "\delta"] & HH^*(kD) & & & \\
& HH^*_{X^*}(kD) \arrow[u, hook] \arrow[rr, leftrightarrow, "R_X", "R_{X^*}"'] & & HH^*_X(B) & \\
& HH^*_{X^*\otimes_B M^*}(kD) \arrow[u, hook] \arrow[rr, leftrightarrow, "R'_X", "R'_{X^*}"'] & & HH^*_X(B)\cap HH^*_{M^*}(B) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] \arrow[dd, leftrightarrow, "R'_{M^*}"', "R'_M"] & HH^*_{M^*}(B) \arrow[ddd, leftrightarrow, "R_{M^*}"', "R_M"] \\
& HH^*_{ikGj}(kD) \arrow[u, hook] \arrow[r, leftrightarrow, "R'_X", "R'_{X^*}"'] \arrow[dd, equal, "R_{ikGj}"', "R_{jkGi}"] & HH^*_{M^*\otimes_C Y}(B) \arrow[ur, hook] \arrow[dd, leftrightarrow, "R'_{M^*}"', "R'_M"] & & \\
& & & HH^*_{M\otimes_B X}(C) & \\
& HH^*_{jkGi}(kD) \arrow[d, hook] \arrow[r, leftrightarrow, "R'_Y", "R'_{Y^*}"'] & HH^*_Y(C)\cap HH^*_M(C) \arrow[ur, hook] \arrow[d, hook] \arrow[rr, hook] & & HH^*_M(C) \\
& HH^*_{Y^*}(kD) \arrow[d, hook] \arrow[r, leftrightarrow, "R_Y", "R_{Y^*}"'] & HH^*_Y(C) & & \\
H^*(D,k) \arrow[r, "\delta"'] & HH^*(kD) & & &
\end{tikzcd}
$$

我々の目的は, $H^*(G,B) \subset H^*(H,C)$ のとき, 包含写像 $H^*(G,B) \hookrightarrow H^*(H,C)$ と同型 $R_M : HH^*_{M^*}(B) \xrightarrow{\sim} HH^*_M(C)$ を結び付けて考えたいということであった.

命題 5.4 次は同値である:

(1) $\delta_D(H^*(G,B)) \subset HH^*_{X^* \otimes_B M^*}(kD)$ であり, かつ任意の $\zeta \in H^*(G,B)$ に対して

$$R_M R_X(\delta_D(\zeta)) = R_Y(\delta_D(\zeta)).$$

(2) $\delta_D(H^*(G,B)) \subset HH^*_{jkGi}(kD)$.

そこで $\zeta \in H^*(D,k)$ に対して $\delta_D(\zeta) \in HH^*(kD)$ が $ikGj$-stable であるための必要十分条件を求めたい.

Mackey 分解により, 両側 (kD, kD)- 加群として

$$ikGj \mid {}_{kD}kG_{kD} = {}_{kD}(kG \otimes_{kD} kD) = \bigoplus_{DgD} kD \otimes_{k[D \cap {}^gD]} (g \otimes kD)$$

であるから, $ikGj$ の直和因子は $L_g = kD \otimes_{k[D\cap {}^gD]} (g \otimes kD)$ の形をしている.

命題 5.5 $\zeta \in H^*(D,k)$ について

$\delta_D(\zeta) \in HH^*(kD)$ が $ikGj$-stable である $\Longleftrightarrow \forall\, g$ s.t. $L_g \mid ikGj \quad \mathrm{res}_{D\cap {}^gD}\, {}^g\zeta = \mathrm{res}_{D\cap {}^gD}\, \zeta$.

注意 5.1 命題 5.4 の条件が成り立てば, 次の可換図式が得られる:

$$\begin{tikzcd}
 & HH^*_{X^*\otimes_B M^*}(kD) \arrow[rr, leftrightarrow, "R'_X", "R'_{X^*}"'] & & HH^*_X(B) \cap HH^*_{M^*}(B) \arrow[r, hook] \arrow[dd, leftrightarrow, "R'_{M^*}"', "R'_M"] & HH^*_{M^*}(B) \arrow[ddd, leftrightarrow, "R_{M^*}"', "R_M"] \\
H^*(G,B) \arrow[r] \arrow[ddd, hook] & HH^*_{ikGj}(kD) \arrow[u, hook] \arrow[r, leftrightarrow, "R'_X", "R'_{X^*}"'] \arrow[dd, equal, "R_{ikGj}"', "R_{jkGi}"] & HH^*_{M^*\otimes_C Y}(B) \arrow[ur, hook] \arrow[dd, leftrightarrow, "R'_{M^*}"', "R'_M"] & & \\
 & & & HH^*_{M\otimes_B X}(C) & \\
 & HH^*_{jkGi}(kD) \arrow[r, leftrightarrow, "R'_Y", "R'_{Y^*}"'] \arrow[d, hook] & HH^*_Y(C) \cap HH^*_M(C) \arrow[ur, hook] \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & HH^*_M(C) \\
H^*(H,C) \arrow[r] & HH^*_{Y^*}(kD) \arrow[r, leftrightarrow, "R_Y", "R_{Y^*}"'] & HH^*_Y(C) & &
\end{tikzcd}$$

残念ながら, ブロック・イデアル B のコホモロジー環 $H^*(G, B)$ の元が命題 5.5 の右側の条件を満すかについて, 手がかりは, まだない.

最後に, 通常のコホモロジー環, つまり, 主ブロックのコホモロジー環についての事実 (2.2) を一般のブロック・イデアルのコホモロジー環へ拡張することについて述べよう. G, B, H, C は今までのとおりとし, $H^*(G, B) \subset H^*(H, C)$ が成り立つと仮定する. 包含写像 $H^*(G, B) \hookrightarrow H^*(H, C)$ を res_C と書いた. このとき, 写像 $\mathrm{tr}^B : H^*(H, C) \to H^*(G, B)$ を定義して, 相互律や, (2.1), (2.2) に相当する事実を成立せしめることが課題である. この課題については, 一般的な結果はまだないと思うが, ささやかな試みが Kawai and Sasaki [7] にある.

参考文献

[1] D. J. Benson, Representations and cohomology II: Cohomology of groups and modules, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 31, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[2] M. Broué, Remarks on blocks and subgroups, J. Algebra (1978), 228–232.

[3] ______, On representations of symmetric algebras: an introduction, Notes by M. Stricker, Mathematik Department ETH Zürich, 1991.

[4] 河合 浩明, Varieties for modules over a block of a fintie group, 有限群のコホモロジー論の研究 (佐々木 洋城, ed.), 数理研講究録, no. 1251, 2002, pp. 46–56.

[5] ______, Brauer 対応とブロックコホモロジー環について, 有限群のコホモロジー論の研究 (佐々木 洋城, ed.), 数理研講究録, no. 1357, 京都大学数理解析研究所, 2004, pp. 130–140.

[6] H. Kawai, Varieties for modules over a block of a finite group, Osaka J. Math. **40** (2003), 327–344.

[7] H. Kawai and H. Sasaki, Cohomology algebras of 2-blocks of finite groups with defect groups of rank two, in preparation.

[8] ______, Cohomology algebras of blocks of finite groups and Brauer correspondence, in preparation.

[9] R. Kessar, M. Linckelmann, and G. R. Robinson, Local control in fusion systems of p-blocks of finite groups, J. Algebra **257** (2002), no. 2, 393–413.

[10] M. Linckelmann, On drived equivalences and local structure of blocks of finite groups, Turkish J. Math. **22** (1988), 93–107.

[11] ______, Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups, Algebr. Represent. Theory **2** (1999), 107–135.

[12] ______, Varieties in block theory, J. Algebra **215** (1999), 460–480.

[13] ______, On splendid derived and stable equivalences between blocks of finite groups., J. Algebra (2001), 819–843.

[14] H. Nagao and Y. Tsushima, Representations of finite groups, Academic Press, New York, London, 1989.

[15] 佐々木 洋城, ブロックイデアルのコホモロジー環, 有限群のコホモロジー論の研究 (佐々木 洋城, ed.), 数理研講究録, no. 1357, 京都大学数理解析研究所, 2004, pp. 124–129.

[16] A. Watanabe, Relations between blocks of a finite group and its subgroup, J. Algebra **78** (1982), 282–291.