単純群のシロー２部分群

K.Harada and M.L.Lang

[1]．**有限単純群の分類**．有限単純群の分類は1981年はじめ、やや非公式ながら、その完成が発表された．ただその時は、in preparation, submitted, accepted, to appear などとなっていた論文も少なからずあった．しかし、それらの論文も数学者の一般常識に従って、遅すぎることなく発表され、印刷された．ところが、その中でひとつの重要な仕事が未発表のまま残っていた．それがいわゆる準薄群 (quasithin group) の分類である．

1983年に Gorenstein のいたラトガース大学で群論のワークショップが開かれ、私も 10 日ほど参加した．そのとき私は Gorenstein に「準薄群 (quasithin groups) の分類がまだ出来ていないが、単純群の分類が出来ていると言ってよいのか」と問うた．それに対して彼は「準薄群 (quasithin groups) の分類についての 800 ページの原稿が私の研究室にある．だから分類は出来ている」と答えた.「一部コピーを欲しい」と言ったがもらえなかった．私だけでなく、その当時その原稿を見たものは殆どいないようだった．

そのまま何年かが過ぎた．1980年代が1990年代へと移っていった．準薄群 (quasithin groups) の分類の論文は未発表であった．しかし、うわさによれば、その800ページの論文は、100個ほどの知られた単純群に関する補題があり、それらには証明が付けられてはいなかった．その未証明の補題をもとに準薄群 (quasithin groups) の分類が展開され、800ページの後でもまだ未完成であった、ということであった．私自身はその論文を見てはいないので、これらのことは確認はできない．1990年代の前半に、Aschbacher がその未証明の100個ほどの補題を認めた上で、準薄群 (quasithin groups) の分類の論文を完成させた．それで、次ぎの課題はそれらの補題の証明であるが、Aschbacher はそれをする気になれなかったようだ．

1990年代の後半に入り、Aschbacher は S.Smith とともに準薄群 (quasithin groups) の分類を最初からやり直す決心をし、ついに2003年に完成させ、論文提出となった．referee による点検もすみ、もうすぐ印刷されたものが出るはずということである．Aschbacher はアメリカ数学会の Notices, 2004, Volume 51, Number 7 の中に [The Status of the Classification of the Finite Simple Groups] という記事を書いている．その記事の最後の方に「To my knowledge the main theorem of [AS](Aschbacher/Smith) closes the last gap in the original proof, so (for the moment) the Classification Theorem can be regarded as a theorem. On the other hand, I hope I have convinced you that it is important to complete the program by carefully writing out more reliable proof in order to minimize the chance of other gaps being discovered in the future. Thus our discussion of the status of the Classification would not be complete without some indication of what remains to be done in the program.] と書き、これから成すべきことについて述べている．

Aschbacher/Smith の仕事で、単純群分類の元の証明ー第１証明ーは完成しているとみなしてよい．しかし、将来その証明に誤りが発見されないためには、もっと信用のおける証明ー第２証明ーを注意深く書く必要がある、と Aschbacher は言っているのである．第２証明への努力は Gorenstein/Lyons /Solomon が始めた．Gorenstein は道半ばにして他界してしまったが、Lyons /Solomon がそれを続けている．Aschbacher/Smith が証明した準薄群の分類の仕事は第１証明を完成するが、Gorenstein/Lyons/Solomon の第２証明に必要な結果が完全には証明されてはいないのである．単純群の分類の第２証明にはまだ曲折があろう．

[2]．**２群**．群 G でその位数が素数 p のベキとなっているものを p 群という． 紀元 2000 年を記念する意味もあったろうか、Besche/Eick/O'Brien は位数 2000 以下の群の同型類をすべて定めた (2000)．それによると、そのうち、49,483,365,422 個が位数 2^{10} の群で、その他は全部で 423,164,062 個である．すなわち、位数 2000 以下の群では、その 99.16 パーセントは位数 2^{10} の群なのである．

有限群のほとんどすべては２群である

と思われる．このことを実際に証明することの数学的価値はないかも知れないが、位数 2^n の群全部の個数のぜん近式

$$2^{(\frac{2}{27}+O(n^{-1/3}))n^3}$$

は知られているし (Higman/Sims,1960,1965)、また位数 n の有限群全部の個数 $f(n)$ の上限に対しては

$$f(n) \leq n^{(\frac{2}{27}+o(1))\mu(n)^2}$$

が知られている (Pyber,1993)．ここで $\mu(n)$ は n を素因数分解したときの最大ベキ数である．

[3]．**単純群のシロー２部分群**．奇数位数の群はすべて可解である．これは Feit/Thompson の有名な定理である (1963)．その後 40 年を経ているが、その証明は本質的には改良されてはいない．群論に基本的な結果、道具がまだ欠けているということであろう．それはさておき、奇数位数の群のシロー２群はもちろん単位群である．この世に一番多い有限群である２群を使わずに出来ているのが、奇数位数の群である．２群の複雑性、柔軟性を使わずに構成されているのが奇数位数の群である．だから、単純群とはなり得ない (精神的な) 理由だ、と私は思っている．

定義．２群 S は、単純群のシロー２群になり得るとき、**実現可能 (realizable)** という．

たとえば、$S \cong Z_2 \times Z_2$ ならば、S は実現可能であるし、$S \cong Z_4 \times Z_4$ ならば、S は実現可能ではない．前者はたとえば、５次の交代群のシロー２群である．後者が実現可能でないことは、Brauer が 1960 年代の前半に証明した．モデュラー表現論を使い、かなり難しいものである．その中間の $S \cong Z_2 \times Z_4$ は Burnside の定理などから、容易に実現可能でないことがわかる．

次は実現可能な群の個数の表である．

2^n	16	32	64	128	256	512	1024	2^{46}
$number$	14	51	267	2328	56092	10494213	49487365422	$\sim 10^{1500}$
$realizable$	3	4	8	7	7	12	11	< 30

実現可能な２群の個数が、全体の個数に比べて、信じられないくらい少ないことがわかる．

主問題．実現可能な２群を特徴づけよ．

具体的な例としては、全部で 49,487,365,422 個の位数 2^{10} の群の中から 11 個の群を選びだす方法を見つけよ、ということである．500 億人 (地球人と宇宙人全部？) の中から 11 人選びだせということである．いかにしてそれが可能だろうか．

１．知られた単純群のシロー２群を徹底的に調べて、その性質を列挙せよ．
２．それらの性質が単純群のシロー２群として必要十分であることを証明せよ．
第１項は可能であろう．しかし、まずそれらを、同定しなくてならない．

例．位数 $2^9 = 512$.

全個数 10,494,213
実現可能個数 12
同定番号 (コンピュータプログラム GAP 内の番号)
$[512, 2042] \cdots L_2(q)$
$[512, 2043] \cdots L_3(q), U_3(q)$
$[512, 947] \cdots L_3(q), U_3(q)$
$[512, 60809] \cdots L_4(q), U_4(q)$
$[512, 60833] \cdots L_5(q), U_5(q)$
$[512, 7530110] \cdots Sp_6(q)$
$[512, 40698] \cdots Sp_6(2), A_{12}, O_7(q)$
$[512, n_1] \cdots L_3(8)$
$[512, n_2] \cdots U_3(8)$
$[512, 60329] \cdots Higman/Sims$
$[512, 58362] \cdots O'Nan$
$[512, 10494213] \cdots L_2(2^9)$

上の表で q は適当な素数ベキである．また、該当する単純群をすべて列挙してあるわけではない．位数 2^9 以下の２群はすべて、GAP と呼ばれるコンピュタプログラムの中の入っていて、その構造、極大部分群、共役類、指標表、その他の情報が、すぐ取りだせるようになっている．$L_3(8), U_3(8)$ のシロー２群はベキ零クラス２の群である．$7532393 \leq n_1, n_2 \leq 10481221$ は分かっている．後で述べるようにベキ零

クラス2の2群はその個数があまりにも多くて計算器でもなかなか決定できないのである.

問. n_1, n_2 を決定せよ.
問. 上の12個の位数 2^9 の群を特徴づけよ.

ここには特には書かないが言うまでもなく、2^9 ばかりでなく、それ以下の位数の実現可能な2群の同定番号は分かっている．それらに共通する性質があるのに違いない.

[4]. **2 genus.**

定義. G_1, G_2 を単純群とし、S_1, S_2 を各々のシロー2群とせよ．S_1 と S_2 が同型のとき、単純群 G_1, G_2 は同じ **2 genus** に属するという.

例．次ぎの群は同じ2 genusに属する.
$\{A_8, PSp(4,q)$、$q \equiv 3,5 \pmod 8\}$
$\{A_{10}, PSL(4,q), q \equiv 3 \pmod 8; PSU(4,q), q \equiv 5 \pmod 8\}$
$\{Mathieu_5 = M_{24}, GL(5,2), Held\}$
$\{A_{12}, A_{13}, PSp(6,2)\}$

2 genus には無限の単純群が属している場合が多い．すなわち、genus には無限の種=species が属している場合が多いのである．genus に依る分類の方が species に依る分類よりも、明らかに粗なのである.
ところで、位数最大の散在群であるモンスターの属する genus には他の単純群が属しているだろうか．これは否である．実際もっと一般的に次のことが成立しているだろう.

問. G を散在型単純群とし、そのシロー2群の位数は 2^{11} 以上とせよ．このとき、G の属する 2 genus には G のみが含まれる.

M.L.Lang と私はかなり調べており、この問が正しいことに確信を持っているが、他の人にも調べていただきたい.

[5]. **実現可能な2群の特徴づけに向けて**

次ぎにどのようにして、実際に実現可能な2群の特徴づけができるかを考えよう．手計算をするにしても、計算器に頼るにしても、考察しなければならない2群の個数を少なくしておきたい.

First Reduction．ベキ零クラス3以上の2群のみを考えればよい．

G を単純群で S をそのシロー2群とする．ベキ零クラス2以下、すなわち $cl(S) \leq 2$ であるような単純群 G は．Gorenstein/Gilman,Gomi などによって1970年代に決定されている．元の証明はなかなか面倒なものであるが、現代的手法でやれば、もっと簡明にできるのではないか．いずれにしても、一般の単純群の分類以前にすでに

確定していることである.

$$G \cong Janko_1, A_7, Re(3^n), PSL(2,q), PSL(3,2^n), PSU(3,2^n), Sz(2^n)$$

がそのような単純群のすべてである．ただし、指数 n や q は適当に選ぶ必要がある．しかし、これだけでは First Reduction のありがたみはあまり感じられない．ここで、次ぎの表を見ていただきたい.

2^n	16	32	64	128	256	512	1024	2^{46}
$number$	14	51	267	2328	56092	10494213	49487365422	$\sim 10^{1500}$
$class \leq 2$	79%	65%	48%	41%	56%	84%	95%?	???

私自身はここの 95 パーセントという数値は確認していない．位数 2^{10} の群の総個数を決めたひとりの Eick が会話の中で私に言ってくれた数値である.

前にも述べたように、位数 2^n の群全部の個数のぜん近式

$$2^{(\frac{2}{27}+O(n^{-1/3}))n^3}$$

は知られている．しかし、位数が 2^n でベキ零クラス２以下の群の個数のぜん近式は知られてはいないようである．1960 年に Higman はある特殊なクラス２の群の個数が

$$2^{(\frac{2}{27}+O(n^{-1}))n^3}$$

で押さえられることを証明した．ここで特殊とは、フラッチニ部分群が elementary でしかも中心に含まれているということである．この二つの式からは、n が無限大に近付くとき、その比が１に近付くことは言えない．それを言うためには、位数が 2^n でクラス２以下の群の個数のぜん近式を実際に求める必要があるようである.

問. 位数 2^n でベキ零クラス２以下の群全体が、位数 2^n の群全体の中でしめる割合は n が無限大になるにつれて、限り無く１に近づくことを証明せよ.

この First Reduction とこの問を認めると、残りの仕事は、ぜん近的には０パーセントしかない２群の集まりを扱うことになる．また、上に述べた 2^9 の群に関する「問．n_1, n_2 を決定せよ.」は不必要になる．しかし、$2^9, 2^{10}$ 以下の位数をもつ実現可能な２群ぐらいはベキ零クラスにかかわらずしっかりと定めておきたいものである.

Second Reduction．Lowest type の２群のみを考えればよい．

たとえば、位数 2^n の２面体群 $D_{2^n}, n \geq 3$ をシロー２部分群にもつ単純群 G を分類するとする．結果は $G \cong A_7, PSL(2,q), q = odd$ となる．1960 年代の前半の Gorenstein/Walter の結果である．大部の論文で、読み通した人はいるだろうか．しかし、その後、Bender が簡明な証明を発表した．要は、位数 8 の２面体群 D_8 を持つ単純群を分類する手法で位数 16 以上の場合も証明されてしまうのである．一

般的に言えば、この種の問題は小さい場合が困難で例外（この場合は、A_7）が出て来るが、大きくなれば、例外もなく、スムーズに議論が進行するのである．この場合は D_8 が lowest type である．

定義．単純群 G のシロー２群 S は、
１．G が、２個または３個の元からなる体の上の Lie 型の単純群、または
２．G が散在型単純群である．
とき、lowest type と呼ぶ．

実は、例外的に 4,5 個の元からなる体の上の Lie 型の単純群 G にシロー２部分群も必要になりそうであるが、どれが必要かは、今のところはっきりとは言えない．今後の研究を待ち、適宜、加えてゆくことになるだろう．

Third Reduction．Indecomposable (直既約) な２群のみを考えればよい．

まず実例をとって説明しよう．

$$A_{50} \overset{2}{\sim} S_{48} \overset{2}{\sim} S_{32} \times S_{16}$$

が成立している．ここで $\overset{2}{\sim}$ は対応する群のシロー２群が同型なことを示す．さらに

$$S_{32} \times S_{16} \overset{2}{\sim} A_{34} \times A_{18}$$

が成立しているから、結局

$$A_{50} \overset{2}{\sim} A_{34} \times A_{18}$$

となる．50 次の交代群のシロー２群は、34 次の交代群のシロー２群と 18 次の交代群のシロー２群との直積になっている．

実は４、５年前までは、私は単純群のシロー２群は直積の形には書けないと思っていた．あるひとから、A_{14} のシロー２群が位数 2^7 と 2^3 の２つの群の直積と知らされて、びっくりした覚えがある．実際、ほぼ半分の単純群は自明でない直積で書けるシロー２群を持っている．さて、$A_{50} \overset{2}{\sim} A_{34} \times A_{18}$ にもどると、後の２つの群のシロー２群は、容易に証明できるが、直既約である．すなわち、直積の形には書けない．このことは実現可能な２群を直既約な成分の直積に書くとき、それぞれの成分は、やはり実現可能であることを示している．上の例はただの１例であるが、一般に次ぎの定理が成立する．

定理 A(Harada/M.L.Lang,2004)．$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_k$ を知られた単純群のシロー２部分群 S の直既約分解とすれば、おのおのの直既約成分 S_i も知られた単純群のシロー２部分群である．

この定理の証明の概略は後述するが、その前に次ぎの定義を置こう．

定義．実現可能な２群 S は次ぎの条件を満足するとき、**基本型**という．
１．Nilpotent class ３以上である．

２．Lowest type である．
３．Indecomposable である．

位数最大の散在型単純群のシロー２部分群は 2^{46} という大きい位数を持つ．前に出てきた 50 次の交代群 A_{50} のシロー２群もその位数は 2^{46} である．Higman/Sims のぜん近式を

$$2^{(\frac{2}{27}+C_n(n^{-1/3}))n^3}$$

と書き換え、C_n を $n = 7, 8, 9, 10$ などについて計算すると $C_n = -0.08$ 程度になる．そこで $n = 46$ でもその程度の数であると仮定すれば、位数 2^{46} の群の個数は 10^{1500} 程度になる．知られた単純群を調べれば、実現可能な位数 2^{46} の群は全部で 30 個ほどあることがわかる．しかし、基本型はただの３個である．それらは、$PSL_{20}(3), O_{26}^{-}(3), Monster$ のシロー２群である．

実現可能な２群を特徴づける道筋.

ステップ１．位数 2^{46} 以下の知られた実現可能な基本型の２群をすべて数えあげよ．
ステップ２．それらの実現可能な基本型の２群の共通性質を見出せ．
ステップ３．それらの共通性質をもつ２群をすべて見出せ．
ステップ４．ステップ３で得られた個数がステップ１で得られた個数に一致するまでステップ２の精度を高めよ．
ステップ５．実現可能な２群はステップ２の性質を満たさなくてならないことを理論的に証明せよ．

これらのステップを完成するためにはコンピュータの使用も認められるだろう．

定理 A の証明の概略.

例. $G = L_n(q) = PSL_n(q) = SL_n(q)/center$.
1. $q = 2^m \Longrightarrow L_n(q) \overset{2}{\sim} GL_n(q)$, indecomposable Sylow 2-subgroups for all $n \geq 2, q$.
2. q =odd. Let $n = 2^{e_1} + 2^{e_2} + \cdots + 2^{e_k}, 0 \leq e_1 < e_2 < \cdots < e_k$.
$GL(n, q) \overset{2}{\sim} GL(2^{e_1}, q) \times GL(2^{e_2}, q) \times \cdots \times GL(2^{e_k}, q)$.
であるから、群 $GL(n, q)$ のシロー２群は一般的には直既約ではない．確率的には大部分が直既約ではない．単純群 $PSL(n, q)$ のシロー２群は一体どうなるであろうか．群 $GL(n, q)$ から行列式の核として群 $SL(n, q)$ が生じ、それを中心で割ることにより、単純群 $PSL(n, q)$ が生ずる．n が奇数のときは、$e_1 = 0$ であり、

$$PSL(n, q) \overset{2}{\sim} GL(n-1, q) \overset{2}{\sim} GL(2^{e_2}, q) \times GL(2^{e_3}, q) \times \cdots \times GL(2^{e_k}, q)$$
$$\overset{2}{\sim} PSL(2^{e_2}+1, q) \times PSL(2^{e_3}+1, q) \times \cdots \times PSL(2^{e_k}+1, q)$$

であるから、目的の結果が得られている．ただし $GL(2^{e_i}, q)$ のシロー２群が直既約のことは言っておかねばならない．しかし、それは、その中心の位数が２であるから言える．

さて、次ぎに n は偶数としよう．このときは n が奇数のときのようには簡単ではない．結論を言えば、

$$GL(n,q) \overset{2}{\sim} GL(2^{e_1},q) \times GL(2^{e_2},q) \times \cdots \times GL(2^{e_k},q)$$

において、$e_1 \geq 1$ であるが、それが $SL(n,q)$ から $PSL(n,q)$ へと移行している間にそのシロー 2 群が直既約になってしまうのである．その証明は次ぎの定理から得られる．

Thereom B(Harada/Lang). Let $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k, k \geq 2$ be a direct product decomposition of a group G and $\phi_i, i = 1, 2, \ldots, s$ be homomorphisms defined on G to some groups. Assume $\phi_1 = 1$, the trivial homomorphism. Let $H = \cap_{t=1}^{s} ker\phi_t$. Assume further :

(i). G_i is nonabelian for all i and $Z(G_i) \subset \Phi(G_i)$, where Φ indicates the Frattini subgroup.

(ii). If $G_i/Z(G_i) = \bar{A} \times \bar{B}$ for some i, then the inverse images A, B in G_i are always abelian.

(iii). $Z(G) \subset H$ and $G = HG_i$ for all i.

Then

(a). If $s \geq 2$, then H/Z is indecomposable for any subgroup Z in the center $Z(G)$ of G such that $Z \cap G_i = 1$ for all i.

(b). If $s = 1$ (hence $H = G$), then G/Z is indecomposable for any subgroup Z of $Z(G) \cap [G, G]$ such that $Z = \langle z_1 z_2 \cdots z_r \rangle, z_i \in Z(G_i), |z_i|$ =const. for all i.

条件がゴチャゴチャしていてあまり好きになれない結果である．また、実際にこの定理を使うときには、準同型 $\phi_t, t = 2, 3, \ldots, s$ は行列式、ノルム、スピノールノルムなどであり、$s \leq 3$ である．自明な準同型 ϕ_1 を加えたのは、シンプレクティック群のように行列式、ノルム、スピノールノルムなどの核をとる必要のない場合 (故に、$s = 1$) にも定理が適用できるようにするためである．

最後に Third Reduction (直既約成分の実現可能性) が理論的に証明できるかに付いて考察をする．1970 年代のはじめに Gorenstein/Harada は $S = D_{2^m} \times D_{2^n}, mn > 4$ は実現不可能であることを証明した．1970 年代のなかごろ、Goldschmidt は S を群 G のシロー 2 部分群とするとき、$S = S_1 \times S_2$ で $S_i^G \cap S \subset S_i, i = 1, 2$ であれば、G は単純群ではないということを証明した．Goldschmidt の結果は S がいわゆる直積フュージョンを持てば、G は単純ではないといっている．しかし、一般的な設定で、与えられた群が直積フュージョンを持つことを証明するのは困難であろう．

なお、この報告の数学的内容のオリジナルな部分は主として

K. Harada and M.L.Lang, Indecomposable Sylow 2-subgroups of Simple Groups, submitted to the Proceedings of the International Conference for Algebra, Krasnoyarsk, Russia, August 2002.

に基づいている．

PS. 準薄群 (quasithin groups) の分類の論文は出版された．

M.Aschbacher and S.Smith, The Classification of Quasithin Groups
Volume 1. Structure of Strongly Quasithin K-groups
Volume 2. Main Theorems: The Classification of Simple $QTKE$-groups
Mathematical Surverys and Monographs, Volumes 111 and 112, Amer. Math. Soc., 2004.

The Ohio State University
The University of Singapore