

凸多面体の不易流行

日比孝之

大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

本稿は、市民講演会¹の講演記録である。岡潔と小林秀雄の対談集『人間の建設』（新潮文庫）の「記憶がよみがえる」の冒頭、小林秀雄が不易流行²に言及している。

不易流行とは、蕉風俳諧（しょうふうはいかい）の理念の一つである。向井去來の俳諧論書『去來抄』（きょらいしょう）から引用する。

蕉門に千歳不易（せんざいふえき）の句、一時流行（いちじりゅうこう）の句と云有。是を二ツに分つて教へ給へども、其基は一ツ也。不易を知らざれば基立がたく、流行を辨（わか）まへざれば風あらたならず。不易は古によろしく、後に叶ふ句なれば千歳不易といふ。流行は一時一時の變（へん）にして、昨日の風今日よろしからず、今日の風明日に用ひがたきゆへ、一時流行とは云はやる事をいふなり。

不易流行の解釈には諸説ある。本稿に限ると、凸多面体の「不易」とは、凸多面体の理論を育む土壌を、「流行」とは、数学の諸分野との交流から誕生している凸多面体論の現代的潮流を、それぞれ、示唆する。

歴史的背景

オイラーの多面体定理（1752年）、ピックの公式（1899年）などにその源流を持つ凸多面体論は、組合せ論の伝統的な分野の一つである。フランスの高等学校（lycée）の数学教師のエルハート（Eugène Ehrhart）が創始した、エルハート多項式の理論（1962年）は、ピックの公式の一般化と解釈できる。

その凸多面体論は、1970年前後から、その潮流は劇変する。抽象論から具象論への時代の流れを背景に、可換代数との魅惑的な接点が発見（1975年）され、代数学の抽象論から凸多面体の具象論への架け橋が築かれる。その後、1990年代に至り、計算機の急激な発展、ソフトウェアの進化を追い風とし、凸多面体論は計算代数の色彩を帯び、技の宝庫であるグレブナー基底の恩恵に浴する。

「不易」編

a) オイラーの多面体定理 オイラーの多面体定理とは、（3次元空間の）凸多面体の頂点の個数 v と辺の個数 e と面の個数 f は、等式

$$v - e + f = 2 \quad (1)$$

を満たす、という公式である³。図1のサッカーボールは、 $v = 60, e = 90, f = 32$ である。

¹ 筑波大学；平成28年3月19日

² 不易流行は「ふえきりゅうこう」と読む。

³ オイラーの多面体定理の証明は、たとえば、[3, 第8章] に載っている。



図1 サッカーボール

b) 正多面体の分類 オイラーの多面体定理から正多面体が分類できる. 正 f 面体の面が正 n 角形, 頂点に集まる辺の個数を m とする. それぞれの頂点は m 個の面に属し, それぞれの辺は 2 個の面に属するから, $v = \frac{n}{m}f, e = \frac{n}{2}f$ となる. すると, 公式 (1) から

$$\frac{n}{m}f - \frac{n}{2}f + f = 2 \quad (2)$$

が従う. 等式 (2) を受験数学の整数問題として解くと, $f = 4, 6, 8, 12, 20$ となる⁴. 従って, 正多面体は, 正四面体, 正六面体, 正八面体, 正十二面体, 正二十面体の 5 種類である.

c) ピックの公式 ピック (Georg Alexander Pick) の公式を紹介する. 座標平面の点は, その x 座標と y 座標の両者が整数のとき, 格子点と呼ばれる. 平面の凸多角形のすべての頂点が格子点のとき, その凸多角形を格子凸多角形と言う. ピックの公式⁵とは

定理 座標平面の格子凸多角形 P の内部に含まれる格子点の個数を a とし, P の境界に含まれる格子点の個数を b とすると

$$P \text{ の面積} = a + \frac{1}{2}b - 1 \quad (3)$$

が成立する. ■

たとえば, 図2の格子凸多面体ならば, ○が内部の格子点, ●が境界の格子点であるから, $a = 9, b = 8$ となり, その面積は 12 である.

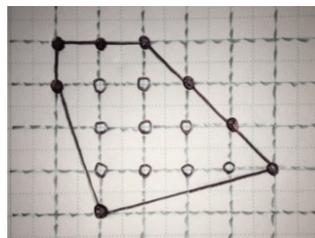


図2 ピックの公式

d) ピックの公式の証明 座標平面の格子三角形が, 頂点以外の格子点を含まないとき, 基本三角形と呼ぶ⁶.

⁴ 解答例は, [3, pp. 107-108] に載っている.

⁵ ピックの公式は, 必ずしも凸でなくとも, 穴が空いていなければ成立する.

⁶ 英語では empty triangle と呼ぶようであるが, 空 (から) 三角形という訳語を使うのは, 如何なものか?

ピックの公式を証明するには、格子凸多面体を基本三角形に分割することである。図2の格子凸多面体であれば、

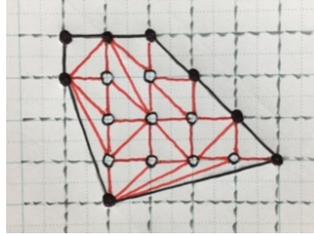


図3 基本三角形への分割

は、基本三角形への分割である⁷。

いま、格子凸多角形 \mathcal{P} の内部に含まれる格子点の個数を a とし、 \mathcal{P} の境界に含まれる格子点の個数を b とすると、基本三角形に分割したときの基本三角形の個数は、 $2a + b - 2$ となる⁸。更に、

補題 基本三角形の面積は $\frac{1}{2}$ である⁹。■

すると、ピックの公式 (3) が従う。

e) **ピックの公式の一般化** ピックの公式を3次元の座標空間で一般化しよう。3次元の座標空間の点は、その x 座標と y 座標と z 座標が整数のとき、**格子点**と呼ばれる。3次元の座標空間の凸多面体のすべての頂点が格子点のとき、その凸多面体を**格子凸多面体**と言う。格子四面体が、頂点以外の格子点を持たないとき、**基本四面体**と呼ぶ。体積 $\frac{1}{6}$ の格子四面体を**単模四面体**と呼ぶ。単模四面体は基本四面体である。

図4と図5の格子四面体は、両者とも、基本四面体である。前者は単模四面体であるが、後者は、体積が $\frac{1}{3}$ だから、単模四面体ではない¹⁰。

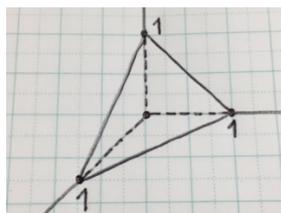


図4 単模基本四面体

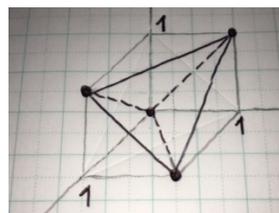


図5 単模でない基本四面体

すると、図4と図5の格子四面体は、内部と境界に含まれる格子点の個数が一致しているが、体積が異なる。一般に、格子凸多面体に含まれる格子点の数え上げから、その体積を計算することは不可能である。

⁷ もちろん、基本三角形への分割は、一般には、幾通りも存在する。

⁸ 証明は、格子点の個数に関する数学的帰納法を使う。

⁹ 拙著 [3, 第9章] に載っている証明は、やさしいけれども煩雑である。簡潔な証明は、[3] の増補版 (目下、原稿を執筆している) に掲載する。なお、基本三角形で鋭角三角形となるものは存在しない。

¹⁰ 基本四面体の体積の上限は存在しない。たとえば、 $(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, n)$ を頂点とする四面体は、基本四面体で、その体積は $(n + 1)/6$ である。

しかしながら，図4の基本四面体の2倍の膨らまし（図6）と図5の基本四面体の2倍の膨らまし（図7）を考えると，含まれる格子点の個数は異なる．図6の格子四面体も，図7の格子四面体も，境界には10個の格子点が属する．図6の格子四面体は，内部に格子点を含まないが，図7の格子四面体は内部に一個の格子点(1,1,1)を含む．

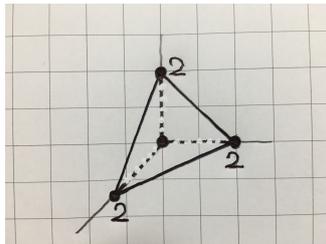


図6 内部の格子点は存在しない

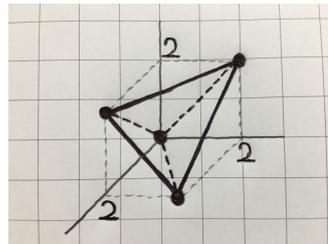


図7 内部の格子点が存在

以上の観察から，3次元の座標空間の格子凸多面体 \mathcal{P} の体積は， \mathcal{P} の内部と境界，及び，その2倍の膨らまし $2\mathcal{P}$ の内部と境界に含まれる格子点の個数の数え上げから計算できるのでは，と邪推される．実際，

定理¹¹ 3次元の座標空間の格子凸多面体 \mathcal{P} の内部に含まれる格子点の個数を a とし， \mathcal{P} の境界に含まれる格子点の個数を b とする．更に，2倍の膨らまし $2\mathcal{P}$ の内部に含まれる格子点の個数を a' とし， $2\mathcal{P}$ の境界に含まれる格子点の個数を b' とする．このとき，等式

$$\mathcal{P} \text{ の体積} = \frac{a' - 2a}{6} + \frac{b' - 2b}{12} \quad (4)$$

が成立する．■

f) 一般次元の凸多面体 前項e)の定理は，ピックの公式の3次元の座標空間への一般化であるが，その背景を紹介するには，エルハート多項式の理論を舞台に登壇させなければならない．その準備として，一般次元の凸多面体¹²の定義をする．

空間 \mathbb{R}^d の図形 \mathcal{P} が

- (i) 有限個の超平面¹³に囲まれ
- (ii) 有界であり
- (iii) 内部に半径 $\varepsilon > 0$ の d 次元球体を含む¹⁴

とき， \mathcal{P} を次元 d の凸多面体と呼ぶ．

更に， $\alpha \in \mathcal{P}$ が \mathcal{P} の頂点であるとは，条件

$$\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma), \beta \in \mathcal{P}, \gamma \in \mathcal{P} \text{ ならば } \alpha = \beta = \gamma$$

が成立するときと言う¹⁵．

¹¹ 予備知識を使わず，面と向かって証明することは，絶望的であると思うが，如何でしょうか．

¹² 一般次元の凸多面体の一般論は [1, 第1章]を参照されたい．

¹³ 空間 \mathbb{R}^d の超平面とは，一次方程式 $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ が定義する図形である．換言すると， \mathbb{R}^d の $d-1$ 次元の部分空間を平行移動させたものである．

¹⁴ すなわち，体積 > 0 を持つ，ということである．

¹⁵ 要するに， \mathcal{P} の角(かど)に存在する点のことである．

次元 d の凸多面体の頂点の個数は有限個 ($> d$) である¹⁶. 特に, 次元 d の凸多面体の頂点の個数が $d+1$ 個のとき, d 単体と呼ぶ. すると, 平面 \mathbb{R}^2 の三角形は 2 単体, 空間 \mathbb{R}^3 の四面体は 3 単体である.

g) 凸多面体のエルハート多項式 空間 \mathbb{R}^d の点は, そのすべての座標成分が整数のとき格子点と呼ばれる. 空間 \mathbb{R}^d の次元 d の凸多面体は, そのすべての頂点が格子点のとき格子凸多面体と呼ばれる.

空間 \mathbb{R}^d の次元 d の格子凸多面体 \mathcal{P} の膨らまし $n\mathcal{P} = \{n\alpha : \alpha \in \mathcal{P}\}$ (の内部と境界) に含まれる格子点の個数を $i(\mathcal{P}, n)$ とし, $n\mathcal{P}$ の内部に含まれる格子点の個数を $i^*(\mathcal{P}, n)$ とする. 但し, $n = 1, 2, \dots$ である. このとき

- $i(\mathcal{P}, n)$ は n に関する次数 d の多項式
- その定数項は 1
- その d 次の項の係数は \mathcal{P} の体積
- その $d-1$ 次の項の係数は \mathcal{P} の表面積の $\frac{1}{2}$
- (相互法則¹⁷) $i^*(\mathcal{P}, n) = (-1)^d i(\mathcal{P}, -n)$, $n = 1, 2, \dots$

が成立する.

定義 多項式 $i(\mathcal{P}, n)$ を \mathcal{P} のエルハート多項式と呼ぶ¹⁸.

特に, $i(\mathcal{P}, n)$ を決定すれば, \mathcal{P} の体積が計算できるから, エルハート多項式の理論は, ピックの公式の一般化と解釈することができる. 図 5 の基本四面体を \mathcal{P} とすると

$$i(\mathcal{P}, n) = \frac{n^3 + 3n^2 + 5n + 3}{3}$$

$$i^*(\mathcal{P}, n) = \frac{n^3 - 3n^2 + 5n - 3}{3}$$

である. 頂点が $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)$ である基本四面体を \mathcal{Q} とすると

$$i(\mathcal{Q}, n) = \frac{13n^3 + 6n^2 - n + 6}{6}$$

$$i^*(\mathcal{Q}, n) = \frac{13n^3 - 6n^2 - n - 6}{6}$$

となる. 次元 3 の格子凸多面体のエルハート多項式の n^3 の係数と n^2 の係数は正であるけれども, n の係数は負になるときもある.

一般に, 任意の次元 d の格子凸多面体で, そのエルハート多項式の $n^{d-2}, n^{d-3}, \dots, n$ の係数のすべてが負であるものが存在する¹⁹.

¹⁶ 次元 d の凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の頂点の集合を $V(\mathcal{P}) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_v\}$ とするとき, \mathcal{P} は $V(\mathcal{P})$ の凸閉包である. すなわち,

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_{i=1}^v r_i \alpha_i : r_i \geq 0, \sum_{i=1}^v r_i = 1 \right\}$$

である.

¹⁷ 多項式 $i(\mathcal{P}, n)$ の n に $-n$ を代入したものを $i(\mathcal{P}, -n)$ と記す.

¹⁸ エルハート多項式の一般論は [1, 第 4 章] を参照されたい.

¹⁹ arXiv:1312.7049

他方、符号+と-の $d-2$ 個の列が任意に与えられたとき、次元 d の格子凸多面体で、そのエルハート多項式の $n^{d-2}, n^{d-3}, \dots, n$ の係数の符号の列が、与えられた符号の列に一致するものが存在する、と予想されている²⁰。たとえば、 $d=5$ とすると、下記の多項式のそれぞれは、次元5の或る格子凸多面体のエルハート多項式である。

$$\begin{aligned}
 +++ & (n+1)^5 \\
 ++- & (28561n^5 + 58136n^4 + 30576n^3 + 994n^2 - n + 6)/6 \\
 +-+ & (19n^5 + 44n^4 + 24n^3 - 2n^2 + 5n + 6)/6 \\
 -++ & (5200n^5 + 2920n^4 - 147n^3 + 2366n^2 + 239n + 6)/6 \\
 +- - & (2000000000n^5 + 203000000n^4 + 4620000n^3 - 59300n^2 - 1580n + 3)/3 \\
 -+ - & (371/120)n^5 + (1/8)n^4 - (1/24)n^3 + (15/8)n^2 - (1/20)n + 1 \\
 --+ & (16000n^5 + 2800n^4 - 13440n^3 - 157n^2 + 86n + 3)/3 \\
 --- & (80n^5 + 92n^4 - 24n^3 - 41n^2 - 2n + 3)/3
 \end{aligned}$$

「流行」編

「流行」編は、可換代数と凸多面体論の接点、グレブナー基底の凸多面体論への影響について語る。時代の流れとは逆であるが、本稿では前者を後に回し、後者から始める²¹。

(第1幕) グレブナー基底

a) 単模三角形分割 空間 \mathbb{R}^d の次元 d の格子凸多面体の格子 d 単体による分割を格子三角形分割と呼ぶ²²。格子三角形分割を構成する、すべての格子 d 単体の体積が $\frac{1}{d!}$ のとき、その格子三角形分割を単模三角形分割と呼ぶ。

例 空間 \mathbb{R}^3 の $\mathbf{a}_1 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{a}_5 = (1, 1, 1)$ を頂点とする bipyramid

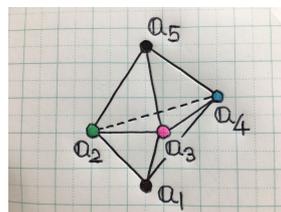


図8 bipyramid

²⁰一般次元では、未解決である。

²¹後者は、ピックの公式、凸多面体のエルハート多項式の続編には相応しく、しかも、詳しい証明は兎も角、話の流れを追うことは可能である。反面、前者の話題を理解するには、可換代数の概念が必須であるから、話がうやむやになることは避けられない。前者に触れず、格子点と凸多面体の話に焦点を絞ることも一案である。しかしながら、Cohen-Macaulay環を語らずして、凸多面体の不易流行を論ずることはできないであろう。

²²頂点以外の格子点を使うことも許す。しかしながら、その格子凸多面体に含まれるすべての格子点を使う必要はない。たとえば、平面 \mathbb{R}^2 の3点 $(-1, -1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ を頂点とする格子三角形は、内部に原点を含む。原点を使わなければ、それ自身が格子三角形分割である。原点を使うと、3個の基本三角形に分割できる。

の格子三角形分割は、図9と図10である。図9は単模三角形分割ではない。図10は単模三角形分割である。

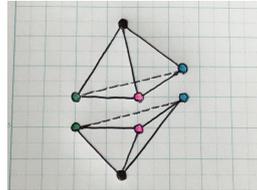


図9 単模でない格子三角形分割

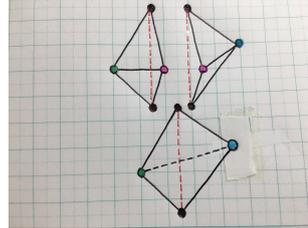


図10 単模三角形分割

格子凸多面体 \mathcal{P} が単模三角形分割を持つと豊富な御利益がある。関連分野のキーワードを列挙する。

- (組合せ論) \mathcal{P} のエルハート多項式 (特に, 体積) の計算
- (可換代数) \mathcal{P} のトーリック環が **Cohen–Macaulay 環**
- (代数幾何) トーリックファノ多様体の正規性
- (整数計画) \mathcal{P} の整分割性²³ が従う。
- (超幾何函数) \mathcal{P} に付随する **A 超幾何系の階数** の計算²⁴
- (統計) マルコフ基底の発見に有効かも (?)²⁵

b) トーリックイデアル 整数行列 $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,d \\ j=1,2,\dots,n}}$ があったとき

$$\begin{bmatrix} & & A & & \\ & & & & \\ 1 & \cdots & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を満たす整数ベクトル $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ の全体を $\text{Ker}_{\mathbb{Z}} A$ と表す。

変数 x_1, \dots, x_n を準備し, $\text{Ker}_{\mathbb{Z}} A$ に属する $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ に付随する二項式²⁶ $f_{\mathbf{b}}$ を

$$f_{\mathbf{b}} = f_{\mathbf{b}}^{(+)} - f_{\mathbf{b}}^{(-)} = \prod_{b_i > 0} x_i^{b_i} - \prod_{b_j < 0} x_j^{-b_j}$$

²³ すなわち, $n\mathcal{P}$ に属する格子点は \mathcal{P} に属する n 個の格子点の和として表示される。

²⁴ 階数は \mathcal{P} の体積に一致するから, 結局, 体積の計算, と言うことである。根系 A_{n-1} に付随する A 超幾何系の階数は, Gelfand–Graev–Postnikov (1997) が A_{n-1} に付随する格子凸多面体の単模三角形分割を構成することから計算した。その後, W. Fong (2000) は B_n, C_n, D_n に付随する格子凸多面体の体積を格子 (しかし, 単模とは限らない) 三角形分割を構成することから計算した。なお, B_n, C_n, D_n に付随する格子凸多面体の単模三角形分割は [2, 定理 (8.3.4)] を参照されたい。

²⁵ たとえば, D_n に関連する格子凸多面体の単模三角形分割から, 3 水準 Box–Behnken 計画のマルコフ基底を計算する研究 (arXiv:1502.02323) がある。

²⁶ 単項式と単項式の差を二項式と呼ぶ。

と定義する. たとえば, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ならば $f_{\mathbf{b}} = x_1^2 x_3 - x_2^3$ である.

いま, 単項式順序²⁷ $<$ を固定する. このとき, 二項式の集合

$$I_A = \left\{ f_{\mathbf{b}} : \mathbf{b} \in \text{Ker}_{\mathbb{Z}} A, f_{\mathbf{b}}^{(+)} > f_{\mathbf{b}}^{(-)} \right\}$$

を²⁸ A のトーリックイデアルと呼ぶ²⁹.

c) グレブナー基底³⁰ 組合せ論の古典的な結果 (Dickson の補題³¹) から

補題 有限個の二項式 $f_{\mathbf{b}_1}, \dots, f_{\mathbf{b}_s}$ を I_A から適当に選ぶ³² と, 条件

(♣) $f_{\mathbf{b}} \in I_A$ ならば $f_{\mathbf{b}}^{(+)}$ は $f_{\mathbf{b}_1}^{(+)}, \dots, f_{\mathbf{b}_s}^{(+)}$ の何れかで割り切れる.

が満たされる. ■

定義 二項式の集合 $\{f_{\mathbf{b}_1}, \dots, f_{\mathbf{b}_s}\}$ を I_A のグレブナー基底³³ と呼ぶ.

単項式の集合 $\{f_{\mathbf{b}_1}^{(+)}, \dots, f_{\mathbf{b}_s}^{(+)}\}$ を³⁴ I_A のイニシャルイデアル³⁵ と呼ぶ.

d) 正則三角形分割 次元 d の格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ に属する (必ずしも頂点とは限らない) 格子点の全体 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ を列ベクトルとする d 行 n 列の整数行列を $A(\mathcal{P})$ とする³⁶. 整数行列 $A(\mathcal{P})$ のトーリックイデアル $I_{A(\mathcal{P})}$ を \mathcal{P} のトーリックイデアルと呼ぶ. トーリックイデアル $I_{A(\mathcal{P})}$ のグレブナー基底 $\{f_{\mathbf{b}_1}, \dots, f_{\mathbf{b}_s}\}$ とイニシャルイデアル $\{f_{\mathbf{b}_1}^{(+)}, \dots, f_{\mathbf{b}_s}^{(+)}\}$ がわかるとどのような御利益があるのだろうか.

²⁷ 変数 x_1, \dots, x_n の単項式の全体から成る集合 \mathcal{M}_n の上の全順序 $<$ が, 条件

- 任意の $1 \neq u \in \mathcal{M}_n$ は $1 < u$ である
- $u, v, w \in \mathcal{M}_n$ のとき, $u < v$ ならば $uw < vw$ である

を満たすとき, 単項式順序と呼ばれる. たとえば, 辞書式順序, 逆辞書式順序などが単項式順序である.

²⁸ 厳密には, 二項式の集合が生成するイデアルを, と言うべきであるが, イデアルの話に言及することは御法度だから, 講演のスライドでも「イデアル」は小さな文字で記載している.

²⁹ なお, $\mathbf{b} \in \text{Ker}_{\mathbb{Z}} A$ ならば, $-\mathbf{b} \in \text{Ker}_{\mathbb{Z}} A$ であるから, 単項式順序を固定すると, I_A には, $f_{\mathbf{b}}$ と $f_{-\mathbf{b}}$ のどちらか一方のみが属することになる. 但し, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ である.

³⁰ グレブナー基底の理論, 計算, 応用の総合的な解説書が [4] である.

³¹ 変数 x_1, \dots, x_n の単項式の (空でない) 集合 M に属する単項式 u が M の極小元とは, M に属する単項式で u を割り切るものは u 自身に限るときに言う. Dickson の補題とは, M の極小元は高々有限個しか存在しない, という結果である.

³² 講演のスライドでは, 添字の添字は避ける必要があるから, \mathbf{b}_i を $\mathbf{b}(i)$ と記載している.

³³ 厳密には, 単項式順序 $<$ に関するグレブナー基底

³⁴ 厳密には, 単項式の集合 $\{f_{\mathbf{b}_1}^{(+)}, \dots, f_{\mathbf{b}_s}^{(+)}\}$ が生成するイデアルを

³⁵ 厳密には, 単項式順序 $<$ に関するイニシャルイデアル

³⁶ 図 8 の格子凸多面体を \mathcal{P} とすると

$$A(\mathcal{P}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

である.

格子 d 単体 π の頂点の集合を $V(\pi) \subset \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ とするとき、格子 d 単体の集合

$$\left\{ \pi : \left\{ k : x_k \text{ は } f_{\mathbf{b}_i}^{(+)} \text{ を割り切る} \right\} \not\subset \left\{ k : \mathbf{a}_k \in V(\pi) \right\}, i = 1, \dots, s \right\}$$

は \mathcal{P} の格子三角形分割となる³⁷ (Sturmfels). その格子三角形分割を $\{f_{\mathbf{b}_1}^{(+)}, \dots, f_{\mathbf{b}_s}^{(+)}\}$ に付随する \mathcal{P} の正則三角形分割と呼ぶ. 更に, 単項式 $f_{\mathbf{b}_1}^{(+)}, \dots, f_{\mathbf{b}_s}^{(+)}$ のそれぞれが squarefree³⁸ ならば $\{f_{\mathbf{b}_1}^{(+)}, \dots, f_{\mathbf{b}_s}^{(+)}\}$ に付随する \mathcal{P} の正則三角形分割は単模である³⁹ (Sturmfels).

例 再び, 図 8 の bipyramid を議論する. いま,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であるから, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ とすると, $f_{\mathbf{b}} = x_1x_5^2 - x_2x_3x_4, f_{-\mathbf{b}} = x_2x_3x_4 - x_1x_5^2$ である.

- 単項式順序が $x_1x_5^2 > x_2x_3x_4$ を満たせば, グレブナー基底は $\{f_{\mathbf{b}}\}$ と, イニシャルイデアルは $\{x_1x_5^2\}$ となる. 付随する正則三角形分割は $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_5\} \not\subset V(\pi)$ を満たす格子四面体 π から成る. すなわち, 図 9 の単模でない正則三角形分割になる.
- 単項式順序が $x_2x_3x_4 > x_1x_5^2$ を満たせば, グレブナー基底は $\{f_{-\mathbf{b}}\}$ と, イニシャルイデアルは $\{x_2x_3x_4\}$ となる. 付随する正則三角形分割は $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\} \not\subset V(\pi)$ を満たす格子四面体 π から成る. すなわち, 図 10 の正則単模三角形分割になる.

もちろん, 正則でない格子三角形分割も存在する. 図 11 は, 非正則三角形分割である⁴⁰.

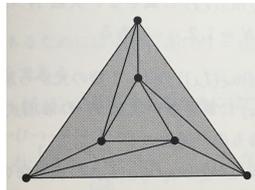


図 11 非正則三角形分割

³⁷ [2, 定理 (6.1.4)]

³⁸ 一般に, 単項式 $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}$ が squarefree であるとは, それぞれの $a_i \leq 1$ であるときに言う.

³⁹ [2, 定理 (6.2.1)]

⁴⁰ [2, 例 (6.1.7)]

(第2幕) 可換代数

a) 母函数 非負整数から成る数列 a_0, a_1, a_2, \dots の母函数⁴¹

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots \quad (5)$$

を考える. いま, 偶然にも, 母函数 (5) が有理函数

$$\frac{h_0 + h_1\lambda + h_2\lambda^2 + \dots + h_d\lambda^d}{(1-\lambda)^d} \quad (6)$$

になったと仮定する⁴².

たとえば, $a_n = \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 5n + 3)$ とすると, その母函数は

$$\begin{aligned} (1+\lambda^2) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} \lambda^n &= (1+\lambda^2) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \right)^4 \\ &= (1+\lambda^2)(1+\lambda+\lambda^2+\dots)^4 \\ &= \frac{1+\lambda^2}{(1-\lambda)^4} \end{aligned}$$

となるから, $d=4, h_0=1, h_1=0, h_2=1, h_3=0$ である.

このとき, 不等式

$$0 \leq h_i \leq \binom{h_1+i-1}{i}, \quad i=0, 1, 2, \dots, d \quad (7)$$

を示すにはどうすればいいであろうか⁴³?

定理 非負整数から成る数列 a_0, a_1, a_2, \dots が Krull 次元 d の標準的次數環⁴⁴ のヒルベルト函数⁴⁵ であるならば, その数列の母函数は, 有理函数 (6) となる⁴⁶. 更に, その標準的次數環が Cohen-Macaulay 環⁴⁷ ならば, 不等式 (7) が成立する. ■

数え上げの組合せ論の観点から眺めると, Cohen-Macaulay 環は, 有限数列の非負性を証明する際の効果的な道具の一つである.

⁴¹ 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の母函数とは, その数列を係数とする一変数形式的冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ のことである. たとえば, 数列 $1, 2, \dots$ の母函数は $F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\lambda^n = 1/(1-\lambda)^2$ である.

⁴² 母函数 (5) が有理函数 (6) となるための必要十分条件は a_n ($n=1, 2, \dots$) が n に関する次数 $d-1$ の多項式となる必要十分である.

⁴³ 二項係数 $\binom{h_1+i-1}{i}$ は h_1 個のものから i 個を選ぶ重複組合せの個数, 換言すると, h_1 変数 i 次数の単項式の個数である. 一般に, 有理函数 (6) の分子の係数が非負になることを示すことは難しい.

⁴⁴ 標準的次數環とは, 次数 1 の斉次元が生成する, 体上の有限生成の可換な次數環のことである.

⁴⁵ 標準的次數環の次数 n の斉次元が生成する部分空間の線型空間としての次元を n の函数と思うとき, その函数をヒルベルト函数と呼ぶ.

⁴⁶ 厳密には, ヒルベルト函数についての条件を加える必要がある. 脚注の 40 を参照されたい.

⁴⁷ Cohen-Macaulay 環は, 可換代数の一般のテキストでは, 正則列を使って定義されるが, 多項式環の上の有限生成自由加群となっている次數環のことである. 詳細は [1, pp. 59-61] を参照されたい.

b) 球面の三角形分割 次元 $d-1$ の球面 \mathbb{S}^{d-1} の三角形分割 $^{48}\Delta$ の i 次元の面 49 の個数を $f_i = f_i(\Delta)$ とするとき, 数列

$$f(\Delta) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$$

を Δ の f 列と呼ぶ.

以下, \mathbb{S}^{d-1} の三角形分割の頂点の個数 $v = f_0$ を固定する. すると,

$$f_i \leq \binom{v}{i+1}, \quad 0 \leq i \leq d-1$$

となる.

いま, v 個の頂点を持つ次元 d の巡回凸多面体 50 を $C(v, d)$ とすると, $C(v, d)$ は単体的凸多面体 51 であるから, その境界複体 $^{52}\Delta(C(v, d))$ は, \mathbb{S}^{d-1} の三角形分割となる. しかも

$$f_i(\Delta(C(v, d))) = \binom{v}{i+1}, \quad 0 \leq i < [d/2]$$

である 53 . 従って, \mathbb{S}^{d-1} の三角形分割 Δ の頂点の個数が $v = f_0$ ならば

$$f_i(\Delta) \leq f_i(\Delta(C(v, d))), \quad 0 \leq i \leq d-1 \quad (8)$$

が成立すると予想するのは自然である. 不等式 (8) を 上限予想 (Motzkin) と呼ぶ.

便宜上, $f_{-1} = 1$ と置き, 三角形分割 Δ の f 列 $f(\Delta) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ から, 公式

$$\sum_{i=0}^d f_{i-1}(x-1)^{d-i} = \sum_{i=0}^d h_i x^{d-i} \quad (9)$$

により, Δ の h 列

$$h(\Delta) = (h_0, h_1, \dots, h_d)$$

を定義する. すると, 上限予想 (8) は, 不等式 (7) と一致する 54 (McMullen).

たとえば, 図 1 1 は, 次元 2 の球面の三角形分割である 55 . その f 列と h 列は, $f(\Delta) = (6, 12, 8)$ と $h(\Delta) = (1, 3, 3, 1)$ である 56 .

⁴⁸ 幾何学的実現 $|\Delta|$ が \mathbb{S}^{d-1} と位相同型になる抽象単体的複体 Δ を \mathbb{S}^{d-1} の三角形分割と言う. 詳細は, 代数的位相幾何学のテキストを参照されたい. 図 1 のサッカーボールの, それぞれの五角形を 3 個の三角形に分割し, それぞれの六角形を 4 個の三角形に分割すれば, 次元 2 の球面の三角形分割になる.

⁴⁹ 抽象単体的複体 Δ に属する $(i+1)$ 元集合を Δ の i 次元の面と呼ぶ.

⁵⁰ 空間 \mathbb{R}^d のモーメント曲線 $\{(t, t^2, \dots, t^d) : t \in \mathbb{R}\}$ 上の v 個の点の凸閉包を巡回凸多面体と呼ぶ.

⁵¹ 次元 d の凸多面体の任意の面が単体のとき, その凸多面体を単体的凸多面体と呼ぶ. たとえば, 正八面体は単体的凸多面体であるが, 正六面体は単体的凸多面体ではない.

⁵² 単体的凸多面体 \mathcal{P} の面を \mathcal{P} の頂点集合の部分集合と思うと, \mathcal{P} の面の全体から成る集合 $\Delta(\mathcal{P})$ は抽象単体的複体である. 抽象単体的複体 $\Delta(\mathcal{P})$ を \mathcal{P} の境界複体と呼ぶ. すると, \mathcal{P} の次元が d ならば, $\Delta(\mathcal{P})$ は \mathbb{S}^{d-1} の三角形分割である.

⁵³ [1, pp. 67–68]

⁵⁴ [1, pp. 70–71]

⁵⁵ 外枠の三角形も面だと思ふ.

⁵⁶ 一般に, 球面の三角形分割の h 列は左右対称の数列である (Dehn–Sommerville 方程式 [1, p. 63]).

c) **Cohen–Macaulay 環** すると、可換代数を戦略とするならば、上限予想の肯定的な解決を導く戦術は、 $h(\Delta) = (h_0, h_1, \dots, h_d)$ を h 列とする次元 $d-1$ の球面 \mathbb{S}^{d-1} の三角形分割 Δ があつたとき、Krull 次元 d の Cohen–Macaulay 標準的次數環で、そのヒルベルト函数の母函数が (6) に一致するものを構成することである。

多項式環の話になる。体 ${}^{57}K$ の上の v 変数多項式環を $A = K[x_1, \dots, x_v]$ とする。簡単のため、 Δ の頂点集合を $\{1, \dots, v\}$ とし、 $\{1, \dots, v\}$ の部分集合 τ に squarefree な単項式 $x_\tau = \prod_{i \in \tau} x_i$ を対応させる。単項式の集合 $\{x_\tau : \tau \notin \Delta\}$ が生成する A のイデアルを I_Δ とし、その剰余環 A/I_Δ を $K[\Delta]$ と表す。それぞれの変数 x_i の次数を 1 とすると、 $K[\Delta]$ は標準的次數環となる。その Krull 次元は d である。更に、 $K[\Delta]$ のヒルベルト函数を $a_0 (= 1), a_1, a_2, \dots$ とすると、 $n > 1$ のとき

$$a_n = \sum_{i=0}^{d-1} f_i \binom{n-1}{i} \quad (10)$$

となる⁵⁸。但し、 $f(\Delta) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ は Δ の f 列である。すると、(9) と (10) から、簡単な計算を経由する⁵⁹ と、

定理 (Stanley) 次元 $d-1$ の球面 \mathbb{S}^{d-1} の三角形分割 Δ の h 列を $h(\Delta) = (h_0, h_1, \dots, h_d)$ とするとき、標準的次數環 $K[\Delta]$ のヒルベルト函数の母函数は (6) に一致する。■

残るは、次元 $d-1$ の球面 \mathbb{S}^{d-1} の三角形分割 Δ から構成される Krull 次元 d の標準的次數環 $K[\Delta]$ が Cohen–Macaulay 環であることを示すことである。

ところが、Stanley とは独立に、しかも、上限予想のことは知らず、Reisner は、学位論文⁶⁰において、指導教員 Hochster の示唆を受け、 $K[\Delta]$ を研究し、Cohen–Macaulay となるための判定法を探することに成功した⁶¹。特に、Reisner の判定法の系とし

定理 (Reisner) 球面の三角形分割 Δ に付随する $K[\Delta]$ は Cohen–Macaulay 環である。■

標準的次數環 $K[\Delta]$ は、**Stanley–Reisner 環** と呼ばれる。

定理 (Stanley) 上限予想は肯定的である。■

歴史的秘話⁶² も参照されたい。

参考文献

- [1] 日比孝之『可換代数と組合せ論』(シュプリンガー東京) 1995 年
- [2] 日比孝之『グレブナー基底』(朝倉書店) 2003 年
- [3] 日比孝之『証明の探究』(大阪大学出版会) 2011 年
- [4] JST CREST 日比チーム (編)『グレブナー道場』(共立出版) 2011 年

⁵⁷ 上限予想を議論する際、体 K は有理数の全体 \mathbb{Q} としてもよい。

⁵⁸ [1, pp. 74–75]

⁵⁹ [1, pp. 75–76]

⁶⁰ *Adv. in Math.* **21** (1976), 30–49.

⁶¹ Stanley も Reisner も $K[\Delta]$ は任意の抽象単体的複体から定義している。

⁶² <http://www-math.mit.edu/~rstan/papers/ubc.pdf>