会員ニュース

日野正訓さんの日本学術振興会賞受賞に寄せて

東京大学
楠岡　成雄

日野正訓さん（大阪大学大学院基礎工学研究科教授）が，第 12 回（平成 27 年度）日本学術振興会賞を受賞されました．受賞研究題目は「ディリクレ形式の理論による確率解析のフラクタルへの応用」です．日野さんの受賞に心からお祝いを申し上げます．日野さんのフラクタル上の拡散過程に関する研究はオリジナリティの高い深い研究ですが，一般の数学者にはわかりにくいもののように思います．私も完全に理解しているわけではありませんが，ここで解説させて頂きます．なお，フラクタル上の拡散過程の研究には極めて多くの研究者が関わっており，紹介する結果に関して誰がどのような貢献をしたかというようなことの記述はすべて省かせて頂きます．また，結果を数学的にきっちりと述べることもしません．詳しい解説が日本でこの分野をリードしてきた研究者によって書かれておりますので（熊谷 [1], [2]，木上 [3], [4]，日野 [5]）興味を持たれた方はこれらの解説をお読み下さい．

拡散過程とは連続な軌跡を持つマルコフ過程のことで 20 世紀に入り研究が始まった．当初よりそれは 2 階の放物型方程式と深い関連があることが知られていた．拡散過程には生成作用素と呼ばれる 2 階の線形楕円型微分作用素 L が付随すると考えられる．また，その遷移確率は放物型方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$ と深い関係がある．このように拡散過程の研究と解析学は密接な関係がある．例えば最も重要な拡散過程である d 次元ユークリッド空間上のブラウン運動においては $L = \frac{1}{2}\triangle$ （$\triangle$ はラプラス作用素）で，その推移確率 $p(t,x,dy)$ はルベーグ測度について絶対連続であり，密度関数 $p(t,x,y)$ は

$$p(t,x,y) = (\frac{1}{2\pi t})^{d/2}\exp(-\frac{|x-y|^2}{2t}) \qquad \mathrm{x}\ ,\ \mathrm{y}\ \in \mathbf{R}^d,\ t>0$$

となる．これは放物型方程式の基本解でもある．また，ルベーグ測度がブラウン運動の不変測度となる．ブラウン運動やラプラス作用素は平行移動不変であるのでフーリエ変換等が有効な解析手段となる．ユークリッド空間上のより一般の拡散過程も確率微分方程式のような確率解析的手法や擬微分作用素といった解析的手法が有効となる．

一方，ユークリッド空間とは全く違う複雑な距離空間 E を取り，E 上に拡散過程が存在するかという問題に対する研究が約 30 年前から始まった．その対象として，まず自己相似なフラクタル図形 E が空間として選ばれ，特にシェルピンスキーガスケット (以後 SG と表記）とシェルピンスキーカーペット（以後 SC と表記) が対象となった．これらの図形には相似変換という離散群が働き，局所的に部分図形は合同となっている．従って，相似変換で（時間スケールを変えることで）不変となり，合同な部

分図形上は同じ推移をする拡散過程があれば，それを「ブラウン運動」と呼んでもよいであろう．SG や SC のような図形上では「ブラウン運動」が構成され，その不変測度がフラクタル上の自然なハウスドルフ測度となることがまず示された．ここで，1つだけ注意しておきたいことがある．SG は有限個の点で切断するだけで，いくつもの連結成分に分けることができる．このような性質を有限分岐性と呼ぶ．このような場合，線形代数を用いた扱いが可能となる．一方，SC は有限分岐的ではなく，扱いが遙かに難しくなる．

さて，SG, SC どちらの場合にも推移確率が不変測度に関して絶対連続で，その密度関数 $p(t,x,y)$ については $d_s > 0$, $d_w \geqq 2$, という指数が存在し，$C \in (1,\infty)$ が十分大きければ，次のような評価が成り立つことが示された．

$$C^{-1}t^{-d_s/2}\exp(-C(\frac{d_E(x,y)^{d_w}}{t})^{1/(d_w-1)}) \leqq p(t,x,y)$$

$$\leqq Ct^{-d_s/2}\exp(-C^{-1}(\frac{|x-y|^{d_w}}{t})^{1/(d_w-1)}), \quad x,y \in E,\ t>0.$$

フラクタル次元を d_f とする時，$d_w = 2d_f/d_s$ となる．d_s はスペクトル次元と呼ばれ，解析の観点から重要な指数となる．ユークリッド空間の場合は $d_s = d_f$ であるが SG や SC などでは $d_f > d_s$ となることが知られている．この推移確率に関する結果は自己相似なフラクタルではなく，もっと一般の複雑な空間の場合にも結果が拡張されている (これについては熊谷 [2] を参照されたい)．このようにフラクタル上の拡散過程の解析的性質に関する研究は大きく発展している．

その一方で，拡散過程の確率解析的性質の研究はあまり進まなかった．フラクタル上の「ブラウン運動」は不変測度について対称的（時間可逆的）であるので，局所的ディリクレ形式の理論が適用できる．不変測度を ν とするとディリクレ形式 $\mathcal{E}$ は形式的に

$$\mathcal{E}(u,v) = -\int_E (Lu,v)d\nu, \qquad u,v \in Dom(\mathcal{E})$$

と表せる (ここで $Dom(\mathcal{E})$ はディリクレ形式の定義域)．また，$u,v \in Dom(\mathcal{E})$ に対してエネルギー測度 $\mu_{\langle u,v\rangle}$ が定義できる．これらはフラクタル上の拡散過程に限らず対称拡散過程の一般論で定義することができるものであるが，d 次元ユークリッド空間上のブラウン運動に対しては

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} (\nabla u(x), \nabla v(x))_{\mathbf{R}^d} dx,$$

$$\mu_{\langle u,v\rangle} = (\nabla u(x), \nabla v(x))_{\mathbf{R}^d} dx \qquad u,v \in Dom(\mathcal{E})$$

となる．

拡散過程の確率解析的指標の 1 つとしてマルチンゲール次元というものがある．マルチンゲール次元とは何かということの直観的説明は難しい．かなりインチキな説明

であるが，拡散過程のランダム性を記述するのに必要となる独立な 1 次元ブラウン運動の数と考えてもらいたい．

d 次元ユークリッド空間上のブラウン運動に対してはフラクタル次元は d となる．実はこのことはエネルギー測度の形からわかる．$\mu_{\langle u,v\rangle} = (\nabla u(x), \nabla v(x))_{\mathbf{R}^d} dx$ という表現において，$\nabla u(x)$ が d 次元ベクトルであること，及び u を変えればどのような d 次元ベクトルでも $\nabla u(x)$ で与えられることができるという事実から証明できる．よって，エネルギー測度を明示的に表現できればその表現からマルチンゲール次元がわかる．残念なことに SG の場合はエネルギー測度は不変測度に対して絶対連続ではないことが示された．したがってエネルギー測度の表現は単純にはいかないことがわかる．しかし，SG の有限分岐性を利用することで間接的にエネルギー測度を線形代数的な手法で表現でき，マルチンゲール次元が 1 であることが示された．

ようやく日野さんの業績を説明できるところまでたどり着いた．有限分岐性を持たないフラクタル上の拡散過程では，ディリクレ形式をはじめ様々なものがあまり構成的には表現はできず，「ブラウン運動」の存在すら証明することが難しいのであるが，日野さんは SC を含む有限分岐的でないフラクタル上の拡散過程に対してエネルギー測度が不変測度に対して特異であることを示し（[6]），さらに，マルチンゲール次元がスペクトル次元 d_s 以下であることを示した ([7],[8])．これらの証明では，フラクタルの自己相似性をうまく利用し，マルチンゲール次元と同じ個数の良い調和関数の族を構成し，ソボレフ不等式を用いて，スペクトル次元とマルチンゲールが比較可能であることを示し，「マルチンゲール次元はスペクトル次元以下である」という誰も予想しなかった結果を導いた．証明方法もユニークなもので，今後のディリクレ形式の研究において新しい視点を与えるものと思う．

日野さんは，他の人たちがあまり研究を行わない分野で独自の研究を行っているので，研究業績が過小評価されているように思っていたのであるが，今回このような賞を受賞したことは大きな励みになると思う．ますますユニークな研究を行ってくれるものと期待している．日野さんおめでとう．

参考文献

[1] 熊谷隆, フラクタル上の確率過程とその周辺数学 **49**(1997),158-172.

[2] 熊谷隆, フラクタル上の解析学の展開, 数学 **56**(2004),337-350 .

[3] 木上淳, 自己相似集合上の Laplacian についてー フラクタル上の解析 ー, 数学 **44**(1992), 13-28.

[4] 木上淳, 測度・距離空間上の解析学ー Cheeger 理論とフラクタル上の解析 ー, 京都大学数理解析研究所講究録 **1914**(2014), 39-55.

[5] 日野正訓, ディリクレ形式における指数, 数学 **66**(2014), 61-77.

[6] Hino, M., On singularity of energy measures on self-similar sets, Probability Theory Rel. Fields **132**(2005), 265-290.

[7] Hino, M., Martingale dimensions for fractals, Ann. Probab. **36**(2008), 971-991.

[8] Hino, M., Energy measures and indices of Dirichlet forms, with applications to derivatives on some fractals, Proc. London Math. Soc. (3) **100**(2010), 269-302.