授賞報告
2016年度日本数学会代数学賞

2016 年度日本数学会代数学賞は，桂田英典氏（室蘭工業大学大学院工学研究科），藏野和彦氏（明治大学理工学部），齋藤政彦氏（神戸大学大学院理学研究科）が受賞されました．

桂田英典氏
「多変数保型形式の L 函数と周期の研究」

桂田英典氏は Siegel 保型形式に関連した多くの重要な業績をあげています．Siegel 保型形式の重要な例として，Siegel Eisenstein 級数，Klingen Eisenstein 級数の他に Duke-Imamoglu-Ikeda lift, Miyawaki lift 等が知られています．桂田氏はとくに Siegel Eisenstein 級数，Klingen Eisenstein 級数，Duke-Imamoglu-Ikeda lift などを中心に研究を進めてきました．この中から３つのテーマについて述べたいと思います．

(1) Siegel 級数の研究：　Siegel Eisenstein 級数はもっとも基本的な Siegel 保型形式であり，その Fourier 係数は Euler 積表示を持つことが知られています．この Euler 積の局所因子が Siegel 級数といわれるものです．Siegel 級数は古くから多くの研究者が研究してきましたが，その具体的な形を求めるのは非常に困難でした．桂田氏は $\mathbb{Q}_p$ 上の 2 次形式に付随する Siegel 級数の明示公式を具体的に与え，この問題を解決しました．また，この過程において Siegel 級数が函数等式をもつことも示しました．この函数等式は今日では桂田の函数等式として広く知られており， Duke-Imamoglu-Ikeda lift の構成においても重要な役割を果たしました．このように桂田氏の Siegel 級数の研究は，単に Siegel Eisenstein 級数の Fourier 係数のみならず，Siegel 保型形式の理論全体に影響を与えました．

(2) Koecher-Maass 級数の研究：　桂田氏は伊吹山知義氏との共同研究において Siegel Eisenstein 級数，Klingen Eisenstein 級数，Duke-Imamoglu-Ikeda lift，Duke-Imamoglu-Ikeda lift の Hermite 保型形式に関する類似など多くの Siegel 保型形式，Hermite 保型形式の Koecher-Maass 級数を具体的に計算しました．この結果も次に述べる Duke-Imamoglu-Ikeda lift の Petersson 内積の計算において重要な役割を果たしました．

(3) Duke-Imamoglu-Ikeda lift の Petersson 内積に関する予想の解決：　$n > 0$ を偶数，$k > \frac{n}{2}$ を整数，$f \in S_{2k-n}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ を 1 変数の Hecke 同時固有形式とします．また，h を f から志村対応によって得られる Kohnen plus 空間 $S^+_{k-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$ に属する同時固有形式とします．このとき次数 n, 重さ k の Siegel 保型形式の空間 $S_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ に属する Hecke 同時固有形式 $I_n(h)$ で

$$L(s, I_n(h), \mathrm{st}) = \zeta(s) \prod_{i=1}^{n} L(s+k-i, f)$$

なるものが存在することが知られています．ここで $L(s, I_n(h), \mathrm{st})$ は $I_n(h)$ の標準 L 函数，$L(s, f)$ は f の L 函数です．この $I_n(h)$ が Duke-Imamoglu-Ikeda lift といわれるもので

$h \in S^{+}_{k-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$ のみによって定まります．池田保氏はこの $I_n(h)$ の存在を証明し，さらに $I_n(h)$ の Petersson 内積が

$$(\text{明示的に与えられる初等的な因子}) \times L(k,f)\zeta(n) \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} L(2i+1, f, \mathrm{Ad})\zeta(2i)$$

という形に表されるであろうと予想しました．ここで $L(s,f,\mathrm{Ad})$ は f の随伴 L 函数です．$I_n(h)$ は $n>2$ の場合にはテータ対応のような積分表示を持たないので，この予想は非常に難しいと思われていたのですが，桂田氏は最近出版された河村尚明氏との共著論文においてこの予想を証明しました．この証明においては桂田氏の Siegel 級数や Koecher-Maass 級数に関する研究が重要な役割を果たしました．

さらに桂田氏はこれらの理論の応用として Siegel 保型形式の lifting と，その直交補空間の元の間の合同を論ずるなどの興味深い研究成果もあげています．このように桂田氏の研究は非常に重要で興味深いものであり，代数学賞にふさわしいものです．

藏野和彦氏
「局所環上の交点理論と Cohen-Macaulay 加群論への応用」

藏野和彦氏は，可換環論を主として研究されていて，可換環論，代数幾何学の様々な分野で大変顕著な業績を挙げています．

藏野氏の代表的な業績としては，可換環上の交点理論，特に Riemann-Roch 理論を可換環論へ応用して興味深い成果を得て，現象の理由を説明できるようにしたことです．

Riemann-Roch の定理は代数幾何学で大変重要な理論ですが，一般の可換環に適用するためには特異点のある scheme 上で成立する必要があります．この理論は 1970 年代に Baum-Fulton-MacPherson によって見出され，scheme 上の連接層の K-群と Chow 群の間の自然な同型射 τ の存在を保証しており，scheme にほとんど何の仮定もなく成立します．

この特異点を許した Riemann-Roch 理論は 1980 年代に Paul Roberts によって可換環論に導入され，可換環論の大問題であった「消滅定理」を肯定的に解決しました．

これ以後しばらくは交点理論は，可換環論では使われていなかったのですが，Riemann-Roch 理論を可換環論の別の問題に対して適用してその有用性を再認識したことが，藏野氏の顕著な業績です．

藏野氏は局所環上の有限生成加群の K-群に対し，長さと射影次元が有限な加群との tor の長さの交代和というペアリング を考えることにより「数値的同値」の概念を定義し，数値的同値で割ると有限生成加群の K-群は格子になることを示しました．代数幾何学で，サイクルの数値的同値の概念は大変重要ですが，この概念を導入することにより，可換環論でも「数値的同値」が使えるようになったわけです．

数値的同値で割った格子に実数体をテンソルして，その中の positive element で生成される錐は, 代数幾何学では ample cone に対応するものです．局所環上のペアリングの場合,極大コーエン・マコーレー加群 (MCM) が positive element の役割を果たすと考えられます.このようにして Riemann-Roch 理論と MCM の表現論とのつながりが見えてきました.

藏野氏は Kansas 大の H. Dao 氏との共同研究で，コーエン・マコーレー錐 (MCM で張られる錐) は原点で真に尖っていることを証明しました．このことから任意の自然数 r に対して，階数 r の MCM が存在する領域は，有限次 $\mathbf{R}$ ベクトル空間の中の有界集合であることを証明し，階数 r の MCM は数値的同値で割ると有限個であることを示しました．特に,3 次元の孤立特異点をもつ超曲面で階数 1 の MCM 加群の同型類は有限個であることを示しました [1]．因子類群の中で，MCM イデアルは単位元 (環自身) の付近にかたまって出てくるという現象を，コーエン・マコーレー錐を見ることによって説明できたと言えます.

また，藏野氏は局所環上の有限生成加群の K-群と Chow 群の間の自然な同型射 τ を詳しく解析しました．τ は，局所環を正則局所環の像に書いて定義されます．τ がその正則局所環のとり方によって変わる例があるのかは，現在においても未解決問題です．完備化によって有限生成加群の K-群の間に誘導される射の核が torsion であれば，τ はその正則局所環のとり方に依らないことがわかります．この問題に関して，孤立特異点であれば完備化によって誘導される有限生成加群の K-群の射は単射であること (鴨井祐二との共同研究)，しかし K-群の間の射の核が torsion でない例の存在 (V. Srinivas との共同研究) を示しました. P. Roberts が証明した完全交叉の場合の消滅定理は，環 A に対応する K-群の中のサイクル $[A]$ が，τ によって Chow 群内のサイクル $[\mathrm{Spec} A]$ に写ることが証明のキーですが，その性質を満たす環を 「Roberts 環」と定義し，完全交叉以外にも非常に多くの Roberts 環があることを示しました．また射影多様体の Todd 類から局所環の $\tau([A])$ を計算する方法を発見し，非常に多くの例を作ることが可能になり，例えば Gorenstein 環で Roberts 環でない例の存在などもわかりました．また，Hochster によって定義されたテータペアリングを用いて，UFD でない 3 次元の孤立特異点を持つ超曲面では，Dutta-Hochster-McLaughlin による一般化された消滅定理の反例の現象が必ず起こる (H. Dao との共同研究) ことを証明しました.

藏野氏の業績は可換環論，代数幾何学の様々な分野にまたがっていますが，いくつかの例を挙げると，交点数の正値性予想と symbolic power の関係 (P. Roberts との共同研究),射影平面に関する永田予想と symbolic Rees 環の関係 (D. Cutkosky との共同研究)，正規射影多様体の Cox 環 (multi section ring) が UFD になること (J. Elizondo, 渡辺敬一との共同研究), Cox 環の標準因子の決定 (橋本光靖との共同研究)，変数係数の交代行列の pfaffian で生成されたイデアルの自由分解に関する研究 (シジジーが標数によることの証明) などが挙げられます．このように藏野氏の業績は大変深く顕著で代数学賞に大変ふさわしいと言えます.

[1] 4 次元以上の孤立特異点をもつ完全交叉は UFD なので，階数 1 の MCM 加群は自由加群です.

齋藤政彦氏
「接続のモジュライ空間とパンルヴェ型微分方程式」

齋藤氏は，代数幾何学的観点から Painlevé 微分方程式やその一般化について重要かつ大変興味深い研究を行っています．

Painlevé 微分方程式は 20 世紀初め，新しい特殊関数を探す試みとして Painlevé により発見された 6 つの 2 階非線形常微分方程式系 (P_I, P_{II}, P_{III}, P_{IV}, P_V, P_{VI}) です．そのとき鍵となった要請は微分方程式の解の動く特異点が高々極である（つまり動く分岐点を持たない）ことで，この性質は現在では Painlevé 性と呼ばれています．Painlevé の発見後 2 階の線形微分方程式のモノドロミー保存変形を記述する方程式として Painlevé 方程式が現れるという重要な発見があり，　また Ising 模型の研究に Painlevé 方程式 P_{III} が出現したことを皮切りに，数学，数理物理の両面から活発に研究され，現在では特殊関数として認知されるほどさまざまな良い性質が知られています．

齋藤氏の研究業績は主にこれから述べる 2 つの業績に分けられます．一つ目は竹部，寺島両氏との共同研究です．複素領域における微分方程式の解全体は，初期条件全体の空間である初期値空間をファイバーとする複素領域上のファイバー空間 (相空間という) をさだめます．Painlevé 方程式の場合，岡本氏により初期値空間はある種の有理曲面であり，境界に正規交差因子を付け加えることにより非特異射影有理曲面にコンパクト化されることが示されました．齋藤氏は竹部氏と岡本氏により分類された初期値空間を標準因子に関する条件から出発しある種の射影的有理曲面とその上の正因子の組として代数幾何学的に特徴づけ，またこれらの有理曲面と因子の組に小平-スペンサー-川又による変形理論を適用して Painlevé 方程式が代数幾何学的に導出できるという大変興味深い研究を行いました (2002 年，J. Algebraic Geom.)

二つ目の業績は稲場，岩崎両氏との共同研究です．最初にも述べたように n 点で確定特異点をもつ 2 階線形微分方程式のパラメーターをモノドロミーを保存するように変形するための拘束条件として P_{VI} $(n = 4)$ やその一般化である Garnier 系等の非線形微分方程式系が導出されます．モノドロミー保存変形は神保，三輪，上野，Malgrange らにより確定あるいは不確定特異点をもつ線形 (偏) 微分方程式系の場合にも研究され，三輪，Malgrange はモノドロミー保存変形から得られる非線形微分方程式の解に関する Painlevé 性を示しています．また Garnier 系の相空間は木村弘信によりパラメーターに仮定をおいて構成されています．

ところで線形微分方程式系は自明ベクトル束上の接続とみなせるのでベクトル束上の接続のモジュライに関する研究とみなすことができます．齋藤氏は稲場，岩崎両氏との一連の共同研究 (2006 年，Publ. Res. Inst. Math. Sci . ほか) で射影直線上の n 点で確定特異点をもつ階数 2 の放物型接続のモジュライ空間を構成しました．モジュライ空間は接続の特異点の位置と特異点での留数行列の固有値をパラメーターとするファイバー構造をもつのですが，彼らはファイバーの射影的なコンパクト化も構成しました．これらの空間は $n = 4$ なら Painlevé 方程式，一般には Garnier 系の相空間とそのファイバー構造の射影的コンパクト化 (すなわち初期値空間のコンパクト化) を与えます．モジュライ空間の構成には既約でない接続も含むため，Mumford による幾何学的不変式論を利用します．つまり接続に安定性の概念を導入し詳しく解析することが大切です．　たとえば Arinkin らはパラメーターが一般の

位置にある場合にモジュライ空間を構成していますが，微分方程式系の完全な理解のためには特別なパラメーターの値に対するモジュライ空間の構成が必要であり，それには安定性の導入が本質的です．またモノドロミー表現のモジュライ空間，すなわち開リーマン面の基本群の表現のモジュライ空間を構成し，放物的接続に対するモノドロミー表現を対応させることによりモジュライ空間の間の解析的写像を構成しました．さらにこの写像が固有かつ全射な双有理型写像であることを代数幾何的手法で示し，いわゆる Riemann-Hilbert 対応を確立しました．

Painlevé 性や相空間に関しては多くの先行結果がありますが，微分方程式の解析において重要な相空間を，接続のモジュライ空間として全てのパラメーターに対し一斉に構成し，Riemann-Hilbert 対応をこの枠組みで確立したことは特筆すべき事です．それにより Painlevé 性を極めて自然に導出し，微分方程式系の，幾何学的に明瞭な理解を与えました．またモジュライ空間に正則シンプレクティック構造を導入し，この空間が K3 曲面のように幾何学的に美しい構造を持っていることを明らかにしました．その応用として特別なパラメーターの値に対するモジュライ空間から，特殊解や微分方程式の対称性であるベックルンド変換を，双有理幾何学におけるフロップなどで幾何学的に自然に理解することが可能となりました．その後，稲場氏と不確定特異点をもつ場合 (P_{VI} 以外の Painlevé 方程式など) に，パラメーターに条件を置いていますが理論を一般化しています．これら一連の共同研究は一方で技術的に難しい幾何学的不変式論によるモジュライ空間の構成，モジュライ理論をはじめとする代数幾何学に関する広い視野と高い技量を必要とし，また微分方程式系などの解析学に関する深い理解を必要とする研究です．

このように齋藤氏による接続のモジュライ空間と Painlevé 型微分方程式に関する研究は代数学賞にふさわしい顕著な業績と言えます．

（代数学賞委員会委員長　古澤昌秋　大阪市立大学大学院理学研究科）